Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **сентябрь–октябрь** **Том 58 № 5**

УДК 539.12, 530.145

Ю. А. КУРОЧКИН, И. Ю. РЫБАК, Д. В. ШЁЛКОВЫЙ

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ НА ОРИСФЕРЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск

Поступило 01.09.2014

Ведение. В 1926 г. Шредингером была предложена концепция того, что сегодня называют когерентным состоянием. После работ Глаубера [1] и Сударшана [2] 1963 г. был введен термин «когерентные состояния» и исследованы их свойства для некоторых квантовых систем. Описание обобщенных когерентных состояний на произвольных группах Ли было дано Переломовым [3; 4] и Гилмором [5]. На сегодняшний день обобщенные когерентные состояния получили широкое применение в различных областях физики: в квантовой оптике, в теории квантовых компьютеров, при решении общих проблем квантовой теории, при описании некоммутативной квантовой механики, в физике конденсированного состояния. Отметим также идею кватернионных когерентных состояний, выдвинутую при описании квантовомеханических состояний электрона в однородном магнитном поле в работе [6].

Параллельно с развитием методов когерентных состояний происходило развитие квантовой механики в пространствах постоянной кривизны. В работах Шредингера, Инфельда и Стивенсона были решены задачи об атоме водорода в пространствах отрицательной и положительной кривизны. Спектр энергий атома водорода в пространствах постоянной кривизны в дальнейшем исследовался в ряде работ [8–10]. Было показано, что задачи классической и квантовой механики в пространствах постоянной кривизны значительно расширяют множество интегрируемых динамических систем и позволяют решить ряд новых проблем [11]. Поскольку квантовомеханические задачи в пространствах постоянной кривизны, как и задачи квантовой механики в плоских пространствах, как правило, обладают высокой симметрией, то проблема построения обобщенных когерентных состояний, в принципе, аналогична данной проблеме в плоских пространствах. Однако в случае пространства Лобачевского (например, трехмерного) ситуация выделена тем, что в нем существуют поверхности – орисферы, на которых реализуется геометрия евклидового пространства. Данное обстоятельство открывает возможность введения в пространстве Лобачевского стандартных когерентных состояний, связанных с алгеброй Ли группы Гейзенберга–Вейля, которая, как известно, реализуется на множестве треугольных матриц. Это, в свою очередь, открывает дополнительные возможности для применения геометрии Лобачевского к решению задач в плоском пространстве.

Постановка задачи и решение. Рассмотрим стационарную квантовомеханическую задачу

$$H\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

в пространстве Лобачевского радиуса кривизны ρ с пространственным интервалом, записанным в орисферических координатах

$$dl^2 = e^{-2z/\rho}(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + dz^2, \tag{2}$$

с гамильтонианом, содержащим взаимодействие в виде потенциала $V(r, \varphi)$ – независящего от переменной z:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(e^{2z/\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V(r, \varphi)\right] + e^{2z/\rho}\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z/\rho}\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{3}$$

Задача (1) с гамильтонианом (3) допускает разделение переменных

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+V(r,\varphi)\right]\chi(r,\varphi)=k_\perp^2\chi(r,\varphi), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z/\rho}\frac{\partial}{\partial z}w(z)=(k^2e^{-2z/\rho}-k_\perp^2)w(z), \quad (5)$$

здесь введены обозначения $\Psi(r,\varphi,z)=\chi(r,\varphi)w(z)$, $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$.

Общее решение уравнения (5) имеет вид $e^{z/\rho}J_\sigma(\rho k_\perp e^{z/\rho})\Gamma(1+\sigma)$, где J_σ – функции Бесселя первого рода; Γ – гамма-функция; $\sigma^2=1-k^2\rho^2$. К уравнению (5) в данной работе мы более не будем обращаться.

Очевидно, что уравнение (4) есть уравнение Шредингера (уравнение Гельмгольца) для стационарной задачи в двумерном евклидовом пространстве, записанное в цилиндрической системе координат r, φ, которое может быть переписано в декартовых координатах x, y, которые совпадают с квазидекартовыми координатами x, y одной из координатных систем, введенных в работе М. Н. Олевского [12].

Таким образом, (4) может быть переписано в декартовых координатах x, y, и для задачи на орисфере справедливы стандартные перестановочные соотношения для операторов проекций импульса

$$p_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \text{ и } p_y=-i\hbar\frac{\partial}{\partial y},$$

введенные на основе стандартной процедуры, т. е. имеет место алгебра Гейзенберга–Вейля

$$[x,p_x]=[y,p_y]=i\hbar I,\quad [x,y]=[p_x,p_y]=0,$$
$$[x,I]=[I,y]=[p_x,I]=[I,p_y]=0,$$

где I – единичный оператор.

Или для операторов рождения и уничтожения

$$a_x=\frac{x+ip_x}{\sqrt{2\hbar}},\ a_x^+=\frac{x-ip_x}{\sqrt{2\hbar}},\ a_y=\frac{y+ip_y}{\sqrt{2\hbar}},\ a_y^+=\frac{y-ip_y}{\sqrt{2\hbar}}; \quad (6)$$

$$[a_k,a_l^+]=\delta_{kl}I,[a_k^+,a_l^+]=[a_k,a_l]=[a_k,I]=[a_k^+,I]=0,$$

где k, l = 1, 2 соответствуют x или y.

Заметим, что из выше приведенного изложения следует, в принципе, общее положение, согласно которому любая двумерная задача для уравнения Гельмгольца с потенциалом в плоском двумерном пространстве может быть вложена в трехмерное пространство Лобачевского. Кроме того, очевидно, любая интегрируемая двумерная квантовомеханическая система в евклидовом пространстве порождает интегрируемую квантовомеханическую систему в трехмерном пространстве Лобачевского [13].

Когерентные состояния, как известно, определяются как собственные состояния операторов уничтожения с комплексными собственными значениями

$$a_x|z_1\rangle=z_1|z_1\rangle,\ a_y|z_2\rangle=z_2|z_2\rangle.$$

Выражение для полного пространства когерентных состояний двумерной задачи на орисфере является тензорным произведением состояний, построенных с помощью операторов одной моды. При этом когерентные состояния определяются формулой

$$|z_1,z_2\rangle=\exp(z_1a_x^+)\exp(z_wa_y^+)|0,0\rangle, \quad (7)$$

где вакуумное состояние определяется согласно условию

$$a_x|0,0\rangle=a_y|0,0\rangle=0.$$

Для когерентных состояний имеет место условие полноты, которое, в частности, для состояний на орисфере (7) имеет вид

$$\int |z_1, z_2\rangle\langle z_1, z_2| d\mu(z_1, z_2) = \int |z_1\rangle\langle z_1| d\mu(z_1) \int |z_2\rangle\langle z_2| d\mu(z_2) = I.$$

Для когерентных состояний имеют место минимизированные соотношения неопределенностей

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2},$$

которые здесь имеют формальный математический смысл. Конкретный физический смысл они могут приобрести только в той физической модели, в которой введенные выше когерентные состояния будут использоваться.

Ниже мы рассмотрим ряд задач, в которых естественным образом могут быть введены когерентные состояния, рассмотренные выше.

1. Осциллятор на орисфере.

Если в уравнении (4) положить потенциал $V(r, \varphi) = \omega^2 r^2$, то задача на орисфере сводится к задаче о двумерном изотропном осцилляторе на евклидовой плоскости. Как хорошо известно, когерентные состояния, введенные выше, особенно адекватны для описания данной задачи. Следует иметь в виду, что данный осциллятор хотя и совпадает по форме с двумерным изотропным осциллятором, однако это осциллятор в трехмерном пространстве Лобачевского и он отличается от трехмерного изотропного осциллятора в этом же пространстве.

2. Квантовомеханические состояния заряженной частицы в аналоге постоянного однородного магнитного поля.

Гамильтониан задачи имеет вид [14]

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} e^{2z/\rho} \left(\frac{1}{r^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e}{\hbar c} A_\varphi \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-2z/\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right).$$

Учитывая явный вид потенциала $A_\varphi = -B \dfrac{r^2}{2}$ в орисферической системе координат, заданной формулой (2), можно записать операторы, коммутирующие с гамильтонианом

$$\begin{aligned} P_1 &= -i\hbar \cos\varphi \partial_r + \frac{i\hbar}{r} \sin\varphi \partial_\varphi + \delta r \sin\varphi, \\ P_2 &= -i\hbar \sin\varphi \partial_r - \frac{i\hbar}{r} \cos\varphi \partial_\varphi - \delta r \cos\varphi, \\ L_3 &= -i\hbar \partial_\varphi, \end{aligned} \tag{8}$$

где будем использовать следующие обозначения: $\delta = \dfrac{eB}{2c}$.

Стоит отметить, что кривизна не входит явно в операторы (8). Более того, для данного случая, разделяя переменные, уравнение Шредингера можно записать в виде

$$\frac{2Em}{\hbar^2} e^{-2z/\rho} Z(z) + \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-2z/\rho} \frac{\partial}{\partial z} Z(z) \right) = \lambda Z(z),$$

$$\frac{1}{r^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e}{\hbar c} A_\varphi \right)^2 F(r, \varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} F(r, \varphi) \right) = \lambda F(r, \varphi).$$

То есть, вся особенность задачи сводится к виду функции $Z(z)$. А для плоскости с переменными r, φ задача эквивалентна задаче в плоском пространстве.

Перепишем в квазидекартовой системе координат

$$\begin{aligned} P_1 &= -i\hbar \partial_x + \delta y, \\ P_2 &= -i\hbar \partial_y - \delta x, \\ L_3 &= -i\hbar (x \partial_y - y \partial_x). \end{aligned} \tag{9}$$

По аналогии с (6) можно переписать выражения (9) с использованием операторов рождения и уничтожения

$$P_1 = \delta(a_x - a_x^+) + i\frac{\delta}{2}(a_x + a_x^+),$$

$$P_2 = \delta(a_y - a_y^+) - i\frac{\delta}{2}(a_x + a_x^+),$$

$$L = a_x^+ a_y - a_x a_y^+.$$

Введенные операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[L, P_1] = -P_2, \quad [P_2, L] = -P_1, \quad [P_1, P_2] = -i\hbar m\omega,$$

где $\omega = \dfrac{eB}{mc}$.

Введем новые операторы, линейные комбинации (9)

$$b^+ = \frac{P_2 - iP_1}{\sqrt{2\gamma}}, b^- = \frac{P_1 - iP_2}{\sqrt{2\gamma}}, n_b = -iL, I = 1, \tag{10}$$

где $\gamma = im\omega\hbar$.

Тогда будут выполняться следующие соотношения:

$$\begin{gathered}[b^-, b^+] = I,\ [n_b, b^+] = b^+,\ [n_b, b^-] = -b^-,\\ [b^-, I] = [I, b^+] = [n_b, I] = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Коммутационные соотношения (11) образуют алгебру Ли группы треугольных 3 × 3-матриц. Операторы, введенные в (10), совпадают по своим свойствам с операторами рождения a^+, уничтожения a^-, числа частиц n и единичного I оператора алгебры h_4. Соответствующей ей группой будет группа Гейзенберга–Вейля H_4. Стационарной подгруппой группы H_4 является $U(1) \otimes U(1)$ с алгеброй из элементов $\{I, n_b\}$. А элементы этой подгруппы будут иметь вид

$$h = e^{i(\delta n + \varphi I)},$$

таким образом, действие элементов подгруппы $U(1) \otimes U(1)$ на квантовое состояние сводится к умножению на фазовый множитель, т. е. не меняет его.

Можно записать унитарное неприводимое представление смежных классов $H_4 / U(1) \otimes U(1)$ в виде

$$D(\beta) = \exp(\beta b^+ - \beta^* b^-).$$

Распишем $D(\beta)$ с помощью формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа с учетом (11)

$$D(\beta) = \exp(-|\beta|^2 / 2)\exp(\beta b^+)\exp(\beta^* b^-). \tag{12}$$

И следовательно, когерентное квантовое состояние $|\beta\rangle$ в данном случае может быть записано как

$$|\beta\rangle = D(\beta)|0\rangle = \exp(-|\beta|^2 / 2)\exp(\beta b^+)|0\rangle.$$

Оператор (12) может интерпретироваться как оператор трансляций, который преобразует волновую функцию без изменения энергии.

Таким образом, задача о когерентных состояниях заряженной частицы в аналоге постоянного и однородного магнитного поля в пространстве Лобачевского в орисферической системе координат является полным аналогом плоской задачи, описание которой можно найти, например, в работе [15].

Заключение. В работе в трехмерном пространстве Лобачевского в орисферической системе координат построены стандартные двумерные когерентные состояния нерелятивистской квантовомеханической частицы, описывающие поперечное ее движение. Показано, что такие состояния естественным образом возникают в ряде квантовомеханических задач в трехмерном пространстве Лобачевского, а именно, в задачах о двумерном осцилляторе на орисфере и о заряженной частице в аналоге постоянного и однородного магнитного поля. Одним из выводов, следующих из работы, является также то, что любая квантовомеханическая задача в плоском двумерном пространстве может быть достроена до трехмерной задачи в пространстве Лобачевского, что открывает новые возможности для приложений квантовой механики данного пространства.

Авторы благодарят В. В. Кудряшова за полезные советы.

Литература

1. *Glauber R. J.* // Phys. Rev. 1963. Vol. 131. P. 2766.
2. *Sudarshan E. C. G.* // Phys. Rev. Lett. 1963. Vol. 10. P. 277.
3. *Perelomov A. M.* // Commun. Math. Phys. 1972. Vol. 26. P. 222.
4. *Переломов А. М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., 1987.
5. *Gilmore R.* // Ann. Phys. (NY). 1972. Vol. 74. P. 391.
6. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. УРСС, 2003.
7. *Schrödinger E. A.* // Proc. R. Irish. Acad. A. 1940. Vol. 46, N 1. P. 9–16.
8. *Higgs P.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1979. Vol. 12, N 4. P. 309–323.
9. *Leemon H.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1979. Vol. 12, N 4. P. 489–501.
10. *Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S.* // Yad. Fiz. 1998. Vol. 61, N 10. P. 1889–1892.
11. *Gritsev V. V., Kurochkin Yu. A.* // Phys. Rev. B. 2001 Vol. 64. P. 035308.
12. *Олевский М. Н.* // Мат. сб. 1950. Т. 27. С. 379–426.
13. *Kalnins E. G., Miller W. Jr., Pogosyan G. S.* // J. Phys., A. 2000. Vol. 33. P. 4105–4120.
14. *Kurochkin Yu. A., Otchik V. S., Ovsiyuk E. M.* // Physics of Atomic Nuclei. 2012. Vol. 75, N 10. P. 1245–1249; Ядерная физика. 2012. Т. 76, № 10. С. 1316–1320.
15. *Dodonov V. V., Malkin I. A., Man'ko V. I.* // Physica. 1972. Vol. 59, N 2. P. 241–256.

Yu. A. KUROCHKIN, I. Yu. RYBAK, Dz. V. SHOUKAVY

shoukavy@ifanbel.bas-net.by

COHERENT STATES ON HOROSPHERES OF THE THREE-DIMENSIONAL LOBACHEVSKY SPACE

Summary

The separation of variables in the Laplace–Beltrami operator (Hamiltonian for a free quantum mechanical particle) of three-dimensional Lobachevsky space in the horospherical and quasi Cartesian coordinates provides an opportunity to introduce standard (conventional) coherent states. We consider problems, (oscillator, quantum mechanical particle in the uniform magnetic field) for which introduced coherent states are the adequate method of investigation.