ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.955
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

Поступило в редакцию 29.08.2018
Received 29.08.2018

Академик В. И. Корзюк[1], И. С. Козловская[1], В. Ю. Соколович[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В данной работе в аналитическом виде представлено классическое решение со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на полупрямой – условие Неймана. В классе дважды непрерывно дифференцируемых функций в четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения выписывается частное решение исходного волнового уравнения. Для заданных функций задачи выписываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим и единственным.

Ключевые слова: волновое уравнение, условия Коши, условие Дирихле, условие Неймана, смешанная задача, смешанные условия, условия согласования, классическое решение

Для цитирования. Корзюк, В. И. Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, В. Ю. Соколович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 6. – С. 647–651. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

Academician Viktor I. Korzyuk[1], Inessa S. Kozlovskaya[1], Vladimir Yu. Sokolovich[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM IN THE QUARTER OF THE PLANE FOR THE WAVE EQUATION

Abstract. This article presents the classical solution with mixed boundary conditions in the quarter of the plane for the wave equation in the analytical form. The boundary of the region consists of two perpendicular half-straight lines. On one of them, Cauchy's boundary conditions are assigned. The second half-straight line is divided into two parts. Dirichlet's condition is assigned on the straight line and Neumann's conditions – on the half-straight line. The classical solution of the considered problem is defined in the class of double continuous differentiable functions in the quarter of the plane. To build this solution, the partial solution of the initial wave equation is written. For the assigned functions of the problem, the matching conditions are written, which are necessary and enough so that the solution of the problem would be classical and unique.

Keywords: wave equation, Cauchy's condition, Direchlet's condition, Neumann's condition, mixed problem, mixed conditions, matching conditions, classical solution

For citation: Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Sokolovich V. Yu. Classical solution of the mixed problem in the quarter of the plane for the wave equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 647–651 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-6-647-651

Введение. В [1; 2] и другой литературе по уравнениям математической физики и дифференциальным уравнениям с частными производными для представления классического решения задачи Коши в случае волнового уравнения использована формула Даламбера (решение однородного уравнения) и частное решение неоднородного уравнения, построенное методом Дюамеля.

В [2] при определении классического решения для волнового уравнения в четверти плоскости частное решение построено также методом Дюамеля. Но здесь следует отметить, что заданная функция правой части неоднородного уравнения по второму независимому переменному с полупрямой непрерывным образом продолжена на все множество действительных чисел. Однако частное решение можно построить без продолжения правой части уравнения, заданной в четверти плоскости. Указанная его конструкция предлагается в данном сообщении.

Постановка задачи. В замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,\infty)$ двух независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)$ рассматривается одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2)u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q},\tag{1}$$

где a^2 – положительное число из $\mathbb{R}$; $\partial_{x_j}^2$ – частные производные по x_j второго порядка, $j=0,1$. На части границы ∂Q области Q к (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\ \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1),\ x_1\in[0,\infty),\tag{2}$$

на другой полупрямой – граничные условия

$$u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\qquad x_0\in[0,\tau],\tag{3}$$

$$\partial_{x_0}u(x_0,0)=\mu^{(2)}(x_0),\qquad x_0\in(\tau,\infty),\tag{4}$$

где $\tau\in\mathbb{R}$ и $0<\tau<+\infty$.

Задача. Определить в аналитическом виде классическое решение уравнения (1) u из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\overline{Q})$, удовлетворяющее условиям (2), (3), (4).

Дополнительные ограничения на заданные функции $f,\varphi,\psi,\mu^{(j)}(j=1,2)$ в виде требований гладкости и условий согласования будут сформулированы в процессе изучения решения задачи (1)–(4).

Частное решение уравнения (1). Общее решение уравнения (1), например, из класса $C^2(\overline{Q})$ представляет собой сумму

$$u(\boldsymbol{x})=u^{(0)}(\boldsymbol{x})+v_p(\boldsymbol{x}),$$

где $^{(0)}$ – общее решение из $C^2(\overline{Q})$ однородного уравнения (1) и частного решения $v_p\in C^2(\overline{Q})$ уравнения (1). Общее решение $u^{(0)}$ однородного уравнения (1) представимо [1] в виде
$u^{(0)}(\boldsymbol{x})=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0)$,
где $g^{(j)}$ – произвольные функции из классов $C^2(D(g^{(j)}))$, $j=1,2$, $D(g^{(j)})$ – области определения функций $g^{(j)}$ для любых $\boldsymbol{x}\in\overline{Q}$.

В аналитическом виде определим частное решение $v_p\in C^2(\overline{Q})$. Частное решение определяется через функцию f. Формула его зависит и от области Q. В [1] для четверти плоскости решение определяется методом Дюамеля, где f по второму аргументу продолжается на все множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Здесь v_p определим без продолжения функции f с областью определения $D(f)=\overline{Q}$.

Область Q характеристикой $\{\boldsymbol{x}|x_1=ax_0\}$ разделим на две подобласти $Q^{(j)}=$ $=\{x|(-1)^j(ax_0-x_1)>0\}$, $j=1,2$. В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим функции

$$v_p^{(j)}(\boldsymbol{x})=f^{(1,j)}(x_1-ax_0)+f^{(2)}(x_1+ax_0)-$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_1-ax_0}dy\int\limits_{(-1)^j(ax_0-x_1)}^{x_1+ax_0}f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dz,\qquad x\in\overline{Q^{(j)}},\tag{5}$$

где $f^{(1,j)}\in C^2(\mathbb{R})$, $f^{(2)}\in C^2(D(f^{(2)}))$, $a>0$ (для определенности). Если $f\in C^1(\overline{Q})$, то из представлений (5) следует, что функции $v_p^{(j)}\in C^2(\overline{Q^{(j)}})$ и каждая из них удовлетворяют уравнению (1) на множестве $\overline{Q^{(j)}}$, $\quad j=1,2$.

Определим функцию частного решения v_p на всем замыкании $\overline{Q}$ области Q формулой

$$v_p(\boldsymbol{x}) = v_p^{(j)}(\boldsymbol{x}), \qquad x \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Чтобы функция v_p принадлежала множеству $C^2(\overline{Q})$, кроме условия $f \in C^1(\overline{Q})$ необходимо совпадение на характеристике $\gamma = \{\boldsymbol{x} \,|\, x_1 = ax_0\}$ значений $v_p^{(j)}(\boldsymbol{x})$ функций $v_p^{(j)}$ и их производных первого и второго порядков, т. е.

$$\partial_{x0}^k \partial_{x1}^p v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \partial_{x0}^k \partial_{x1}^p v_p^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad x \in \gamma, \quad 0 \le k + p \le 2, \tag{7}$$

где k, p – целые неотрицательные числа.

Заметим, что функция $\mathcal{F}^{(2)}(x) = f^{(2)}(x_1 + ax_0)$ в силу своего определения из класса $C^2(\overline{Q})$. Поэтому равенство (7) будет выполняться для $k = p = 0$, если

$$f^{(1,1)}(0) = f^{(1,2)}(0). \tag{8}$$

Вычисляя первые и вторые производные функций $v^{(j)}$ и рассматривая их на характеристике γ можно убедиться, что равенства (7) для $k + p = 1$ выполняются тогда и только тогда, когда

$$df^{(1,1)}(0) = df^{(1,2)}(0), \tag{9}$$

а для $k + p = 2$ – тогда и только тогда, когда

$$d^2 f^{(1,2)}(0) - d^2 f^{(1,1)}(0) = \frac{1}{a^2} f(0, 0). \tag{10}$$

За счет функций $f^{(1,1)}$ и $f^{(2)}$ можно определить дополнительные удобные для использования условия на v_p. Пусть

$$\begin{gathered} v_p(0, x_1) = 0 = f^{(1,1)}(x_1) + f^{(2)}(x_1), \\ \partial_{x0} v_p(0, x_1) = 0 = -adf^{(1,1)}(x_1) + adf^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty). \end{gathered} \tag{11}$$

Отсюда и уравнения (1) следует условие и для второй производной

$$\partial_{x0}^2 v_p(0, x_1) = f(0, x_1), \quad x_1 \in [0, \infty). \tag{12}$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. *Если для функциий $f \in C^1(\overline{Q})$, $f^{(1,j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f^{(2)} \in C^2([0,\infty))$ выполнены условия (8)–(10), то функция v_p определяется формулами (6) и (5), принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (11) и (12).*

Решение задачи (1)–(4). Область Q характеристиками $\gamma = \{\boldsymbol{x} \in \overline{Q} \,|\, x_1 = ax_0\}$ и $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \overline{Q} \,|\, ax_0 - ax_1 = a\tau\}$ разобьем на три подобласти $Q^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in Q \,|\, x_1 - ax_0 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in Q \,|\, 0 < ax_0 - x_1 < a\tau\}$, $Q^{(3)} = \{\boldsymbol{x} \in Q \,|\, ax_0 - x_1 > a\tau\}$.

Как известно, общее решение в областях $Q^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, уравнения (1) из класса $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ представимо в виде

$$u^{(j)}(x) = g^{(1,j)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v_p(x), \quad x \in \overline{Q^{(j)}}, \tag{13}$$

где $\overline{Q^{(j)}}$ – замыкание области $Q^{(j)}$; $g^{(1,j)}$ – произвольные функции из класса $^{(2)}(\mathbb{R})$; $g^{(2)}$ – произвольная функция из $C^2([0,\infty))$; v_p – частное решение уравнения (1) из класса $C^2(\overline{Q})$. Следовательно, общее решение u из класса $C^2(\overline{Q})$ уравнения (1) определяется соотношениями

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{(j)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1,j)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v_p(\boldsymbol{x}), \quad x \in \overline{Q^{(j)}}, \tag{14}$$

где $g^{(1,j)}$ удовлетворяют условиям непрерывности

$$d^p g^{(1,2)}(0) = d^p g^{(1,1)}(0), \tag{15}$$

$$d^p g^{(1,3)}(-a\tau) = d^p g^{(1,2)}(-a\tau), \tag{16}$$

d^p – оператор обыкновенной производной порядка $p = 0, 1, 2$. Из общего решения (14) выбираем то, которое удовлетворяет условиям (2)–(4), т. е. представление (14) подставляем в эти условия, чтобы определить соответствующим образом значения функций $g^{(1,j)}$ и $g^{(2)}$, $j = 1, 2, 3$.

Удовлетворяя условиям Коши (2), в силу условий (11), получим значения функции $u^{(1)}$, а именно

$$u^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[\varphi(x_1 - ax_0) + \varphi(x_1 + ax_0)] + \frac{1}{2a}\int_{x_1 - ax_0}^{x_1 + ax_0} \psi(\xi)\, d\xi + v_p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}. \tag{17}$$

Аналогично, удовлетворяя условию (3), получим решение на $\overline{Q^{(2)}}$ задачи (1)–(4)

$$\begin{gathered} u^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[\varphi(ax_0 - x_1) - \varphi(x_1 + ax_0)] + \frac{1}{2a}\int_{ax_0 - x_1}^{x_1 + ax_0} \psi(\xi)\, d\xi - \\ -v_p\left(\frac{ax_0 - x_1}{a}, 0\right) + v_p(\boldsymbol{x}) + \mu^{(1)}\left(\frac{ax_0 - x_1}{a}\right), \quad x \in \overline{Q^{(2)}}. \end{gathered} \tag{18}$$

Удовлетворяем условиям (15) значения функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(1,2)}$, полученные при выводе формул (17) и (18),

$$g^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a}\int_0^z \psi(\xi)\, d\xi - C, \quad z \in [0, \infty),$$

$$g^{(1,2)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - \frac{1}{2}\varphi(-z) - \frac{1}{2a}\int_0^{-z} \psi(\xi) d\xi - v_p\left(-\frac{z}{a}, 0\right) - C, \quad z \in (-\infty, 0],$$

где C – произвольная из $\mathbb{R}$ постоянная. В результате получим условия согласования на заданные функции задачи (1)–(4) в начале координат $(x_0 = x_1 = 0)$

$$\varphi(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \psi(0) = d\mu^{(1)}(0), \quad d^2\mu^{(1)}(0) - a^2 d^2\varphi(0) - f(0, 0) = 0. \tag{19}$$

Теперь на $\overline{Q^{(3)}}$ рассматриваем значения $u^{(3)}(\boldsymbol{x})$ функции $u^{(3)}$ согласно представлению (13). Удовлетворяя условию (4), получим

$$g^{(1,3)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(-z) + \frac{1}{2a}\int_0^{-z} \psi(\xi)\, d\xi + \int_{-a\tau}^{z} \mu^{(2)}\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi - \int_{-a\tau}^{z} \partial_{x_1} v_p\left(-\frac{\xi}{a}, 0\right) d\xi + C + C_1, \;\; z \in (-\infty, -a\tau], \tag{20}$$

где C_1 – произвольная константа, которая появилась в результате интегрирования после подстановки $u^{(3)}(\boldsymbol{x})$ в условие (4); C – произвольная константа, которая входит в определение функции $g^{(2)}$ из условий Коши, а именно

$$g^{(2)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a}\int_0^z \psi(\xi) d\xi + C, \quad z \in [a\tau, \infty). \tag{21}$$

Из формулы (13) в силу (20) и (21) в области $Q^{(3)}$ имеем решение

$$\begin{gathered} u^{(3)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[\varphi(ax_0 - x_1) + \varphi(x_1 + ax_0)] + \frac{1}{2a}\int_{ax_0 - x_1}^{x_1 + ax_0} \psi(\xi) d\xi + \\ + \int_{-a\tau}^{x_1 - ax_0} \mu^{(2)}\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi - \int_{-a\tau}^{x_1 - ax_0} \partial_{x_1} v_p\left(-\frac{\xi}{a}, 0\right) d\xi + C + C_1, \quad x \in \overline{Q^{(3)}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Подставляя соотношения (20) и (21) в условия согласования (16), получим

$$C + C_1 = \mu^{(1)}(\tau) - \varphi(a\tau) - \frac{1}{a}\int_0^{a\tau} \psi(\xi) d\xi - v_p(\tau, 0)$$

и вместо (16) в случае $p=1,2$ условия согласования вида

$$\mu^{(2)}(\tau)+\frac{1}{a}d\mu^{(1)}(\tau)-d\varphi(a\tau)-\frac{1}{a}\psi(a\tau)-\frac{1}{a}\partial_{x0}v_p(\tau,0)-\partial_{x1}v_p(\tau,0)=0, \qquad (23)$$

$$d\mu^{(2)}(\tau)+\frac{1}{a}d^2\mu^{(1)}(\tau)-ad^2\varphi(a\tau)-d\psi(a\tau)-\frac{1}{a}\partial_{x0}^2v_p(\tau,0)-\partial_{x0}\partial_{x1}v_p(\tau,0)=0.$$

Заметим, что для того чтобы решение $u(\boldsymbol{x})=u^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(j)}}$, $j=1,2,3$, задачи (1)–(4) было из класса $C^2(\overline{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (15) и (16), а следовательно – и условия (19) и (23).

Из предыдущих рассуждений следует утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $f\in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(1)}\in C^2([0,\infty))$, $\mu^{(2)}\in C^1([0,\infty))$. *Существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) из класса* $C^2(\overline{Q})$ *и представимо в аналитическом виде (5), (14), (17), (18), (22) тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (19) и (23), и условия (8)–(10).*

Заключение. Рассмотрена граничная задача со смешанными условиями Коши, Дирихле и Неймана для одномерного волнового уравнения в четверти плоскости. В аналитическом виде построено классическое решение из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций. Для представления решения задачи без продолжения заданной функции неоднородного уравнения в классе C^2 функций построено частное решение. Доказаны необходимые и достаточные условия на заданные функции, при выполнении которых при определенных требованиях гладкости этих функций существует в аналитическом виде классическое решение рассматриваемой задачи.

Без существенных изменений представленная в работе схема переносится на аналогичные задачи с другими смешанными условиями для волнового и других обобщающих уравнений.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: Курс лекций в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 1. – 48 с.
2. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: Курс лекций в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 2. – 52 с.

References

1. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical problem solutions for hyperbolic equations: A course of lectures in 10 parts*. Minsk, 2017, part 1. 48 p. (in Russian).
2. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical problem solutions for hyperbolic equations: A course of lectures in 10 parts*. Minsk, 2017, part 2. 52 p. (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Козловская Инесса Станиславовна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kozlovskaja@bsu.by.

Соколович Владимир Юрьевич – студент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vovasokoll@gmail.com.

Information about the authors

Korzyuk Viktor Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Kozlovskaya Inessa Stanislavovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kozlovskaja@bsu.by.

Sokolovich Vladimir Yurevich – Student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vovasokoll@gmail.com.