Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **июль–август** **Том 59 № 4**

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983

П. П. ЗАБРЕЙКО, А. В. МИХАЙЛОВ

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

В сообщении изучаются действующие в гильбертовом пространстве X нормальные линейные операторы B с единичным спектральным радиусом, для которых, однако, последовательные приближения $x_{n+1} = Bx_n + f$ сходятся при любом начальном приближении x_0 к одному из решений уравнения $x = Bx + f$ при условии, что такие решения существуют. Получены достаточные условия сходимости последовательных приближений на подпространствах истокообразно представимых функций и сходимость приближений в более слабой, чем исходная, норме гильбертова пространства. Исследовано поведение невязок и поправок. Изучено также поведение последовательных приближений при вычислениях с малыми ошибками.

Ключевые слова: последовательные приближения, последовательные приближения с ошибками, нормальные операторы в гильбертовом пространстве, спектральный радиус, спектральная теорема для нормальных операторов, корректные и некорректные задачи, теорема Красносельского.

P. P. ZABREIKO, A. V. MIKHAILOV

CONVERGENCE OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS FOR EQUATIONS WITH NORMAL OPERATOR

Belarusian State University, Minsk, Belarus
zabreiko@mail.ru; artostby@mail.ru

The article deals with normal linear operators B with a unit spectral radius in Hilbert spaces, for which the successive approximations $x_{n+1} = Bx_n + f$ with an arbitrarily initial approximation x_0 converge to a solution of the equation $x = Bx + f$ (under condition that these solutions exist). Sufficient conditions for the convergence of successive approximations on subspaces of source-wise represented functions and in weakened norms are established. The behavior of residuals and corrections of these approximations is studied, too. Moreover, the behavior of “approximate” successive approximations is also investigated.

Keywords: successive approximations, successive approximations with errors, normal operators in Hilbert spaces, spectral radius, spectral theorem for normal operators, well-posed and ill-posed problems, Krasnosel'skii's theore.

В работе М. А. Красносельского [1] было показано, что решение уравнения

$$x = Bx + f, \tag{1}$$

с самосопряжённым оператором B, спектральный радиус которого равен 1, может быть получено методом последовательных приближений

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (x_0 \in X,\ n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

с любым начальным условием, если такие решения существуют.

Так как спектральный радиус оператора B равен 1, то в случае, когда последовательные приближения вычисляются приближённо, эти приближённые последовательные приближения к точному решению уже не сходятся. Однако, как показано в работах [2; 3], в случае, когда последовательные приближения вычисляются с малыми ошибками, не превышающими достаточно малого числа δ, эти приближённые последовательные приближения, вообще говоря, при больших, но не очень больших, номерах n сколь угодно близко подходят к точному решению.

В работе [4] была получена модификация теоремы М. А. Красносельского [1] (см. также [5]) о сходимости последовательных приближений для случая, когда оператор B является нормальным. Одновременно в работах [2; 3] был получен ряд новых, связанных с теоремой М. А. Красносельского, утверждений для уравнений с самосопряжёнными операторами (сходимость невязок к нулю, ряд уточнений о скорости сходимости последовательных приближений к решению, поведение последовательных приближений при вычислениях с ошибками и др.). Естественно возникает вопрос о переносе результатов статей [2; 3] на случай, когда оператор B является нормальным. Настоящая работа посвящена этому вопросу. Используемые в работе общие теоремы о линейных операторах и уравнениях см. в [6; 7].

Как показано в [4], условия сходимости последовательных приближений (2) к соответствующему решению уравнения (1) могут формулироваться различными (эквивалентными друг другу) способами. Все они гарантируют корректность оператора B, т. е. сильную сходимость последовательности B^n итераций оператора B. В настоящем сообщении в качестве основного условия, гарантирующего эту сходимость, выбрано равенство $\mathrm{Fix}\, B^* B = \mathrm{Fix}\, B$.

Приведём точную формулировку теоремы из [4] о сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) в случае, когда B – нормальный оператор с $\rho(B) = 1$. Как и в [2; 3], через P будем обозначать ортопроектор на подпространство собственных векторов оператора B, удовлетворяющего собственному значению 1.

Т е о р е м а 1. *Пусть* B *– нормальный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве* X, *и пусть* $\mathrm{Fix}\, B^* B = \mathrm{Fix}\, B$. *Пусть уравнение (1) разрешимо.*

Тогда последовательные приближения (2) при любом начальном условии $x_0 \in X$ *сходятся к одному из решений уравнения (1). Более точно, приближения (2) сходятся к решению* x_* *уравнения (1), для которого* $Px_* = Px_0$.

Рассмотрим вопрос о поведении невязок $x_n - Bx_n - f$ для приближений (2). Так как

$$x_n - Bx_n - f = x_n - x_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(поправки $x_{n+1} - x_n$ совпадают с невязками $x_n - Bx_n - f$, взятыми с обратным знаком), то из (2) следует

$$x_n - Bx_n - f = B^n((I - B)x_0 - f).$$

Из этого равенства вытекает [6; 8], что

$$\|x_n - Bx_n - f\| = \|B^n((I - B)x_0 - f)\| = \|B^n(x_0 - Bx_0 - f)\|.$$

Из спектральной теоремы для нормальных операторов [9] вытекает неравенство

$$\|x_n - Bx_n - f\|^2 \le \int_{\mathrm{sp}\, A} |\lambda|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - Bx_0 - f), x_0 - Bx_0 - f)$$

(E_λ – спектральная мера для оператора B). К этому неравенству можно применить теоремы Лебега о предельном переходе. В результате получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть* B *– нормальный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве* X, *и пусть* $\mathrm{Fix}\, B^* B = \mathrm{Fix}\, B$. *Пусть* $Pf = 0$.

Тогда невязки $x_n - Bx_n - f$ *для последовательных приближений (2) при любом начальном условии* $x_0 \in X$ *сходятся к нулю.*

Отметим, что условие $Pf = 0$ в этой теореме необходимо, но в общем случае не достаточно для разрешимости уравнения (1). Таким образом, невязки для последовательных приближений могут сходиться к нулю и в том случае, когда исходное уравнение вообще не имеет решений.

Скорость сходимости последовательных приближений (2) к соответствующему решению уравнения (1) и скорость сходимости невязок к нулю для этих последовательных приближений в условиях теорем 1 и 2 существенно зависит от свойств «гладкости» самого решения x_* (если оно существует) и от выбора начального приближения x_0. При дополнительных предположениях о решении x_* и начальном приближении x_0 скорости соответствующих сходимостей могут быть уточнены. Ограничимся здесь двумя утверждениями, аналогичными теореме 3 из [2]; их доказательства дословно повторяют доказательство теоремы 3 из [2] и потому не приводятся.

Напомним (см. [2]), что через $\theta(B)X$ обозначается подпространство элементов $x \in X$ вида

$$x = \int\limits_{\mathrm{sp}\,A} \theta(\lambda)\, dE_\lambda h \quad (h \in X),$$

где $\theta(\lambda)$ – некоторая непрерывная функция из $\mathrm{sp}\, B \to \mathbf{R}$, причём числа $\lambda \in \mathrm{sp}\, B : \theta(\lambda) = 0$ не являются собственными значениями оператора B. С нормой

$$\|x\|_{\theta(B)X} = \inf\left\{ \|h\| : x = \int\limits_{\mathrm{sp}\,A} \theta(\lambda)\, dE_\lambda h, \quad h \in X \right\}$$

пространство $\theta(B)X$ является банаховым. Пространство $\theta(B)X$ непрерывно вложено в пространство $X : \theta(B)X \subset X$, но не обязательно в X замкнуто.

Для заданной функции $\theta(\lambda) : \mathrm{sp}\, B \to \mathbf{R}$ положим

$$\gamma_n = \max\left\{ |\lambda|^n \left|\theta(\lambda)\right| : \lambda \in \mathrm{sp}\, B \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Повторяя рассуждения из [2] можно показать, что последовательность γ_n стремится к нулю в том и только том случае, когда $\theta(\lambda)$ обращается в нуль на всех отличных от 1 точках $\lambda \in \mathrm{sp}\, B$ с $|\lambda| = 1$. Функции $\theta(\lambda)$, для которых $\gamma \to 0$ ниже называются *S-функциями*.

Т е о р е м а 3. *Пусть B – нормальный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве X, и пусть* Fix $B^* B$ = Fix *B. Пусть, кроме того, уравнение (1) разрешимо,* $x_0 - x_* \in \theta(B)X$. *Тогда для любой S-функции* $\theta(\lambda)$ *при* $x_0 - x_* \in \theta(B)X$ *справедливы неравенства*

$$\|x_n - x_*\| \le \gamma_n \|x_0 - x_*\|_{\theta(B)X} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где x_* *– решение уравнения (1), для которого* $Px_* = Px_0$.

Предположение $x_0 - x_* \in \theta(B)X$ этой теоремы практически не слишком удобно – решение x_*, как правило, неизвестно. Поэтому условие $x_0 - x_* \in \theta(B)X$ удобнее заменить на предположение $x_0 \in \theta(B)X$ и предположение $y \in \tilde{\theta}(B)X$, где функции $\theta(\lambda)$ и $\tilde{\theta}(\lambda)$ связаны равенством $\tilde{\theta}(\lambda) = (1-\lambda)\theta(\lambda)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть B – нормальный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве X, и пусть* Fix $B^* B$ = Fix *B. Пусть* $Pf = 0$. *Тогда для любой S-функции* $\theta(\lambda)$ *при* $x_0 - Bx_0 - f \in \theta(B)X$ *справедливы неравенства*

$$\|x_n - Bx_n - f\| \le \gamma_n \|x_0 - Bx_0 - f\|_{\theta(B)X} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В ряде задач при исследовании последовательных приближений достаточно установить их сходимость в норме, более слабой, чем исходная норма гильбертова пространства *X*. Примером таких норм может служить норма

$$\|x\|_0 = \|Tx\|, \tag{3}$$

где T – некоторый оператор с $\ker T = 0$. При этом наиболее простым оказывается случай, когда оператор *T* перестановочен с оператором *B* (*TB* = *BT*). Среди таких операторов наиболее простыми являются операторы вида

$$T = \pi(B), \tag{4}$$

где π – некоторая функция, нули которой, отличные от 1, не являются собственными значениями оператора *B*. В этом случае (3) является нормой, так как из $Tx = 0$ очевидным образом следует, что $x = 0$.

Напомним, что для последовательных приближений x_n ($x_{n+1} = Bx_n + f$) справедливы равенства

$$x_n = B^n x_0 + (I + B + \ldots + B^{n-1}) f \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и так как

$$x_* = B^n x_* + (I + B + \ldots + B^{n-1}) f \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то $x_n - x_* = B^n (x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Отсюда (см. [6; 8]) для нормы (3) (с *T*, определённым равенством (4)) следует, что

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(B)X} = \|\pi(B) B^n (x_0 - x_*)\|,$$

и, далее,

$$\|x_n - x_*\|^2_{\pi(B)X} = \int\limits_{sp\, B} |\pi(\lambda)|^2 \, |\lambda^n|^2 \, (dE_\lambda (x_0 - x_*), x_0 - x_*),$$

в частности,

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(B)X} \le \gamma_n \|x_0 - x_*\|, \tag{5}$$

где $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in sp\, B} |\pi(\lambda)\lambda^n|$. Функцию $\pi(\lambda)$ теперь будем называть W*-функцией*, если $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Нетрудно показать, что эффективность функции $\pi(\lambda)$ равносильна предположению, что $\pi(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathrm{sp}\, B$ с $|\lambda| = 1$.

Повторяя рассуждения из [2] приходим к следующему утверждению, обобщающему теорему М. А. Красносельского.

Т е о р е м а 5. *Пусть B – нормальный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве X, и пусть* Fix $B^* B$ = Fix *B. Пусть, кроме того, уравнение (1) разрешимо,* x_* *– решение уравнения (1), для которого* $Px_* = Px_0$, $x_0 - x_* \in \pi(B)X$.

Тогда для любой W*-функции* $\pi(B)$ *справедливы неравенства (5).*

Аналогично, для невязок $\|x_n - Bx_n - f\|$ последовательных приближений x_n $(x_{n+1} = Bx_n + f)$ справедливы равенства $x_n - Bx_n - f = B^n (x_0 - Bx_0 - f)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и потому

$$\|x_n - Bx_n - f\|_{\pi(B)X} = \|\pi(B) B^n (x_0 - Bx_0 - f)\|.$$

Отсюда

$$\|x_n - Bx_n - f\|^2_{\pi(B)X} = \int\limits_{\mathrm{sp}\, B} |\pi(\lambda)|^2 \, |\lambda^n|^2 (dE_\lambda (x_0 - Bx_0 - f), x_0 - Bx_0 - f),$$

и, значит,

$$\|x_n - Bx_n - f\|_{\pi(B)X} \le \gamma_n \|x_0 - Bx_0 - f\|, \tag{6}$$

где снова $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}\, B} |\pi(\lambda)\lambda^n|$.

Т е о р е м а 6. *Пусть B – нормальный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве X, и пусть* Fix $B^* B$ = Fix *B. Пусть, кроме того,* $Pf = 0$, $x_n - Bx_n - f \in \pi(B)X$.

Тогда для любой W*-функции* $\pi(B)$ *справедливы неравенства (6).*

Нас теперь будет интересовать поведение последовательных приближений

$$\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + f_n, \tag{7}$$

где $f_n = f + e_n$, e_n – ошибка на *n*-ном шаге при вычислении последовательных приближений. Будем предполагать, что $\|f_n - f\|_{e_n} < \delta$, δ – фиксированное положительное число.

Из равенств (2) и (7) вытекают формулы

$$\tilde{x}_n - x_n = B^{n-1}(f_0 - f) + B^{n-2}(f_1 - f) + \ldots + B(f_{n-2} - f) + (f_{n-1} - f), \quad \tilde{x}_0 = x_0,$$

откуда

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \le \left(\|B^{n-1}\| + \|B^{n-2}\| + \ldots + \|B\| + 1\right)\delta, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Так как $\rho(B) = 1$ и B – нормальный оператор, то $\|B\| = 1$, и, далее,

$$\|B\| = \|B^2\| = \ldots = \|B^{n-1}\| = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то неравенство (8) влечёт неравенство

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \le n\delta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из него очевидным образом вытекает, что

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|\tilde{x}_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \le \mu_n + n\delta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где (μ_n) – последовательность, для которой $\|x_n - x_*\| \le \mu_n$ (в [4] доказано, что $\mu_n \to 0$ при $n \to \infty$), δ – фиксированное выше число. Полученная оценка для $\|\tilde{x}_n - x_*\|$ даёт возможность провести стандартные в теории некорректных задач рассуждения, позволяющие увидеть, что приближения $\tilde{x}_n$ при малых δ сколь угодно близко подходят к точному решению x_*.

В самом деле, неравенство (9) показывает, что ошибка n-го «приближённого» последовательного приближения $\tilde{x}_n$ не превышает числа $\mu_n + n\delta$, и, тем самым, оценка (9) не позволяет сделать вывод о сходимости «приближённых» последовательных приближений $\tilde{x}_n$ к точному решению, так как при $n \to \infty$ правая часть в этой оценке стремится к бесконечности. Однако если последовательность μ_n достаточно быстро стремится к нулю, то при малых $\delta > 0$ элементы последовательности $(\mu_n + n\delta)$ сначала убывают и начинают возрастать лишь при достаточно больших n. Этот факт позволяет оценить близость приближённых последовательных приближений к точному решению x_* при небольших n.

Будем говорить, что последовательность $(\mu_n + n\delta)$ является V-последовательностью, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\eta \in N$ при достаточно малых $\delta > 0$ среди членов последовательности с номерами $n > \eta$ существуют члены меньше ε. Очевидно, что при $\mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$ последовательность (μ_n) является V-последовательностью.

Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такие μ_n, что при $n > \eta$ верно неравенство $\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмём произвольное $n > \eta$ и выберем $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2n}$. Тогда при $\delta \le \delta_0$

$$\mu_n + n\delta \le \frac{\varepsilon}{2} + n\frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

Напомним, что элемент $\mu_n + n\delta$ последовательности $(\mu_n + n\delta)$ оценивает ошибку $\|\tilde{x}_n - x_*\|$, тем самым для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\eta \in N$ существуют приближения $\tilde{x}_n$ с $n > \eta$ и при достаточно малого δ, отстающие от точного решения на расстоянии не больше ε.

Проведённые рассуждения легко иллюстрируются последовательностью $(\mu_n + n\delta)$ с $\mu_n = \frac{c}{n^\theta}$ $(\theta > 0)$.

Эта последовательность будет V-последовательностью, если при любом $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\min_{\nu \le n \le \infty} \left(\frac{c}{n^\theta} + n\delta \right) < \varepsilon \quad \upsilon \in N.$$

Функция $f(t) = \frac{c}{t^\theta} + t\delta$ на промежутке $[0, \infty)$ принимает наименьшее значение при

$$t_* = \left(\frac{\theta c}{\delta} \right)^{\frac{1}{\theta+1}};$$

при этом $t_* \ge \nu$, если δ достаточно мало. Отсюда следует, что при малых δ на промежутке $[\nu, \infty)$ эта функция принимает наименьшее значение

$$f(t_*) = c^{\frac{1}{1+\theta}} \theta^{-\frac{\theta}{1+\theta}} (1+\theta) \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}.$$

Её наименьшее значение при натуральных n из промежутка $[\nu, \infty)$ достигается либо в точке $t_{**} = [t_*]$, либо в точке $t_{**} = [t_*] + 1$; при этом $|t_{**} - t_*| \le 1$. Но тогда $f(t_{**}) \le f(t_*) + f'(\tau)$, где τ – некоторое число между t_* и t_{**}. Очевидно

$$\left| f'(\tau) \right| = \left| -\frac{\theta c}{t^{1+\theta}} \right| \le \delta + \frac{c\theta}{\nu^{1+\theta}}.$$

Тем самым,

$$\max_{\nu \le n \le \infty} f(t) = f(t_{**}) \le c^{\frac{1}{1+\theta}} \theta^{-\frac{\theta}{1+\theta}} (1+\theta) \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}} + \delta + \frac{c\theta}{\nu^{1+\theta}}.$$

Правая часть этого неравенства при больших ν и малых δ становится меньше наперёд заданного положительного числа ε. Тем самым, рассматриваемая последовательность является V-последовательностью.

Тот факт, что последовательность $(\mu_n + n\delta)$ оказывается V-последовательностью в теории некорректных задач обычно трактуется как сходимость итерационного метода. В действительности, эта сходимость не является сходимостью в общепринятом смысле; её наличие позволяет лишь установить, что при малых δ приближения $\tilde{x}_n$ для некоторого n достаточно близко подходят к точному решению. Описанный факт часто записывается в виде равенства

$$\lim_{n \to \infty, n\delta \to 0} \left\| \tilde{x}_n - x_* \right\| = 0. \tag{10}$$

Иногда используется другое условие

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\eta \le n < \infty} \left\| \tilde{x}_n - x_* \right\| = 0 \quad (0 \le \eta < \infty). \tag{11}$$

Ниже будем говорить, что приближённый итерационный метод (7) при выполнении соотношений (10) и (11) квазисходится к точному решению.

Проведённые рассуждения показывают, что верна

Т е о р е м а 7. *Пусть B – нормальный оператор в гильбертовом пространстве X,* $\rho(B) = 1$ *и пусть уравнение (1) разрешимо. Тогда «приближённые» последовательные приближения (7) квазисходятся к точному решению* x_*, *для которого* $Px_* = Px_0$; *иными словами для этих «приближённых» последовательных приближений справедливы равенства (10) и (11).*

Список использованной литературы

1. *Красносельский, М. А.* О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряжёнными операторами / М. А. Красносельский // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. XV, вып. 3(93). – С. 161–165.
2. *Забрейко, П. П.* Теорема М. А. Красносельского и некорректные линейные задачи с самосопряжённым оператором / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 12–17.
3. *Забрейко, П. П.* Теорема М. А. Красносельского и итерационные процедуры решения некорректных задач с самосопряжёнными операторами / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 9–14.
4. *Забрейко, П. П.* Об обобщении теоремы М. А. Красносельского на несамосопряжённые операторы / П. П. Забрейко, А. В. Михайлов // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, №. 2. – С. 16–21.
5. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука: Глав. ред. физ.-матем. лит., 1969. – С. 455.
6. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: Мир, 1979. – С. 587.
7. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Изд. иност. лит., 1962. – С. 896.
8. *Халмош, П.* Гильбертово пространство в задачах / П. Халмош. – М.: Мир, 1970. – С. 352.
9. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Спектральная теория / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. – М.: Мир, 1966. – С. 1064.

Поступило в редакцию 22.04.2015