УДК 519.63

Ф. Ж. ГАСПАР[1], П. П. МАТУС[2], В. Т. К. ТУЕН[3], Л. М. ХИЕУ[3]

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

[1]Университет Сарагосы, Испания
paco1111@gmail.com
[2]Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь; Католический университет Люблина, Польша
matus@im.bas-net.by
[3]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Vokimtuyen188@gmail.com; lmhieuktdn@gmail.com

В настоящей работе для канонической формы векторно-разностных схем общего вида при условиях положительности матричных коэффициентов получены двусторонние оценки сеточного решения при произвольных незнакопостоянных входных данных задачи. Полученные результаты применяются для получения двусторонних оценок и априорных оценок в норме *C* конкретных монотонных векторно-разностных схем, аппроксимирующих слабо связанные системы эллиптических и параболических уравнений с граничными условиями Дирихле.

Ключевые слова: принцип максимума, двусторонняя оценка, монотонная разностная схема, слабо связанная система.

FRANCISCO GASPAR[1], PIOTR MATUS[2], VO THI KIM TUYEN[3], LE MINH HIEU[3]

MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES FOR SYSTEMS OF ELLIPTIC AND PARABOLIC EQUATIONS

[1]University of Saragosa, Spaine
paco1111@gmail.com
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus; Catholic University of Lublin, Poland
matus@im.bas-net.by
[3]Belarusian State University, Minsk, Belarus
Vokimtuyen188@gmail.com; lmhieuktdn@gmail.com

In this article, for the canonical form of vector-difference schemes under the positivity conditions of matrix coefficients the two-sided estimates for an approximate solution at the arbitrary non sign-constant input data of the problem are obtained. The obtained results are used for deriving two-sided estimates and *a priori* estimates in the norm *C* of monotone vector-difference schemes that approximate the weakly coupled systems of elliptic and parabolic equations with the Dirichlet boundary conditions.

Keywords: maximum principle, two-sided estimate, monotone difference scheme, weakly coupled system.

Введение. Вычислительные методы, удовлетворяющие сеточному принципу максимума, принято называть монотонными [1]. Отметим, что принцип максимума позволяет не только устанавливать однозначную разрешимость соответствующих разностных задач, но и получать важные теоретические априорные оценки устойчивости и сходимости разностного решения в наиболее сильной равномерной метрике C или L_∞. Монотонные разностные схемы в свою очередь играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как они позволяют получить численное решение без нефизических осциляций [2].

Исследованию монотонных разностных схем для линейных эллиптических и параболических уравнений в скалярном случае посвящено большое число работ (см., напр., [3]). Тем не менее, ввиду трудности проблемы в научной литературе практически отсутствуют работы по разработке аналогичных алгоритмов для системы эллиптических уравнений, классическим примером которых является система уравнений стационарной упругости (уравнения Ламэ).

Настоящая работа посвящена разработке теории монотонных разностных схем, аппроксимирующих так называемые слабо связанные линейные эллиптические и квазилинейные параболические системы уравнений [4]. Аналогично скалярному случаю [1] вводится каноническая форма векторно-разностных схем и дается определение ее монотонности, тесно связанное со свойством положительности разностного решения. При выполнении условий положительности матричных коэффициентов устанавливаются двусторонние оценки разностного решения таких векторно-разностных уравнений и доказана важная априорная оценка в равномерной форме C. Полученные результаты применяются к анализу свойств монотонности разностных схем, аппроксимирующих на неравномерных сетках со вторым порядком системы линейных эллиптических и квазилинейных параболических уравнений.

Принцип максимума для векторно-разностных схем с незнакопостоянными входными данными. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве задано конечное количество точек – сетка Ω_h. Каждой точке $x \in \Omega_h$ сопоставим один и только один шаблон $\mathcal{M}(x)$ – любое подмножество Ω_h, содержащее данную точку. Окрестностью точки x назовем множество $\mathcal{M}'(x) = \mathcal{M}(x) \diagdown x$. Далее, каждой точке $x \in \Omega_h$ соотносится одно и только одно векторное уравнение вида

$$A(x)\vec{Y}(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi)\vec{Y}(\xi) + \vec{F}(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{1}$$

аналогично скалярному случаю, называемое канонической формой записи векторно-разностной схемы [1]. Здесь матрицы $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{m\times m}$, $B(x,\xi) = \{b_{ij}(x,\xi)\}_{m\times m}$ и вектор правой части $\vec{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))^T$ – заданы, неизвестная векторная функция $\vec{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^T$ принимает вещественные значения. Точка x называется граничным узлом сетки, если в этой точке задано значение векторной функции $\vec{Y}(x)$, т. е.

$$\vec{Y}(x) = \vec{\mu}(x), \quad x \in \gamma, \tag{2}$$

где γ – множество граничных узлов, $\vec{\mu}(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_m(x))^T$.

О п р е д е л е н и е. *Векторно-разностная схема (1), (2) называется монотонной, если для ее решения выполнены следующие предложения:*

если $\vec{F}(x) \ge 0,\ x \in \Omega_h,\ \vec{\mu}(x) \ge 0,\ x \in \gamma$, *то* $\vec{Y}(x) \ge 0,\ x \in \bar{\Omega}_h,\ \bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \gamma$;

если $\vec{F}(x) \le 0,\ x \in \Omega_h,\ \vec{\mu}(x) \le 0,\ x \in \gamma$, *то* $\vec{Y}(x) \le 0,\ x \in \bar{\Omega}_h$.

Введем матрицы $D^{(1)}(x) = \{d_{ij}^{(1)}(x)\}_{m\times m}$ и $D(x) = \mathrm{diag}\{d_{11}(x), d_{22}(x), \ldots, d_{mm}(x)\}$, определяемые следующим образом:

$$D^{(1)}(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi), \quad d_{ii}(x) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}^{(1)}(x), \quad i = \overline{1,m}.$$

Матрицу $A(x)$ можно переписать в виде $A(x) = A^{(1)}(x) - A^{(2)}(x)$, где

$$A^{(1)}(x) = \mathrm{diag}\{a_{11}^{(1)}(x), a_{22}^{(1)}(x), \ldots, a_{mm}^{(1)}(x)\}, \quad a_{ii}^{(1)}(x) = a_{ii}(x), \quad i = \overline{1,m},$$

$$A^{(2)}(x) = \{a_{ij}^{(2)}(x)\}_{m\times m}, \quad a_{ii}^{(2)}(x) = 0, \quad a_{ij}^{(2)}(x) = -a_{ij}(x), \quad i \ne j, \quad i, j = \overline{1,m}.$$

Тогда векторное уравнение (1) запишем в виде

$$A^{(1)}(x)\vec{Y}(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x,\xi)\vec{Y}(\xi) + A^{(2)}(x)\vec{Y}(x) + \vec{F}(x), \quad x \in \Omega_h. \tag{3}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий положительности матричных коэффициентов (т. е. все элементы матрицы положительны [5])

$$A^{(1)}(x) > 0, \quad A^{(2)}(x) \ge 0, \quad B(x,\xi) > 0, \quad D(x) > 0 \quad \text{для всех } \xi \in \mathcal{M}'(x), \tag{4}$$

и определим

$$\left\|\vec{V}\right\|_{\bar{C}} = \max_{1\le j\le m}\left(\max_{x\in\bar{\Omega}_h}\left|v_j(x)\right|\right), \quad \max_{x\in\Omega_h}\vec{V}(x) = \max_{1\le j\le m}\left(\max_{x\in\Omega_h} v_j(x)\right), \quad \min_{x\in\Omega_h}\vec{V}(x) = \min_{1\le j\le m}\left(\min_{x\in\Omega_h} v_j(x)\right).$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия положительности матричных коэффициентов (4). Тогда максимальное и минимальное значения решения векторно-разностной схемы (1), (2) принадлежат интервалу изменения входных данных*

$$m_1 \le y_j(x) \le m_2,\ \ x \in \bar{\Omega}_h,\ \ j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

где

$$m_1 = \min\left\{\min_{x\in\gamma} \vec{\mu}(x),\ \min_{x\in\Omega_h}(D^{-1}(x)\vec{F}(x))\right\},\ \ m_2 = \max\left\{\max_{x\in\gamma} \vec{\mu}(x),\ \max_{x\in\Omega_h}(D^{-1}(x)\vec{F}(x))\right\}.$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда векторно-разностная схема (1), (2) монотонна и для нее имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C*

$$\left\|\vec{Y}\right\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\left\|\vec{\mu}\right\|_{C_\gamma}, \left\|D^{-1}\vec{F}\right\|_{C}\right\}.$$

Доказательство монотонности векторно-разностной схемы проводится на основе анализа двусторонней оценки (5).

Разностные схемы на неравномерных сетках для слабо связанной эллиптической системы одномерных уравнений конвекции–диффузии. Рассмотрим следующую систему:

$$-L\vec{U} = C\vec{U} + \vec{F}(x),\ \ 0 < x < l,$$

$$\vec{U}(0) = \vec{\mu}^{(1)},\ \ \vec{U}(l) = \vec{\mu}^{(2)},$$

где

$$L = \mathrm{diag}(L_1, L_2, \ldots, L_m),\ \ L_\alpha = L_\alpha^D + L_\alpha^C,\ \ \alpha = \overline{1, m},$$

$$L_\alpha^D = \frac{d}{dx}\left(k_\alpha(x)\frac{d}{dx}\right),\ \ L_\alpha^C = r_\alpha(x)\frac{d}{dx},\ \ 0 < k_1 \le k_\alpha \le k_2,$$

$$\vec{U}(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))^T,\ \ C = \{c_{ij}\}_{m\times m}.$$

Введем произвольную неравномерную сетку

$$\hat{\bar{\omega}}_h = \hat{\omega}_h \cup \gamma_h,\ \ \hat{\omega}_h = \{x_i = x_{i-1} + h_i,\ \ i = 1, 2, ..., N-1\},\ \ \gamma_h = \{x_0 = 0,\ \ x_N = l\}.$$

Пусть $\hbar_i = 0{,}5(h_{i+1} + h_i), \bar{x}_i = x_i + \tilde{h}_i, \tilde{h}_i = (h_{i+1} - h_i)/3$. Тогда справедливы следующие разложения:

$$v_{\bar{x}\hat{x},i} - v''(\bar{x}_i) = O(\hbar_i^2),\ \ v_{(\beta_{1i}\beta_{2i})} - v(\bar{x}_i) = O(\hbar_i^2),\ \ h_{i+1}\beta_1 - h_i\beta_2 = \tilde{h}_i. \tag{6}$$

Далее будем использовать безындексные обозначения для независимой переменной $x = x_i$, $x_\pm = x_{i\pm1}$ и для сеточных функций $v = v_i = v(x_i)$, $v^{(\pm1)} = v(x_{i\pm1})$. С помощью (6) и дифференциального равенства $(ku')' = 0{,}5((ku)'' + ku'' - k''u)$ построим на обычном трехточечном шаблоне разностную схему второго порядка аппроксимации на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$

$$-\Lambda_\alpha y_\alpha = c_{\alpha\alpha} y_{\alpha(\beta_5\beta_6)} + \sum_{j=1, j\ne\alpha}^{m} (c_{\alpha j} y_{j(\beta_1\beta_2)}) + \varphi_\alpha,\ \ \alpha = \overline{1, m}, \tag{7}$$

$$y_\alpha(0) = \mu_\alpha^{(1)},\ \ y_\alpha(l) = \mu_\alpha^{(2)},\ \ \alpha = \overline{1, m}, \tag{8}$$

где

$$\Lambda_\alpha y_\alpha = \kappa_\alpha \Lambda_\alpha^D y_\alpha + \Lambda_\alpha^C y_\alpha,$$

$$\Lambda_\alpha^D y_\alpha = 0{,}5(k_{\alpha(\beta_1\beta_2)} y_{\alpha\bar{x}\hat{x}} + (k_\alpha y_\alpha)_{\bar{x}\hat{x}} - k_{\alpha\bar{x}\hat{x}} y_{\alpha(\beta_3\beta_4)}),$$

$$v_{(\beta_k\beta_{k+1})} = \beta_k v_+ + \left(1 - \beta_k - \beta_{k+1}\right)v + \beta_{k+1} v_-,\ \ k = 1, 3, 5,$$

$$\Lambda_\alpha^C y_\alpha = \bar{b}_\alpha^+ a_\alpha^{(+1)} y_{\alpha x} + \bar{b}_\alpha^- a_\alpha y_{\alpha\bar{x}},\ \ \bar{b}_\alpha^\pm = \frac{r_\alpha^\pm(\bar{x})}{k_\alpha(\bar{x})},\ \ a_\alpha = k_\alpha(x - h/2),$$

$$r_\alpha^+(\bar{x}) = 0{,}5(r_\alpha + |r_\alpha|) \ge 0,\ \ r_\alpha^-(\bar{x}) = 0{,}5(r_\alpha - |r_\alpha|) \le 0,\ \ \varphi_\alpha = f_\alpha(\bar{x}),$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha},\ \ R_\alpha = \bar{b}_\alpha^+ \frac{2h + h_+}{6} - \bar{b}_\alpha^- \frac{2h_+ + h}{6}.$$

Переменные весовые множители $\beta_{k,k+1}$, $k = 1, 3, 5$, выбираются из условий монотонности (4) и требования второго порядка аппроксимации (6)

$$\beta_1 = 0,5\left(\left|\tilde{h}\right| + \tilde{h}\right) / h_+, \;\; \beta_2 = 0,5\left(\left|\tilde{h}\right| - \tilde{h}\right) / h,$$

$$\beta_3 = 0,5\left(\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}} - \left|\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}}\right|\right) / (h_+ k_{\alpha\bar{x}\hat{x}}), \;\; \beta_4 = -0,5\left(\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}} + \left|\tilde{h}k_{\alpha\bar{x}\hat{x}}\right|\right) / (hk_{\alpha\bar{x}\hat{x}}),$$

$$\beta_5 = 0,5\left(\tilde{h} - \left|\tilde{h}\right|\right) / h_+, \;\; \beta_6 = -0,5\left(\tilde{h} + \left|\tilde{h}\right|\right) / h.$$

Запишем систему разностных уравнений (7) в каноническом виде

$$a^{(1)}_{\alpha\alpha}(x_i)y_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{m} b^{(1)}_{\alpha j}(x_i)y_{j i-1} + \sum_{j=1}^{m} b^{(2)}_{\alpha j}(x_i)y_{j i+1} + \sum_{j=1}^{m} a^{(1)}_{\alpha j}(x_i)y_{ji} + \varphi_\alpha, \;\; i = \overline{1, N-1}, \;\; \alpha = \overline{1, m},$$

с коэффициентами

$$b^{(1)}_{\alpha j}(x_i) = c_{\alpha j}\beta_{2i}, \;\; b^{(2)}_{\alpha j}(x_i) = c_{\alpha j}\beta_{1i}, \;\; j = \overline{1, m}, \;\; j \ne \alpha, \;\; i = \overline{1, N-1},$$

$$b^{(1)}_{\alpha\alpha}(x_i) = 0,5\kappa_{\alpha i}\left((k_{\alpha(\beta_{1i}\beta_{2i})} + k_{\alpha i-1}) / (\hbar_i h_i) - \beta_{4i}k_{\alpha\bar{x}\hat{x},i}\right) - \bar{b}^-_\alpha a_{\alpha i} / h_i + c_{\alpha\alpha}\beta_{6i},$$

$$b^{(2)}_{\alpha\alpha}(x_i) = 0,5\kappa_{\alpha i}\left((k_{\alpha(\beta_{1i}\beta_{2i})} + k_{\alpha i+1}) / (\hbar_i h_{i+1}) - \beta_{3i}k_{\alpha\bar{x}\hat{x},i}\right) + \bar{b}^+_\alpha a_{\alpha i+1} / h_{i+1} + c_{\alpha\alpha}\beta_{5i},$$

$$a^{(1)}_{\alpha\alpha}(x_i) = b^{(1)}_{\alpha\alpha}(x_i) + b^{(2)}_{\alpha\alpha}(x_i) - c_{\alpha\alpha},$$

$$a^{(2)}_{\alpha j}(x_i) = c_{\alpha j} - b^{(1)}_{\alpha j}(x_i) - b^{(2)}_{\alpha j}(x_i), \;\; j = \overline{1, m}, \;\; j \ne \alpha, \;\; a^{(2)}_{\alpha\alpha}(x_i) = 0,$$

$$d_{\alpha\alpha}(x_i) = a^{(1)}_{\alpha\alpha}(x_i) - \sum_{j=1}^{m}\left(b^{(1)}_{\alpha j}(x_i) + b^{(2)}_{\alpha j}(x_i) + a^{(2)}_{\alpha j}(x_i)\right) = -c_{\alpha\alpha} - \sum_{j=1, j\ne\alpha}^{m} c_{\alpha j}.$$

Для разностной схемы (8) условия монотонности (4) выполнены при

$$c_{\alpha j} \ge 0, \;\; j \ne \alpha, \;\; c_{\alpha\alpha} < -\sum_{j=1, j\ne\alpha}^{m} c_{\alpha j}, \;\; j, \alpha = \overline{1, m}. \tag{9}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнено условие (9). Тогда для решения разностной схемы (7), (8) имеет место двусторонняя оценка*

$$\min\left\{\vec{\mu}^{(1)}, \vec{\mu}^{(2)}, \min_{0\le x\le l}(D^{-1}\vec{F})\right\} \le y_j \le \max\left\{\vec{\mu}^{(1)}, \vec{\mu}^{(2)}, \max_{0\le x\le l}(D^{-1}\vec{F})\right\}, \;\; j = \overline{1, m}.$$

С л е д с т в и е 2. *При выполнении условия (9) разностная схема (7), (8) безусловно монотонна и для нее справедлива априорная оценка*

$$\left\|\vec{Y}\right\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\left|\vec{\mu}^{(1)}\right|, \left|\vec{\mu}^{(2)}\right|, \left\|D^{-1}\vec{F}\right\|_C\right\}.$$

Разностные схемы на равномерных сетках для слабо связанной системы двумерных квазилинейных параболических уравнений. В области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega}\times[0, T]$, $\bar{\Omega} = \{0 \le x_1 \le l_1, \; 0 \le x_2 \le l_2\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \{x_\alpha = 0, \; x_\alpha = l_\alpha, \; \alpha = 1, 2\}$ для системы слабо связанных квазилинейных параболических уравнений рассмотрим начально-краевую задачу с условиями Дирихле следующего типа:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} = L\vec{U} + C\vec{U} + \vec{F}(x,t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T,$$

$$\vec{U}(x, 0) = \vec{U}_0(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$\vec{U}(x, t) = \vec{\mu}(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t \le T,$$

где

$$L_k u_k = \sum_{p=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_{p\alpha}(\vec{U})\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right), \; \alpha = 1, 2, \quad k_p(\vec{U}) = k_p(u_1, u_2, ..., u_m).$$

Предполагаем, что $\vec{F}(x, t) \ge 0$, $\vec{\mu}(x, t) \ge 0$ и элементы матрицы C удовлетворяют условию (9). Коэффициенты $k_{p\alpha}(\vec{U})$ ограничены снизу и сверху

$$0 < k^{(p\alpha)}_1 \le k_{p\alpha}(\vec{U}) \le k^{(p\alpha)}_2, \;\; \alpha = 1, 2, ..., m, \quad \forall\vec{U} \in [m_3, m_4], \quad k^{(p\alpha)}_1, \; k^{(p\alpha)}_2 - \text{const},$$

$$m_3 = e^{-cT} \min\left\{ \min_{x\in\Gamma, 0<t\le T} \vec{\mu}(x,t), \min_{x\in\bar{\Omega}} \vec{U}_0(x) + T \min_{x\in\bar{\Omega}, 0<t\le T} \vec{F}(x,t) \right\},\ c = \max_{1\le i\le m}\left(-\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \right), \tag{10}$$

$$m_4 = \max\left\{ \max_{x\in\Gamma, 0<t\le T} \vec{\mu}(x,t), \max_{x\in\bar{\Omega}} \vec{U}_0(x) \right\} + T \max_{x\in\bar{\Omega}, 0<t\le T} \vec{F}(x,t). \tag{11}$$

Построим равномерную пространственно-временную сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,\ldots,N_0,\ \ \tau N_0 = T\},\quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{t_0 = 0\},\ \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

$$\omega_h = \{x_{i_1 i_2} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}),\ x_\alpha^{i_\alpha} = x_\alpha^{i_\alpha - 1} + h_\alpha,\ i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1},\ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha,\ \alpha = 1,2\},$$

$$\gamma_h = \{x_\alpha^0 = 0,\ x_\alpha^{N_\alpha} = l_\alpha,\ \alpha = 1,2\} \setminus \{(0,0), (0,l_2), (l_1,0), (l_1,l_2)\}.$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ исходную дифференциальную задачу аппроксимируем чисто неявной разностной схемой второго порядка аппроксимации

$$\vec{Y}_t = L_h \vec{Y}^{n+1} + C\vec{Y}^{n+1} + \vec{F}^{n+1}(x),\quad x\in\omega_h,\quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \tag{12}$$

$$\vec{Y}(x,0) = \vec{u}_0(x),\quad x\in\bar{\omega}_h,\ \vec{Y}^{n+1}(x) = \vec{\mu}^{n+1}(x),\quad x\in\gamma_h,\quad n = \overline{0, N_0 - 1}. \tag{13}$$

Здесь

$$L_h = \operatorname{diag}(L_{1h}, L_{2h}, \ldots, L_{mh}),\quad L_{k\,h} \hat{y}_{k,i_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{2} (a_{k\,\alpha}(\vec{Y}_{i_\alpha}) \hat{y}_{k\,\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha, i_\alpha},\quad k = 1,2,\ldots,m,$$

$$a^n_{p\,\alpha, i_\alpha} = a_{p\,\alpha}(\vec{Y}^n_{i_\alpha}) = \frac{1}{2}(k_{p\,\alpha}(\vec{Y}^n_{i_\alpha - 1}) + k_{p\,\alpha}(\vec{Y}^n_{i_\alpha})).$$

Для исследования монотонности и получения двусторонних оценок запишем разностную схему (12), (13) в виде (3)

$$A^{(1)} \vec{Y}^{n+1}_{i_1 i_2} = B_1 \vec{Y}^{n+1}_{i_1 - 1 i_2} + B_2 \vec{Y}^{n+1}_{i_1 i_2 - 1} + B_3 \vec{Y}^{n+1}_{i_1 + 1 i_2} + B_4 \vec{Y}^{n+1}_{i_1\, i_2 + 1} + A^{(2)} \vec{Y}^{n+1}_{i_1 i_2} + \vec{G}^{n+1}_{i_1 i_2},\ i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1, \tag{14}$$

$$\vec{Y}^0_{i_1 i_2} = \vec{U}_{0\ i_1 i_2},\quad \vec{Y}^{n+1}_{i_1\, i_2} = \vec{\mu}^{n+1}_{i_1\, i_2},\ i_\alpha = 1,2,\ldots,N_\alpha - 1.$$

Так как все входящие в (14) матрицы положительны (т. е. выполнены условия (4)), то разностная схема (12), (13) монотонна.

Т е о р е м а 3. *Для решения разностной схемы (12), (13) имеет место двусторонняя оценка вида*

$$m_3 \le y^n_{k, i_1 i_2} \le m_4,\quad n = \overline{0, N_0},\ k = \overline{1, m},\ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha},\ \alpha = 1,2,$$

где m_3, m_4 *определяются из формул (10), (11).*

С л е д с т в и е 3. *Разностная схема (12), (13) монотонна и для нее справедлива априорная оценка в равномерной норме C*

$$\left\| \vec{Y}^n \right\|_{\bar{C}} \le \max\left\{ \max_{1\le n\le N_0} \left\| \vec{\mu}^n \right\|_{C_\gamma}, \left\| \vec{U}_0 \right\|_{\bar{C}} \right\} + T \max_{1\le n\le N_0} \left\| \vec{F}^n \right\|_C,\ n = \overline{1, N_0}.$$

З а м е ч а н и е. *Аналогичным образом можно доказать оценки для решения разностной схемы (12), (13) в случаях* $\vec{\mu}(x,t) \le 0,\ \vec{F}(x,t) \le 0;\ \vec{\mu}(x,t) \ge 0,\ \vec{F}(x,t) \le 0$ *и* $\vec{\mu}(x,t) \le 0,\ \vec{F}(x,t) \ge 0.$

Список использованной литературы

1. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

2. *Матус, П. П.* Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Ф. Ж. Гаспар // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 18–22.

3. *Matus, P. P.* The maximum principle and same its applications / P. P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2002. – Vol. 2, N 1. – P. 50–91.

4. *Mitidieri, E.* Weakly Coupled Elliptic Systems and Positivity / Enzo Mitidieri, Guido Sweers // Mathematische Nachrichten. – 1995. – Vol. 173, Issue 1. – P. 259–286.

5. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Поступило в редакцию 16.03.2016