ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.142
DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-135-139

Поступило в редакцию 28.12.2017
Received 28.12.2017

Академик В. И. Янчевский[1], А. А. Рыжков[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ ИНВОЛЮТИВНЫХ СЛАБО РАЗВЕТВЛЁННЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ

Аннотация. Сообщение ставит своей целью классификацию слабо разветвлённых ветвящихся алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями, над гензелевыми дискретно нормированными полями в терминах их алгебр вычетов и специальных образующих.

Ключевые слова: алгебра с делением, унитарные инволюции, слабо разветвлённые алгебры

Для цитирования: Янчевский, В. И. Классификация ветвящихся дискретно нормированных гензелевых инволютивных слабо разветвлённых алгебр с делением / В. И. Янчевский, А. А. Рыжков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 135–139. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-135-139

Academician Vyacheslav I. Yanchevskii[1], Aleksander A. Ryzhkov[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSIFICATION OF RAMIFIED DISCRETELY VALUED HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS WITH INVOLUTIONS

Abstract. The aim of the paper is to classify ramified division algebras with unitary involutions over discretely valued Henselian fields in terms of their residual algebras and special generators.

Keywords: division algebra, unitary involutions, tamely ramified algebras

For citation: Yanchevskii V. I., Ryzhkov A. A. Classification of ramified discretely valued Henselian division algebras with involutions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 135–139 (in Russian). DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-135-139

Введение. В [1] была рассмотрена проблема описания внутреннего строения конечномерных простых центральных ветвящихся алгебр с унитарными инволюциями гензелевых относительно дискретного нормирования.

Пусть k – поле, K / k – его квадратичное сепарабельное расширение и (D_1, τ_1), (D_2, τ_2) – две центральные K-алгебры с унитарными K / k-инволюциями τ_1 и τ_2 соответственно. Напомним следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. *Алгебры (D_1, τ_1) и (D_2, τ_2) называются изоморфными как алгебры с инволюциями (инволютивные алгебры), если существует k-изоморфизм F: $D_1 \to D_2$ такой, что $\tau_1 \circ F = F \circ \tau_2$. Инволютивные алгебры D_1 и D_2, центральные над K, называются изоморфными над K, если вышеупомянутый изоморфизм F является K-изоморфизмом.*

Цель настоящего сообщения – получить классификацию таких инволютивных алгебр с точностью до K-изоморфизма в терминах их алгебр вычетов.

Для точного изложения классификационных результатов нам потребуются следующие обозначения и определения.

О п р е д е л е н и е 2. *Унитарной инволюцией центральной K-алгебры D называется её антиавтоморфизм* τ *второго порядка с нетривиальным ограничением на K. Для поля k инвариантов* τ *поля K, K / k – квадратичное расширение Галуа. В этом случае* τ *называется K / k-инволюцией.*

О п р е д е л е н и е 3. *Нормирование поля называется дискретным, если его упорядоченная группа значений изоморфна подгруппе аддитивной группы целых чисел (с естественным порядком).*

Пусть K – поле с гензелевым дискретным нормированием (char $K \neq 2$), D – центральная K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией.

Ниже через $Z(A)$ будем обозначать центр кольца A.

В случае гензелевого поля k его нормирование v_k однозначно продолжается до нормирований v_K поля K и $v_D = v$ алгебры D.

Для нормирования v обычно определяются:

кольцо нормирования $V_D = \{d \in D^* \mid v(d) \geq 0\} \cup \{0\}$;

идеал нормирования $M_D = \{d \in D^* \mid v(d) > 0\} \cup \{0\}$ (единственный двусторонний максимальный идеал кольца V_D);

группа v-единиц $U_D = V_D - M_D = V_D{}^*$ и её подгруппа $1 + M_D = \{1 + m \mid m \in M_D\}$;

алгебра вычетов $\overline{D} = V_D / M_D$ нормирования v и группа значений $\Gamma_D = v(D^*)$.

Более общо, для произвольного подмножества $S \subset V_D$ через $\overline{S}$ будем обозначать совокупность образов элементов из S при каноническом гомоморфизме (гомоморфизме редукции, гомоморфизме перехода к вычетам) из V_D в $\overline{D}$.

Так как $V_D{}^\tau = V_D$ и $M_D{}^\tau = M_D$, то вместе с инволюцией τ определена её редукция $\overline{\tau} : \overline{D} \to \overline{D}$, для произвольного $d \in V_D : (d + M_D)^\tau = d^\tau + M_D$.

О п р е д е л е н и е 4. *Внутренний автоморфизм центральной K-алгебры D, который переводит элемент* $d \in D$ в xdx^{-1}, *будем обозначать через* i_x.

Для решения проблемы классификации весьма полезным является понятие остова для гензелевой дискретно нормированной алгебры с делением.

Следующее утверждение хорошо известно.

П р е д л о ж е н и е 1. *В каждой слабо разветвлённой центральной ветвящейся K-алгебре D с делением существует внутренний автоморфизм* $\varphi = i_\Pi$ *такой, что ограничение* $\overline{\varphi}$ *на* $Z(\overline{D})$ *является образующей циклической группы Галуа* Gal$(Z(\overline{D})/\overline{K})$ *порядка e, и* $\Pi^e = \pi_K u$, *где* $\pi_K \in K$ *является образующей идеала нормирования* M_K *и* $u \in U_D$.

Зафиксируем до конца сообщения произвольную образующую π_K идеала нормирования M_K. Таким образом, со всякой такой алгеброй D можно связать упорядоченный набор $(\overline{D}, \ \overline{\varphi}, \ \overline{u})$, который называется *остовом* этой алгебры.

Более общо, *остовом*, связанным с $\overline{K}$-алгеброй $\widetilde{D}$, назовём упорядоченную тройку $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u})$, где $\widetilde{\varphi}$ – $\overline{K}$-автоморфизм алгебры $\widetilde{D}$, ограничение которого на $Z(\widetilde{D})$ является образующей группы Галуа Gal$(Z(\widetilde{D})/\overline{K})$ порядка e, и ненулевого элемента $\widetilde{u}$, такого, что $\widetilde{\varphi}^e = i_{\widetilde{u}}$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Всякий остов* $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u})$ *является остовом для подходящей дискретно нормированной гензелевой слабо разветвлённой алгебры D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I – неразветвлённая над K алгебра с алгеброй вычетов $\widetilde{D}$. Тогда автоморфизм $\widetilde{\varphi}$ в силу теоремы 1 из [2] поднимается до автоморфизма φ алгебры I. Далее обозначим через u подъём элемента $\widetilde{u}$ в алгебре I. Рассмотрим кольцо $I[x, \varphi]$ некоммутативных многочленов от x над I относительно автоморфизма φ. Заметим, что $(x^e - \pi_K u)$ – максимальный двусторонний идеал в кольце $I[x, \varphi]$. Тогда $I[x, \varphi] / (x^e - \pi_K u)$ является алгеброй с делением D, причём $I[x, \varphi] / (x^e - \pi_K u) = I + Ix + Ix^2 + ... + Ix^{e-1}$ и $i_x|_I = \varphi$. Прямая проверка показывает, что упорядоченная тройка $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u})$ является остовом алгебры D.

Более точно в [1] была установлена справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 3. *В каждой слабо разветвлённой дискретно нормированной центральной ветвящейся K-алгебре D с делением, обладающей унитарной K / k-инволюцией* τ, *существуют*

τ-инвариантная алгебра инерции I и специальная τ-инвариантная образующая Π такие, что автоморфизм $\varphi = i_\Pi$ при ограничении на $Z = Z(I)$ индуцирует образующую циклической группы Галуа $\mathrm{Gal}(Z / K)$ *порядка e и $\Pi^e = \pi_K u$, где $\pi_K \in K$ является образующей идеала нормирования M_K и $u \in U_I$.*

Для инволютивных алгебр понятие остова определяется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 5. *Упорядоченный набор $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u}, \ \widetilde{\tau})$, состоящий из $\overline{K}$-алгебры $\widetilde{D}$, её $\overline{K}$-автоморфизма $\widetilde{\varphi}$, ограничение которого на $\mathrm{Z}(\widetilde{D})$ является образующей группы Галуа* $\mathrm{Gal}(\mathrm{Z}(\widetilde{D}) / \overline{K})$, *ненулевого элемента $\widetilde{u}$ и инволюции $\widetilde{\tau}$ алгебры $\widetilde{D}$, будем называть инволютивным остовом дискретно нормированной гензелевой слабо разветвлённой инволютивной алгебры D с делением, если выполняются следующие соотношения: $\widetilde{D} = \overline{D}$, $\widetilde{\varphi} = \overline{\varphi}$, $\widetilde{\varphi}^e = i_{\widetilde{u}}$, $\widetilde{u} = \overline{u}$, $\overline{u}^{\overline{\varphi}} = \overline{u}$, $\widetilde{\tau} = \overline{\tau}$ и $\widetilde{u}^{\widetilde{\tau}} = \widetilde{u}\pi_K^{\tau-1}$.*

П р е д л о ж е н и е 4. *Всякий инволютивный остов $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u}, \ \widetilde{\tau})$ является остовом для подходящей дискретно нормированной гензелевой слабо разветвлённой инволютивной алгебры D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведём способ построения алгебры D с заданным остовом $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u}, \ \widetilde{\tau})$. Ввиду замечания 3.4 из [3] существует неразветвлённая K-алгебра I такая, что $\overline{I} = \widetilde{D}$. В силу теорем 1 и 2 из [2] существуют автоморфизм φ и инволюция τ алгебры I такие, что $\overline{\varphi} = \widetilde{\varphi}$, $\overline{\tau} = \widetilde{\tau}$, если $\mathrm{char}\ \overline{K} \neq 2$. Однако, как установил первый из авторов, такая инволюция τ существует и в случае $\mathrm{char}\ \overline{K} = 2$ при условии, что расширение K / k слабо разветвлено. Пусть далее u – подъём элемента $\widetilde{u}$ в алгебре I. Рассмотрим кольцо $I[x, \varphi]$ некоммутативных многочленов от x над I относительно автоморфизма φ. Инволюцию τ продолжим на алгебру $I[x, \varphi]$, положив $x^\tau = x$. Заметим, что $(x^e - \pi_K u)$ – максимальный двусторонний идеал в кольце $I[x, \varphi]$. Кроме того, многочлен $x^e - \pi_K u$ τ-инвариантен, и потому τ-инвариантным является и идеал $(x^e - \pi_K u)$. Тогда $D = I[x, \varphi] / (x^e - \pi_K u)$ является инволютивной алгеброй с делением, причём $D = I + Ix + Ix^2 + \ldots + Ix^{e-1}$ и $i_x = \varphi$. Таким образом, алгебра D с инволюцией τ обладает иволютивным остовом $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u}, \ \widetilde{\tau})$.

З а м е ч а н и е. Для неразветвлённой алгебры D / K остов можно выбрать в виде $(\overline{D}, \ id_{\overline{D}}, \ 1)$.

Отметим также справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть $(\widetilde{D}, \ \widetilde{\varphi}, \ \widetilde{u})$ и $(\widetilde{E}, \ \widetilde{\psi}, \ \widetilde{v})$ – два остова. Тогда эти остовы порождают K-изоморфные алгебры в том и только том случае, когда выполнены следующие условия $\widetilde{D} \cong_{\overline{K}} \widetilde{E}$, $\widetilde{\psi} = \widetilde{\varphi} i_{\widetilde{g}}$, $\widetilde{v} = \widetilde{G}\widetilde{u}$, где $\widetilde{G} = \widetilde{g}\widetilde{g}^{\widetilde{\varphi}} \ldots \widetilde{g}^{\widetilde{\varphi}^{e-1}}$.*

Ниже нам потребуется следующее определение одного класса расширений Галуа.

О п р е д е л е н и е 6. *Расширение полей L / k называется диэдральным степени n, если его группа Галуа представима в виде полупрямого произведения циклической группы $\langle h \rangle$ порядка n и группы $\langle \tau \rangle$ второго порядка со следующим определяющим соотношением:*

$$\tau h \tau = h^{-1}.$$

Предыдущее предложение позволяет установить справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D_1 и D_2 – две слабо разветвлённые центральные ветвящиеся K-алгебры с делением. Тогда $D_1 \cong_K D_2$ в том и только том случае, когда существует $\overline{K}$-изоморфизм $\Phi\colon \overline{D_1} \to \overline{D_2}$ такой, что остовы $(\Phi(\overline{D_1}), \ \Phi^{-1} \circ \overline{\varphi_1} \circ \Phi, \ \Phi(\overline{u_1}))$, $(\overline{D_2}, \ \overline{\varphi_2}, \ \overline{u_2})$ порождают K-изоморфные алгебры.*

Далее выясним при каких условиях для алгебр вычетов две слабо разветвлённые центральные ветвящиеся K-алгебры с делением, обладающие унитарными K / k-инволюциями, изоморфны как алгебры с инволюциями.

Т е о р е м а 2. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле и расширение K / k является слабо разветвлённым, D_1 и D_2 – две слабо разветвлённые центральные ветвящиеся K-алгебры с делением, обладающие унитарными K / k-инволюциями τ_1 и τ_2 соответственно. Тогда инволютивная алгебра (D_1, τ_1) K-изоморфна инволютивной алгебре (D_2, τ_2) в том и только том случае, когда существует $\overline{K}$-изоморфизм $\Phi\colon \overline{D_1} \to \overline{D_2}$ такой, что два остова $(\Phi(\overline{D_1}),$*

$\Phi^{-1}\circ\overline{\varphi_1}\circ\Phi,\ \Phi(\overline{u_1}),\ \Phi^{-1}\circ\overline{\tau_1}\circ\Phi$), ($\overline{D_2},\ \overline{\varphi_2},\ \overline{u_2},\ \overline{\tau_2}$) *порождают K-изоморфные алгебры, причём* $\overline{D_1}$ *и* $\overline{D_2}$ $\overline{K}$ *-изоморфны как алгебры с унитарными инволюциями* $\overline{\tau_1}$ *и* $\overline{\tau_2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть алгебра (D_1, τ_1) K-изоморфна алгебре (D_2, τ_2), что влечёт $\overline{K}$ -изоморфность алгебр ($\overline{D_1}$, $\overline{\tau_1}$) и ($\overline{D_2}$, $\overline{\tau_2}$). Следовательно, существует $\overline{K}$ -изоморфизм Ф: $\overline{D_1}\to\overline{D_2}$ такой, что $\Phi(\overline{D_1})=\overline{D_2},\ \Phi^{-1}\circ\overline{\varphi_1}\circ\Phi=\overline{\varphi_2}$ и $\Phi(\overline{u_1})=\overline{u_2}$.

Обратно, пусть $\overline{D_1}$ и $\overline{D_2}$ $\overline{K}$ -изоморфны как алгебры с инволюциями $\overline{\tau_1}$ и $\overline{\tau_2}$. Обозначим этот изоморфизм через $\overline{\Psi}$ и положим $\overline{\mu}=\overline{\Psi}^{-1}\circ\overline{\tau_1}\circ\overline{\Psi}$. Заметим, что $\overline{\mu}=\overline{\tau_2}i_{\overline{s}}$ и в силу изоморфности алгебр ($\overline{D_1}$, $\overline{\tau_1}$) и ($\overline{D_2}$, $\overline{\tau_2}$) можно считать, что $\overline{s}=\overline{g}\,\overline{g}^{\overline{\tau_2}}$. Обозначим через b прообраз элемента $\overline{g}$ в алгебре D_2. Нетрудно видеть, что редукция элемента $b^{-1}sb^{-\tau_2}$ равна 1, следовательно, $b^{-1}sb^{-\tau_2}=1+m$, где $m\in M_{D_2}$. Нетрудно видеть, что $1+m$ τ_2-инвариантен. Тогда элемент $1+m$ является нормой некоторого элемента $1+p\in 1+M_{D_2}$, т. е. $1+m=(1+p)(1+p)^{\tau_2}$, в силу слабой разветвлённости расширения $K(1+m)$ / $k(1+m)$. Следовательно, элемент $s=b(1+p)(b(1+p))^{\tau_2}$ τ_2-инвариантен и $\Psi\circ i_{b(1+p)}$ является K-изоморфизмом инволютивных K-алгебр (D_1, τ_1) и (D_2, τ_2), что завершает доказательство теоремы.

Для специальных полей $\overline{k}$ теорема 2 позволяет получить явное описание классов эквивалентности таких алгебр.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\overline{k}$ *– поле алгебраических чисел или поле когомологической размерности, не превосходящей 2. Тогда алгебры* (D_1, τ_1) *и* (D_2, τ_2) *нечётных индексов K-изоморфны как алгебры с инволюциями в том и только том случае, если* D_1 *и* D_2 *– K-изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложений 2.5 и 4.1 из [4] можно считать, что любой $\overline{\tau_2}$ -инвариантный элемент алгебры $\overline{D_2}$ имеет следующий вид:

$$\overline{s}=\overline{g}\,\overline{g}^{\overline{\tau_2}}$$

для подходящего элемента $\overline{g}$ из $\overline{D_2}$. Тогда, применив предыдущую теорему, заключаем, что алгебры D_1 и D_2 K-изоморфны как алгебры с инволюциями.

Заключение. В сообщении получена классификация слабо разветвлённых ветвящихся алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями τ, над гензелевыми дискретно нормированными полями в терминах их алгебр вычетов и специальных образующих с точностью до K-изоморфизма.

Список использованных источников

1. Янчевский, В. И. Строение ветвящихся дискретно нормированных гензелевых инволютивных алгебр с делением / В. И. Янчевский, А. А. Рыжков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 1. – С. 7–12.

2. Тихонов, С. В. Гомоморфизмы и инволюции неразветвленных гензелевых алгебр с делением / С. В. Тихонов, В. И. Янчевский // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 264–275.

3. Янчевский, В. И. Приведенная унитарная *K*-теория и тела над гензелевыми и дискретно нормированными полями / В. И. Янчевский // Изв. Акад. наук СССР, сер. матем. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 879–918.

4. Tikhonov, S. V. Symmetric Elements, Hermitian Forms, and Cyclic Involutions / S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskii // Communications in Algebra. – 2015. – Vol. 43, N 11. – P. 4735–4744. DOI: 10.1080/00927872.2014.952011

References

1. Yanchevskii V. I., Ryzhkov A. A. Structure of ramified discretely valued Henselian division algebras with involutions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 7–12 (in Russian).

2. Tikhonov S. V., Yanhevskii V. I. Homomorphisms and Involutions of Unramified Henselian Division Algebras. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 209, no. 4, pp. 657–664. DOI: 10.1007/s10958-015-2519-x

3. Jančevskiĭ V. I. Reduced unitaryk-theory and division rings over discretely valued hensel fields. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1979, vol. 13, no. 1, pp. 175–213. DOI: 10.1070/IM1979v013n01ABEH002018

4. Tikhonov S. V., Yanchevskii V. I. Symmetric Elements, Hermitian Forms, and Cyclic Involutions. *Communications in Algebra*, 2015, vol. 43, no. 11, pp. 4735–4744. DOI: 10.1080/00927872.2014.952011

Информация об авторах

Янчевский Вячеслав Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by.

Рыжков Александр Андреевич – магистрант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alexander.ryzhkov.96@gmail.com.

Information about the authors

Yanchevskii Vyacheslav Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by.

Ryzhkov Alexander Andreevich – Undergraduate. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexander.ryzhkov.96@gmail.com.