Доклады Национальной академии наук Беларуси
2015 май–июнь Том 59 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

А. В. АСТАФЬЕВА, А. П. СТАРОВОЙТОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины *Поступило 23.02.2015*

Введение. Различают два типа аппроксимаций Эрмита–Паде экспоненциальных функций [1]. Аппроксимациями Эрмита–Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$-го порядка для системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ называют $k+1$ многочлен $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0, \tag{1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие многочлены введены Эрмитом [2] в 1883 г. Еще раньше, при доказательстве трансцендентности числа e, Эрмит определил $k+1$ многочлен $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^{1}(z)$, ..., $P_{kn}^{k}(z)$ степени не выше kn, для которых

$$R_n^j(z) := Q_{kn}(z)e^{jz} - P_{kn}^{j}(z) = O(z^{kn+n+1}), \quad z \to 0. \tag{2}$$

Набор рациональных функций $\pi_{kn,kn}^{j}(z; e^{j\xi}) = P_{kn}^{j}(z) / Q_{kn}(z)$, $j = 1, 2, ..., k$, принято называть диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде II типа (German type) n-го порядка. Отметим, что с помощью аппроксимаций Эрмита–Паде I типа также можно доказать трансцендентность числа e [3].

В одномерном случае, когда $k = 1$, общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде, а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае ($k \geq 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита–Паде I и II типов начато в работе К. Малера [3] (об участии других авторов в создании формальной теории см. [4]). Оба типа аппроксимаций, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений, в частности, для измерения иррациональности, в доказательствах трансцендентности, в исследованиях алгебраической природы математических констант [4; 5].

Если $k = 1$, то приходим к классическим аппроксимациям Паде-экспоненты. В этом случае теорема Паде утверждает, что для многочленов $A_0(z) = -P_{n-1}^{1}(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, нормированных так, что $A_1(0) = 1$, при $n \to \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т. е. на любом компакте в $\mathbb{C}$ справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2}\{1 + O(1/n)\}, \quad A_1(z) = e^{z/2}\{1 + O(1/n)\}.$$

С помощью явных формул П. Борвейн [6] нашел асимптотику многочленов Эрмита для системы $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ при $k = 2$. Этот результат обобщен Ф. Вилонским [7] на случай произвольного k. В [8] результат П. Борвейна обобщен на системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{2}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.

В данном сообщении исследуется асимптотика многочленов Эрмита $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^{k}$, $\deg A_n^p \leq n-1$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \to 0, \tag{3}$$

где λ_p – произвольные различные действительные числа.

Асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде II типа $\pi_{kn,kn}^{j}(z; e^{\lambda_j \xi})$ с различными действительными или чисто мнимыми показателями λ_p с помощью метода Лапласа описаны в [9; 10]. В данном случае метод Лапласа применяется в сочетании с методом перевала. Технология их применения является результатом дальнейшего совершенствования методов работ [7; 9].

Без ограничения общности далее считаем, что $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k$. Общий случай сводится к рассматриваемому случаю. Для этого достаточно равенство (3) умножить на $e^{-\lambda^* z}$, где $\lambda^* = \min\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k\}$.

Предварительные результаты. Многочлены $A_n^0(z), A_n^1(z), ..., A_n^k(z)$, удовлетворяющие равенствам (3), могут быть получены решением линейной системы $kn+n-1$ однородных уравнений с $kn+n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, без труда проверяется, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \le p \le k,$$

где $\varphi(\xi) = \xi(\xi - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\xi - \lambda_k)$, удовлетворяют (3) и всем другим условиям.

Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые в дальнейшем утверждения [11, с. 398, 415].

У т в е р ж д е н и е 1 (Метод Лапласа). *Пусть $f(x)$, $S(x)$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплексно-значной. Полагаем*

$$I_n = \int_a^b f(x)e^{nS(x)}dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a, b]$, т. е. $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $S''(x_0) \ne 0$ и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0. Тогда при $n \to +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \{f(x_0) + O(1/n)\}.$$

У т в е р ж д е н и е 2 (Метод перевала). *Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой области G, содержащей кусочно-гладкую кривую γ и*

$$F_n = \int_\gamma f(\xi)e^{nS(\xi)}d\xi.$$

Предположим, что $\max\{\mathrm{Re}\, S(\xi) : \xi \in \gamma\}$ достигается только в точке z_0, которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е. $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \ne 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора [11, с. 414], в которых $\mathrm{Re}\, S(\xi) < \mathrm{Re}\, S(z_0)$. Тогда при $n \to \infty$

$$F_n = \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \{f(z_0) + O(1/n)\}. \tag{4}$$

Выбор ветви корня в (4) определяется из условий

$$\arg \sqrt{\frac{-1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси; а l – линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку z_0, т. е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\mathrm{Im}\, S(z) = \mathrm{Im}\, S(z_0)$ *при* $z \in l$; $\mathrm{Re}\, S(z) < \mathrm{Re}\, S(z_0)$ *при* $z \in l, z \ne z_0$.

Асимптотика многочленов Эрмита. Введем необходимые обозначения. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^k$ – нули многочленов $\varphi'(\xi)$, т. е. $\varphi'(x_i)=0$, $i=1,2,...,k$. Ясно, что x_i – действительные числа и $x_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, $i=1,2,...,k$. Считаем, что G такая односвязная область, что $\{x_i\}_{i=1}^k \subset G \subset \mathbb{C}\setminus\{\lambda_j\}_{j=0}^k$. Тогда [11, с. 172, пример 6] функция

$$S(\xi)=-\ln\varphi(\xi),$$

где $S(x_1)=-\ln|\varphi(x_1)|$, если $\varphi(x_1)>0$, и $S(x_1)=-\ln|\varphi(x_1)|-i\pi$, если $\varphi(x_1)<0$, является однозначной аналитической функцией в G. Значения функции $S(\xi)$ вычисляются по формуле

$$S(\xi)=-\ln|\varphi(\xi)|-i[\operatorname{Im}S(x_1)+\Delta_\gamma\arg\varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\Delta_\gamma\arg\varphi(\xi)$ − приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Если $\xi\in G$, то справедливы равенства

$$S'(\xi)=-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}=-\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi-\lambda_1}-...-\frac{1}{\xi-\lambda_k},$$

$$S''(\xi)=-\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi)-[\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)}=\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(\xi-\lambda_1)^2}+...+\frac{1}{(\xi-\lambda_k)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_i)=0$, $S''(x_i)=-\varphi''(x_i)/\varphi(x_i)>0$, $i=1,2,...,k$.

Выбирая положительное значение корня, полагаем

$$B_n(x_i)=\sqrt{\frac{1}{2\pi nS''(x_i)}}e^{nS(x_i)},\quad i=1,2,...,k.$$

Т е о р е м а 1. *Для каждого фиксированного* $z\in\mathbb{C}$ *и* $n\to\infty$

$$A_n^0(z)=B_n(x_1)e^{x_1z}\{1+O(1/n)\},\tag{5}$$

$$A_n^p(z)=B_n(x_{p+1})e^{(x_{p+1}-\lambda_p)z}\{1+O(1/n)\}-B_n(x_p)e^{(x_p-\lambda_p)z}\{1+O(1/n)\},\tag{6}$$

при $1\le p\le k-1$,

$$A_n^k(z)=-B_n(x_k)e^{(x_k-\lambda_k)z}\{1+O(1/n)\}.\tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{e^{\xi z}d\xi}{[\varphi(\xi)]^n},\tag{8}$$

докажем равенство (5). Для этого в интеграле (8) деформируем контур интегрирования C_0 в прямоугольник R, принадлежащий области $\{z:-\infty<\operatorname{Re}z<\lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a',-r)$, $B(-a',r)$, $C(a,r)$, $D(a,-r)$, где r − достаточно большое положительное число, $a\in(0,\lambda_1)$, $a'>0$. Так как

$$|\varphi(a+it)|=\prod_{j=0}^k\sqrt{(a-\lambda_j)^2+t^2}>|\varphi(a)|,\ t\in[-r,r]\setminus\{0\},$$

то на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке a. Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B, минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке $-a'$. На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значение $|\varphi(\xi)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках $-a'$ и a. Действительно, если $r>2\max\{a',\lambda_k\}$, то при $t\in[-a,\ a]$

$$|\varphi(t\pm ir)|=\prod_{j=0}^k\sqrt{(t-\lambda_j)^2+r^2}>\max\{|\varphi(a)|,\ |\varphi(-a')|\}.$$

Определимся теперь с выбором a' и a. Положим $a = x_1$, а a' возьмем таким, чтобы $|\varphi(-a')| > \varphi(a)|$. Такой выбор возможен, так как $|\varphi(t)| \to +\infty$ при $t \in \mathbb{R}$ и $t \to -\infty$.

Считаем положительным направлением обхода произвольного отрезка $[L, N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L,N]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[L,N]} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}.$$

Область G можно выбрать так, чтобы $[D, C] \subset G$. Поэтому

$$F_n^{[D,C]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[D,C]} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

В силу выбора точки a максимум функции $\operatorname{Re} S(\xi)$ на отрезке $[D, C]$ достигается в единственной точке x_i, которая является простой точкой перевала. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла $F_n^{[D,C]}$ можно применить метод перевала (утверждение 2). В результате получим

$$F_n^{[D,C]} = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \tag{9}$$

Ветвь корня в (9) выбираем с учетом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \to \infty$

$$F_n^{[D,C]}(z) = B_n(x_1) e^{x_1 z} \{1 + O(1/n)\}. \tag{10}$$

К интегралу $F_n^{[B,A]}(z)$ применимы аналогичные рассуждения. Учитывая при этом выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что имеет место оценка

$$|F_n^{[B,A]}(z)| \le \theta |e^{n(S(x_1)-\delta)}|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \to \infty$ интеграл $F_n^{[B,A]}(z)$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с $|e^{nS(x_1)}|$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C,D]}(z)$, $F_n^{[A,D]}(z)$. Поэтому основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D, C]$. Тогда из (10) следует справедливость равенства (5). Равенства (6) и (7) доказываются аналогично. Теорема 1 доказана.

Следствие. *При* $n \to \infty$

$$\begin{gathered} A_n^0(0) = B_n(x_1)\{1 + O(1/n)\}, \\ A_n^p(0) = B_n(x_{p+1})\{1 + O(1/n)\} - B_n(x_p)\{1 + O(1/n)\}, \quad 1 \le p \le k-1, \\ A_n^k(0) = -B_n(x_k)\{1 + O(1/n)\}. \end{gathered} \tag{11}$$

Из (11) следует, что при достаточно больших n $A_n^0(0) \ne 0$ и $A_n^k(0) \ne 0$. При таких n определим две последовательности нормированных многочленов

$$\tilde{A}_n^0(z) = A_n^0(z) / A_n^0(0), \quad \tilde{A}_n^k(z) = A_n^k(z) / A_n^k(0).$$

Чтобы определить последовательности нормированных многочленов при $1 \le p \le k-1$, рассмотрим три возможных случая, каждый из которых реализуется для конкретных систем экспонент.

А) $|\varphi(x_p)| \ne |\varphi(x_{p+1})|$. Обозначим через $\tilde{x}_p$ ту из точек x_p, x_{p+1}, для которой

$$\min\{|\varphi(x_p)|, |\varphi(x_{p+1})|\} = |\varphi(\tilde{x}_p)|.$$

Тогда при достаточно больших n $A_n^p(0) \ne 0$, и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z) / A_n^p(0)$.

Б) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) \neq S''(x_p)$. При достаточно больших n $A_n^p(0) \neq 0$, и поэтому определена последовательность $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z) / A_n^p(0)$.

В) $\varphi(x_{p+1}) = -\varphi(x_p)$, $S''(x_{p+1}) = S''(x_p)$. Поскольку $(-1)^{k+p+1}\varphi(x_p) > 0$, то

$$e^{nS(x_p)} = (-1)^{n(k+p+1)} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}, \; e^{nS(x_{p+1})} = (-1)^{n(k+p+1)+n} e^{-n\ln|\varphi(x_p)|}.$$

Поэтому

$$A_n^p(z) = (-1)^{n(k+p+1)} \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}}\, e^{-n\ln|\varphi(x_p)|} \{(-1)^n - 1\}\{1 + O(1/n)\}.$$

В этом случае при достаточно больших n $A_{2n+1}^p(0) \neq 0$ и, следовательно, определена последовательность многочленов $\tilde{A}_{2n+1}^p(z) = A_{2n+1}^p(z) / A_{2n+1}^p(0)$.

Производную многочлена $A_n^p(z)$ можно представить в виде

$$\frac{dA_n^p}{dz}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} (\xi - \lambda_p) \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}. \tag{12}$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики $A_n^p(z)$, применив к интегралу в правой части равенства (12) при $z = 0$ метод перевала, получим

$$\frac{dA_n^p}{dz}(0) = B_n(x_{p+1})(x_{p+1} - \lambda_p)\{1 + O(1/n)\} - B_n(x_p)(x_p - \lambda_p)\{1 + O(1/n)\}.$$

При сделанных предположениях

$$\frac{dA_{2n}^p}{dz}(0) = (-1)^{n(k+p+1)} \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_p)}}\, e^{-n\ln|\varphi(x_p)|} (x_{p+1} - x_p)\{1 + O(1/n)\},$$

и, следовательно, при достаточно больших n определена последовательность многочленов $\tilde{A}_{2n}^p(z) = A_{2n}^p(z) / (A_{2n}^p)'(0)$.

Т е о р е м а 2. *При $n \to \infty$ локально равномерно по z*

$$\tilde{A}_n^0(z) \rightrightarrows e^{x_1 z}, \qquad \tilde{A}_n^k(z) \rightrightarrows e^{(x_k - \lambda_k)z}. \tag{13}$$

Если $1 \le p \le k-1$, то локально равномерно по z при $n \to \infty$
в случае А)

$$\tilde{A}_n^p(z) \rightrightarrows e^{(\tilde{x}_p - \lambda_p)z}; \tag{14}$$

в случае Б)

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{e^{(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} - \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}} \right), \tag{15}$$

$$\tilde{A}_{2n+1}^p(z) \rightrightarrows \left(\frac{e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{e^{(x_p - \lambda_p)z}}{\sqrt{S''(x_p)}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{S''(x_{p+1})}} + \frac{1}{\sqrt{S''(x_p)}} \right); \tag{16}$$

в случае В)

$$\tilde{A}_{2n}^p(z) \rightrightarrows \frac{1}{x_{p+1} - x_p} \left(e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z} - e^{(x_p - \lambda_p)z} \right), \tag{17}$$

$$\tilde{A}_{2n+1}^p(z) \rightrightarrows \frac{1}{2} \left(e^{(x_{p+1} - \lambda_p)z} + e^{(x_p - \lambda_p)z} \right). \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поточечная сходимость в (13)−(18) доказана в теореме 1. Остается доказать, что нормированные многочлены $\tilde{A}_n^p(z)$ при $0 \le p \le k$ в каждом из случаев А), Б) и В) равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к соответствующим функциям. Докажем это, например, для многочленов $\tilde{A}_n^0(z)$.

Если предположить, что $|z|\le\rho$ и $\xi\in R$, то модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M=e^{4\rho\max\{a',\lambda_k\}}$. Опираясь на равенство (8), в этом случае получим, что

$$|A_n^0(z)|\le\frac{M}{\pi}\int_\alpha^\beta e^{-n\ln|\varphi(\zeta(t))|}|\zeta'(t)|\,dt \tag{19}$$

при условии, что контур интегрирования R прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\ \beta]$. При достаточно больших n неравенство (19) сохраняется, если вместо R взять отрезок $[D,C]$. Для нахождения асимптотики интеграла в (19) применим метод Лапласа (утверждение 1). В результате получим, что при $n\to\infty$

$$\int_\alpha^\beta e^{n\operatorname{Re}S(\zeta(t))}|\zeta'(t)|\,dt=\sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re}S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}}\,e^{n\operatorname{Re}S(x_1)}|\zeta'(t_0)|(1+O(1/n)), \tag{20}$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0)=x_1$. Нетрудно показать, что

$$[\operatorname{Re}S(\zeta(t))]''_{t=t_0}=-S''(x_1)|\zeta'(t_0)|^2<0.$$

Отсюда, учитывая (11), (20), при $n\ge n_0$ получаем неравенство $|\tilde{A}_n^0(z)|\le 2M$, из которого следует, что последовательность $\{\tilde{A}_n^0(z)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z:|z|\le\rho\}$. Тогда по теореме Витали [12, с. 371] эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{x_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z:|z|\le\rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Примеры. Примеры систем экспонент, для которых реализуются случаи A) и B) имеются в [7] и [8]. Полученные в этих работах результаты полностью согласуются с теоремами 1 и 2. Приведем пример, когда реализуется случай Б).

Рассмотрим систему экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^3$, где $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1-\varepsilon$, $\lambda_2=2+\varepsilon$, $\lambda_3=3$, а $0\le\varepsilon<1$. При выбранных значениях параметров

$$x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{9-2(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)},\ x_2=\frac{3}{2},\ x_3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9-2(1-\varepsilon)(2+\varepsilon)},$$

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_3)=-\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2(2+\varepsilon)^2,\ \varphi(x_2)=\frac{9}{4}(0{,}5+\varepsilon)^2.$$

Тогда при $\varepsilon=\frac{3}{2}\sqrt{2}-2\in(0,1)$

$$x_1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ x_2=\frac{3}{2},\ x_3=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\varphi(x_2)=-\varphi(x_1)=-\varphi(x_3)=\frac{81}{8}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right),$$

в то время как

$$\varphi''(x_2)=-18+9\sqrt{2},\ \varphi''(x_1)=\varphi''(x_3)=36-18\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$S''(x_1)=S''(x_3)=\frac{16}{9}(2-\sqrt{2}),\ S''(x_2)=\frac{32}{9}.$$

Следовательно, случай Б) реализуется при $p=1$ и $p=2$. Согласно теореме 2, например, при $p=1$ получаем

$$\tilde{A}_{2n}^1(z)\rightrightarrows\frac{3}{4}e^{3(\sqrt{2}-1)z/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{e^{-3\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z/2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right),\quad \tilde{A}_{2n+1}^1(z)\rightrightarrows(\sqrt{2}-1)e^{3(\sqrt{2}-1)z/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{e^{-3\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z/2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right).$$

Литература

1. *Mahler K.* // Comp. Math. 1968. Vol. 19. P. 95−166.
2. *Hermite C.* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. Vol. 21. P. 289−308.
3. *Mahler K.* // J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 166. P. 118−150.
4. *Aptekarev A. I., Stahl H.* // Progress in Approximation Theory. New York; Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
5. *Chudnovsky G. V.* // Lecture Notes in Math. New York; Berlin: Springer-Verlag, 1982. Vol. 925. P. 299–322.
6. *Borwein P. B.* // Const. Approx. 1986. Vol. 62. P. 291−302.
7. *Wielonsky F.* // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, N 2. P. 283−298.
8. *Старовойтов А. П.* // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 1(18). С. 74−80.
9. *Старовойтов А. П.* // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1(14). С. 81−87.
10. *Старовойтов А. П.* // Изв. вузов. Математика. 2014. № 9. С. 59–68.
11. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1989.
12. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М., 1967. Т. 1.

A. V. ASTAFYEVA, A. P. STAROVOITOV

avastafeva@mail.ru; svoitov@gsu.by

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF HERMITE'S POLYNOMIALS

Summary

The article deals with asymptotic properties of diagonal Hermite–Pade's approximants of type I for the exponential system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^{k}$ with arbitrary real $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k$. The proved theorems complement the known results of P. Borwein, F. Wielonsky, and A. P. Starovoitov.