

УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ¹, В. И. БЕРНИК²**РЕГУЛЯРНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ
В КРУГАХ МАЛОГО РАДИУСА**

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

¹Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики
и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

lammv@mail.ru

²Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

bernik@im.bas-net.by

Полученные в сообщении результаты связаны с распределением алгебраических чисел большой высоты $Q \in \mathbb{N}$ в кругах малых радиусов $r_i = Q^{-\gamma}, \gamma \geq 0$. В работе доказано, что при любом $Q \geq Q_0(n)$ в \mathbb{C} существуют круги K_1 и K_2 радиусов r_1 и r_2 , $\max(r_1, r_2) < c_1(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_1 > c_{01}(n)$, в которых нет алгебраических чисел $\alpha \in K_1, \beta \in K_2$, $\max(H(\alpha), H(\beta)) \leq Q$. Если же радиусы кругов удовлетворяют условию $\min(r_1, r_2) > c_2(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_2 > c_{02}(n)$, то количество алгебраических чисел в кругах K_1 и K_2 не менее, чем $c_3(n)Q^5 r_1^2 r_2^2$.

Ключевые слова: алгебраические числа, диофантовы приближения, мера Лебега, теорема Дирихле, теорема Минковского о выпуклом теле, теорема Лиувилля, дроби Фарея, равномерное распределение, регулярная система, распределение алгебраических чисел.

M. V. LAMCHANOVSKAYA¹, V. I. BERNIK²**REGULARITY OF DISTRIBUTION OF COMPLEX ALGEBRAIC NUMBERS
IN CIRCLES OF SMALL RADIUS**¹Institute of Information Technology of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus
lammv@mail.ru²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

bernik@im.bas-net.by

For any sufficiently large positive integer $Q \geq Q_0(n)$ we prove that there exist complex circles $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ of radii r_1 and r_2 , $\max(r_1, r_2) < c_1(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_1 > c_{01}(n)$, containing no algebraic numbers $\alpha \in K_1, \beta \in K_2$ with heights bounded by Q , $\max(H(\alpha), H(\beta)) \leq Q$. We also show that if the radii of the circles K_1 and K_2 obey the condition $\min(r_1, r_2) > c_2(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_2 > c_{02}(n)$, then the number of algebraic numbers lying in these circles is bounded from below by $c_3(n)Q^5 r_1^2 r_2^2$.

Keywords: algebraic numbers, diophantine approximations, Lebesgue measure, Dirichlet's theorem, Minkowski theorem on convex body, Liouville's theorem, Farey fractions, uniform distribution, regular system, distribution of algebraic numbers.

Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (1)$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ обозначим корни полинома, $H(\alpha)$ – высоту алгебраического числа, равную модулю максимального коэффициента минимального многочлена алгебраического числа α . Далее $Q \geq 1$ достаточно большое натуральное число, а величины $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ зависят только от n и не зависят от H и Q , μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{C}$.

Введем класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = n \geq 2, H(P) \leq Q\}.$$

Нетрудно показать, что $\max_{0 \leq j \leq n} |\alpha_j| < Q + 1$ и поэтому все корни полиномов $P(z) \in \mathcal{P}_n(Q)$ лежат в круге \mathcal{L} радиуса $r \leq Q + 1$. Их распределение в \mathcal{L} трудная задача ввиду сложной зависимости α_j от коэффициентов $P(z)$ в (1). Распределение корней имеет важное значение в теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел [1–3]. Исследование распределения алгебраических чисел позволило В. Г. Спринджуку доказать известную гипотезу Малера [4].

Данное сообщение посвящено проблеме распределения корней полиномов четвертой степени в кругах малых радиусов. Результаты сообщения позволяют получить регулярность распределения комплексных алгебраических чисел в \mathbb{C} с явной зависимостью радиусов кругов от Q [5].

Л е м м а 1 [6]. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $\deg P = n$. Тогда для любого набора различных корней, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \leq n$, справедливо неравенство $|\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_n}| < c_1(n) \frac{H(P)}{|a_n|}$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ корни многочлена (1). С каждым корнем будем связывать множество

$$S(\alpha_i) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |z - \alpha_j|\}.$$

Везде далее полагаем, что $i=1$ и корни многочлена $P(z)$ упорядочены относительно $\alpha_1: |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_3| < \dots < |\alpha_1 - \alpha_n|$.

Л е м м а 2 [1]. Пусть $z \in S(\alpha_1)$. Тогда $|z - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(z)|}{|P'(\alpha_1)|}$.

Обозначим через $K_i(u_i, r_i)$, $i=1, 2$, круги с центром в точке u_i радиусами r_i .

Т е о р е м а 1. Для любого $Q \geq 1$ существует шар $S = K_1(u_1, r_1) \times K_2(u_2, r_2)$, где $|u_1 - u_2| > \delta > 0$, $r_i = Q^{-\mu_i}$, $i=1, 2$, $\mu_i \geq 0$, такой, что в шаре $K = K_1(w_1, R_1) \times K_2(w_2, R_2)$, $K \subset S$, $u_1 \notin K_1(w_1, R_1)$, $u_2 \notin K_2(w_2, R_2)$, $R_1 < c_2 r_1$, $R_2 < c_3 r_2$, нет алгебраических точек $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\deg P \geq 4$, $H(\bar{\alpha}) = \max\{H(\alpha_1), H(\alpha_2)\} \leq Q$ при условии:

а) $\mu_1 + \mu_2 > 2$ и $Q > Q_0$;

б) $\mu_1 + \mu_2 = 2$ и $0 < c_2 \leq c_3$, где c_3 – достаточно мала.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Обозначим T шар, сопряженный шару K , т. е. $T = T_1(\bar{u}_1, r_1) \times T_2(\bar{u}_2, r_2)$, где T_i , $i=1, 2$, круг, сопряженный кругу K_i . Рассмотрим многочлены

$$P_1(z) = z^2 + z + 1 \text{ с корнями } u_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \bar{u}_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

и

$$P_2(z) = z^2 - z + 2 \text{ с корнями } u_2 = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}, \bar{u}_2 = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2}.$$

Образуем шары $K_1(u_1, r_1) \times K_2(u_2, r_2)$ и $T_1(\bar{u}_1, r_1) \times T_2(\bar{u}_2, r_2)$. Пусть α_1, α_2 корни минимального многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = 0$, $\deg P \geq 4$, $H(P) \leq Q$. Предположим, что $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in K$, тогда $\beta = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) \in T$. Обозначим $P_3(z) = P_1(z)P_2(z) = z^4 + 2z^2 + z + 1$. Найдем $R(P, P_3)$ – результат многочленов $P(z)$ и $P_3(z)$. Так как $P(z)$ и $P_3(z)$ не имеют общих корней, то

$$1 \leq |R(P, P_3)| = a_n^4 |\alpha_1 - u_1| |\alpha_2 - u_2| |\alpha_3 - u_3| |\alpha_4 - u_4| L(P, P_3) \leq 16c_2^2 c_3^2 a_n^4 Q^{-2(\mu_1 + \mu_2)} L(P, P_3), \quad (2)$$

где $\alpha_3 = \bar{\alpha}_1$, $\alpha_4 = \bar{\alpha}_2$, $u_3 = \bar{u}_1$, $u_4 = \bar{u}_2$, $L(P, P_3) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq 4}} |\alpha_i - u_j|$, $i \neq j$.

По лемме 1 $|L(P, P_3)| < c_4 (H a_n^{-1})^4 < c_4 Q^4 a_n^{-4}$ и поэтому (2) можно оценить как

$$1 \leq |R(P, P_3)| \leq 16c_2^2 c_3^2 c_4 Q^{4-2(\mu_1 + \mu_2)}. \quad (3)$$

Если $\mu_1 + \mu_2 > 2$, то при достаточно большой величине Q неравенство (3) противоречиво.

Если $\mu_1 + \mu_2 = 2$, то при $c_2 c_3 < \frac{1}{4} \sqrt{c_4^{-1}}$ неравенство (3) противоречиво. Следовательно, в шаре K нет алгебраических чисел $\bar{\alpha}$, $\deg \alpha \geq 4$, $H(\bar{\alpha}) \leq Q$.

Найдем в кругах каких радиусов обязательно будут алгебраические числа. Для упрощения дальнейших оценок будем считать, что $z, u \in K(0, 1)$.

Т е о р е м а 2. Если $\max \mu_i \leq \frac{1}{4}$, $i=1, 2$, то при достаточно большой величине c_5 в шаре $K = K_1(z, r_1) \times K_2(u, r_2)$, $r_i > c_5 Q^{-\mu_i}$, $i=1, 2$, $\mu_i \geq 0$, существует не менее $c_6 Q^{5-2(\mu_1+\mu_2)}$ точек с алгебраическими координатами четвертой степени и высоты $H(\bar{\alpha}) < c_7 Q$.

Теорема 2 может быть обобщена на алгебраические числа произвольной степени n . Для этого необходимо получить оценки решений системы неравенств (14) для многочленов степени $n-1$ и при малых значениях производной воспользоваться оценками величин $|z - \alpha|$ по второй производной как в [1].

Изложим схему доказательства теоремы 2. Пользуясь принципом ящиков Дирихле нетрудно доказать, что при любом $z \in K$ найдется полином $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$, для которого верна система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}} \\ |P(u)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \quad (4)$$

Если к системе (4) добавить условие

$$\min(P'(z), P'(u)) > \delta_0 Q, \delta_0 > 0,$$

то из леммы 2 получим существование корней α_1, α_2 и полинома $P(z)$ таких, что

$$\begin{cases} |z - \alpha_1| < 4c_6 \delta_0^{-1} Q^{-\frac{5}{4}} \\ |u - \alpha_2| < 4c_6 \delta_0^{-1} Q^{-\frac{5}{4}} \end{cases}$$

и искомые алгебраические числа в кругах получены.

Осталось доказать, что система неравенств (4) с дополнительными условием

$$\min(P'(z), P'(u)) \leq \delta_0 Q \quad (5)$$

разрешима только на множестве малой меры. Пусть далее

$$|u - z| > \delta. \quad (6)$$

Т е о р е м а 3. Обозначим $\mathcal{L}_4(Q)$ множество $z \in K_1(z_1, r_1)$, $u \in K_2(u_2, r_2)$, $|z| > \delta$, $|u| > \delta$, для которых система неравенств (4), (5) имеет решение в полиномах $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$. Тогда $\mu \mathcal{L}_4(Q) < \frac{1}{4} \mu K_1 \mu K_2$.

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение теоремы Малера–Спринджук на области малой меры.

Схема доказательства теоремы 3. Из условия (4), (6) и леммы 2 при $z \in S(\alpha_1)$, $u \in S(\alpha_2)$ следует, что

$$\begin{cases} |z - \alpha_1| < 2^{-3} c_6 Q^{-\frac{1}{4}} |P'(\alpha_1)|^{-1} \\ |u - \alpha_2| < 2^{-3} c_6 Q^{-\frac{1}{4}} |P'(\alpha_2)|^{-1}. \end{cases}$$

Оценим значение $|P'(\alpha_1)| = a_n \prod_{j=2}^n |\alpha_i - \alpha_j|$. Из неравенств $|z - \alpha_1| < \frac{\delta}{4}$, $|u - \alpha_2| < \frac{\delta}{4}$ и (6) имеем $c_7(\delta) a_4 < |P'(\alpha_1)| < c_8(\delta) a_4$. Отсюда

$$\begin{cases} |z - \alpha_1| < c_9 a_n^{-1} Q^{-\frac{1}{4}} \\ |u - \alpha_2| < c_9 a_n^{-1} Q^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \quad (7)$$

При фиксированном $P(z)$ из (7) следует, что мера $\mu\mathcal{L}_4(Q)$ тех (z, u) , удовлетворяющих системе (4), (5), не превосходит

$$\mu\mathcal{L}_4(Q) < 2^4 c_{10} a_n^{-4} Q^{-1}. \quad (8)$$

Оценим количество многочленов со старшими коэффициентами a_4 с условием $|a_j| \leq a_4, 0 \leq j \leq 3$, для которых верна система неравенств (4), (5).

Пусть d_1 – центр круга K_1 , а d_2 – центр круга K_2 . Тогда любую точку (z, u) можно записать в виде

$$\begin{cases} z = d_1 + \theta_1 r_1 \\ z = d_2 + \theta_2 r_2, \end{cases} \quad (9)$$

где $|\theta_j| \leq 1, j = 1, 2$. Подставим z и u из (9) в систему (4). Получим

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{11} \left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1} \right) \\ |P(d_2)| < c_{12} \left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_2} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Пусть $\mu_1 \geq \mu_2$. Поделим квадрат со стороной $2Q^{-\mu_2}$ на квадраты со стороной $2Q^{-\mu_1}$. Количество таких квадратов не превосходит

$$c_{13} Q^{2(\mu_1 - \mu_2)}. \quad (11)$$

Система неравенств (10) в квадратах со сторонами $2Q^{-\mu_1}$ примет вид

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{14} \left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1} \right) \\ |P(d_2)| < c_{15} \left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1} \right). \end{cases} \quad (12)$$

Теперь, если $a_4 > Q^{\mu_1}, \mu_1 \leq \frac{1}{4}$, то систему неравенств (12) можно переписать в виде

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{16} a_4 Q^{-\mu_1} \\ |P(d_2)| < c_{17} a_4 Q^{-\mu_1}. \end{cases} \quad (13)$$

Зафиксируем a_4 и набор (a_0, a_1, a_2, a_3) , для которого выполняется (13). Пусть (l_0, l_1, l_2, l_3) другой набор коэффициентов с условиями (13). Многочлен с коэффициентами a_j обозначим $P_1(z)$, а с коэффициентами l_j обозначим $P_2(z)$.

Для многочлена $R(z) = P_2(z) - P_1(z)$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} |R(d_1)| < |(l_3 - a_3)d_1^3 + (l_2 - a_2)d_1^2 + (l_1 - a_1)d_1 + (l_0 - a_0)| < 2c_{16} a_4 Q^{-\mu_1} \\ |R(d_2)| < |(l_3 - a_3)d_2^3 + (l_2 - a_2)d_2^2 + (l_1 - a_1)d_2 + (l_0 - a_0)| < 2c_{17} a_4 Q^{-\mu_1}. \end{cases} \quad (14)$$

Запишем $d_1 = s_1 + it_1, d_2 = s_2 + it_2, s_i, t_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, и перейдем от системы неравенств (14) к системе неравенств относительно s_i и t_i . Заменим получившуюся систему неравенств на линейную систему неравенств относительно целых чисел $b_3 = (l_3 - a_3), b_2 = (l_2 - a_2), b_1 = (l_1 - a_1), b_0 = (l_0 - a_0)$. Определителем этой системы будет нулевой многочлен третьей степени $V(\bar{s}, \bar{t})$ от четырех переменных s_1, s_2, t_1, t_2 . Исключим в комплексном пространстве \mathbb{C}^2 множество точек с условием $|V(\bar{s}, \bar{t})| \leq \delta$ с мерой меньше $c_{18} \delta_1$ ($\delta_1 \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$).

Разрешим систему уравнений по правилу Крамера относительно переменных $b_k, 0 \leq k \leq 3$:

$$|b_k| = \frac{|\Delta_k|}{|V(\bar{s}, \bar{t})|} < c_{19} a_4 Q^{-\mu_1}. \quad (15)$$

Ясно, что количество целых b_k , удовлетворяющих (15), не превосходит $2c_{19} a_4 Q^{-\mu_1}$, а количество векторов $\bar{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ не превосходит $c_{20} a_4^4 Q^{-4\mu_1}$. Просуммируем меру $\mu\mathcal{L}_4(Q)$ из (8) по всем векторам \bar{b} . Получим

$$\sum_{\bar{b}} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{21} Q^{-1-4\mu_1}. \quad (16)$$

Найдем сумму мер в (16) по всем кругам K_1 и K_2 , воспользовавшись (11). Имеем

$$\sum_{i=1,2} \sum_{\bar{b}} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{22} Q^{-1-2(\mu_1+\mu_2)} < c_{23} Q^{-1} \mu K_1 \mu K_2.$$

Так как $|a_4| < c_{24} \delta_0 Q$, то окончательно получим

$$\sum_{a_4} \sum_{i=1,2} \sum_{\bar{b}} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{25} \delta_0 \mu K_1 \mu K_2.$$

Выберем $\delta_0 < \frac{1}{4} c_{25}^{-1}$. Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
2. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М., 1952.
3. Бересневич, В. В. Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–27.
4. Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
5. Bugeaud, Y. Approximation by Algebraic Numbers / Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Math. – 2004. – Vol. 160.
6. Фельдман, Н. И. Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел / Н. И. Фельдман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.

Поступило в редакцию 22.06.2015