

**ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**TECHNICAL SCIENCES**

УДК 536.2.001

Поступило в редакцию 24.05.2017  
Received 24.05.2017**В. А. Кот**

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь*

**ВЫСОКОТОЧНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ  
КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА**

*(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)*

**Аннотация.** Задача Стефана, под которой понимают класс математических моделей, описывающих в основном тепловые и диффузионные процессы с фазовыми превращениями, занимает чрезвычайно важное место во многих физических процессах и технических приложениях. Решение задачи Стефана состоит в вычислении температурного (концентрационного) профиля с определением закона перемещения межфазной границы. Представлены высокоточные полиномиальные решения задачи Стефана для полугораниченного пространства с граничными условиями Дирихле, Неймана, а также общего вида. Начальная температура принималась равной температуре фазового превращения. На основе интегрального метода граничных характеристик, основанного на многократном интегрировании уравнения теплопроводности, получены последовательности из тождественных равенств для разных граничных условий. Далее построены полиномиальные решения. На тестовых примерах продемонстрирована высокая эффективность предложенного подхода. При полиномах второй и третьей степени полученные решения значительно превосходили по точности аппроксимации известные. При полиномах четвертой и пятой степени точность расчета межфазной границы на несколько порядков превосходила точность численных методов. Полученные решения можно условно считать точными, поскольку ошибки расчета межфазной границы и температурного профиля составляют ничтожно малые величины.

**Ключевые слова:** задача Стефана, подвижная свободная граница, интегральный метод граничных характеристик, интегральный метод теплового баланса

**Для цитирования:** Кот, В. А. Высокоточные полиномиальные решения классической задачи Стефана / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 112–122.

**Valery A. Kot**

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

**HIGH-ACCURACY POLYNOMIAL SOLUTIONS OF THE CLASSICAL STEFAN PROBLEM**

*(Communicated by Corresponding Member Nikolai V. Pavlyukevich)*

**Abstract.** The Stefan problem is of extreme importance in investigating many physical processes and technologies. Solving the Stefan problem reduces to calculating a temperature (concentration) profile when an interphase boundary is to be determined. High-accuracy polynomial solutions of the Stefan problem for a semi-infinite medium with Dirichlet/Neumann boundary conditions and general conditions are presented. An initial medium temperature is assumed to be equal to a phase change temperature. With the use of the integral method of boundary characteristics, based on multiple integration of the heat conduction equation, sequences of identical equalities with different boundary conditions are obtained and, as a result, polynomial solutions are constructed. The high efficiency of the approach proposed is illustrated with various examples. The solutions based on the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> degree polynomials are more exact in comparison to the known solutions. The accuracy of calculating the position of the interphase boundary by means of 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> degree polynomials is several orders of magnitude higher than that of numerical methods. The solutions obtained can be considered as conditionally exact because of negligibly small errors in determining the interphase boundary and the temperature profile.

**Keywords:** Stefan problem, moving free boundary, integral method of boundary characteristics, heat balance integral method

**For citation:** Kot V. A. High-accuracy polynomial solutions of the classical Stefan problem. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 112–122 (in Russian).

**Введение.** Задача Стефана, под которой понимают класс математических моделей, описывающих в основном тепловые и диффузионные процессы с фазовыми превращениями [1], занимает чрезвычайно важное место во многих физических процессах и технических приложениях [2]. Решение задачи Стефана состоит в вычислении температурного (концентрационного) профиля с определением закона перемещения межфазной границы. В подавляющем числе случаев при решении стефановских задач применяют численные методы [3]. За редкими исключениями [1; 4] такого рода задачи не имеют точных решений. В настоящее время широкое распространение получили приближенные аналитические методы, например, интегральный метод теплового баланса (Heat Balance Integral Method – HBIM) [5; 6], улучшенный интегральный метод (Refined Integral Method – RIM) [6; 7], интегральный метод граничных характеристик (ИМГХ) [8; 9]. Последний из них продемонстрировал высокую аппроксимационную точность даже по сравнению с численными решениями.

**Математическая постановка задачи.** Имеем следующую задачу: требуется найти положение межфазной границы  $\bar{s}(\bar{t})$  и температурную функцию  $\bar{T}(\bar{x}, \bar{t})$ , которые удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}, \quad 0 < \bar{x} < \bar{s}(\bar{t}), \quad \bar{t} > 0, \quad (1)$$

с одним из граничных условий

$$\bar{T} = \bar{h}(\bar{t}) = \bar{h}, \quad x = 0, \quad \bar{t} > 0, \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} = \bar{q}(\bar{t}) = \bar{q}, \quad x = 0, \quad \bar{t} > 0, \quad (3)$$

$$\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \beta \bar{T} = \bar{\gamma}(\bar{t}) = \bar{\gamma}, \quad x = 0, \quad \bar{t} > 0, \quad (4)$$

с условиями на подвижной межфазной границе

$$\bar{T}(\bar{s}(\bar{t}), \bar{t}) = \bar{T}_m, \quad -\lambda \frac{\partial \bar{T}(\bar{s}(\bar{t}), \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \rho L \frac{d\bar{s}(\bar{t})}{d\bar{t}}, \quad \bar{t} > 0, \quad (5)$$

и начальным условием

$$\bar{s}(0) = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\kappa = \lambda / c\rho$  – коэффициент температуропроводности;  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ ,  $L_m$  – коэффициент теплопроводности, плотность, удельная теплоемкость и скрытая теплота плавления соответственно;  $\bar{q}$  – удельная плотность теплового потока. При этом начальная температура полуограниченного тела равна температуре фазового перехода  $T_m$ . Придадим задаче (1)–(6) безразмерный вид, введя величины

$$T = \frac{\bar{T} - T_m}{\Delta T}, \quad x = \frac{\bar{x}}{l_{\text{ref}}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\tau}, \quad \tau = \frac{l_{\text{ref}}^2}{\kappa}, \quad s = s(t) = \frac{\bar{s}(\bar{t})}{l_{\text{ref}}}, \quad \text{Ste} = \frac{c \Delta T}{L_m},$$

$$\Delta T = T_{\text{ref}} - T_m, \quad h = \frac{\bar{h} - T_m}{\Delta T}, \quad q = \frac{l_{\text{ref}}}{\lambda \Delta T} \bar{q}, \quad \gamma = \frac{\bar{\gamma} - \beta T_m}{\Delta T},$$

где Ste – число Стефана;  $T_{\text{ref}}$  – базовая температура;  $\tau = l^2 / a$  – временной масштаб;  $l_{\text{ref}}$  – характерная длина. Тогда вместо (1)–(6) получим следующую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$T(0, t) = h, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = q, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\alpha \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + \beta T(0, t) = \gamma, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$T(s, t) = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=s} = \frac{1}{\text{Ste}} \frac{ds}{dt}, \quad (12)$$

$$s(0) = 0. \quad (13)$$

**Тождественные равенства и их последовательности.** Построим по аналогии с [8; 9] последовательности из тождественных равенств применительно к задаче Стефана с граничными условиями Дирихле (8), Неймана (9) и Ньютона (граничное условие общего вида) (10).

*Условие Дирихле.* Посредством дифференциальных операторов  $D_t \equiv \partial / \partial t$  и  $L \equiv \partial^2 / \partial x^2$  запишем уравнение теплопроводности (7) в операторной форме

$$D_t T = LT. \quad (14)$$

Следуя [8; 9], введем в рассмотрение интегральные операторы

$$L_n^x \equiv \overbrace{L_x \dots L_x L_x}^n, \quad L_n \equiv \overbrace{L_1 \dots L_x L_x}^n,$$

где  $L_x = L_1^x \equiv \int_s^x \int_s^x (\cdot) dx^{(2)}$ ,  $L_1 \equiv \int_s^0 \int_s^0 (\cdot) dx^{(2)}$ . Применим оператор  $L_x$  к уравнению (14). Так как  $T(x, t)$  – непрерывная аналитическая функция, то в силу теоремы Лейбница и условия (11) для левой части уравнения (14) запишем

$$L_x(D_t T) = D_t(L_x T) + \frac{ds}{dt} T(s, t) \Big|_s^x = D_t(L_x T). \quad (15)$$

Для правой части уравнения (14), в силу условий (11) и (12), получим

$$L_x(LT) \equiv \int_s^x \left( \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T(s, t)}{\partial x} \right) dx = T - \frac{s-x}{\text{Ste}} s'. \quad (16)$$

Отсюда из (14), (15) и (16) следует уравнение

$$D_t(L_x T) + \frac{s-x}{\text{Ste}} s' = T. \quad (17)$$

Применив уравнение (17) для граничной точки  $x = 0$ , с учетом граничного условия (8) получим

$$D_t(L_1 T) + \frac{s s'}{\text{Ste}} = h. \quad (18)$$

Интегрирование (18) с начальными условиями (11) и (13) дает тождественное равенство

$$L_1 T + \frac{s^2}{2\text{Ste}} \equiv \int_0^t h dt = H_1. \quad (19)$$

Далее применим оператор  $L_x$  к уравнению (17). С учетом условий (11) и (12) получим

$$L_x(D_t L_x T) = D_t(L_x L_x(T)) + \frac{s'}{\text{Ste}} L_x(s-x) = D_t(L_x^2 T) + \frac{s'}{\text{Ste}} L_x(s-x) = L_x T. \quad (20)$$

Для точки  $x = 0$  уравнение (20) примет вид

$$\left( D_t L_x^2 T + \frac{s'}{\text{Ste}} L_x(s-x) \right) \Big|_{x=0} = D_t(L_x^2 T) + \frac{s's^3}{6\text{Ste}} = D_t(L_x^2 T) + \frac{(s^4)'}{12\text{Ste}} = H_1 - \frac{s^2}{2\text{Ste}}. \quad (21)$$

Интегрирование (21) при условиях (11) и (13) даст тождественное равенство

$$L_2 T + \frac{1}{\text{Ste}} \left( \int_0^t \frac{s^2}{2!} dt + \frac{s^4}{4!} \right) \equiv \int_0^t dt \int_0^t h dt = H_2. \quad (22)$$

Аналогично может быть получено тождество

$$L_3 T + \frac{1}{\text{Ste}} \left( \int_0^t \int_0^t \frac{s^2}{2!} dt^2 + \int_0^t \frac{s^4}{4!} dt + \frac{s^6}{6!} \right) \equiv \int_0^t dt \dots \int_0^t h dt^{(3)} = H_3. \quad (23)$$

Основываясь на (19), (22) и (23), приходим к последовательности

$$\left\{ L_n T + \frac{1}{\text{Ste}} \sum_{k=1}^n \int_0^t dt \dots \int_0^t \frac{s^{2k}}{(2k)!} dt^{(n-k)} \equiv \int_0^t dt \dots \int_0^t h dt^{(n)} = H_n \right\}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (24)$$

*Условие Неймана.* Проинтегрируем уравнение (7) по области  $x \in [0, s]$ :

$$\int_0^s \frac{\partial T}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_0^s T dx - T(s, t)s' = \int_0^s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0^s = \frac{\partial T(s, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \quad (25)$$

С учетом граничных условий (9), (11) и (12) из (25) получим

$$\frac{d}{dt} \int_0^s T dx = q - \frac{s'}{\text{Ste}}. \quad (26)$$

Интегрирование (26) при условиях (11) и (13) даст тождественное равенство нулевого порядка

$$\widehat{L}_x T + \frac{s}{\text{Ste}} \equiv \int_0^t q dt = Q_1, \quad (27)$$

где  $\widehat{L}_1 \equiv \int_0^s (\cdot) dx$  – интегральный оператор. Интегрирование (14) по области  $x \in [x, s]$  приводит к уравнению

$$D_t(\widehat{L}_x T) - \frac{s'}{\text{Ste}} = T_x. \quad (28)$$

Здесь  $\widehat{L}_x \equiv \int_0^x (\cdot) dx$  – дополнительный интегральный оператор,  $T_x \equiv \partial T / \partial x$ . Применим оператор  $L_x$  к уравнению (28). Для его левой части запишем

$$L_x(D_t(\widehat{L}_x T)) - L_x\left(\frac{s'}{\text{Ste}}\right) = D_t(L_x \widehat{L}_x T) - T(s, t)s L_x(1) - \frac{s'}{\text{Ste}} L_x(1) = D_t(L_x \widehat{L}_x T) - \frac{s'(x-s)^2}{2\text{Ste}}. \quad (29)$$

Для правой части (28) получим

$$L_x T_x \equiv \int_s^x dx \int_s^x T_x dx = \int_s^x (T - T(s, t)) dx = \int_s^x T dx. \quad (30)$$

На основе (28)–(30) приходим к уравнению

$$D_t(L_x \widehat{L}_x T) - \frac{s'(x-s)^2}{2Ste} = \int_s^x T dx = \widehat{L}_x T. \quad (31)$$

Для точки  $x=0$  уравнение (31) примет вид

$$D_t(L_1(\widehat{L}_x T)) - \frac{s's^2}{2Ste} = \widehat{L}_x T|_{x=0},$$

или с учетом тождества (27):

$$D_t(L_1(\widehat{L}_x T)) - \frac{s}{2Ste}(s's + 2) = Q_1. \quad (32)$$

Интегрирование (32) даст тождественное равенство первого порядка

$$L_1(\widehat{L}_x T) + \frac{1}{Ste} \left( \frac{s^3}{6} + \int_0^t s dt \right) \equiv Q_2.$$

Аналогично могут быть найдены тождественные равенства более высоких порядков. В итоге получаем последовательность

$$\left\{ L_n(\widehat{L}_x T) - \frac{1}{Ste} \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{n-k} \frac{s^{2k-1}}{(2k-1)!} dt^{(n-1)} \equiv \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} q dt^{(n)} = Q_n \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (33)$$

*Условие Ньютона (обобщенное граничное условие).* Произведя многократное интегрирование граничного условия (10), имеем

$$\alpha \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} \frac{\partial T(0, t)}{\partial y} dt + \beta \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} T(0, t) dt = \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} \gamma dt = Y_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (34)$$

Произведя в (34) формальные замены  $-\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} \rightarrow q$ ,  $T(0, t) \rightarrow h$ , запишем

$$\beta \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} h dt - \alpha \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} q dt = \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n} \gamma dt = Y_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Основываясь на (24), (33) и (34), придем к последовательности

$$\left\{ L_n(\beta T - \alpha \widehat{L}_x T) + \frac{1}{Ste} \sum_{k=1}^n \underbrace{\int_0^t dt \dots \int_0^t}_{n-k} \left( \beta \frac{s^{2k}}{(2k)!} - \alpha \frac{s^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) dt \equiv Y_n \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (35)$$

**Полиномиальные решения задачи Стефана.** Опишем решения задач Стефана (7)–(13) с условиями Дирихле (8), Неймана (9) и Ньютона (10) полиномом

$$T = \left( 1 - \frac{x}{s} \right) \sum_{j=0}^{N-1} a_j(t) \left( \frac{x}{s} \right)^j. \quad (36)$$

Форма полинома (36) выбрана так, чтобы выполнялось граничное условие (11). Отсюда задача сводится к определению полиномиальных коэффициентов, входящих в (36), а также функции  $s(t)$ , описывающей подвижный межфазный фронт.

*Условие Дирихле.* Опишем температурный профиль квадратичной параболой ( $N = 2$ ). Из тождественного равенства (19) определим коэффициент  $a(t)$ . Тогда имеем

$$T = \left(1 - \frac{x}{s}\right) \left( h + \frac{2x}{s} \left( \frac{6H_1}{s^2} - h - \frac{3}{\text{Ste}} \right) \right). \quad (37)$$

Для определения  $s(t)$  применим тождественное равенство второго порядка (22). Подставив в него (37), получим определяющее уравнение

$$\left( \frac{1}{\text{Ste}} - \frac{h}{3} \right) \frac{s^4}{120} + \frac{s^2}{15} H_1 + \frac{1}{2\text{Ste}} \int_0^t s^2 dt = H_2. \quad (38)$$

Аналогом (38) служит дифференциальное уравнение (результат дифференцирования уравнения (38) по времени  $t$ )

$$\left( \frac{30}{\text{Ste}} + 4h \right) s^2 - \frac{h'}{6} s^4 + \left( \left( \frac{1}{\text{Ste}} - \frac{h}{3} \right) s^2 + 4H_1 \right) (s^2)' = 60H_1. \quad (39)$$

Пусть  $h(t) = 1$ . Точное решение для полупространства известно [1]

$$T = 1 - \text{erf}(x/(2\sqrt{t})) / \text{erf}(\alpha), \quad s(t) = 2\alpha\sqrt{t},$$

где  $\text{erf}$  – функция ошибок, постоянная  $\alpha$  определяется трансцендентным уравнением

$$\sqrt{\pi}\alpha \exp(\alpha^2) \text{erf}(\alpha) = \text{Ste}. \quad (40)$$

Подставив функцию  $s(t)$  в виде  $s(t) = 2\alpha\sqrt{t}$  в (39), получим квадратное уравнение

$$4\beta^2(\text{Ste} - 3) - 6\beta(15 + 4\text{Ste}) + 45\text{Ste} = 0, \quad (41)$$

где  $\beta = \alpha^2$ . Из (41) определим действительный положительный корень

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 4\text{Ste} - \sqrt{(15 + 6\text{Ste})^2 - 40\text{Ste}^2}}{\text{Ste}/3 - 1}}. \quad (42)$$

Оценим точность формулы (42) с помощью абсолютного отклонения  $E_\alpha = |\alpha_{\text{app}} - \alpha_{\text{exa}}|$  и относительной ошибки  $\varepsilon_\alpha = |\alpha_{\text{app}} - \alpha_{\text{exa}}| / \alpha_{\text{exa}} 100\%$ , где  $\alpha_{\text{exa}}$  – точное значение согласно (40). При  $\text{Ste} = 1$  (42) дает значение  $\alpha = 0,619975$ , чему соответствуют  $E_\alpha = 8,75 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_\alpha = 0,014\%$ . Расчет на основе СИМ [5] дает значение  $\alpha = 0,618497$  с ошибками  $E_\alpha = 1,56 \cdot 10^{-3}$  и  $\varepsilon_\alpha = 0,252\%$ . Сравнительный анализ данных решений свидетельствует о существенном преимуществе формулы (42), позволяющей получать решение задачи с существенно меньшей ошибкой [5–7]. При  $\text{Ste} = 1$  и  $t = 1$  расчет на основе (37) и (42) дает решение задачи с квадратичной нормой ошибки

$$\|E\|_2 = \left( \frac{1}{s} \int_0^s (T - T^*)^2 \right)^{1/2} = 0,00382.$$

При описании температурного профиля полиномом третьей степени ( $N = 3$ ) привлечение дополнительного тождественного равенства (22) для  $h(t) = 1$  дает

$$T(x, t) = \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right) \left( 1 - b_1 \frac{x}{s(t)} + b_2 \left( \frac{x}{s(t)} \right)^2 \right),$$

где  $b_1 = \frac{37}{8} + \frac{945}{32s^4} - \frac{75}{4s^2} - \frac{15}{8Ste} - \frac{945}{16Ste s^2}$ ,  $b_2 = \frac{35}{8} + \frac{1575}{32s^4} - \frac{105}{4s^2} - \frac{105}{8Ste} - \frac{1575}{16Ste s^2}$ . Для постоянной  $\alpha = \sqrt{\beta}$  приходим к кубическому уравнению

$$4(Ste + 9)\beta^3 - 30(2Ste - 7)\beta^2 + 315(Ste + 4)\beta - 630Ste = 0. \quad (43)$$

При  $Ste = 1$  из (43) имеем  $\alpha = 0,62006302$ , чему соответствует значение  $E_\alpha = |\alpha_{app} - \alpha_{exa}| = 3,882 \cdot 10^{-7}$ . В [5–7] на основе представления температурного профиля полиномом третьей степени (НВИМ и RIM) получены соответствующие кубические уравнения (не приводятся). Однако формула (43) позволяет рассчитывать параметр  $\alpha$  с существенно меньшей ошибкой по сравнению с известными формулами. По сравнению с квадратичным полиномом, описание температурного профиля полиномом третьей степени повышает точность расчета постоянной  $\alpha$  на 1–3 порядка. Также на порядок и более снижается ошибка для температурного профиля (рис. 1).

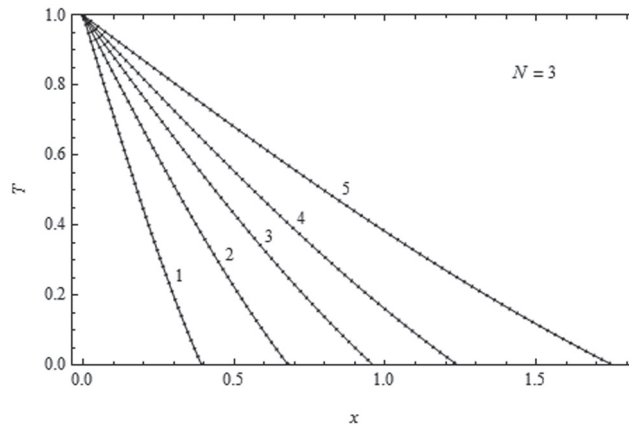


Рис. 1. Температурные профили для точного решения (сплошные кривые) и приближенного решения при  $N = 3$  (пунктирные кривые) для граничного условия Дирихле  $T(0, t) = 1$  при  $t = 0,1$  (1),  $0,3$  (2),  $0,6$  (3),  $1$  (4) и  $2$  (5)

Fig. 1. Temperature profiles for an exact solution (solid curves) and an approximate solution at  $N = 3$  (dotted curves for Dirichlet's boundary condition  $T(0, t) = 1$  at  $t = 0.1$  (1),  $0.3$  (2),  $0.6$  (3),  $1$  (4) and  $2$  (5)

Решение задачи в случае представления решения полиномом четвертой степени при  $h(t) = 1$  приводит к алгебраическому уравнению четвертой степени

$$16(Ste - 15)\beta^4 - 120(4Ste + 35)\beta^3 + 1260(4Ste - 15)\beta^2 - 3150(8Ste + 33)\beta + 51975Ste = 0. \quad (44)$$

Абсолютные отклонения для постоянной  $\alpha$  согласно (44) при  $Ste = 1$  и  $Ste = 10$  составляют  $E_\alpha = |\alpha - \alpha^*| = 6,581 \cdot 10^{-10}$  и  $6,013 \cdot 10^{-6}$  соответственно. По сравнению с численными решениями [15; 16], ошибка для  $s(t) = 2\alpha\sqrt{t}$  на основе ИМГХ значительно меньше.

Теперь сравним точность решения согласно ИМГХ (полином четвертой степени), НВИМ и RIM гауссиан в виде  $T = 1 + ax/s \exp(-mx^2/s^2)$  [12]. Были получены соответствующие трансцендентные уравнения (не приводятся). Относительная ошибка  $\varepsilon_s = |s - s^*|/s^* \cdot 100\%$  при  $Ste = 10$  и для схем НВИМ и RIM составляет  $\varepsilon_s = 4,82\%$  и  $2,12\%$  соответственно. В решениях на основе ИМГХ имеем относительную ошибку всего  $\varepsilon_s = 0,00048\%$ . Как видим, полученный результат совершенно несопоставим с известными решениями. Это же относится к норме  $\|E\|_2$ .

Теперь приведем определяющие уравнения для параметра  $\alpha$ , полученные на основе ИМГХ при описании температурного профиля полиномами соответственно пятой и шестой степеней:

$$32(Ste + 33)\beta^5 - 336(5Ste - 62)\beta^4 + 6048(5Ste + 44)\beta^3 - 27720(10Ste - 39)\beta^2 + 270270(5Ste + 21)\beta - 2837835Ste = 0, \tag{45}$$

$$16(Ste - 63)\beta^6 - 168(8Ste + 197)\beta^5 + 756(50Ste - 583)\beta^4 - 1386(400Ste + 3549)\beta^3 + 4729725(Ste - 4)\beta^2 - 5675670(4Ste + 17)\beta + 48243195Ste = 0. \tag{46}$$

Расчет  $s(t)$  на основе (45) и (46) дает несопоставимо меньшую погрешность по сравнению с численными схемами [13; 14]. При  $N = 5$ ,  $Ste = 1$  и  $Ste = 10$  из (45) находим постоянную  $\alpha$  с абсолютной ошибкой  $E_\alpha = |\alpha - \alpha^*| = 2,13 \cdot 10^{-12}$  и  $1,53 \cdot 10^{-7}$  соответственно. При  $N = 6$  из (46) имеем  $E_\alpha = 2,22 \cdot 10^{-15}$  и  $1,78 \cdot 10^{-9}$  соответственно.

*Условие Неймана.* При  $N = 4$  определение полиномиальных коэффициентов профиля (36) свяжем с граничным условием (9) и первыми тремя тождественными равенствами (33). Это дает систему линейных алгебраических уравнений, решение которой дает температурную функцию  $T(x, t)$ . Используя (33), придем к определяющему уравнению

$$s^8 q' - 8s^6(10 - ss')q + 240s^4(21 - 2ss')Q_1 + 20160s^2 \left( \frac{S_1^1}{Ste} - Q_2 \right) (12 - ss') - 120960 \left( \frac{S_1^3 + S_2^1}{Ste} - Q_1 \right) (55 - 4ss') - \frac{448s^5}{Ste} (45 + ss') = 0. \tag{47}$$

Для анализа полученного решения используем тестовую задачу [13]:

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{c}{Ste} e^{c^2 t}, \quad T = \frac{1}{Ste} (e^{-c(x-ct)} - 1), \quad s(t) = ct.$$

При  $Ste = c = 1$  имеем

$$\{-T_x(0, t) = \exp(t), \quad -T_x(s, t) = s'(t)\} \rightarrow \{T(x, t) = \exp(t - x) - 1, \quad s(t) = t\}. \tag{48}$$

Подстановка функции  $s(t) = at + bt^m$  в (47) дает выражение  $s(t) \approx t + t^9 / 1814400 + O$ . На рис. 2 представлены рассчитанные температурные профили. Вплоть до  $t = 3$  отмечаем практически полное слияние температурных профилей приближенного и точного решений. Вычисленная норма ошибки  $\|\varepsilon_T(0, 5)\|_1 = 6,27 \cdot 10^{-6}$  оказалась значительно меньшей по сравнению с решениями BIM, VGS, IMM [13; 14].

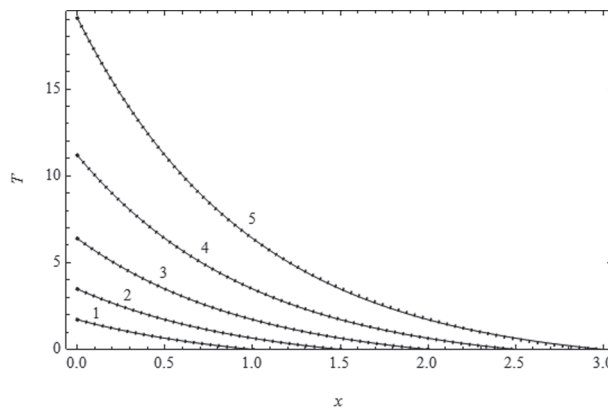


Рис. 2. Температурные профили для точного решения (сплошные кривые) и приближенного решения при  $N = 3$  (пунктирные кривые) для граничного условия Неймана  $T_x(0, t) = -\exp(t)$  при  $t = 1$  (1), 1,5 (2), 2 (3), 2,5 (4) и 3 (5)  
 Fig. 2. Temperature profiles for an exact solution (solid curves) and an approximate solution at  $N = 3$  (dotted curves for Neumann's boundary condition  $T_x(0, t) = -\exp(t)$  at  $t = 1$  (1), 1.5 (2), 2 (3), 2.5 (4) and 3 (5)



Используя  $s(t) = t + t^9 / 1814\,400$ , разложим функцию  $T(0, t)$  в ряд Тейлора, и далее применим аппроксимацию Паде. Тогда получим

$$T(0, t) \approx \frac{t + 0,492095 t^2 + 0,0232794 t^3 + 0,0081234 t^4}{1 - 0,0079054 t - 0,139435 t^2 + 0,374916 t^3 - 0,0035107 t^4}. \quad (49)$$

Расчет функции  $T(0, t)$  дает ошибку  $\varepsilon_0 = (T(0, t) / T^*(0, t) - 1)100\%$  при  $t = 0,5$  и  $t = 1$   $\varepsilon_0 = 1,4 \cdot 10^{-5}\%$  и  $\varepsilon_0 = 2,6 \cdot 10^{-5}\%$  соответственно. По сравнению со схемами BIM, VSG, IMM [13; 14] данные значения  $\varepsilon_0(t = 0,5)$  меньше на два порядка. Отметим ничтожно малую относительную погрешность для  $T(0, t = 0,5)$  согласно формуле (49):  $\varepsilon_0(t = 0,5) = 1,06 \cdot 10^{-7}\%$ .

*Условие Ньютона.* Граничное условие (10) охватывает разные усложненные виды теплообмена, а также описывает конвективный теплообмен с дополнительным тепловым потоком за счет кинетической энергии, аэродинамического, радиационного нагрева и т. д. В этом случае граничное условие принимает вид  $\lambda T_x(0, t) = Q(t) + \chi(T_s - T(0, t))$ , однако ему может быть придан вид (10).

Для определения полиномиальных коэффициентов (36) при  $N = 3$  воспользуемся граничным условием (10) и двумя тождественными равенствами (35):

$$\int_0^s (1+x)T dx + \frac{s}{2Ste}(2+s) = Y_1, \quad (50)$$

$$\int_0^s T \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{x}{3}\right) dx + \frac{1}{2Ste} \left( \int_0^t (2s + s^2) dt + \frac{s^3}{12}(4+s) \right) = Y_2. \quad (51)$$

Определяющее уравнение (для функции  $s(t)$ ) может быть получено из граничного условия Стефана (12), тождественного равенства третьего порядка последовательности (35), интеграла теплового баланса (25) либо интегрального соотношения (18). Остановимся на одном из выше-названных вариантов – продифференцированном по  $t$  тождественном равенстве третьего порядка последовательности

$$\frac{d}{dt} \int_0^s T \frac{x^4}{24} \left(1 + \frac{x}{5}\right) dx + \frac{1}{Ste} \left( \frac{s^3}{6} + \frac{U}{2} + \frac{s^5 s'}{120} + \frac{s^4}{24}(1+s') \right) = Y_2. \quad (52)$$

Приняв в (10)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $Ste = 1$  и  $\tilde{a}(t) = 2 \exp(t) - 1$ , придем к тестовой задаче с известным решением (48). Разложив функцию  $\exp(t)$  в ряд Тейлора и записав функцию  $s(t)$  в виде  $s(t) = at + bt^m$ , найдем из (52)  $s(t) = t - t^7/11025 + O(t^8)$ . На рис. 3 (а, б) приведены соответственно график функции  $s(t)$ , а также температурные профили приближенного и точного решений при  $t = 1$ . Обращает внимание практически полное их слияние. Среднеквадратическая ошибка (норма) при  $t = 1$  составляет  $\|E_T\|_2 = 8,545 \cdot 10^{-4}$ .

Были также получены решения на основе полиномов четвертой и пятой степеней. При  $N = 5$  определение полиномиальных коэффициентов свяжем с выполнением граничных условий Робина (10) и Стефана (12), а также трех тождественных равенств последовательности (35). К ним относятся (50), (51), а также следующее:

$$\int_0^s T \left( \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \right) dx + \frac{1}{Ste} \left( \int_0^t \int_0^t \left( s + \frac{s^2}{2} \right) dt + \int_0^t \left( \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24} \right) dt + \frac{s^5}{120} + \frac{s^6}{720} \right) = Y_3.$$

Для определяющего (для функции  $s(t)$ ) уравнения было использовано уравнение (18). Норма ошибки  $\|E_T\|_2$  при  $t = 1$  составила  $\|E_T\|_2 = 2,747 \cdot 10^{-6}$  (таблица). Численное решение подобной задачи проведено в работе [15]. При  $t = 0,9$  получены решения с нормами ошибок  $\|E_T\|_1 = 3,951 \cdot 10^{-5}$  ( $n = 11$ ,  $\Delta t = 0,10$ ) и  $\|E_T\|_1 = 1,212 \cdot 10^{-6}$  ( $n = 51$ ,  $\Delta t = 0,01$ ). Как видим, метод ИМГХ позволяет получать аналитические решения не хуже численных схем, причем на несколько порядков превосходя их в точности расчета подвижной межфазной границы  $s(t)$ .

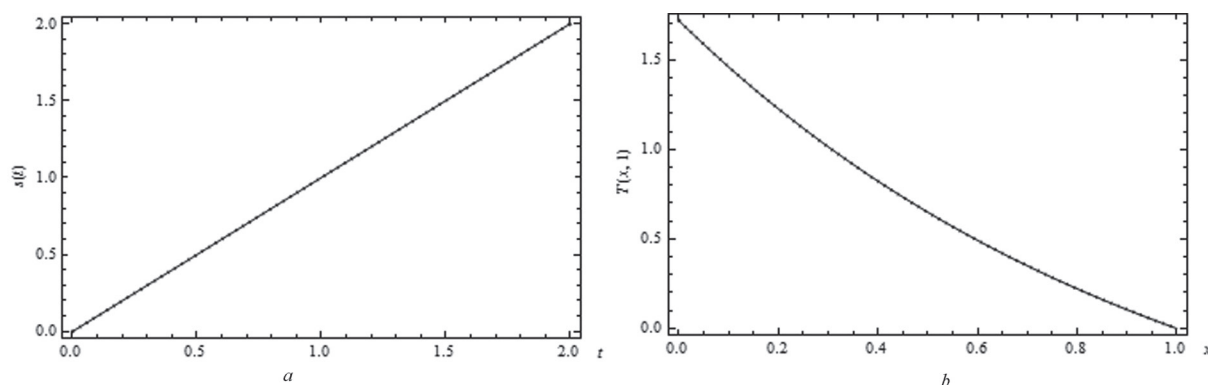


Рис. 3. Изменение во времени положения межфазной границы согласно приближенному решению при  $N = 3$  (пунктирная кривая) и точному решению (сплошная кривая) (a); температурные профили для точного решения (сплошные кривые) и приближенного решения (пунктирные кривые) при граничном условии Ньютона  $\gamma(t) = 2\exp(t) - 1$  и  $t = 1$  (b)  
 Fig. 3. Time variation of the position of the interphase boundary according to an approximate solution at  $N = 3$  (dotted curve) and an exact solution (solid curve) (a); temperature profiles for an exact solution (solid curves) and an approximate solution (dotted curves) at Newton's boundary condition  $\gamma(t) = 2\exp(t) - 1$  and  $t = 1$  (b)

**Расчет положения межфазной границы  $s(t)$  и температуры поверхности  $T(0, t)$  при  $N = 5$  в момент времени  $t = 1$**   
**Calculation of the position of the interphase boundary  $s(t)$  and the surface temperature  $T(0, t)$  at  $N = 5$  at the time moment  $t = 1$**

Параметр Index	Точные значения Exact values	Интегральный метод граничных характеристик ( $N = 5$ ) Integral method of boundary characteristics ( $N = 5$ )	Абсолютная ошибка Absolute error	Относительная ошибка, [%] Relative error, [%]
$s(t = 1)$	1	1,000000056362	$5,63621 \cdot 10^{-8}$	$5,63621 \cdot 10^{-6}$
$T(0, 1)$	1,718281828459	1,718282176243	$3,47784 \cdot 10^{-7}$	$2,02402 \cdot 10^{-5}$

**Заклучение.** Получены высокоточные полиномиальные решения задачи Стефана при переменных во времени граничных условиях Дирихле, Неймана и Ньютона. Многократное интегрирование уравнения теплопроводности позволило записать последовательности из тождественных равенств, на основе которых построены полиномиальные решения. При полиномах второй и третьей степени полученные решения значительно превзошли по точности аппроксимации известные. При полиномах четвертой и пятой степени точность расчета межфазной границы на несколько порядков превзошла точность численных методов. Полученные решения можно условно считать точными, поскольку ошибки расчета межфазной границы и температурного профиля составляют ничтожно малые величины.

**Список использованных источников**

1. Gupta, S. C. The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis / S. C. Gupta. – Amsterdam: Elsevier, 2003. – 818 p.
2. Kumar, A. R. A review on phase change materials and their applications / A. R. Kumar, A. Kumar // Int. J. Adv. Res. Eng. Tech. – 2012. – Vol. 3, N 2. – P. 214–225.
3. Henry, H. H. Mathematical modelling of solidification and melting: a review / H. H. Henry, S. A. Argyropoulos // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. – 1996. – Vol. 4, N 4. – P. 371–396. doi.org/10.1088/0965-0393/4/4/004
4. Tarzia, D. A. Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface / D. A. Tarzia // Advanced Topics in Mass Transfer / ed. M. El-Amin. – InTech, 2011. – Chapter 20. – P. 439–484. doi.org/10.5772/14537
5. Mitchell, S. L. Application of heat balance integral methods to one-dimensional phase change problems / S. L. Mitchell, T. G. Myers // Int. J. Diff. Eq. – 2012. – Vol. 2012. – Article ID 187902. – P. 1–22. doi.org/10.1155/2012/187902
6. Myers, T. G. Optimal exponent heat balance and refined integral methods applied to Stefan problems / T. G. Myers // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2010. – Vol. 53, N 5–6. – P. 1119–1127. doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.10.045
7. Sadoun, N. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions / N. Sadoun, E. K. Si-Ahmed, P. Colinet // Appl. Math. Model. – 2006. – Vol. 30, N 6. – P. 531–544. doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.003

8. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles / V. A. Kot // *Heat Transfer Res.* – 2016. – Vol. 47, N 11. – P. 1035–1055. doi.org/10.1615/heattransres.2016014882
9. Kot, V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Analysis / V. A. Kot // *Heat Transfer Res.* – 2016. – Vol. 47, N 10. – P. 927–944. doi.org/10.1615/heattransres.2016014883
10. Caldwell, J. A brief review of several numerical methods for one-dimensional Stefan problems / J. Caldwell, Y. Y. Kwan // *Therm. Sci.* – 2009. – Vol. 13, N 2. – P. 61–72. doi.org/10.2298/tsci0902061c
11. Mitchell, S. L. Finite-difference methods with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems / S. L. Mitchell, M. Vynnycky // *Appl. Math. and Comput.* – 2009. – Vol. 215, N 4. – P. 1609–1621. doi.org/10.1016/j.amc.2009.07.054
12. Mosally, F. A. An exponential heat balance integral method / F. A. Mosally, A. S. Wood, A. Al-Fhaid // *Appl. Math. Comput.* – 2002. – Vol. 130, N 1. – P. 87–100. doi.org/10.1016/s0096-3003(01)00083-2
13. Kutluay, S. The numerical solution of one-phase classical Stefan problem / S. Kutluay, A. R. Bahadir, A. Ozdes // *J. Comput. Appl. Math.* – 1997. – Vol. 81, N 1. – P. 135–144. doi.org/10.1016/s0377-0427(97)00034-4
14. Kutluay, S. An isotherm migration formulation for one-phase Stefan problem with a time dependent Neumann condition / S. Kutluay, A. Elsen // *Appl. Math. Comput.* – 2004. – Vol. 150, N 1. – P. 59–67. doi.org/10.1016/s0096-3003(03)00197-8
15. Whue-Teong, A. A numerical method on integro-differential formulation for solving a one-dimensional Stefan problem / A. Whue-Teong // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* – 2008. – Vol. 24, N 3. – P. 939–949. doi.org/10.1002/num.20298

### References

1. Gupta S. C. *The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis.* Amsterdam, Elsevier, 2003. 818 p.
2. Kumar A. R., Kumar A. A review on phase change materials and their applications. *International Journal Advanced Engineering Technologies*, 2012, vol. 3, no. 2, pp. 214–225.
3. Henry H. H., Argyropoulos S. A. Mathematical modelling of solidification and melting: a review. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 1996, vol. 4, no. 4, pp. 371–396. doi.org/10.1088/0965-0393/4/4/004
4. Tarzia D. A. Chapter 20. Explicit and Approximated Solutions for Heat and Mass Transfer Problems with a Moving Interface. El-Amin M. (ed.). *Advanced Topics in Mass Transfer.* InTech, 2011, 439–484. doi.org/10.5772/14537
5. Mitchell S. L., Myers T. G. Application of heat balance integral methods to one-dimensional phase change problems. *International Journal of Differential Equations*, 2012, vol. 2012, article ID 187902, pp. 1–22. doi.org/10.1155/2012/187902
6. Myers T. G. Optimal exponent heat balance and refined integral methods applied to Stefan problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, no. 5–6, pp. 1119–1127. doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.10.045
7. Sadoun N., Si-Ahmed E. K., Colinet P. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 2006, vol. 30, no. 6, pp. 531–544. doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.003
8. Kot V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Principles. *Heat Transfer Research*, 2016, vol. 47, no. 11, pp. 1035–1055. doi.org/10.1615/heattransres.2016014882
9. Kot V. A. Integral Method of Boundary Characteristics: The Dirichlet Condition. Analysis. *Heat Transfer Research*, 2016, vol. 47, no. 10, pp. 927–944. doi.org/10.1615/heattransres.2016014883
10. Caldwell J., Kwan Y. Y. A brief review of several numerical methods for one-dimensional Stefan problems. *Thermal Science*, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 61–72. doi.org/10.2298/tsci0902061c
11. Mitchell S. L., Vynnycky M. Finite-difference methods with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, vol. 215, no. 4, pp. 1609–1621. doi.org/10.1016/j.amc.2009.07.054
12. Mosally F. A., Wood A. S., Al-Fhaid A. An exponential heat balance integral method / F. Mosally. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, vol. 130, no. 1, pp. 87–100. doi.org/10.1016/s0096-3003(01)00083-2
13. Kutluay S., Bahadir A. R., Ozdes A. The numerical solution of one-phase classical Stefan problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1997, vol. 81, no. 1, pp. 135–144. doi.org/10.1016/s0377-0427(97)00034-4
14. Kutluay S., Elsen A. An isotherm migration formulation for one-phase Stefan problem with a time dependent Neumann condition. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, vol. 150, no. 1, pp. 59–67. doi.org/10.1016/s0096-3003(03)00197-8
15. Whue-Teong Ang. A numerical method on integro-differential formulation for solving a one-dimensional Stefan problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 939–949. doi.org/10.1002/num.20298

### Информация об авторе

*Кот Валерий Андреевич* – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

### Information about the author

*Kot Valery Andreevich* – Ph. D. (Engineering), Senior researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.