Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 июль–август Том 58 № 4

УДК 519.6

Н. А. ЛИХОДЕД, А. А. ТОЛСТИКОВ

ФУНКЦИИ, ЗАДАЮЩИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЗЕРНИСТЫХ АЛГОРИТМОВ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

Белорусский государственный университет, Минск
Поступило 04.06.2014

Введение. Алгоритмы, реализуемые на параллельных компьютерах с распределенной памятью, являются, как правило, зернистыми: множество операций алгоритма разбито на макрооперации, называемые зернами вычислений, или тайлами [1–4]. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений. Результаты вычислений тайла передаются, если требуется обмен, одной коммуникационной операцией, что позволяет значительно уменьшить общее время пересылки данных. Разбиение множества операций на тайлы используется также при реализации алгоритмов на многоядерных персональных компьютерах и на графических ускорителях [2–6].

Необходимым этапом процедур распараллеливания алгоритмов является получение зависимостей (информационных связей) между операциями: любые преобразования алгоритма, в том числе и получение параллельных версий алгоритма, должны сохранять порядок выполнения зависимых операций. Мощным математическим аппаратом для описания информационных связей на уровне отдельных операций алгоритма являются функции зависимостей. Доказано (теорема В. В. Воеводина об информационном покрытии [7]), что все зависимости алгоритмов, представленных довольно широким классом программ, можно задать функциями, линейно зависящими от параметров циклов и внешних переменных.

При распараллеливании алгоритмов, операции которых разбиты на тайлы, возникает задача получения зависимостей между тайлами. В [8] задача решена для алгоритмов с однородными зависимостями: разработан метод получения всех векторов глобальных (уровня тайлов) зависимостей. Эти векторы можно использовать, в частности, для улучшения параллелизма вычислений уровня тайлов и обеспечения одновременного начала шаблонных вычислений процессорами [5; 6]. В этой работе (см. также [9]) сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие получить все глобальные зависимости зернистых версий алгоритмов, представленных многомерными циклами с аффинными зависимостями. По заданным функциям, определяющим зависимости на уровне операций, построены функции глобальных зависимостей.

Сведения об информационных зависимостях глобального уровня позволяют формально получать и автоматизировать коммуникационные операции зернистых вычислений. Кроме того, знание глобальных зависимостей позволяет осуществлять распараллеливание на уровне тайлов. Например, осуществляя аффинные преобразования и тайлинг исходного алгоритма таким образом, что координаты векторов, характеризующих глобальные зависимости, оказываются неотрицательными, можно гарантировать параллельное выполнение зернистых алгоритмов; такой подход рассмотрен для организации зернистых вычислений на многоядерных процессорах и графических процессорах [3; 4].

Функции зависимостей. Тайлинг. Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения об информационной структуре алгоритмов и о тайлинге.

Будем считать, что алгоритм задан последовательной программой, основную вычислительную часть которой составляет многомерный цикл произвольной структуры вложенности, а границы изменения параметров циклов задаются неоднородными формами, линейными по совокупности параметров циклов и внешних переменных. Пусть в гнезде циклов имеется K выполняемых операторов S_β. Область изменения параметров циклов для оператора S_β и размерность этой области обозначим соответственно V_β и n_β, $1 \le \beta \le K$.

Вхождением (a, S_β, q) будем называть q-е вхождение массива a в оператор S_β. Нахождение значения оператора S_β при конкретных значениях β и вектора параметров цикла J будем называть операцией и обозначать $S_\beta(J)$. Выполнение всех операций, зависящих от J, называется J-й итерацией.

Пусть пара вхождений $(a, S_\alpha, 1)$ и (a, S_β, q) порождает истинную зависимость $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$. Это означает: $S_\alpha(I)$ выполняется раньше $S_\beta(J)$; $S_\alpha(I)$ переопределяет (изменяет) элемент массива a, а $S_\beta(J)$ использует в качестве аргумента тот же элемент массива; между операциями $S_\alpha(I)$ и $S_\beta(J)$ этот элемент не переопределяется.

Пары итераций, которым принадлежат зависимые операции, можно задать функцией зависимостей $\overline{\Phi}_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)}(J)$ (называемой также покрывающей функцией графа алгоритма [7]) и множеством (областью определения функции)

$$V_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)} = \{J \in Z^{n_\beta} \mid \exists\, S_\alpha(\overline{\Phi}_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)}(J)) \to S_\beta(J)\},$$

определяющим вторые элементы пары. Функция зависимостей $\overline{\Phi}_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)}(J)$ позволяет для операции $S_\beta(J)$ найти операцию $S_\alpha(I)$, от которой $S_\beta(J)$ зависит. Если понятно, или не имеет значения, какие вхождения порождают зависимость, то функцию $\overline{\Phi}_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)}(J)$ и множество $V_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)}$ будем обозначать $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ и $V_{\alpha,\beta}$. Обычно рассматривают аффинные функции зависимостей вида

$$\begin{gathered} \overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J) = \Phi_{\alpha,\beta} J + \Psi_{\alpha,\beta} N - \varphi^{\alpha,\beta}, \\ J \in V_{\alpha,\beta},\ N \in \mathbf{Z}^e,\ \Phi_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^{n_\alpha \times n_\beta},\ \Psi_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^{n_\alpha \times e},\ \varphi^{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}^{n_\alpha}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $N \in \mathbf{Z}^e$ – вектор внешних переменных алгоритма; e – число внешних переменных.

Тайлинг применяется для получения макроопераций, называемых зернами вычислений или тайлами. Тайлинг – преобразование алгоритма, при котором каждый цикл разбивается на два цикла: глобальный, параметр которого определяет на данном уровне вложенности порядок вычисления тайлов, и локальный, в котором параметр исходного цикла изменяется в границах одного тайла. Допускается вырожденное разбиение цикла, при котором все итерации относятся к глобальному циклу или все итерации относятся к локальному циклу. Такие циклы будем называть соответственно глобальными неразбиваемыми и локальными неразбиваемыми.

Пусть в гнезде циклов имеется Θ наборов выполняемых операторов, и в окружении каждого набора есть хотя бы один разбиваемый цикл. Под набором операторов будем понимать один или несколько операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Наборы операторов линейно упорядочены расположением их в записи алгоритма. Обозначим: V^ϑ, $1 \le \vartheta \le \Theta$, – области изменения параметров циклов, окружающих наборы операторов, n^ϑ – размерность области V^ϑ, число циклов, окружающих ϑ-й набор операторов. Заметим, что если оператор S_β принадлежит набору операторов с номером ϑ^β, то $n^{\vartheta^\beta} = n_\beta$.

По смыслу тайлинга для каждого набора операторов локальные циклы должны быть самыми внутренними. Поэтому общие локальные циклы распределяются между циклами каждого набора операторов; локальные циклы переставляются с глобальными и становятся самыми внутренними.

Следующие величины и множества используются для формализации тайлинга.

$m_\zeta^\vartheta = \min\limits_{J(j_1, j_2, \ldots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta} j_\zeta$, $M_\zeta^\vartheta = \max\limits_{J(j_1, j_2, \ldots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta} j_\zeta$, $1 \le \zeta \le n^\vartheta$, – предельные значения изменения параметров циклов;

$r_1^\vartheta, \ldots, r_{n^\vartheta}^\vartheta$ – заданные натуральные числа, определяющие размеры тайла; r_ζ^ϑ обозначает число значений параметра j_ζ, приходящихся на один тайл ϑ-го набора операторов; r_ζ^ϑ может принимать фиксированное значение в пределах от 1 до $r_\zeta^{\vartheta,\max}$ включительно, где $r_\zeta^{\vartheta,\max} = M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1$;

если $r_\zeta^\vartheta = 1,$ то цикл с параметром j_ζ является глобальным неразбиваемым; если $r_\zeta^\vartheta = r_\zeta^{\vartheta,\max}$, то цикл с параметром j_ζ является локальным неразбиваемым; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром j_ζ, то $r_\zeta^{\vartheta_1} = r_\zeta^{\vartheta_2}$;

$R^\vartheta = \mathrm{diag}\left(r_1^\vartheta, ..., r_{n^\vartheta}^\vartheta\right)$ – диагональная матрица;

$Q_\zeta^\vartheta = \left\lceil (M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1) / r_\zeta^\vartheta \right\rceil,\ 1 \le \zeta \le n^\vartheta,$ – число частей, на которые при формировании тайлов разбивается область значений параметра j_ζ цикла, окружающего ϑ-й набор операторов;

$V^{\vartheta,\mathrm{gl}} = \left\{ J^{\mathrm{gl}}(j_1^{\mathrm{gl}}, ..., j_{n^\vartheta}^{\mathrm{gl}}) \middle| \ 0 \le j_\zeta^{\mathrm{gl}} \le Q_\zeta^\vartheta - 1,\ 1 \le \zeta \le n^\vartheta \right\}$ – области изменения параметров глобальных, т. е. уровня тайлов, циклов;

$V_{J^{\mathrm{gl}}}^\vartheta = \left\{ J(j_1, ..., j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta \middle| \ m_\zeta^\vartheta + j_\zeta^{\mathrm{gl}} r_\zeta^\vartheta \le j_\zeta \le m_\zeta^\vartheta - 1 + (j_\zeta^{\mathrm{gl}} + 1) r_\zeta^\vartheta,\ 1 \le \zeta \le n^\vartheta \right\},\ J^{\mathrm{gl}} \in V^{\vartheta,\mathrm{gl}},$ – области изменения параметров локальных (уровня операций тайлов) циклов при фиксированных значениях параметров глобальных циклов. Множество операций, выполняемых на итерациях множества $V_{J^{\mathrm{gl}}}^\vartheta$, будем также обозначать $V_{J^{\mathrm{gl}}}^\vartheta$. Множества $V_{J^{\mathrm{gl}}}^\vartheta$ называются тайлами.

Опишем структуру многомерного цикла после применения к нему преобразования тайлинга. Параметры циклов j_ζ^{gl} изменяются в соответствии с неравенствами $0 \le j_\zeta^{\mathrm{gl}} \le Q_\zeta^\vartheta - 1,$ для каждого набора операторов имеется столько локальных циклов, сколько $r_1^\vartheta, ..., r_{n^\vartheta}^\vartheta$ превосходят единицу.

Рассмотренный способ разбиения множества операций алгоритма на макрооперации-тайлы называется методом окаймления. Отметим, что метод окаймления может приводить к избыточным областям изменения параметров глобальных циклов: некоторые множества $V_{J^{\mathrm{gl}}}^\vartheta$ могут быть пустыми.

Функции глобальных зависимостей. Получение функций глобальных зависимостей. Рассмотрим некоторую истинную зависимость $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$. Итерации, порождающие зависимость, принадлежат некоторым тайлам: $I \in V_{I^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\alpha}$ и $J \in V_{J^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\beta}$. Таким образом, порождается зависимость уровня тайлов: данное, вычисленное при выполнении операций тайла $V_{I^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\alpha}$ используется при выполнении операции (операций) тайла $V_{J^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\beta}$. По аналогии с функциями зависимостей $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ уровня операций введем в рассмотрение функции $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}}(J^{\mathrm{gl}}),$ которые для любого тайла $V_{J^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\beta}$ определяют тайлы $V_{I^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\alpha}$, $I^{\mathrm{gl}} = \overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}}(J^{\mathrm{gl}}),$ результаты операций которых являются аргументами операций тайла $V_{J^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\beta}$. Будем искать функции глобальных зависимостей в виде

$$I^{\mathrm{gl}} = \overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}}(J^{\mathrm{gl}}) = \Phi_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}} J^{\mathrm{gl}} + \Psi_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}} N - \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}, \tag{2}$$

где $\Phi_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}}$ и $\Psi_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}}$ – матрицы; $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$ – вектор.

Обозначим: $1_n = (1, 1, \ldots, 1)$ – n-мерный вектор с единичными координатами, $\Phi_{\alpha,\beta,+}$ – матрица, получаемая из матрицы $\Phi_{\alpha,\beta}$ обнулением всех ее отрицательных элементов, $\Phi_{\alpha,\beta,-}$ – матрица, получаемая из матрицы $\Phi_{\alpha,\beta}$ обнулением всех ее положительных элементов. Неравенства векторов означают неравенства соответствующих координат векторов.

Т е о р е м а. *Пусть компоненты вектора* $(R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\Psi_{\alpha,\beta}N$ *и матрицы* $(R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\Phi_{\alpha,\beta}\ R^{\vartheta^\beta}$ *являются целыми. Аффинная функция зависимостей* $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ *вида (1) порождает функции глобальных зависимостей вида (2), параметры которых определяются следующим образом:*

$$\Phi_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}} = (R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\Phi_{\alpha,\beta}R^{\vartheta^\beta}, \tag{3}$$

$$\Psi_{\alpha,\beta}^{\mathrm{gl}} = (R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\Psi_{\alpha,\beta}, \tag{4}$$

$\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$ *– векторы с целыми координатами, удовлетворяющие следующим неравенствам:*

$$\begin{gathered}(R^{\vartheta^\alpha})^{-1}(m^{\vartheta^\alpha} + \varphi^{\alpha,\beta} - \Phi_{\alpha,\beta}m^{\vartheta^\beta} + \Phi_{\alpha,\beta,+}1_{n_\beta} - \Phi_{\alpha,\beta,+}R^{\vartheta^\beta}1_{n_\beta}) \le \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le \\ (R^{\vartheta^\alpha})^{-1}(m^{\vartheta^\alpha} + \varphi^{\alpha,\beta} - 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha}1_{n_\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta}m^{\vartheta^\beta} - \Phi_{\alpha,\beta,-}R^{\vartheta^\beta}1_{n_\beta} + \Phi_{\alpha,\beta,-}1_{n_\beta}).\end{gathered} \tag{5}$$

Одна функция зависимостей может порождать столько функций глобальных зависимостей, сколько векторов $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$ *удовлетворяет условию (5).*

Доказательство. Пусть зависимость между тайлами порождается итерациями $I \in V_{I^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\alpha}$ и $J \in V_{J^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\beta}$. Из определения тайлов $V_{I^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\alpha}$ и $V_{J^{\mathrm{gl}}}^{\vartheta^\beta}$ имеем

$$m^{\vartheta^\alpha} + R^{\vartheta^\alpha} I^{\mathrm{gl}} \le I \le m^{\vartheta^\alpha} - 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha}(I^{\mathrm{gl}} + 1_{n_\alpha}), \tag{6}$$

$$m^{\vartheta^\beta} + R^{\vartheta^\beta} J^{\mathrm{gl}} \le J \le m^{\vartheta^\beta} - 1_{n_\beta} + R^{\vartheta^\beta}(J^{\mathrm{gl}} + 1_{n_\beta}). \tag{7}$$

Преобразуем двойное неравенство (6) с учетом соотношений (1), (2), (4):

$$\begin{gathered}
m^{\vartheta^\alpha} + R^{\vartheta^\alpha}(\Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} + \Psi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} N - \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}) \le \Phi_{\alpha,\beta} J + \Psi_{\alpha,\beta} N - \varphi^{\alpha,\beta} \le \\
m^{\vartheta^\alpha} - 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha}(\Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} + \Psi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} N - \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} + 1_{n_\alpha}), \\
m^{\vartheta^\alpha} + \varphi^{\alpha,\beta} + R^{\vartheta^\alpha} \Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} - R^{\vartheta^\alpha} \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le \Phi_{\alpha,\beta} J \le \\
m^{\vartheta^\alpha} + \varphi^{\alpha,\beta} - 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha} 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha} \Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} - R^{\vartheta^\alpha} \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Из двойного неравенства (7) можно получить неравенства

$$\begin{gathered}
\Phi_{\alpha,\beta} m^{\vartheta^\beta} + \Phi_{\alpha,\beta} R^{\vartheta^\beta} J^{\mathrm{gl}} + \Phi_{\alpha,\beta,-} R^{\vartheta^\beta} 1_{n_\beta} - \Phi_{\alpha,\beta,-} 1_{n_\beta} \le \Phi_{\alpha,\beta} J \le \\
\Phi_{\alpha,\beta} m^{\vartheta^\beta} + \Phi_{\alpha,\beta} R^{\vartheta^\beta} J^{\mathrm{gl}} - \Phi_{\alpha,\beta,+} 1_{n_\beta} + \Phi_{\alpha,\beta,+} R^{\vartheta^\beta} 1_{n_\beta}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Для этого следует расписать систему (7) покоординатно, затем умножить неравенства на компоненты матрицы $\Phi_{\alpha,\beta}$ и сложить соответствующие неравенства одинакового смысла.

Исключение Фурье–Моцкина (Fourier–Motzkin elimination – процедура, предназначенная для выделения в системе неравенств ограничений, связанных только с интересующими нас переменными) из системы неравенств (8), (9) величин $\Phi_{\alpha,\beta} J$ приводит к системе

$$\begin{gathered}
m^{\vartheta^\alpha} + \varphi^{\alpha,\beta} + R^{\vartheta^\alpha} \Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} - R^{\vartheta^\alpha} \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} - (\Phi_{\alpha,\beta} m^{\vartheta^\beta} + \Phi_{\alpha,\beta} R^{\vartheta^\beta} J^{\mathrm{gl}} - \Phi_{\alpha,\beta,+} 1_{n_\beta} + \Phi_{\alpha,\beta,+} R^{\vartheta^\beta} 1_{n_\beta}) \le 0, \\
\Phi_{\alpha,\beta} m^{\vartheta^\beta} + \Phi_{\alpha,\beta} R^{\vartheta^\beta} J^{\mathrm{gl}} + \Phi_{\alpha,\beta,-} R^{\vartheta^\beta} 1_{n_\beta} - \Phi_{\alpha,\beta,-} 1_{n_\beta} - \\
(m^{\vartheta^\alpha} + \varphi^{\alpha,\beta} - 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha} 1_{n_\alpha} + R^{\vartheta^\alpha} \Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} - R^{\vartheta^\alpha} \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}) \le 0.
\end{gathered}$$

Из этой системы с учетом равенства (3) приходим к неравенствам (5), которым должны удовлетворять векторы $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если зависимость* $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$ *является однородной, то* $\Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta}$ *– единичная матрица,* $\Psi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta}$ *– нулевая матрица,* $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$ *– векторы с целыми координатами, удовлетворяющие неравенствам*

$$(R^{\vartheta^\alpha})^{-1}(\varphi^{\alpha,\beta} + 1_{n_\alpha}) - 1_{n_\alpha} \le \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le (R^{\vartheta^\alpha})^{-1}(\varphi^{\alpha,\beta} - 1_{n_\alpha}) + 1_{n_\alpha}. \tag{10}$$

Действительно, для однородной зависимости имеем: $\Phi_{\alpha,\beta}$ – единичная матрица, $\Psi_{\alpha,\beta}$ – нулевая матрица, $n_\alpha = n_\beta$, $m^{\vartheta^\alpha} = m^{\vartheta^\beta}$, $R^{\vartheta^\alpha} = R^{\vartheta^\beta}$. Из соотношений (3)–(5) вытекает сформулированное утверждение.

Ранее случай алгоритмов с однородными зависимостями исследован в работе [8].

Следствие 2. *Если имеется зависимость, задаваемая функцией вида (1), матрицы* R^{ϑ^α} *и* R^{ϑ^β} *являются единичными матрицами, то*

$$\overline{\Phi}^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta}(J^{\mathrm{gl}}) = \Phi_{\alpha,\beta} J^{\mathrm{gl}} + \Psi_{\alpha,\beta} N - (\varphi^{\alpha,\beta} + m^{\vartheta^\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta} m^{\vartheta^\beta}). \tag{11}$$

Действительно, в вырожденном случае, когда R^{ϑ^α} и R^{ϑ^β} являются единичными матрицами, тайлинг не приводит к получению макроопераций, а сводится к сдвигу параметров циклов: $J^{\mathrm{gl}} = J - m^{\vartheta^\beta}$, $J^{\mathrm{gl}} = J - m^{\vartheta^\beta}$. В этом случае из соотношений (3)–(5) получим

$$\Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} = \Phi_{\alpha,\beta},\ \Psi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} = \Psi_{\alpha,\beta},\ \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} = \varphi^{\alpha,\beta} + m^{\vartheta^\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta} m^{\vartheta^\beta}.$$

Приходим к исходной функции зависимостей с учетом указанного сдвига параметров циклов. Если имеется зависимость $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$, причем $I = \Phi_{\alpha,\beta}J + \Psi_{\alpha,\beta}N - \varphi^{\alpha,\beta}$, то функция (11) укажет зависимость между итерациями $I^{\mathrm{gl}} = I - m^{\vartheta^\alpha}$ и $J^{\mathrm{gl}} = J - m^{\vartheta^\beta}$:

$$\overline{\Phi}^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta}(J^{\mathrm{gl}}) = \Phi_{\alpha,\beta}(J - m^{\vartheta^\beta}) + \Psi_{\alpha,\beta}N - \varphi^{\alpha,\beta} - m^{\vartheta^\alpha} + \Phi_{\alpha,\beta}m^{\vartheta^\beta} =$$

$$\Phi_{\alpha,\beta}J + \Psi_{\alpha,\beta}N - \varphi^{\alpha,\beta} - m^{\vartheta^\alpha} = I - m^{\vartheta^\alpha} = I^{\mathrm{gl}}.$$

З а м е ч а н и е. Неравенства (5) задают окаймляющий параллелепипед для области изменения координат вектора $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$. Эту область можно уточнить применением процедуры Фурье–Моцкина к системе неравенств (7) и (8) с целью исключения координат вектора *J*.

Отметим, что в случае однородной зависимости неравенства (10) следуют непосредственно из системы (7), (8) ($\Phi_{\alpha,\beta}$ – единичная матрица, неравенства (7) и (9) совпадают) [8]. Поэтому соотношения (10) точно задают область изменения координат вектора $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$.

Пример получения функций глобальных зависимостей. Одна из зависимостей алгоритма решения системы линейных алгебраических уравнений с левой треугольной матрицей порядка *n* задается функцией [7, с. 381]

$$\overline{\Phi}_{3,3}(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (j, j-1), (i,j) \in V_{3,3} = \{(i,j) \in Z^2 \mid 3 \le i \le n,\ 2 \le j \le i-1\}.$$

Известно, что $V_3 = \{(i,j) \in Z^2 \mid 2 \le i \le n, 1 \le j \le i-1\}$.

Для получения $\Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta}(i^{\mathrm{gl}}, j^{\mathrm{gl}})$, где $\alpha = 3, \beta = 3$, имеем $\Phi_{\alpha,\beta} = \Phi_{\alpha,\beta,+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi_{\alpha,\beta,-} = 0$, $\Psi_{\alpha,\beta} = 0$, $\varphi^{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R^{\vartheta^\alpha} = R^{\vartheta^\beta} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$, $m^{\vartheta^\alpha} = m^{\vartheta^\beta} = (2, 1)$.

Из формулы (3) получим $\Phi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{r_2}{r_1} \\ 0 & \dfrac{r_2}{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

где ρ – натуральное число такое, что $r_2 = \rho r_1$. Из формулы (4) следует $\Psi^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta} = (R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\Psi_{\alpha,\beta} = 0$. Из соотношений (5) имеем

$$(R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \le \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le$$

$$(R^{\vartheta^\alpha})^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 + 0\right),\ \begin{pmatrix} \dfrac{-r_2+2}{r_1} \\ \dfrac{-r_2+2}{r_2} \end{pmatrix} \le \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le \begin{pmatrix} \dfrac{r_2}{r_1} \\ \dfrac{r_2}{r_2} \end{pmatrix}.$$

Так как координаты вектора $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}$ должны быть целочисленными, то для $r_1 \ge 3$ получим $\begin{pmatrix} -\rho+1 \\ 0 \end{pmatrix} \le \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le \begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$. Если $r_2 = r_1$, то ρ = 1,

$$\overline{\Phi}^{\mathrm{gl}}_{\alpha,\beta}(J^{\mathrm{gl}})(i^{\mathrm{gl}}, j^{\mathrm{gl}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i^{\mathrm{gl}} \\ j^{\mathrm{gl}} \end{pmatrix} - \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \le \varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применим процедуру Фурье–Моцкина исключения i и j из неравенств (7), (8):

$$\begin{cases} 2+i^{gl}r_1 \le i \le 1+(i^{gl}+1)r_1, \\ 1+j^{gl}r_2 \le j \le (j^{gl}+1)r_2, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl})r_1 \le j \le 1+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl}+1)r_1, \\ 1+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl})r_2 \le j-1 \le (j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl}+1)r_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+i^{gl}r_1 \le 1+(i^{gl}+1)r_1, \\ 1+j^{gl}r_2 \le (j^{gl}+1)r_2, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl})r_1 \le (j^{gl}+1)r_2, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl})r_2 \le (j^{gl}+1)r_2, \\ 1+j^{gl}r_2 \le 1+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl}+1)r_1, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl})r_1 \le 1+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl}+1)r_1, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl})r_2 \le 1+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl}+1)r_1, \\ 1+j^{gl}r_2 \le 1+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl}+1)r_2, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl})r_1 \le 1+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl}+1)r_2, \\ 2+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl})r_2 \le 1+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl}+1)r_2. \end{cases}$$

Если $r_2 = r_1$ и $r_1 \ge 3$, то имеем $\begin{cases} -1 < \varphi_1^{\alpha,\beta,gl}, \\ -1 < \varphi_2^{\alpha,\beta,gl}, \\ \varphi_1^{\alpha,\beta,gl} \le 1, \\ \varphi_2^{\alpha,\beta,gl} \le 1, \\ \varphi_1^{\alpha,\beta,gl} < \varphi_2^{\alpha,\beta,gl}+1, \\ \varphi_2^{\alpha,\beta,gl} < \varphi_1^{\alpha,\beta,gl}+1. \end{cases}$

Таким образом, только два вектора $\varphi^{\alpha,\beta,gl} = (0,0)$ и $\varphi^{\alpha,\beta,gl} = (1,1)$ удовлетворяют данной системе неравенств.

Об областях определения функций глобальных зависимостей. В область определения $V_{\alpha,\beta}^{gl}$ функции $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{gl}(J^{gl})$ могут входить только тайлы, полученные в результате тайлинга области определения $V_{\alpha,\beta}$ функции $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$. После применения тайлинга к $V_{\alpha,\beta}$, получим множество

$$V_{\alpha,\beta}^{gl,0} = \left\{ J^{gl}(j_1^{gl},\dots,j_{n^\vartheta}^{gl}) \in Z^{n^\vartheta} \mid q^{gl,0} \le j^{gl} \le Q^{gl,0} \right\},$$

где

$$q^{gl,0} = \left\lfloor (R^{\vartheta^\beta})^{-1}(m^{\alpha,\beta} - m^{\vartheta^\beta}) \right\rfloor,\ Q^{gl,0} = \left\lfloor (R^{\vartheta^\beta})^{-1}(M^{\alpha,\beta} - m^{\vartheta^\beta}) \right\rfloor,\ m^{\alpha,\beta} = \min_{J \in V_{\alpha,\beta}} J,\ M^{\alpha,\beta} = \max_{J \in V_{\alpha,\beta}} J.$$

Так как рассматривается метод окаймления, то имеет место включение $V_{\alpha,\beta}^{gl,0} \supseteq V_{\alpha,\beta}^{gl}$.

Кроме того, $V_{\alpha,\beta}^{gl}$ включает в себя только такие J^{gl}, для которых не пусто множество

$$V_{J^{gl},\varphi^{\alpha,\beta,gl}}^{in} = \left\{ J \in V_{J^{gl}}^{\vartheta^\beta} \mid J \in V_{\alpha,\beta},\ \overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J) \in V_{I^{gl}}^{\vartheta^\alpha},\ I^{gl} = \Phi_{\alpha,\beta}^{gl} J^{gl} + \Psi_{\alpha,\beta}^{gl} N - \varphi^{\alpha,\beta,gl} \right\}.$$

Множество $V_{J^{gl},\varphi^{\alpha,\beta,gl}}^{in}$ состоит из итераций тайла $V_{J^{gl}}^{\vartheta^\beta}$ таких, что аргументы выполняемых на них операций являются результатами операций тайла $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}^{gl}(J^{gl})$. Если для какого-либо $\varphi^{\alpha,\beta,gl}$ все множества $V_{J^{gl},\varphi^{\alpha,\beta,gl}}^{in}$ являются пустыми, то функция $\Phi_{\alpha,\beta}^{gl} J^{gl} + \Psi_{\alpha,\beta}^{gl} N - \varphi^{\alpha,\beta,gl}$ глобальных зависимостей не задает.

В рассматриваемом примере, случай $r_2 = r_1$, $J \in V_{J^{gl}}^{\vartheta^\beta}$ означает $\begin{cases} 2+i^{gl}r_1 \le i \le 1+(i^{gl}+1)r_1, \\ 1+j^{gl}r_2 \le j \le (j^{gl}+1)r_2, \end{cases}$ $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J) \in V_{I^{gl}}^{\vartheta^\alpha}$, $I^{gl} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^{gl} \\ j^{gl} \end{pmatrix} - \varphi^{\alpha,\beta,gl}$ означает $\begin{cases} 2+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl})r_1 \le j \le 1+(j^{gl}-\varphi_1^{\alpha,\beta,gl}+1)r_1, \\ 1+(j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl})r_2 \le j-1 \le (j^{gl}-\varphi_2^{\alpha,\beta,gl}+1)r_2. \end{cases}$

Для векторов $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} = (0, 0)$ и $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} = (1, 1)$ множество $V^{\mathrm{in}}_{J^{\mathrm{gl}},\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}}$ не пусто, для векторов $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} = (0, 1)$ и $\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}} = (1, 0)$ множество $V^{\mathrm{in}}_{J^{\mathrm{gl}},\varphi^{\alpha,\beta,\mathrm{gl}}}$ пусто.

Таким образом, в статье представлен метод получения информационных зависимостей глобального уровня (т. е. уровня макроопераций) для алгоритмов с аффинными зависимостями. Введенные в рассмотрение функции глобальных зависимостей могут быть использованы для формализованного распараллеливания и автоматизированного получения коммуникационных операций зернистых алгоритмов. Метод использует структуру информационных зависимостей исходного алгоритма уровня операций, обобщает метод поиска однородных зависимостей глобального уровня.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф12ОБ-005).

Литература

1. *Xue J., Cai W.* // Parallel Computing. 2002. Vol. 28, N 5. P. 915–939.

2. *Kim D. G., Rajopadhye S.* // Technical Report CS-09-101, Colorado State University, Department of Computer Science, February. 2009. – 21 p.

3. *Tavarageri S., Hartono A., Baskaran M.* et al. // Proc. 15th Workshop on Compilers for Parallel Computers. Vienna, Austria. 2010. July.

4. *Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan P.* // Proceedings of the Compiler Construction, 19th International Conference. Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software. Paphos, Cyprus. 2010. March.

5. *Di P., Ye D., Su Yu* et al. // 41st International Conference on Parallel Processing. Pittsburgh, 2012. P. 350–359.

6. *Bandishti V., Pananilath I., Bondhugula U.* // Proceedings of Supercomputing. Los Alamitos, CA, USA. IEEE Computer Society Press, 2012. P. 40:1–40:11.

7. *Воеводин В. В., Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. СПб., 2002. – 608 с.

8. *Лиходед Н. А., Соболевский П. И.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 22–26.

9. *Толстиков А. А., Лиходед Н. А.* // Тез. докл. Междунар. науч. конф. «XI Белорусская математическая конференция». Минск, 5–8 нояб. 2012 г. Минск, 2012. Ч. 3. С. 23–24.

N. A. LIKHODED, A. A. TOLSTIKOV

likhoded@bsu.by

FUNCTIONS ASSIGNING THE DEPENDENCES OF GRAINED ALGORITHMS

Summary

In case of parallel grained affine algorithm a method of obtaining dependences is developed. Propositions to formalize the dependences in parallel grained algorithms are stated and proved.