

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
TECHNICAL SCIENCES

УДК 539.374

Поступило в редакцию 06.03.2017
Received 06.03.2017

**М. А. Журавков¹, Д. В. Леоненко², член-корреспондент Ю. М. Плескачевский³,
Э. И. Старовойтов²**

¹*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

²*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Республика Беларусь*

³*Национальная академия наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

**ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ
СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Аннотация. В связи с широким применением трехслойных элементов конструкций в строительстве и машиностроении возникает необходимость создания адекватных механико-математических моделей расчета их напряженно-деформированного состояния. Здесь рассмотрено деформирование в температурном поле трехслойной упруго-пластической балки со сжимаемым наполнителем. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упруго-пластических деформаций. Изменение температуры рассчитывалось с помощью формулы, полученной при осреднении теплофизических свойств материалов слоев по толщине стержня. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Аналитическое решение было получено методом упругих решений для случая равномерного распределения непрерывной нагрузки. Выполнен его численный анализ.

Ключевые слова: трехслойная балка, напряженно-деформированное состояние, сжимаемый наполнитель, упругопластичность, температура

Для цитирования: Термосилового изгиб трехслойной балки со сжимаемым наполнителем / М. А. Журавков [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 4. – С. 96–102.

Michael A. Zhuravkov¹, Denis V. Leonenko², Corresponding Member Yuri M. Pleskachevsky³, Eduard I. Starovoitov²

¹*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

²*Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus*

³*National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

DEFORMATION OF A THREE-LAYER BAR WITH A COMPRESSIBLE FILLER IN THE NEUTRON FLUX

Abstract. The present paper considers the deformation of a three-layer elastoplastic bar with a compressible filler in the temperature field. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness pack we have accepted the hypotheses of a broken line as follows: Bernoulli's hypothesis is true in thin bearing layers; Timoshenko's hypothesis is true in the compressible through thickness filler with a linear approximation of displacements through the layer thickness. The physical stress-strain relations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. Temperature variations were calculated by the formula obtained by averaging the thermophysical properties of layer materials in terms of the bar thickness. A system of differential equilibrium equations has been derived using the variational method. An analytical solution has been derived by the method of elastic solutions for the case of a uniform distribution of a continuous load. Its numerical analysis has been performed.

Keywords: three-layer bar, compressible filler, plasticity, temperature field, local load

For citation: Zhuravkov M. A., Leonenko D. V., Pleskachevsky Yu. M., Starovoitov E. I. Deformation of a three-layer bar with a compressible filler in the neutron flux. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 4, pp. 96–102 (in Russian).

Введение. На сегодняшний день создание общей теории квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций еще не завершено и интенсивно продолжается. В первую очередь это связано с необходимостью учета физически нелинейного деформирования материалов слоев и комплексного термосилового воздействия.

В [1–4] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В [5; 6] исследовано деформирование композитных сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев. Работы [7–11] посвящены изучению свободных и вынужденных колебаний трехслойных элементов конструкций. Изотермическое и термосиловое динамическое деформирование трехслойных слоистых элементов конструкций при непрерывных и локальных квазистатических, в том числе циклических, нагрузках рассмотрены в [10–15]. Во всех этих публикациях заполнитель считался несжимаемым. Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом деформировании трехслойного упругопластического стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым заполнителем. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерных слоев стержня.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень (рис. 1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя.

На стержень действуют силовые поверхностные нагрузки $p(x), q(x)$ и тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно несущему слою l . На торцах стержня в первом и втором несущих слоях заданы усилия $N_p^{(1)}, Q_p^{(1)}, M_p^{(1)}, N_p^{(2)}, Q_p^{(2)}, M_p^{(2)}$; индекс p принимает значения 0 и l , указывая торец, на котором задано усилие. Через $w_k(x)$ и $u_k(x)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k – толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ – номер слоя); b_0 – ширина стержня.

Считаем поверхность $z = -c - h_2$ и контур стержня теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , вычислять по формуле, приведенной в [4].

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x), u_1(x), w_2(x)$ и $u_2(x)$:

в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

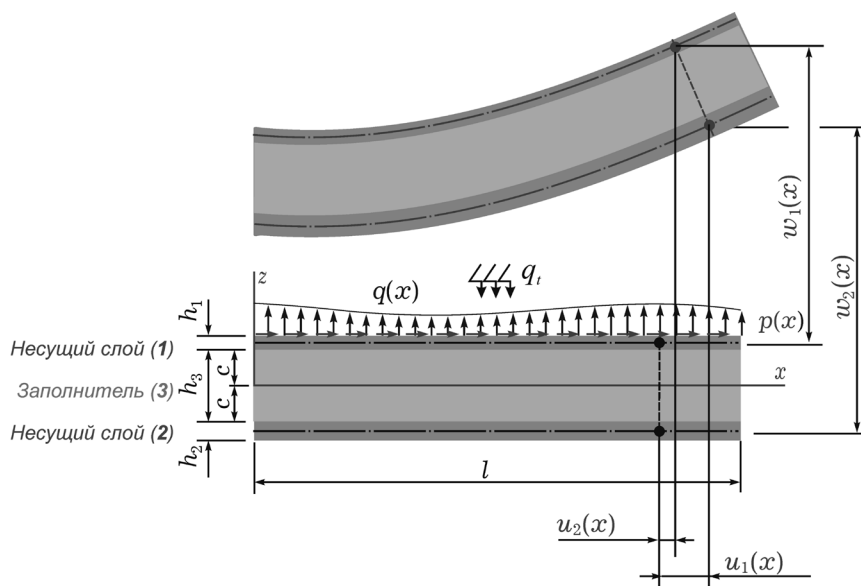


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня
 Fig. 1. Calculation scheme of the three-layer bar

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций следуют из (1) и соотношений Коши [4]. Внутренние усилия в слоях вводятся соотношениями

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

$$N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \quad (2)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_z^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений.

Уравнения равновесия и граничные условия в усилиях для рассматриваемого стержня получены вариационным методом Лагранжа:

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = b_0 p, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 \left(q + \frac{p_{,x} h_1}{2} \right), \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, обобщенные внутренние усилия

$$H_1 = \frac{Q^{(3)}}{2c}, \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}, \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, \quad P_2 = \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)},$$

$$T_1 = \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_1 = \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}, \quad (4)$$

$$T_2 = \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \quad S_2 = - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}.$$

В дальнейшем принимаются кинематические граничные условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в концевых поперечных сечениях $x = 0, l$ (l – длина стержня) должны выполняться следующие требования:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (5)$$

В слоях стержня используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций, с учетом температуры:

$$s_i^{(k)} = 2G_k (1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)) \varepsilon_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 (1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_k)) \varepsilon_{xz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (i = x, z; k = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где $s_i^{(k)}$, $\varepsilon_i^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_{xz}^{(3)}$, $\varepsilon_{xz}^{(3)}$ – тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материала k -го слоя, вычисляемые по линейной

формуле Белла [4]; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – термозависимая функция нелинейности (пластичности); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения; T_k – температура в k -м слое.

Используя соотношения (6), выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «e») и нелинейные (индекс «ω») слагаемые, которые будут включать и температурные добавки. Для рассматриваемого стержня получим:

в несущих слоях ($k = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= \sigma_x^{(k)e} - \sigma_x^{(k)\omega}, \quad \sigma_x^{(k)e} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_x^{(k)}, \\ \sigma_x^{(k)\omega} &= 2G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega_k + 3K_k \alpha_{0k} T_k = \frac{4}{3} G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega_k + 3K_k \alpha_{0k} T_k; \end{aligned}$$

в заполнителе

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)} &= \sigma_x^{(3)e} - \sigma_x^{(3)\omega}, \quad \sigma_x^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_x^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_x^{(3)} + K_3^- \varepsilon_z^{(3)}, \\ \sigma_x^{(3)\omega} &= 2G_3 \varepsilon_x^{(3)} \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3 = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)}) \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3, \\ \sigma_z^{(3)} &= \sigma_z^{(3)e} - \sigma_z^{(3)\omega}, \quad \sigma_z^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_z^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- \varepsilon_x^{(3)}, \\ \sigma_z^{(3)\omega} &= 2G_3 \varepsilon_z^{(3)} \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3 = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)} - \varepsilon_x^{(3)}) \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3, \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3 = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Проведя подобную (7) операцию с внутренними усилиями (2), получим

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} &= N_x^{(k)e} - N_x^{(k)\omega}, \quad N_z^{(3)} = N_z^{(3)e} - N_z^{(3)\omega}, \quad M_x^{(k)} = M_x^{(k)e} - M_x^{(k)\omega} \quad (k = 1, 2, 3), \\ M_{xz}^{(3)} &= M_{xz}^{(3)e} - M_{xz}^{(3)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \end{aligned} \tag{8}$$

Линейные (индекс «e») и дополнительные (индекс «ω») составляющие во внутренних усилиях (8) вычисляются по формулам (2) с учетом соотношений (7). Температурные слагаемые будут присутствовать лишь в величинах $N_x^{(k)\omega}$, $M_x^{(k)\omega}$.

Обобщенные усилия, введенные в (4), таким же способом разбиваются на линейные и нелинейные составляющие. Входящие в них линейные (индекс «e») и дополнительные (индекс «ω») слагаемые вычисляются через деформации с помощью формул (7). Подставим в полученные соотношения выражения деформаций через искомые перемещения и отправим их в (3). В результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую деформирование упругопластического трехслойного стержня в температурном поле. Для ее решения применяется метод упругих решений, что позволяет записать ее в следующем итерационном виде:

$$\begin{aligned} a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_1^{n,xx} - a_5 u_2^{n,xx} + a_2 w_1^n + a_3 w_2^n - 2a_6 w_1^{n,xxx} + a_7 w_2^{n,xxx} &= p + p_\omega^{(n-1)}, \\ -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_1^{n,xx} - a_9 u_2^{n,xx} - a_{10} w_1^n - a_{17} w_2^n - a_6 w_1^{n,xxx} + 2a_7 w_2^{n,xxx} &= h_\omega^{(n-1)}, \\ -a_2 u_1^n + a_{10} u_2^n + 2a_6 u_1^{n,xxx} + a_6 u_2^{n,xxx} + a_{11} w_1^n - a_{12} w_2^n + & \\ a_{15} w_1^{n,xxx} - a_{16} w_2^{n,xxx} + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n &= q + q_\omega^{(n-1)}, \\ -a_3 u_1^n + a_{17} u_2^n - a_7 u_1^{n,xxx} - 2a_7 u_2^{n,xxx} - a_{12} w_1^n + a_{14} w_2^n - & \\ a_{16} w_1^{n,xxx} + a_{13} w_2^{n,xxx} - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n &= g_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где n – номер линейного приближения; q_t – температурные добавки; a_1, \dots, a_{17} – коэффициенты, зависящие от геометрических и упругих характеристик материалов слоев; $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$, $g_\omega^{(n-1)}$ – дополнительные нагрузки, в которых собраны все нелинейные и температурные добав-

ки, они на первом шаге приближения принимаются равными нулю ($\omega_k^{(1)} = 0$), а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации.

Применение сформулированного метода термоупругих решений позволяет на каждом шаге приближения нелинейную краевую задачу сводить к соответствующей линейной задаче термоупругости (9) с дополнительными нагрузками. Первым приближением будет служить решение задачи термоупругости.

Граничные кинематические условия (5) должны выполняться на каждом шаге итерации:

$$w_k^n = u_{k,x}^n = w_{k,xx}^n = 0. \quad (10)$$

Решение краевой задачи. Решение системы дифференциальных уравнений (9) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (10):

$$\begin{aligned} u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & u_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\ w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & w_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$ – неизвестные амплитуды перемещений.

Поперечная нагрузка и дополнительные усилия в слоях также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды, например, при $q(x) = q_0 = \text{const}$, получим

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \quad q_m = \frac{2q_0}{\pi m} (1 - \cos(\pi m)). \quad (12)$$

После подстановки полученных коэффициентов, типа (12) и перемещений (11), в уравнения равновесия (9) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд $U_{1m}^n, W_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{2m}^n$. Ее решение не представляет трудностей.

Численные результаты. Численные исследования проведены для трехслойного стержня, слои которого набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, механические и теплофизические параметры которых приведены в [4]. Относительные толщины слоев $h_1 = 0,04, h_2 = 0,02, h_3 = 0,18$. Расчетная температура на поверхности стержня в момент времени $t = 60$ мин при $q_1 = 5000$ Дж / (м² · с) достигала 540 К. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q_0 = -5$ МПа ($p = 0$).

При суммировании рядов (11) удерживались 100 членов, хотя отличие результата от суммы первых восьми слагаемых не превышало 0,1 %. В методе упругих решений достаточно было 5 итераций, так как отличие от значений перемещений на последующем шаге было менее 0,2 %.

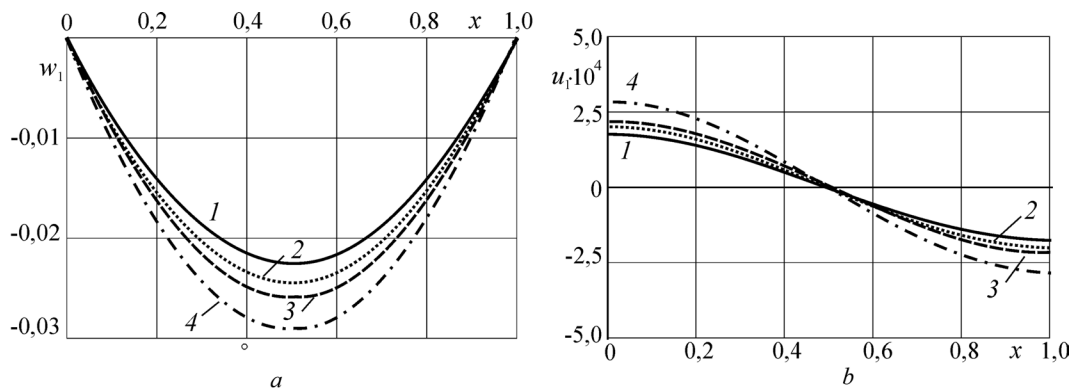


Рис. 2. Изменение перемещений вдоль оси стержня
Fig. 2. Change in the displacements of the rod along the axis

На рис. 2 показано изменение вдоль оси стержня: a – прогиб, b – продольное перемещение в первом слое, 1 – упругий стержень, 2 – упругопластический, 3 – термоупругий, 4 – термоупругопластический.

Температурное воздействие увеличивает упругие перемещения на 12–15 %. С учетом нелинейности эта разница достигает 26–30 %, что обусловлено влиянием температуры на механические свойства материалов.

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи и методика общего построения решения уравнений равновесия физически нелинейных трехслойных стержней со сжимаемым наполнителем позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние при деформировании в температурном поле в случае непрерывных и локальных нагрузок. Численные расчеты показали существенное влияние температуры и физической нелинейности на перемещения и напряжения в стержне.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект T16P-010).

Acknowledgements. The work has been financially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant T16P-010).

Список использованных источников

1. Болотин, В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
3. Плескачевский, Ю. М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука, 2004. – 386 с.
4. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Л. Н. Рабинский. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
5. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // *Composite Structures*. – 2015. – N 133. – P. 1127–1136. doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035
6. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B. N. Singh, D. K. Maiti // *Aerospace Science and Technology*. – 2016. – N 52. – P. 41–51. doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017
7. Kuznetsova, E. L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E. L. Kuznetsova, D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50, N 3. – P. 359–366. doi.org/10.3103/s0025654415030127
8. Старовойтов, Э. И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
9. Старовойтов, Э. И. Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2016. – Т. 22, № 1. – С. 60–68.
10. Starovoitov, E. I. Natural vibrations of a composite cylindrical shells with an elastic filler / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, L. N. Rabinskiy // *Composites: Mechanics, Computations, Applications*. – 2016. – Vol. 7, N 2. – P. 119–133. doi.org/10.1615/compmechcomputapptinj.v7.i2.30
11. Leonenko, D. V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47, N 1. – P. 111–118. doi.org/10.3103/s0025654412010116
12. Gorshkov, A. G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A. G. Gorshkov, E. I. Starovoitov, A. V. Yarovaya // *Mechanics of Solids*. – 2001. – Vol. 36, N 1. – P. 64–69.
13. Leonenko, D. V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol. 44, N 5. – P. 744–755. doi.org/10.3103/s0025654409050112
14. Starovoitov, E. I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // *Mechanics of Solids*. – 2011. – Vol. 46, N 2. – P. 291–298. doi.org/10.3103/s002565441102018x
15. Старовойтов, Э. И. Переменное деформирование трехслойного стержня локальной синусоидальной нагрузкой / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. А. Журавков // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2016. – № 1. – С. 19–28.

References

1. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mechanics of layered structures*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p. (in Russian).
2. Pleskachevsky Yu. M., Starovoitov E. I., Leonenko D. V. *Mechanics of three-layered bars and plates connected to an elastic foundation*. Moscow, Fizmatlit, 2011. 560 p. (in Russian).

3. Pleskachevsky Yu. M., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. *Dynamics of metal-polymeric systems*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2004. 386 p. (in Russian).
4. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Rabinsky L. N. *Deformation of three-layer physically nonlinear bars*. Moscow, Publishing house of the Moscow Aviation Institute (MAI), 2016. 184 p. (in Russian).
5. Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136. doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.035
6. Grover N., Singh B. N., Maiti D. K. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, vol. 52, pp. 41–51. doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.017
7. Kuznetsova E. L., Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 359–366. doi.org/10.3103/s0025654415030127
8. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii = Mechanics of composite materials and structures*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 162–169 (in Russian).
9. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii = Mechanics of composite materials and structures*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 60–68 (in Russian).
10. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Rabinskiy L. N. Natural vibrations of a composite cylindrical shells with an elastic filler. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2016, vol. 7, no. 2, pp. 119–133. doi.org/10.1615/compmechcomputapplintj.v7.i2.30
11. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 111–118. doi.org/10.3103/s0025654412010116
12. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. *Mechanics of Solids*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 64–69.
13. Leonenko D. V., Starovoitov E. I. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 744–755. doi.org/10.3103/s0025654409050112
14. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 291–298. doi.org/10.3103/s002565441102018x
15. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Zhuravkov M. A. The variable deformation of the three-layer rod by local sinusoidal load. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii = Fundamental and Applied Problems of Technics and technology*, 2016, no. 1, pp. 19–28 (in Russian).

Информация об авторах

Журавков Михаил Анатольевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhuravkov@bsu.by.

Леоненко Денис Владимирович – д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор. Белорусский государственный университет транспорта (ул. Кирова, 34, 246653, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: leoden@tut.by.

Плескачевский Юрий Михайлович – член-корреспондент, д-р техн. наук, профессор, советник председателя президиума. Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 66, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: pleskym@mail.ru.

Старовойтов Эдуард Иванович – доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Белорусский государственный университет транспорта (ул. Кирова, 34, 246653, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: edstar0@yandex.by.

Information about the authors

Zhuravkov Michael Anatolievich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhuravkov@bsu.by.

Leonenko Denis Vladimirovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Professor. Belarusian State University of Transport (34, Kirov Str., 246653, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: leoden@tut.by.

Pleskachevsky Yuri Mikhailovich – Corresponding Member, D. Sc. (Engineering), Professor, Advisor to Chairman of the Presidium. National Academy of Sciences of Belarus (66, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pleskym@mail.ru.

Starovoitov Eduard Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Belarusian State University of Transport (34, Kirov Str., 246653, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: edstar0@yandex.by.