ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.955:519.622
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-13-20

Поступило в редакцию 30.12.2019
Received 30.12.2019

П. П. Забрейко, С. В. Пономарева

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Изучается вопрос о разрешимости аналога задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля с неограниченной правой частью в определенных пространствах функций. Приводятся условия разрешимости рассматриваемой задачи в данных функциональных пространствах, а также условия существования единственного решения. При исследовании используются метод сведения задачи к уравнению Вольтерра второго рода, принцип Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве и принцип Банаха–Каччиопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве.

Ключевые слова: задача Коши, дробная производная Римана–Лиувилля, принцип Шаудера

Для цитирования: Забрейко, П. П. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка / П. П. Забрейко, С. В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 13–20. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-13-20

Petr P. Zabreiko, Svetlana V. Ponomareva

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATIONS WITH FRACTIONAL OF RIEMANN–LIOUVILLE DERIVATIVES

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. In this article, we study the question of the solvability of an analogue of the Cauchy problem for ordinary differential equations with fractional Riemann–Liouville derivatives on the unbounded right-hand side in certain function spaces. The solvability conditions of the problem under consideration in given function spaces, as well as the existence conditions of a unique solution are presented. The study uses the method of reducing the problem to the second-kind Volterra equation, the Schauder principle of a fixed point in a Banach space, and the Banach–Cachoppoli principle of a fixed point in a complete metric space.

Keywords: Cauchy problem, fractional Riemann–Liouville derivative, Schauder principle

For citation: Zabreiko P. P., Ponomareva S. V. Cauchy problem for the equations with fractional of Riemann–Liouville derivatives. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 1, pp. 13–20 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-13-20

Предварительные сведения. Предлагаемая работа посвящена исследованию задачи Коши для дифференциальных уравнений с производными нецелого порядка с неограниченной правой частью (исторически сложилось название «производные дробного порядка», хотя порядок производной может быть числом, не представимым обыкновенной дробью, например, $\sqrt{2}$).

Будем рассматривать аналог задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля D^α порядка α, $0 < \alpha < 1$, на конечном отрезке $[0, T]$ действительной оси

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ \lim\limits_{t\to 0} t^{1-\alpha} x(t) = \xi, \end{cases} \tag{1}$$

где дробная производная Римана–Лиувилля определяется равенством

$$D^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}. \tag{2}$$

Функцию $f(s,u)$ будем предполагать непрерывной по совокупности переменных на множестве $(0,T]\times(-\infty,\infty)$.

Специальный вид начального условия объясняется следующими соображениями. Как и в случае задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, производная Римана–Лиувилля $D^{\alpha}x(t)$ исходную функцию $x(t)$ определяет неоднозначно. В самом деле, равенство $D^{\alpha}x(t)=0$ эквивалентно равенству

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}=0,$$

откуда

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{x(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}=\xi \qquad (\xi\in R).$$

В свою очередь, из последнего равенства вытекает, что функция $x(t)$ определяется равенством

$$x(t)=\xi t^{\alpha-1}.$$

Из этих рассуждений следует, что при отыскании решений дифференциального уравнения (1) естественно искать решения уравнения (1), удовлетворяющие дополнительному условию

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\alpha}x(t)=\xi.$$

Отметим также, что в формулировании начального значения проблемы для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными в форме Римана–Лиувилля, начальные условия даются, как правило, в терминах интегралов дробного порядка [1, с. 28, формула 3.6]:

$$\begin{cases}D^{\alpha}x(t)=f(t,x(t)),\\ D^{\alpha-1}x(0+)=\xi\end{cases}$$

(здесь $\mathrm{D}^{\alpha-1}x(0+)\equiv I^{1-\alpha}x(0+)=\lim\limits_{t\to 0+}I^{1-\alpha}x(t)$), но иногда используется и эквивалентная формулировка в терминах предела искомой функции в начальной точке, которая и будет применяться в этой работе.

Общая теория дифференциальных уравнений с дробными производными в форме Римана–Лиувилля и Капуто–Герасимова достаточно полно представлена в [2], а также [1], в [3] описываются решения подобных задач и с другими видами дробных производных. В этих работах задача рассматривается с «хорошими», удовлетворяющими условию подлинейности по функциональному аргументу, правыми частями уравнения (1). Мы будем рассматривать задачу с правыми частями, для которых условие подлинейности не выполняется.

Отыскание решений задачи типа Коши для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля обычно сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра

$$x(t)=\frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds$$

и доказывается их одновременная разрешимость в определенных пространствах функций.

Решение задачи (1) в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0,T]$ определенных на отрезке $[0,T]$ и непрерывных на $(0,T]$ функций $x(t)$, для которых существует предел

$$x(*)=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)}{t^{\alpha-1}}$$

с нормой

$$\|x\|_{\alpha-1} = \sup_{0<t\le T} t^{1-\alpha}\,|\,x(t)\,|$$

исследовалось в [4], где были получены условия на правую часть уравнения (1), при которых неподвижные точки существуют. Предполагалось, что выполнено условие подлинейности $f(t,u)$, т. е.

$$|\,f(t,u)\,| \le \mu(t) + \nu(t)\,|\,u\,| \qquad (0 < t \le T,\ -\infty < u < \infty), \tag{2}$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные функции. Доказательство существования решения сводилось к отысканию неподвижных точек оператора

$$Ax(t) = \frac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds. \tag{3}$$

В [9] задача Коши (1) изучается в более узком пространстве $C_{(1-\alpha)}[0,T]$ функций, представимых в виде $x(t) = \xi\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + x_c(t)$ $(\xi \in R,\ x_c(t) \in C[0,T])$ с нормой

$$\left\|\xi\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + z(t)\right\|_{(1-\alpha)} = |\xi| + \|z(t)\|_C.$$

Это пространство не совпадает с пространством $C_{1-\alpha}[0,T]$ $(t^{\gamma} \in C_{1-\alpha} \setminus C_{(1-\alpha)}$ при $\alpha - 1 < \gamma < 0)$. Однако оно непрерывно вложено в пространство $C_{1-\alpha}[0,T]$, причем

$$\|x(t)\|_{1-\alpha} = \left(\max\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}, T^{1-\alpha}\right\}\right)\|x(t)\|_{(1-\alpha)} \quad (x(t) \in C_{(1-\alpha)}[0,T]),$$

а его замыкание совпадает с пространством $C_{1-\alpha}[0,T]$.

Отметим, что существование решения задачи (1) в более узком пространстве $C_{(1-\alpha)}$ – более сильный факт, чем в пространстве $C_{1-\alpha}$, а единственность решения, наоборот, менее сильный факт, чем в $C_{1-\alpha}$.

В [4] и [5] задача (1) рассматривалась при условии подлинейности правой части $f(t, x(t))$ по функциональному аргументу (ограничение (2)), которое позволяло получить условия разрешимости на любом отрезке $[0,T]$ действительной оси, не зависящие от длины отрезка, и единственности решения в рассмотренных функциональных пространствах. Для установления основных результатов в соответствующих пространствах в указанных работах использовались разные техники и разные множества, инвариантные для оператора (3).

Постановка задачи. Данная работа продолжает исследования, проводимые в [4] и [5]. Здесь мы устанавливаем условия существования решения задачи (1) с правыми частями, имеющими более сильный характер нелинейности, когда для функции из правой части задачи можно найти мажорирующую по функциональному аргументу степенную функцию степени больше 1. При этом доказывается локальная разрешимость, т. е. длина отрезка, на котором доказывается существование решения, зависит от функции в правой части (1), и поэтому глобального решения может и не быть.

Предположим, что функция $f(t,u)$ в задаче (1) удовлетворяет неравенству

$$|\,f(t,u)\,| \le \mu(t) + \nu(t)\,|\,u\,|^k \quad (0 < t \le T,\ -\infty < u < \infty,\ k \ge 1), \tag{4}$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – некоторые неотрицательные измеримые функции со свойствами, которые будут описаны ниже, k не предполагается обязательно целым.

Простые примеры даже для обыкновенных дифференциальных уравнений показывают, что глобальные теоремы (на произвольном отрезке действительной оси) в таком случае, вообще говоря, не выполняются.

Например, рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x'(t) = 1 + x^2(t),\ \ x(0) = 0.$$

Решением этой задачи является функция $x(t) = \operatorname{tg} t$, которая будет непрерывна на любом отрезке, полностью содержащемся в $[0, \pi / 2)$, но не на отрезке [0, 2].

Так как производная в форме Римана–Лиувилля для функций, определенных на отрезке, является обобщением «обычного» дифференцирования, т. е. при целых значениях порядка дифференцирования она совпадает с привычной производной, то для дифференциальных уравнений нецелого порядка картина будет подобна описанной в примере, а именно, решение может существовать только на некотором ограниченном отрезке.

Действие в пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$. Решение задачи (1) будем сводить к отысканию неподвижных точек оператора (3) в весовом пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$. Выясним сначала, при каких условиях на функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ из ограничения (4), число k и длину отрезка T, оператор A будет действовать в пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$.

В силу (4) справедливо неравенство

$$\left|f(t, x(t))\right| \le \mu(t) + \nu(t)\left|x(t)\right|^k \quad (0 < t \le T).$$

Отсюда (обозначим $\tilde{\xi}(t) = \dfrac{\xi t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$)

$$\left|Ax(t)\right| \le \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(\mu(s) + \nu(s)\left|x(s)\right|^k)\,ds \quad (0 < t \le T)$$

и, далее,

$$\left|Ax(t)\right| \le \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)\left|x(s)\right|^k ds =$$

$$= \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\nu(s)s^{k\alpha-k}\left|s^{1-\alpha}x(s)\right|^k ds. \tag{5}$$

Поскольку $f(t, u)$ непрерывна при $t > 0$, из этого неравенства вытекает, что оператор A будет действовать в пространстве $C_{1-\alpha}$, если

$$\tilde{\mu}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mu(s)\,ds \in C_\gamma, \quad \tilde{\nu}(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^{k\alpha-k}\nu(s)\,ds \in C_\gamma, \ \ \gamma < 1-\alpha. \tag{6}$$

Характерными примерами таких функций могут быть

$$\mu(t) = t^\beta \quad (0 \le \beta < 1), \quad \nu(t) = s^{-\gamma} \quad (\gamma < (\alpha-1)(k-1)).$$

Из этих рассуждений следует

Л е м м а 1. *Пусть нелинейность $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству (4), где для функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ выполняются условия (6). Тогда оператор A, определенный формулой (3) действует в пространстве $C_{1-\alpha}$ и выполняется оценка (5).*

Существование решения. Для обоснования существования решения задачи (1) в рассматриваемом функциональном пространстве $C_{1-\alpha}$ на некотором конечном отрезке $[0, T]$ воспользуемся принципом неподвижной точки.

Принцип Шаудера неподвижной точки в банаховом пространстве формулируется следующим образом: если A – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве X, оставляющий инвариантным ограниченное замкнутое выпуклое множество $V \subset X$, то он имеет в V по крайней мере одну неподвижную точку (т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в V по крайней мере одно решение x_*: $x_* = Ax_*$).

Компактность оператора A следует из тех же соображений, что и в случае подлинейности, а именно, нелинейная часть (3) ограниченное множество переводит в ограниченное, а линейный интегральный оператор, входящий в (3), является компактным. Поэтому ограничения (6) позволяют говорить о компактности оператора A. Для возможности применения принципа Шаудера к решению задачи (1) нам достаточно найти инвариантные для оператора A множества. С такой целью рассмотрим замкнутый шар $B(0, r)$ радиуса r в пространстве $C_{1-\alpha}[0, T]$: $B(0, r) = \{x : \|x\| \le r\}$. Найдем условия на радиус r и длину отрезка T, при выполнении которых оператор A, определенный (3), будет оставлять инвариантным шар $B(0, r)$.

При выполнении условий (6) первое и второе слагаемые неравенства (5) принадлежат пространству $C_{1-\alpha}[0, T]$, обозначим норму их суммы $a(T, \mu)$ (эта норма зависит от T и μ, поэтому нужно писать $a(T, \mu)$):

$$a(T, \mu) = \left\| \left|\tilde{\xi}(t)\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s)\, ds \right\|.$$

Тогда из неравенства (4) следует

$$\|Ax\| \le a(T, \mu) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) s^{k\alpha-k} \left|s^{1-\alpha} x(s)\right|^k ds \le a(T, \mu) + b(T, \nu)\|x\|^k,$$

где $b(T, \nu)$ зависит от T и ν:

$$b(T, \nu) = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) s^{k\alpha-k} ds \right\| = \sup_{0<t\le T} \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \nu(s) s^{k\alpha-k} ds.$$

В результате получаем

$$\|Ax(t)\| \le a(T, \mu) + b(T, \nu) r^k \quad (\|x\| \le r).$$

Отсюда вытекает, что оператор A оставляет шар $B(0, r)$ пространства $C_{1-\alpha}[0, T]$ инвариантным, если

$$a(T, \mu) + b(T, \nu) r^k \le r. \tag{7}$$

Анализ неравенства (7) проводится без труда. В самом деле, это неравенство имеет положительные решения r лишь при условии, что

$$\min_{0<r<\infty} \left(\frac{a(T, \mu)}{r} + b(T, \nu) r^{k-1} \right) \le 1.$$

Минимум слева достигается при

$$r = \left(\frac{a(T, \mu)}{b(T, \nu)(k-1)} \right)^{\frac{1}{k}} \tag{8}$$

и равен

$$m := a(T, \mu) \left(\frac{b(T, \nu)(k-1)}{a(T, \mu)} \right)^{\frac{1}{k}} + b(T, \nu) \left(\frac{a(T, \mu)}{b(T, \nu)(k-1)} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left((k-1)^{\frac{1}{k}} + (k-1)^{-\frac{1}{k}} \right) a(T, \mu)^{\frac{k-1}{k}} b(T, \nu)^{\frac{1}{k}},$$

поэтому наше неравенство разрешимо лишь при выполнении неравенства

$$\left((k-1)^{\frac{1}{k}} + (k-1)^{-\frac{1}{k}} \right) a(T, \mu)^{\frac{k-1}{k}} b(T, \nu)^{\frac{1}{k}} \le 1 \tag{9}$$

(т. е. при достаточно малых $a(T, \mu), b(T, \nu)$).

Таким образом, найдено инвариантное для оператора A множество и выполняется

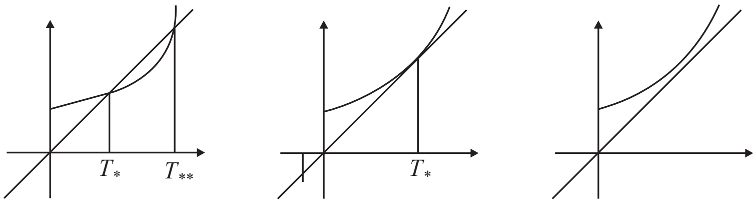
Л е м м а 2. *Пусть $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству (4), функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ удовлетворяют условиям (6), а числа $a(T, \mu)$ и $b(T, \nu)$ удовлетворяют неравенству (9). Тогда для любого r, удовлетворяющего неравенству (7), шар $B(0, r)$ является инвариантным для оператора A множеством.*

При выполнении (9) решения неравенства (7) образуют в общем случае (если неравенство (9) строгое) отрезок $[r_*, r_{**}]$, где r_* и r_{**} – наименьшее и наибольшее решения уравнения

$$r = a(T, \mu) + b(T, \nu)r^k.$$

В случае же, когда неравенство (9) обращается в равенство, r определяется равенством (8). Так как функция монотонна по T, то если неравенство выполняется при некотором T_0, то при $T < T_0$ оно также выполняется.

Проиллюстрируем ситуации, когда $a(T, \mu) + b(T, \nu)r^k < r$, $a(T, \mu) + b(T, \nu)r^k = r$ и $a(T, \mu) + b(T, \nu)r^k > r$ на схематических рисунках:



Отметим также, что в силу условия (6) функции $a(T, \mu)$ и $b(T, \nu)$ стремятся к нулю при T, стремящемся к нулю, поэтому для достаточно малых T условие (9) выполняется на некотором полуинтервале $(0, T(k)]$, правый конец которого $T(k)$ легко определяется численно. Тем самым, в отличие от случая, когда выполняется неравенство (2) ($k = 1$), применяемые соображения позволяют установить существование решения не на произвольном отрезке $[0, T]$, а лишь на некотором $[0, T(k)]$ (при этом $T(k) \to \infty$, если степень ограничения уменьшается $k \to 1$).

При условиях леммы 2 из принципа Шаудера вытекает

Т е о р е м а 1. *Пусть для правой части $f(t, u)$ уравнения (1) выполняется ограничение (4). Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in R$ имеет хотя бы одно решение $x(t) \in C_{1-\alpha}$.*

Единственность решения. Напомним принцип Банаха–Каччопполи неподвижной точки в полном метрическом пространстве: Если A – действующий в полном метрическом пространстве (M, ρ) оператор, удовлетворяющий условию Липшица $\rho(Ax_1, Ax_2) \le k\rho(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in M)$ с постоянной $k < 1$, то он имеет в M единственную неподвижную точку (т. е. уравнение $x = Ax$ имеет в M единственное решение x_*: $x_* = Ax_*$) и это решение является пределом последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ при любом $x_0 \in M$.

В качестве метрического пространства ниже рассматривается пространство (M, ρ), в котором $M = B(0, r)$, r определяется из неравенства (7), а метрика ρ определяется нормой.

Пусть теперь функция $f(s, u)$ удовлетворяет условию Липшица

$$| f(s, u_1) - f(s, u_2) | \le \lambda(s) | u_1 - u_2 | \quad (0 < s \le T, \ -r < u_1, u_2 < r) \tag{10}$$

с некоторой неотрицательной функцией $\lambda(s)$. Пусть $w(t)$ – непрерывная положительная функция на $(0, T]$ и

$$\|x\|_w = \max_{0<t\le T} t^{1-\alpha} w(t) | x(t) |$$

– норма на пространстве $C_{1-\alpha}$ (этой нормой определяется метрика ρ). Функцию $\lambda(s)$ будем выбирать так, чтобы оператор в этой метрике удовлетворял условию Липшица с некоторой постоянной $k < 1$.

Тогда

$$| Ax_1(t) - Ax_2(t) | = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \lambda(s) | x_1(s) - x_2(s) | ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \lambda(s) s^{\alpha-1} w(s)^{-1} s^{1-\alpha} w(s) | x_1(s) - x_2(s) | ds,$$

откуда, по определению нормы $\|\cdot\|_w$,

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_w \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^t t^{1-\alpha} w(t)(t-s)^{1-\alpha} \lambda(s) s^{\alpha-1} w(s)^{-1} ds \right\| \cdot \|x_1(t) - x_2(t)\|_w \tag{11}$$

(норма интегрального выражения П берется в смысле пространства C). Положим $\omega(t) = \dfrac{1}{t^{1-\alpha} w(t)}$. Тогда интегральное выражение П можно переписать в виде

$$\Pi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \omega^{-1}(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) \omega(s) ds.$$

Будем предполагать, что функция $\lambda(t)$ такова, что интегральный оператор Вольтерра

$$J_\lambda^\alpha x(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) x(s) ds \tag{12}$$

в пространстве C является вполне непрерывным. (В качестве примера $\lambda(s)$ можно рассмотреть функцию $\lambda(s) = s^{-\gamma}$ с $0 \le \gamma < \alpha$.) Тогда его спектральный радиус равен нулю [6; 7]. Следовательно, при произвольном $k \in (0,1)$ интегральное уравнение

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \lambda(s) w(s) ds = w(t)$$

имеет решение $w(t) \in C$. Но тогда

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^t t^{1-\alpha} w(t)(t-s)^{1-\alpha} \lambda(s) s^{\alpha-1} w(s)^{-1} ds \right\| \le k,$$

и неравенство (11) с $w(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}\omega(t)}$ примет вид

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_w \le k \|x_1(t) - x_2(t)\|_w.$$

Иными словами, доказана

Л е м м а 3. *Пусть $f(t,u)$ удовлетворяет неравенству (4), функция $\lambda(t)$ удовлетворяет условиям (12), r определяется из неравенства (7). Тогда оператор A, определенный формулой (3), будет оставлять инвариантным множество $M = B(0,r)$ и на нем удовлетворять условию Липшица с постоянной $k < 1$ в норме $\|\cdot\|_w$.*

Из этой леммы и принципа Шаудера вытекает

Т е о р е м а 2. *Пусть правая часть $f(t,u)$ уравнения (1) удовлетворяет неравенствам (4) и (10), причем операторы (6) и (12) компактны. Тогда задача Коши (1) при любом $\xi \in R$ имеет единственное решение $x(t)$, определенное на $(0,T]$.*

В заключение отметим, что задача (1) может рассматриваться также для значений $\alpha > 1$, при некоторых дополнительных предположениях на функцию в правой части уравнения. Аналогичные исследования также возможны для систем таких уравнений.

Благодарности. Выражаем благодарность профессору кафедры функционального анализа и аналитической экономики А. Б. Антоневичу за многократные обсуждения результатов и ряд ценных советов.

Acknowledgments. The authors are very grateful to Professor A. B. Antonevich, Chair of Functional Analysis and Economics, for multiple discussions of the obtained results and a number of valuables advices.

Список использованных источников

1. Килбас, А. А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка / А. А. Килбас. – Самара, 2009. – 121 с.

2. Kilbas, A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations (North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204) / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Elsevier, 2006. – 523 p. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5

3. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва, 1966. – 500 с.

4. Забрейко, П. П. О разрешимости задачи Коши для уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля / П. П. Забрейко, С. В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 4. – С. 391–397. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-391-397

5. Забрейко, П. П. О непрерывности решений задачи Коши для уравнений дробного порядка / П. П. Забрейко, С. В. Пономарева // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 39–45.

6. Забрейко, П. П. Об интегральных операторах Вольтерра / П. П. Забрейко // Успехи математ. наук. – 1967. – Вып. 1. – С. 167–168.

7. Забрейко, П. П. О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра / П. П. Забрейко // Лит. математ. сб. – 1967. – № 2. – С. 281–287.

References

1. Kilbas A. A. *Theory and applications of fractional differential equations*. Samara, 2009. 121 p. (in Russian).

2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations: North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204*. Elsevier, 2006. 523 p. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5

3. Krasnosel'skiy M. A., Zabreyko P. P., Pustyl'nik Ye. I., Sobolevskiy P. Ye. *Integral operators in spaces of summable functions*. Moscow, 1966. 500 p. (in Russian).

4. Zabreiko P. P., Ponomareva S. V. Solvability of the Cauchy problem for equations with Riemann–Liouville's fractional derivatives. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-4-391-397

5. Zabreyko P. P., Ponomareva S. V. On the continuity of solutions of the Cauchy problem for equations of fractional order. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2018, no. 3, pp. 39–45 (in Russian).

6. Zabreyko P. P. On integral Volterra operators. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 1, pp. 167–168 (in Russian).

7. Zabreyko P. P. On the spectral radius of Volterra integral operators *Litovskii matematicheskii sbornik = The Lithuanian Mathematical Collection*, 1967, no. 2, pp. 281–287 (in Russian).

Информация об авторе

Пономарева Светлана Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220050, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demyanko@bsu.by.

Information about the author

Ponomareva Svetlana V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demyanko@bsu.by.