ISSN 0002–354X (print)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.173

Поступило в редакцию 13.03.2017
Received 13.03.2017

В. И. Бенедиктович

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС СБАЛАНСИРОВАННОГО ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА И ЕГО ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

В данной работе получена улучшенная нижняя оценка для спектрального радиуса сбалансированного двудольного графа достаточно большого порядка, дающая условие существования гамильтонового цикла в нем и зависящая от инварианта графа – нижней границы минимальной степени графа.

Ключевые слова: матрица смежности, спектральный радиус, сбалансированный двудольный граф, гамильтонов цикл, минимальная степень.

V. I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

SPECTRAL RADIUS OF A BALANCED BIPARTITE GRAPH AND ITS HAMILTONICITY

(Communicated by Academician I. V. Gaishun)

In this article, an improved lower bound for the spectral radius of a balanced bipartite graph of quite a large order giving the condition of existence of a Hamiltonian cycle in it and depending on the lower bound of the minimum degree of the graph has been obtained.

Keywords: adjacency matrix, spectral radius, Hamiltonian cycle, minimum degree, balanced bipartite graph.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный граф порядка n и размера $e(G)$, и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A = A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей). Наибольшее собственное значение λ_1 называется *спектральным радиусом* (или *индексом*) графа G, который будем обозначать через $\rho(G)$. Поскольку матрица A является симметрической, спектральный радиус $\rho(G)$ является неотрицательным действительным корнем характеристического полинома $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ этой матрицы.

Для произвольной вершины $v \in V(G)$ будем обозначать ее *окружение* через $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ и *замкнутое окружение* через $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. *Окружение множества вершин* $X \subset V(G)$ обозначим через $N(X) = \{v \in V(G) \mid \exists\, x \in X : vx \in E(G)\}$. Тогда *степень вершины* $v_i \in V(G)$ равна $\deg_G(v_i) = |N(v_i)|$, которую кратко будем обозначать через $d_{v_i} = d_i$. Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ – *последовательность степеней* графа G, упорядоченная по возрастанию: $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Тогда $d_1 = \delta$ называется *минимальной степенью*.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются $(V(G) \cap V(H) = \varnothing)$, то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H. $\overline{H}$ – обозначает *дополнение* графа H. Для произвольного подмножества вершин $U \subset V(G)$ графа G $G[U]$ обозначает *индуцированный* этим множеством подграф в G.

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа G, называются *гамильтоновыми*. Граф G, содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым* или *трассируемым*. Как известно, *задача распознавания* гамильтоновости или трассируемости заданного графа является NP-полной. Недавно для решения этой проблемы стала активно применяться спектральная теория графов.

Пусть G – *двудольный* граф с долями X и Y. Двудольный граф G называется *сбалансированным*, если его доли X и Y имеют одинаковое количество вершин: $|X| = |Y|$.

Напомним понятие *замыкания* графа, введенное Оре в [1; 2] и Бонди и Хваталом в [3]. Фиксируем целое число $k \geq 0$. Для заданного графа G выполним следующую операцию: если существуют две несмежные вершины u и v с $d_u + d_v \geq k$, то добавим ребро uv ко множеству $E(G)$. *k-замыканием* графа G называется граф $cl_k(G)$, полученный из графа G с помощью последовательного применения этих операций, пока это возможно. Отметим, что k-замыкание графа G единственно, т. е. не зависит от порядка, в котором добавляются ребра (см. [3]). *Двудольным замыканием* (или *B-замыканием*) графа двудольного графа G, которое обозначается через $cl_B(G)$, называется граф, который получается из графа G рекурсивным добавлением ребер uv ко множеству $E(G)$ для несмежных вершин u, v, лежащих в разных долях, чья сумма степеней не меньше $(n + 1)$: $d_u + d_v \geq n + 1$. Отметим некоторые свойства k-замыкания $cl_k(G)$ графа G [1; 2]:

1) Если u и v – произвольные несмежные вершины $cl_k(G)$, то $d_{cl_k(G)}(u) + d_{cl_k(G)}(v) \leq k - 1$.

2) Сбалансированный двудольный граф G порядка $2n$ гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоново его B-замыкание $cl_B(G)$.

Для любых натуральных чисел $k \geq 1$ и $n \geq 2k + 1$ обозначим через B_n^k граф, полученный из полного двудольного графа $K_{n,n}$ удалением всех ребер его полного двудольного подграфа $K_{n-k,k}$. Отметим, что граф B_n^k негамильтонов и число его ребер равно

$$e(B_n^k) = n(n-k) + k^2.$$

Здесь мы рассматриваем следующую проблему Брюалди–Золхайда [4]:

П р о б л е м а. *Среди всех негамильтоновых сбалансированных двудольных графов G порядка $2n$ с $\delta(G) \geq k$ найти максимальное значение спектрального радиуса:* $\max \rho(G)$.

Последний известный результат в решении этой проблемы был получен сравнительно недавно.

Т е о р е м а 1 [5]. *Пусть G сбалансированный двудольный граф порядка $2n$ и минимальной степени $\delta(G) \geq k \geq 1$. Тогда если $n \geq (k+1)^2$ и $\rho(G) \geq \rho(B_n^k)$, то G гамильтонов, кроме единственного случая, когда $G = B_n^k$.*

Поскольку условие $\delta(G) \geq 2$ является тривиальным необходимым условием для гамильтоновости графа G, то в дальнейшем мы будем это предполагать.

Поскольку справедливо следующее неравенство: $\rho(B_n^k) > \rho(K_{n-k,k}) = \sqrt{n(n-k)}$, в данной работе получено усиление последнего утверждения в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. *Пусть G – простой граф порядка $2n \geq k^3 + 4k + 2$ с минимальной степенью $\delta(G) \geq k \geq 2$, отличный от графа B_n^k. Тогда если его спектральный радиус*

$$\rho(G) < \sqrt{n(n-k)}.$$

то граф G гамильтонов.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая теорема, представляющая самостоятельный интерес:

Т е о р е м а 3. *Пусть G – простой граф порядка $2n \geq k^3 + 4k + 2$ с минимальной степенью $\delta(G) \geq k \geq 1$. Тогда если G является собственным подграфом B_n^k, то его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G) < \sqrt{n(n-k)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть G является собственным подграфом B_n^k. В силу того, что для произвольного графа G и любого его пографа H всегда справедливо неравенство

$\rho(H) \le \rho(G)$, то без ограничения общности можно предполагать, что граф G получается из графа B_n^k с помощью удаления только одного ребра uv: $G = B_n^k - uv$. В графе B_n^k обозначим через X вершины степени k, через Y множество соседних вершин для X: $Y = N(X)$, через Z – множество вершин $Z = N(Y) \setminus X$ и через W – множество вершин $W = N(Z) \setminus Y$. Отметим, что тогда $|X| = |Y| = k$ и $|Z| = |W| = n - k$. Поскольку $\delta(G) \ge k$, то граф G содержит все ребра, инцидентные множеству вершин X. Поэтому $u, v \in Y \bigcup Z \bigcup W$, и априори возможны лишь два случая:

1) $u \in Z, v \in Y$;

2) $u \in Z, v \in W$.

Обозначим граф G, соответствующий этим случаям, через G_i, $i = 1, 2$, соответственно.

Покажем, что наибольший спектральный радиус из них имеет граф G_2. Для этого используем известную *операцию Кельманса* [6]. Для заданного графа G и двух выделенных его вершин u, v построим новый граф G^*, заменив все ребра vx на ребра ux для всех $x \in N(v) \setminus N[u]$. Новый граф G^*, полученный таким образом, имеет тот же порядок и размер, что и исходный граф G, и все вершины, отличные от u и v, сохраняют свою степень. Кроме того, вершины u, v смежны в G^* тогда и только тогда, когда они смежны в G. Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1 [7; 8]. *Пусть G – произвольный граф и пусть G^* – граф, полученный из G с помощью операции Кельманса. Тогда* $\rho(G) \le \rho(G^*)$.

На основании этой леммы справедлива

Л е м м а 2. *Для графов G_i, $i = 1, 2$, соответствующих случаям 1)–2), выполняется неравенство* $\rho(G_1) \le \rho(G_2)$.

Действительно, пусть в графе G_1 вершины $u \in Z, v \in Y$ несмежны, и w – произвольная вершина из множества W. Применим теперь операцию Кельманса для случая, когда $v =: w, u =: v, x =: u = N(w) \setminus N[v]$. Тогда $G_1^* = G_2$ и по лемме 1 $\rho(G_1) \le \rho(G_2)$.

Таким образом, для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть только единственный случай: $G = G_2$.

Для упрощения вычисления спектрального радиуса этого графа рассмотрим разбиение множества его вершин. Разбиение π множества вершин $V(G)$ на попарно непересекающиеся подмножества $C_1, \ldots, C_r$ называется *равномерным*, если число соседей в C_j вершины u из C_i равно константе b_{ij}, не зависящей от выбора вершины u: $|N(u) \bigcap C_j| = b_{ij}$, $\forall u \in C_i$. Это определение эквивалентно следующему: все индуцированные подграфы $G[C_i]$, $i = 1, \ldots, r$, являются *регулярными* и ребра, соединяющие два различных подмножества C_i и C_j, образуют *бирегулярный* граф. Ориентированный мультиграф с r вершинами и b_{ij} дугами от i-й вершины к j-й называется *частным графа G по разбиению* π и обозначается через G / π. Матрица смежности $A(G / \pi)$ этого ориентированного мультиграфа G / π имеет компоненты $A(G / \pi)_{ij} = b_{ij}$, $i, j = \overline{1, r}$. Справедлива следующая техническая лемма.

Л е м м а 3 ([9]). *Если π – равномерное разбиение множества вершин графа G, то спектральный радиус матрицы $A(G / \pi)$ равен спектральному радиусу матрицы $A(G)$.*

Рассмотрим следующее разбиение π графа G_2: $C_1 = X$, $C_2 = Y$, $C_3 = Z \setminus \{u\}$, $C_4 = W \setminus \{v\}$, $C_5 = \{u\}$, $C_6 = \{v\}$. Нетрудно убедиться, что это разбиение является равномерным и матрица смежности частного графа G_2 / π равна

$$A(G_2 / \pi) = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & n-k-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & n-k-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & n-k-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & n-k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-k-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, по лемме 3 спектральный радиус $\rho(G_2)$ должен быть корнем характеристического полинома матрицы $A(G_2 / \pi)$, который, как нетрудно вычислить, равен

$$\chi(\lambda)=\lambda^6-(n^2-kn+k^2-1)\lambda^4+((k^2+1)n^2-(2k^3+k+2)n+k^4-k^2+k+1)\lambda^2+$$
$$(-k^2n^2+(2k^3+2k^2)n-(k^4+2k^3+k^2)).$$

Покажем теперь, что все корни этого характеристического полинома лежат левее числа $\sqrt{n(n-k)}$.

Действительно, имеем

$$\chi(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}=2n^4-(k^3+4k+2)n^3+(2k^4+3k+1)n^2-(k^5-3k^3-k^2+k)n+(-k^4-2k^3-k^2).$$

Нетрудно проверить, что при $n\geq\frac{k^3+4k+2}{2}$ сумма первых двух слагаемых $2n^4-(k^3+4k+2)n^3$ неотрицательна, а сумму следующих трех слагаемых можно оценить снизу следующим образом:

$$((2k^4+3k+1)n-(k^5-3k^3-k^2+k))n+(-k^4-2k^3-k^2)\geq$$
$$\frac{(2k^4+3k+1)(k^3+4k+2)-2k^5+6k^3+2k^2-2k}{2}n-k^4-2k^3-k^2=$$
$$\left(k^7+3k^5+\frac{7}{2}k^4+\frac{7}{2}k^3+7k^2+4k+1\right)n-k^4-2k^3-k^2>$$
$$k^7+3k^5+\frac{5}{2}k^4+\frac{3}{2}k^3+6k^2+4k+1>0.$$

Вычисляем значение первой производной характеристического полинома в точке $x=\sqrt{n(n-k)}$:

$$\chi'(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}=2\sqrt{n(n-k)}(n^4-2kn^3+3n^2-(3k+2)n+(k^4-k^2+k+1)).$$

Нетрудно убедиться, что $\chi'(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}>0$ уже при $n\geq 2k+1$.

Вычисляем значение второй производной характеристического полинома в точке $x=\sqrt{n(n-k)}$:

$$\chi''(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}=2(9n^4-18kn^3+(4k^2+7)n^2+(4k^3-7k-2)n+(k^4-k^2+k+1)).$$

Нетрудно также убедиться, что $\chi''(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}>0$ уже при $n\geq 2k+1$.

Вычисляем значение третьей производной характеристического полинома в точке $x=\sqrt{n(n-k)}$:

$$\chi'''(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}=\sqrt{n(n-k)}(4n^2-4kn-k^2+1).$$

Нетрудно проверить, что также $\chi'''(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}>0$ при $n\geq 2k+1$.

Вычисляем значение четвертой производной характеристического полинома в точке $x=\sqrt{n(n-k)}$:

$$\chi^{(4)}(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}=24(14n^2-14kn-k^2+1).$$

Нетрудно также видеть, что $\chi^{(4)}(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}>0$ при $n\geq 2k+1$.

Наконец, вычисляем значение пятой производной характеристического полинома в точке $x=\sqrt{n(n-k)}$:

$$\chi^{(5)}(\lambda)\big|_{\sqrt{n(n-k)}}=720\sqrt{n(n-k)}>0.$$

Воспользуемся теперь следующей известной теоремой:

Т е о р е м а 4 (Фурье–Бюдан [10]). *Пусть $N(x)$ – число перемен знака в последовательности $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$, где f – многочлен степени n. Тогда число корней многочлена f (с учетом их кратностей), заключенных между a и b, где $f(a)\neq 0, f(b)\neq 0$ и a < b, не превосходит $N(a)-N(b)$.*

Поскольку очевидно, для произвольного многочлена справедливо равенство $N(+\infty)=0$, то по теореме Фурье–Бюдана заключаем, что правее числа $\sqrt{n(n-k)}$ нет корней характеристического полинома $\chi(\lambda)$. Откуда мы получаем, что $\rho(G_2)<\sqrt{n(n-k)}$.

Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся следующими известными фактами.

Т е о р е м а 5 [11]. *Пусть G – произвольный двудольный граф порядка $2n$. Тогда его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G) \le \sqrt{e(G)}.$$

Кроме того, равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$G = K_{p,q} + (2n - (p+q))K_1,$$

где $pq = e(G)$.

Т е о р е м а 6 [5]. *Пусть G – сбалансированный двудольный граф порядка $2n$. Если* $\delta(G) \ge k \ge 1$, $n \ge 2k+1$ *и выполняется неравенство*

$$e(G) > n(n-k-1) + (k+1)^2,$$

то граф G гамильтонов, кроме случая, когда $G \subseteq B_n^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Поскольку граф G не имеет изолированных вершин и не является полным двудольным графом, то из условия теоремы 2 и теоремы 5 имеем следующую цепочку неравенств:

$$\sqrt{n(n-k)} \le \rho(G) < \sqrt{e(G)}.$$

Откуда получаем, что

$$e(G) > n(n-k) = n(n-k-1) + n \ge n(n-k-1) + \frac{k^3+4k+2}{2} \ge n(n-k-1) + (k+1)^2,$$

поскольку при $k \ge 2$ справедливо неравенство $\frac{k^3+4k+2}{2} \ge (k+1)^2$.

Из теоремы 6 заключаем, что граф G либо является гамильтоновым, либо содержится в графе B_n^k. Однако по теореме 3 граф G либо является гамильтоновым, либо $G = B_n^k$, откуда вытекает справедливость теоремы 2.

Благодарности. Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф16РА-003).

Acknowledgement. The work has been financially supported by the Institute of Mathematics of NAS of Belarus within the framework of the State Program of Fundamental Research "Convergence" and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф16РА–003).

Список использованных источников

1. Ore, O. Arc coverings of graphs / O. Ore // Ann. Mat. Pura Appl. – 1961. – Vol. 55, N 1. – P. 315–321. doi.org/10.1007/bf02412090.

2. Ore, O. Hamilton-connected graphs / O. Ore // J. Math. Pures Appl. – 1963. – Vol. 42. – P. 21–27.

3. Bondy, J. A. A method in graph theory / J. A. Bondy, V. Chvátal // Discrete Math. – 1976. – Vol. 15, N 2. – P. 111–135. doi.org/10.1016/0012-365x(76)90078-9.

4. Brualdi, R. A. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones / R. A. Brualdi, E. S. Solheid // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. – 1986. – Vol. 7, N 2. – P. 265–272. doi.org/10.1137/0607030.

5. Li, B. Spectral analogues of Erdös' and Moon-Moser's theorems on Hamilton cycles / B. Li, B. Ning // Linear and Multilinear Algebra. – 2016. – Vol. 64, N 11. – P. 2252–2269. doi.org/10.1080/03081087.2016.1151854.

6. Kelmans, A. K. On graphs with randomly deleted edges / A. K. Kelmans // Acta Math. Acad. Sci. Hung. – 1981. – Vol. 37, N 1–3. – P. 77–88. doi.org/10.1007/bf01904874.

7. Csikvari, P. On a conjecture of V. Nikiforov / P. Csikvari // Discrete Math. – 2009. – Vol. 309, N 13. – P. 4522–4526. doi.org/10.1016/j.disc.2009.02.013.

8. Brouwer, A. E. Spectra of graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – New York: Springer-Verlag, 2011. – 255 p.

9. Godsil, C. D. Algebraic graph theory / C. D. Godsil, G. F. Royle. – New York: Springer-Verlag, 2001. – 442 p.

10. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 p.

11. Bhattacharya, A. On the first eigenvalue of bipartite Graphs / A. Bhattacharya, S. Friedland, U. N. Peled // The Electronic Journal of Combinatorics. – 2008. – Vol. 15. – P. R144.

References

1. Ore O. Arc coverings of graphs. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1961, vol. 55, no. 1, pp. 315–321. doi.org/10.1007/bf02412090.

2. Ore O. Hamilton-connected graphs. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1963, vol. 42, pp. 21–27.

3. Bondy J. A., Chvátal V. A method in graph theory. *Discrete Mathematics*, 1976, vol. 15, no. 2, pp. 111–135. doi.org/10.1016/0012-365x(76)90078-9.

4. Brualdi R. A., Solheid E. S. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, no. 2, pp. 265–272. doi.org/10.1137/0607030.

5. Li B., Ning B. Spectral analogues of Erdös' and Moon-Moser's theorems on Hamilton cycles. *Linear and Multilinear Algebra*, 2016, vol. 64, no. 11, pp. 2252–2269. doi.org/10.1080/03081087.2016.1151854.

6. Kelmans A. K. On graphs with randomly deleted edges. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1981, vol. 37, no. 1–3, pp. 77–88. doi.org/10.1007/bf01904874.

7. Csikvari P. On a conjecture of V. Nikiforov. *Discrete Mathematics*, 2009, vol. 309, no. 13, pp. 4522–4526. doi.org/10.1016/j.disc.2009.02.013.

8. Brouwer A. E., Haemers W. H. *Spectra of graphs*. New York, Springer-Verlag, 2011. 255 p. doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6.

9. Godsil C. D., Royle G. F. *Algebraic graph theory*. New York, Springer-Verlag, 2001. 442 p. doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9.

10. Prasolov V. V. *Polynomials*. Moscow, Moscow Center For Continuous Mathematical Education, 2003. 336 p. (in Russian).

11. Bhattacharya A., Friedland S., Peled U. N. On the first eigenvalue of bipartite Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2008, vol. 15, pp. R144.

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by.

Information about the author

Benediktovich Vladimir Ivanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by.

Для цитирования

Бенедиктович, В. И. Спектральный радиус сбалансированного двудольного графа и его гамильтоновость / В. И. Бенедиктович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 2. – С. 7–12.

For citation

Benediktovich V. I. Spectral radius of a balanced bipartite graph and its Hamiltonicity. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 2, pp. 7–12 (in Russian).