

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

**ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**TECHNICAL SCIENCES**

УДК 536.2.001  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-485-495>

Поступило в редакцию 30.05.2018  
Received 30.05.2018

**В. А. Кот**

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь*

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА:  
НОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ (УСЛОВИЕ ДИРИХЛЕ)**

*(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)*

**Аннотация.** На основе рассмотрения задачи теплопроводности для полуограниченного пространства с описанием температурного профиля параболой степени  $n$  предложена новая концепция построения определяющих интегральных соотношений. Данная концепция основана на введении локальной функции для теплового потока либо температуры, которые определяются из уравнения теплопроводности. Такой подход позволил получить ряд новых интегральных соотношений: улучшенное интегральное соотношение для температурного момента, интеграл квадратичного теплового потока, интеграл квадратичной температурной функции. Предложены две схемы оптимизации степени  $n$  на основе новых норм ошибки  $E_1$  и  $E_1^L$ . По сравнению с нормой Лангфорда удалось значительно повысить аппроксимационную точность решений поставленной задачи.

**Ключевые слова:** интегральный метод теплового баланса, интеграл квадратичной температурной функции, интеграл квадратичного теплового потока, гибридный интегральный метод

**Для цитирования:** Кот, В. А. Интегральные методы решения задач тепломассопереноса: новая концепция (условие Дирихле) / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 485–495. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-485-495>

**Valery A. Kot**

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

**INTEGRAL METHODS OF SOLVING HEAT-CONDUCTION PROBLEMS: A NEW CONCEPT  
(DIRICHLET CONDITION)**

*(Communicated by Corresponding Member Nikolai V. Pavlyukevich)*

**Abstract.** On the basis of consideration of the heat-conduction problem for a semi-bounded space with a temperature profile defined by a parabola with an exponent  $n$ , a new concept of construction of constitutive involves the introduction of a local function for a heat flow or for the temperature, with is determined from the heat-conduction equation. The approach proposed made it possible to obtain a number of new integral relation: an improved integral for the temperature momentum, an integral of a quadratic heat flow, and an integral of a quadratic temperature function. Two Schemes of optimizing the exponent  $n$  with the use of the error norms  $E_1$  and are proposed. As compared to the Langford norm, the indicated error norms made it possible to substantially increase the approximation accuracy of solutions of the problem posed.

**Keywords:** heat-balance integral method, integral of a quadratic temperature function, integral of a quadratic heat flow, hybrid integral method

**For citation:** Kot V. A. Integral methods of solving heat-conduction problems: a new concept (Dirichlet condition). *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 485–495 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-485-495>

**Введение.** В аналитической теории теплопроводности широкое распространение получили методы, использующие понятие «фронт температурного возмущения» [1–5]. Основная их идея состоит в том допущении, что в результате некоторого энергетического воздействия на тело в нем формируется возмущенная область с движущимся с переменной скоростью фронтом  $\delta(t)$ , причем вне его температурное поле сохраняется неизменным. Анализ работ [1–5] позволяет определить одну из принципиальных задач, которая заключается в наиболее адекватном и точном приближенном описании температурного поля посредством простого параболического профиля с заранее неизвестным показателем степени  $n$ . Следует отметить, что фактически все методы, рассматривающие фронт возмущения и основанные на параболической форме температурного профиля, в настоящее время представляются достаточно проблемными и во многих важных случаях даже неудовлетворительными. В связи с этим в настоящей работе предложены новые концепции, согласно которым определяющие интегральные соотношения строятся на принципах, кардинально отличных от классических. Это позволило далее развить теорию приближенного описания потенциальных (температурных) полей с помощью простого по форме параболического представления.

Описание температурной функции связывают, как правило, с заданием на поверхности тела одного из следующих граничных условий: Дирихле, Неймана либо теплообмена по закону Ньютона. Особое место среди них занимает условие Дирихле, задание которого позволяет наиболее полно и всесторонне раскрыть аппроксимационные возможности того либо иного исследуемого интегрального метода. В связи с этим при рассмотрении новых подходов в получении аппроксимационных решений важной видится следующая тестовая задача: на поверхности полуограниченного пространства задана постоянная температура.

**Математическая постановка.** Запишем математическую формулировку задачи:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}, \quad 0 < \bar{x} < \infty, \quad \bar{t} > 0, \quad (1)$$

$$\bar{T}(0, \bar{t}) = T_s, \quad \bar{T}(\bar{x}, 0) = T_0, \quad \bar{T}(\infty, \bar{t}) = T_0, \quad (2)$$

где  $\bar{T}$  – температура;  $\bar{x}$  – пространственная координата;  $\bar{t}$  – время;  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности,  $T_0$  – начальная температура. Введем безразмерные параметры:

$$T = \frac{\bar{T} - T_0}{T_{\text{ref}} - T_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\tau}, \quad \tau = \frac{L^2}{\kappa}, \quad h = \frac{T_s - T_0}{T_{\text{ref}} - T_0},$$

где  $\tau$  – временной масштаб;  $L$  – характерная длина;  $T_{\text{ref}}$  – референтная температура. Тогда, положив  $T_{\text{ref}} = T_s = \text{const}$ , вместо (1)–(2) придем к задаче

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$T(0, t) = 1, \quad T(x, 0) = 0, \quad T(\infty, t) = 0.$$

Запишем ее точное решение [6]:  $T_e = \text{erfc}(x / 2\sqrt{t})$ .

Для анализа точности аппроксимационных решений введем в рассмотрение параметры

$$|\Delta T| = |T - T_e|, \quad \varepsilon = \frac{|\Delta T|_{\max}}{T(0, t)} 100 \%, \quad E_1 = \int_0^{\delta} |T - T_e| dx.$$

Здесь  $E_1$  – норма ошибки;  $\Delta T$  – локальное отклонение приближенного решения от точного;  $\varepsilon$  – относительная погрешность.

**Современные интегральные методы.** Рассмотрим современные интегральные методы (схемы), основанные на интегрировании уравнения (3) по области  $\Omega = [0, \delta(t)]$  с выполнением условий на фронте возмущения:  $T(\delta, t) = 0$ ,  $\partial T(\delta, t) / \partial x = 0$ .

*Интегральный метод теплового баланса* (ИМТБ) [1; 2]. Решение задачи записывается, как правило, в виде квадратичной параболы

$$T = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2. \tag{4}$$

Дифференцирование по времени условия  $T(\delta, t) = 0$  дает дополнительное условие на фронте

$$D_t[T(\delta, t)] = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=\delta} = \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial t} + \frac{d\delta}{dt} \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} \Big|_{x=\delta} = \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T(\delta, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Продолжив аналогичное дифференцирование, приходим к бесконечной системе условий:

$$T(\delta, t) = \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 T(\delta, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 T(\delta, t)}{\partial x^3} = \dots = \frac{\partial^n T(\delta, t)}{\partial x^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Это позволяет представить температурный профиль в форме [1; 7]

$$T = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^n. \tag{5}$$

Интегрирование уравнения (3) по области  $\Omega = [0, \delta]$  дает классический интеграл теплового баланса [1]

$$\frac{d}{dt} \int_0^\delta T dx = - \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}. \tag{6}$$

Подстановка профиля (5) в (6) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению  $\delta \delta' = n(n+1)$  с его решением  $\delta = \sqrt{2n(n+1)t}$ . Анализ температурных профилей (5) при  $n = 2$  и  $n = 3$ , приведенных в [1; 3], свидетельствует об их низкой точности. Для наиболее удовлетворительного решения ( $n = 2$ ) имеем  $E_1 = 0,0576$ ,  $\varepsilon = 3,29\%$  (табл. 1).

Т а б л и ц а 1. Показатели точности решений на основе УИМ

Table 1. Accuracy of Solutions on the Basis of the RIM (Refined Integral Method)

| $n$   | Температурный профиль<br>Temperature profile          | Схема оптимизации<br>Optimization scheme | $\varepsilon, \%$ | $E_1$  |        |
|-------|---|--|-------------------|--------|--------|
| 2     | $T = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{(n+1)(n+2)t}}\right)^n$ | –  | 3,29              | 0,0576 |        |
| 3     |   | 2,30                                     | 0,0359            |        |        |
| 2,219 |   | $E_L \rightarrow \min$ [8]               | 2,48              | 0,0436 |        |
| 2,484 |   | $E_1^L \rightarrow \min$                 | 1,81              | 0,0349 |        |
| 2,670 |   | $E_1 \rightarrow \min$                   | 1,50              | 0,0332 |        |
| 2,851 |   | УИМ                                      | ИСТМ              | 1,94   | 0,0340 |
| 2,624 |   |  | ИКТФ              | 1,38   | 0,0333 |

Примечания: УИМ – улучшенный интегральный метод; ИСТМ – интегральное соотношение  $T$ -момента; ИКТФ – интеграл квадратичной температурной функции.

Notes: УИМ is the refined integral method; ИСТМ is the integral of the  $T$  moment; ИКТФ is the integral of the quadratic temperature function.

*Улучшенный интегральный метод* (УИМ) [9; 10]. Данный метод ориентирован на температуру поверхности, чему отвечает  $x$ -момент первого порядка [8]

$$\frac{d}{dt} \int_0^\delta T x dx = T(0, t) = 1. \tag{7}$$

Данное соотношение получено на основе двойного интегрирования уравнения (3) [8; 11]:

$$\int_0^{\delta} dx \int_0^x \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_0^{\delta} dx \int_0^x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = -\delta \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} - 1. \quad (8)$$

Используя в (8) интеграл теплового баланса (6) и двойное интегрирование, соотношение (8) переводится к виду (7). Отметим, что альтернативой (6) служит двойной интеграл [5]

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta}^0 dx \int_{\delta}^x T = T(0, t) = 1. \quad (9)$$

Подстановка профиля (5) в (7) либо (9) дает дифференциальное уравнение  $2\delta\delta' = 2 + 3n + n^2$  и его решение [10]:  $\delta = \sqrt{(n+1)(n+2)t}$ . Построенные согласно УИМ температурные профили при  $n = 2$  идентичны выше рассмотренным для ИМТБ ( $n = 2$ ). При  $n = 3$  отмечаем улучшение решения ( $E_1 = 0,0359$ ,  $\varepsilon = 2,30\%$ ) по сравнению с профилем на основе ИМТБ ( $n = 2$ ) (табл. 1).

*Составной интегральный метод* (СИМ) [11–13]. Совместное применение ИМТБ и УИМ определено как составной (комбинированный) интегральный метод [11]. Это позволило приравнять температурные фронты, полученные на основе ИМТБ и УИМ:  $\sqrt{2n(n+1)t} = \sqrt{(n+1)(n+2)t}$ . Отсюда следует:  $n = 2$  [8]. В итоге мы возвращаемся к вышерассмотренному квадратичному профилю (4) для ИМТБ либо УИМ.

*Схема Майера*. Для оптимизации степени  $n$  используется норма ошибки Лангфорда  $E_L$  [4] и ее минимизация [8]:

$$\psi = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad E_L = \int_0^{\delta} \psi^2 dx = \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^2 dx > 0 \rightarrow \min. \quad (10)$$

Подстановка (5) в (10) при  $\delta = \sqrt{2n(n+1)t}$  (ИМТБ) дает значение  $n = 2,2335$  [8]. Используя соотношение  $\delta = \sqrt{(n+1)(n+2)t}$  (УИМ), из (10) находим  $n = 2,2187$  [8]. Из графиков для отклонения  $|\Delta T|$ , приведенных в [8], следует, что лучшее аппроксимационное решение относится к УИМ ( $E_1 = 0,0436$ ,  $\varepsilon = 2,48\%$ ). Однако, как можно заметить, схема Майера не только не улучшает решение для УИМ ( $n = 3$ ), но даже приводит к его ухудшению (табл. 1).

В итоге для ИМТБ найдено значение  $n = 1,5047$ . Построенные температурные профили (5) при  $n = 1,5047$  [14] отличаются довольно грубым аппроксимационным решением.

**Новые схемы минимизации ошибки.** Определим показатель степени  $n$  с помощью новых норм ошибки. Будем исходить из решения на основе УИМ. Вместо нормы Лангфорда  $E_L$  запишем следующее условие:

$$E_1^L = \int_0^{\delta} \left| \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| dx > 0 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Из (11) приходим к выражению ( $t = 1$ )

$$E_1^L = \frac{n}{2} \int_0^{\delta} \left| \frac{(2 - 2n + x\sqrt{(n+1)(n+2)} - x^2)}{(\sqrt{(n+1)(n+2)} - x)^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \right)^n \right| dx > 0 \rightarrow \min. \quad (12)$$

Численное интегрирование (12) позволяет найти зависимость  $E_1^L(n)$ , которая образует минимум при  $n = 2,4841$ . По сравнению с  $n = 2,2187$  ( $E_L$ ), аппроксимационная ошибка в данном случае существенно снижается:  $E_1 = 0,0349$ ,  $\varepsilon = 1,81\%$  (табл. 1, рис. 1, а).

С другой стороны, знание точного решения позволяет записать условие

$$E_1 = \int_0^{\delta} |T - T_e| dx \rightarrow \min. \quad (13)$$

Для УИМ условие (11) принимает вид ( $t = 1$ ):

$$E_1 = \int_0^{\delta} \left| \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \right)^n - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \right| dx \rightarrow \min.$$

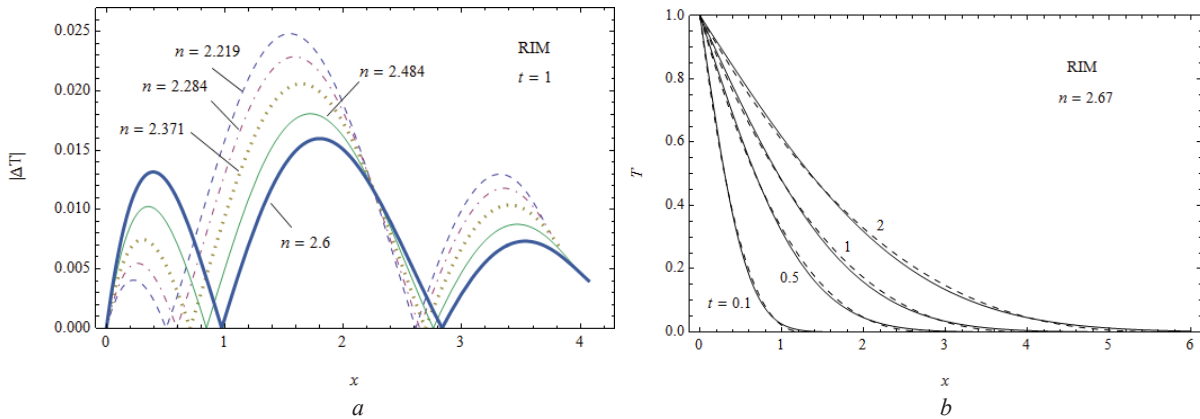


Рис. 1. Отклонение  $|\Delta T|$  в решениях УИМ на основе различных схем минимизации нормы ошибки в зависимости от показателя степени  $n$  (табл. 1) (а); температурные профили при  $t = 1$  на основе схемы  $\{RIM-E_1\}$  при  $n = 2,670$  (штриховые линии) и согласно точному решению (сплошные линии) (б)

Fig. 1. Deviation  $|\Delta T|$  of the solutions obtained by the Refined Integral Method from the exact solution determined by different schemes for minimization of the error norm depending on the exponent  $n$  (Table 1) (a) and temperature profiles at  $t = 1$  determined on the basis of the scheme  $\{RIM-E_1\}$  at  $n = 2,670$  (dashed lines) and the exact solution (full lines) (b)

График зависимости  $E_1(n)$  имеет минимум  $E_1 = 0,0332$  при  $n = 2,670$ . По сравнению с известным решением [8], основанным на минимизации нормы  $E_L$ , в данном случае имеет место существенное снижение аппроксимационной ошибки:  $\varepsilon = 1,50 \%$ ,  $E_1 = 0,0332$  (рис. 1).

**Интегральное соотношение  $T$ -момента (ИСТМ) и его новое представление.** В [1] указана возможность применения  $T$ -момента, эквивалентного интегралу

$$\int_0^\delta \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) T dx = 0. \tag{14}$$

Подставив профиль (5) в (14), получим дифференциальное уравнение  $2n(2n^2 - n - 1)\delta' + (2n - 1)\delta^2 \delta'' = 0$  и его решение  $\delta = 2\sqrt{n(n-1)(2n+1)/(2n-1)t}$ .

**Метод Цяня.** Интегральное соотношение (14) совместно с интегралом теплового баланса (6) было применено Цянем [15; 16] при получении приближенных решений на основе экспоненты  $T = \exp(-x/\delta)$ . Используя профиль (5), приравняем выражения для  $\delta(t)$ , отвечающие ИСТМ и ИМТБ:  $2\sqrt{n(n-1)(2n+1)/(2n-1)t} = \sqrt{2n(n+1)t}$ . Отсюда находим  $n = 1,7808$ . Полученное значение  $n = 1,7808$  очень близко к показателю степени  $n$ , рассчитанному на основе схемы Брэгга–Мантелли ( $n = 1,75$ ) [3].

**Новое представление интегрального соотношения  $T$ -момента.** Раскроем интеграл (14), используя интеграл теплового баланса (6)

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{1}{2} \frac{\partial T^2}{\partial t} dx - \int_0^\delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} T dx = 0 &\Rightarrow \int_0^\delta \frac{1}{2} \frac{\partial T^2}{\partial t} dx - \left( \frac{\partial T}{\partial x} T \right) \Big|_0^\delta + \int_0^\delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \\ &= \int_0^\delta \frac{1}{2} \frac{\partial T^2}{\partial t} dx + \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} + \int_0^\delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^\delta \frac{T^2}{2} dx + \frac{T(\delta,t)^2}{2} \delta' - \frac{d}{dt} \int_0^\delta T dx + \int_0^\delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \int_0^\delta T \left( 1 - \frac{T}{2} \right) dx = \int_0^\delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. \tag{16}$$

Подстановка профиля (5) в (16) дает дифференциальное уравнение  $2n^2(1+3n+2n^2) + (1+n-6n^2)\delta\delta' = 0$  и его решение  $\delta = 2n\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(3n+1)t}}$ .

Совместное применение интегральных соотношений (16) и (7) (УИМ) дает возможность приравнять выражения для соответствующих фронтов  $\delta(t)$ :

$$2n \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(3n+1)}} t = \sqrt{(n+1)(n+2)} t. \quad (17)$$

Решая (17), находим  $n = 2,8508$ . Температурный профиль при  $n = 2,8508$  отличается от профиля для СИМ ( $n = 2$ ) и УИМ ( $n = 2,219$ ) лучшими характеристиками (табл. 1, 2).

Т а б л и ц а 2. Показатели точности решений на основе ИСТМ и УИСТМ

Table 2. Accuracy of Solutions on the Basis of the IRTM (Integral Relation for the  $T$ -momentum) and RIRTМ (Refined TMIR)

| $n$   | Температурный профиль<br>Temperature profile  | Схема оптимизации<br>Optimization scheme | $\varepsilon, \%$ | $E_1$ |         |
|-------|---|--|-------------------|-------|---------|
| 2,851 | $T = \left(1 - \sqrt{\frac{(2n-1)(3n+1)}{(n+1)(2n+1)}} \frac{x}{2n\sqrt{t}}\right)^n$ | ИСТМ                                     | УИМ               | 1,94  | 0,0340  |
| 2,197 |   |  | $E_L$             | 1,65  | 0,0343  |
| 2,415 |   |  | $E_1^L$           | 1,37  | 0,0310  |
| 2,501 |   |  | $E_1$             | 1,32  | 0,0308  |
| 2,499 | $T = \left(1 - \sqrt{\frac{5n+3}{(n+1)(2n+3)(3n+1)}} \frac{x}{\sqrt{t}}\right)^n$     | УИСТМ                                    | $E_1$             | 1,33  | 0,03007 |
| 2,409 |   |  | $E_1^L$           | 1,24  | 0,0302  |
| 2,427 |   |  | ИСТМ              | 1,23  | 0,03017 |

Примечание: УИСТМ – улучшенное интегральное соотношение  $T$ -момента.

Note: УИСТМ – Refined Integral Relation for the  $T$ -momentum.

Зависимость  $E_1^L(n)$  образует минимум  $E_1^L = 0,1954$  при  $n = 2,4155$  (рис. 2, а). График для  $|\Delta T|$  (рис. 2, б) и параметры точности ( $E_1 = 0,0310$ ,  $\varepsilon = 1,37\%$ ) подтверждают более высокую эффективность нормы  $E_1^L$  по сравнению с  $E_L$  (табл. 2).

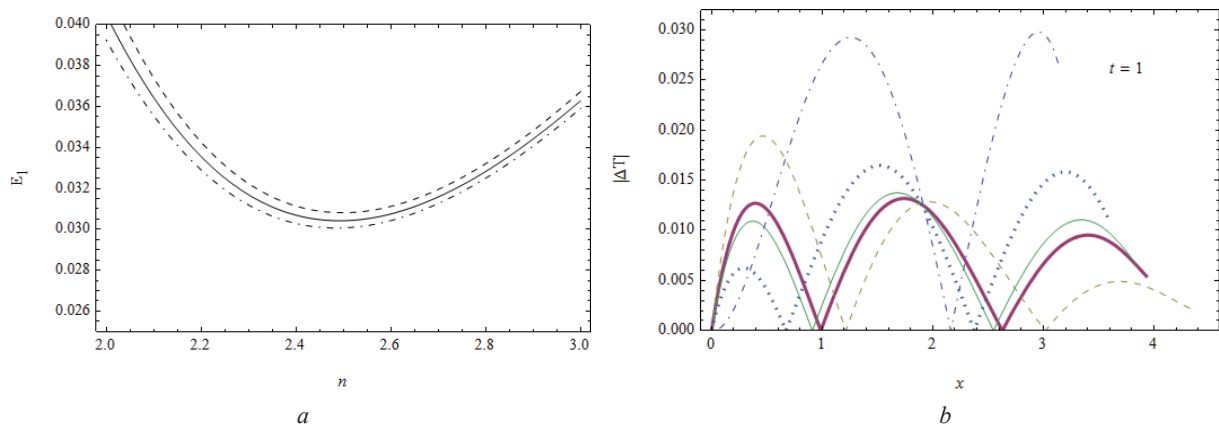


Рис. 2. Графики зависимости нормы ошибки  $E_1(n)$  для ИСТМ (штриховая линия), УИСТМ (сплошная линия), ИСТП (штрихпунктирная линия) (а); отклонения температуры  $|\Delta T|$  для решений методом ИСТМ в зависимости от степени  $n$  (табл. 2):  $n = 1,7808$  (штрих-пунктирная линия),  $n = 2,851$  (штриховая линия),  $n = 2,197$  (пунктирная линия),  $n = 2,415$  (тонкая сплошная линия),  $n = 2,501$  (толстая сплошная линия) (б)

Fig. 2. Dependences  $E_1(n)$  for the IRTM (Integral Relation for the  $T$ -momentum) (dashed line), RIRTМ (Refined IRTM) (full line), and ISLHF (Integral of the Square-Law Heat Flow) (dash-dot line) (a) and deviation  $|\Delta T|$  of the solutions obtained by the IRTM from the exact solution depending on the exponent  $n$  (Table 2) at  $n = 1.7808$  (dash-dot line),  $n = 2.851$  (dashed line),  $n = 2.197$  (dotted line),  $n = 2.415$  (thin full line), and  $n = 2.501$  (heavy full line) (b)



Используя (11), запишем условие минимизации ошибки

$$E_1 = \int_0^x \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(3n+1)}} \left| \left( 1 - \sqrt{\frac{(2n-1)(3n+1)}{4n^2(n+1)(2n+1)}} x \right)^n - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \right| dx \rightarrow \min. \quad (18)$$

Зависимость  $E_1(n)$  имеет минимум  $E_1 = 0,0308$  при  $n = 2,5009$ . Для температурного профиля при  $n = 2,5009$  отмечаем «оптимальное» решение с параметрами точности:  $\varepsilon = 1,32\%$  и  $E_1 = 0,0308$ .

**Улучшенное интегральное соотношение T-момента (УИСТМ).** Под знаком интеграла в правой части (16) стоит производная  $\partial T / \partial x$ . Поскольку в исходной задаче рассматривается граничное условие Дирихле, представляется целесообразным исключить в (16) производную  $\partial T / \partial x$ . Проинтегрировав дифференциальное уравнение (3) по области  $\Omega = [\delta, x]$ , получим

$$\int_{\delta}^x \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x T dx - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\delta}^x = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x T dx. \quad (19)$$

Исключив в (16)  $\partial T / \partial x$  с помощью (19), получим интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta} T \left( 1 - \frac{T}{2} \right) dx = \int_0^{\delta} \left( \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x T dx \right)^2 dx. \quad (20)$$

Подстановка (5) в (20) дает дифференциальное уравнение  $3 + 14n + 17n^2 + 6n^3 - 2(3 + 5n)\delta\delta' = 0$  и его решение  $\delta = \sqrt{\frac{(n+1)(2n+3)(3n+1)}{5n+3}} t$ .

На основе нормы  $E_1$  и схемы (11) получим следующее условие:

$$E_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{(n+1)(2n+3)(3n+1)}{5n+3}} t} \left| \left( 1 - \sqrt{\frac{5n+3}{(n+1)(2n+3)(3n+1)}} x \right)^n - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \right| dx \rightarrow \min. \quad (21)$$

Кривая зависимости  $E_1(n)$  для (21) располагается ниже кривой  $E_1(n)$ , отвечающей профилю (19) (рис. 2, а), и образует минимум  $E_1 = 0,03007$  при  $n = 2,4989$ . Найденное решение характеризуется свойствами:  $\varepsilon = 1,33\%$ ,  $E_1 = 0,03007$ . Это свидетельствует о том, что интегральное УИСТМ (20) является более «сильным» по сравнению с ИСТМ (17) (табл. 2).

Использование схемы (11) на основе  $E_1^L$  дает значение  $n = 2,409$ , чему отвечает решение с параметрами точности:  $\varepsilon = 1,24\%$  и  $E_1 = 0,0302$  (табл. 2). Как видим, для УИСТМ норма  $E_1^L$  оказалась более действенной («сильной») по сравнению с  $E_1$ . Отсюда делаем вывод: при использовании наиболее «адекватных» интегральных соотношений все более эффективной становится норма  $E_1^L$ , ориентированная на дифференциальное уравнение теплопроводности (в отличие от нормы  $E_1$ , использующей точное решение).

Совместное применение УИСТМ (16) и ИСТМ (20) позволяет приравнять правые части выражений для соответствующих фронтов  $\delta(t)$  (18) и (21):

$$\sqrt{\frac{(n+1)(2n+3)(3n+1)}{5n+3}} t = 2n \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n-1)(3n+1)}} t. \quad (22)$$

Уравнение (22) имеет два комплексно-сопряженных корня  $n = 2,3479 \pm i0,6142$  с модулем  $|n| = 2,427$ . Полученное решение при  $n = 2,427$  точнее описывает температурный профиль по сравнению с вышерассмотренными аппроксимациями (табл. 2).

**Интеграл квадратичного теплового потока (ИКТП).** Одинаковые левые части интегральных соотношений (16) и (20) позволяют приравнять их правые части, записав

$$\int_0^{\delta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^{\delta} \left( \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x T dx \right)^2 dx. \quad (23)$$

Соотношение (23) представляет собой интеграл квадратичного теплового потока ( $Q = \partial T / \partial x$ ), что математически эквивалентно выражению

$$\int_0^{\delta} Q^2 dx = \int_0^{\delta} \hat{Q}^2 dx, \quad (24)$$

где  $\hat{Q} = \frac{d}{dt} \int_0^x T dx$  – эквивалент теплового потока, выведенный из дифференциального уравнения (3). Исходя из (24) запишем альтернативное интегральное соотношение

$$\int_0^{\delta} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{d}{dt} \int_0^x T dx \right)^2 \right] dx = \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{d}{dt} \int_0^x T dx \right) \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{d}{dt} \int_0^x T dx \right) dx = 0. \quad (25)$$

Подстановка (5) в (25) дает дифференциальное уравнение

$$n(n+1)\sqrt{4n^2 + 8n + 3} = \delta\delta'\sqrt{10n^2 + n - 3}$$

и его решение

$$\delta = 4 \sqrt[4]{\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)(5n+3)}} \sqrt{2n(n+1)t}. \quad (26)$$

Применение схемы Майера (10) с нормой  $E_L$  дает условие

$$\frac{n^2}{\delta^2} \left[ \frac{(n-1)^2}{(2n-3)\delta} + \frac{\delta'}{2n-1} \left( \frac{\delta\delta'}{n(2n+1)} - 1 \right) \right] \rightarrow \min, \quad (27)$$

из которого находим  $n = 2,1957$ . Параметры точности решения (27) ( $\varepsilon = 1,61\%$ ,  $E_1 = 0,0337$ ) примерно соответствуют данным для ИСТМ с идентичной схемой минимизации согласно норме  $E_L$  (табл. 2, 3; рис. 2, б, рис. 3, а).

Т а б л и ц а 3. Показатели точности решений на основе ИКТП и ИКТФ

Table 3. Accuracy of Solutions on the Basis of the ISLHF (Integral of the Square-Law Heat Flow) and ISLTF (Integral of the Square-Law Temperature Function)

| $n$   | Температурный профиль<br>Temperature profile  | Схема оптимизации<br>Optimization scheme | $\varepsilon, \%$ | $E_1$  |
|-------|---|--|-------------------|--------|
| 2,196 | $T = \left( 1 - 4 \sqrt[4]{\frac{(2n-1)(5n+3)}{(2n+1)(2n+3)}} \frac{x}{\sqrt{2n(n+1)}} \right)^n$       | $E_L$                                    | 1,61              | 0,0337 |
| 2,412 |   | $E_1^L$                                  | 1,31              | 0,0306 |
| 2,492 |   | $E_1$                                    | 1,28              | 0,0304 |
| 2,755 | $T = \left( 1 - 4 \sqrt[4]{\frac{(2n+1)(13n+20)}{(2n+3)(2n+5)}} \frac{x}{\sqrt{2(n+1)(n+2)}} \right)^n$ | $E_1$                                    | 1,80              | 0,0323 |
| 2,543 |   | $E_1^L$                                  | 1,76              | 0,0352 |
| 2,624 |   | УИМ                                      | 1,38              | 0,0333 |

Используя для оптимизации схему (11) с нормой  $E_1^L$ , приходим к условию

$$E_1^L = \int_0^{\delta} \left| \frac{n}{\delta} \left( \delta' \frac{x}{\delta} \left( 1 + \frac{x}{\delta} \right) - \frac{n-1}{\delta} \right) \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right)^{n-2} \right| dx \rightarrow \min. \quad (28)$$

Подстановка в (28) выражения для  $\delta(t)$  (26) и ее производной  $\delta'$  дает значение  $n = 2,4120$  с благоприятным аппроксимационным решением:  $\varepsilon = 1,31\%$ ,  $E_1 = 0,0306$  (табл. 3, рис. 3, а).

На основе схемы (13) с нормой  $E_1$  запишем условие

$$E_1 = \int_0^{\delta} \sqrt[4]{\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n-1)(5n+3)}} \sqrt{2n(n+1)} \left| \left( 1 - 4 \sqrt[4]{\frac{(2n-1)(5n+3)}{(2n+1)(2n+3)}} \frac{x}{\sqrt{2n(n+1)}} \right)^n - \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2} \right) \right| dx \rightarrow \min. \quad (29)$$



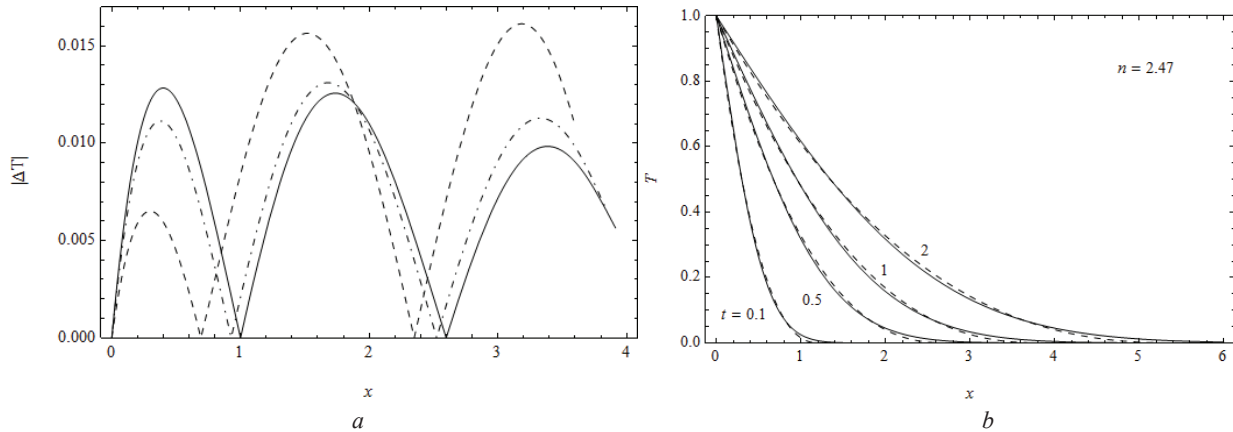


Рис. 3. Отклонения температуры  $|\Delta T|$  при  $t = 1$  в решениях на основе ИКТП в зависимости от степени  $n$  (табл. 3):  $n = 2,196$  (штриховая линия),  $n = 2,412$  (штрих-пунктирная линия),  $n = 2,492$  (сплошная линия) (a); температурные профили на основе ИКТФ при  $n = 2,67$  (штриховые линии) и точного решения (сплошные линии) (b)

Fig. 3. Deviation  $|\Delta T|$  of the solutions obtained by the ISLHF at  $t = 1$  from the exact solution depending on the exponent  $n$  (Table 3) at  $n = 2.196$  (dashed line),  $n = 2.412$  (dash-dot line), and  $n = 2.492$  (full line) (a) and temperature profiles obtained on the basis of the ISLTF (Integral of the square-law temperature function) at  $n = 2.67$  (dashed lines) and the exact solution (full lines) (b)

Зависимость (29) имеет минимум  $E_1 = 0,0304$  при  $n = 2,4919$  (рис. 2, a). Кривая зависимости  $E_1(n)$  расположена примерно посередине между кривыми для схем  $\{\text{ИСТМ} - E_1\}$  и  $\{\text{УИСТМ} - E_1\}$ . На рис. 2 представлена зависимость для отклонения  $|\Delta T|$ . Параметры точности ( $\epsilon = 1,28\%$  и  $E_1 = 0,0304$ ) близки к соответствующим параметрам для решения по схеме оптимизации (11) с нормой  $E_1^L$ . Этот факт свидетельствует о достигнутом примерном оптимуме (табл. 3, рис. 2, a).

**Интеграл квадратичной температурной функции (ИКТФ).** Применив формально аналогию с ИКТП, запишем интегральное соотношение

$$\int_0^{\delta} T^2 dx = \int_0^{\delta} \hat{T}^2 dx,$$

где  $\hat{T}$  – температурная функция, определяемая из дифференциального уравнения (3) с учетом граничных условий на фронте возмущения. Такое соотношение известно [5]:

$$T = \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x T dx. \tag{30}$$

Подстановка (30) в (16) дает нам интегральное соотношение

$$\int_0^{\delta} T^2 dx = \int_0^{\delta} \left( \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x T dx \right)^2 dx,$$

которое можно также записать в виде

$$\int_0^{\delta} \left[ T^2 - \left( \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x T dx \right)^2 \right] dx = \int_0^{\delta} \left( T - \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x T dx \right) \left( T + \frac{d}{dt} \int_{\delta}^x dx \int_{\delta}^x T dx \right) dx. \tag{31}$$

Подстановка профиля (5) в (31) приводит к дифференциальному уравнению  $(2 + 3n + n^2)^2(15 + 16n + 4n^2) = (20 + 53n + 26n^2)\delta^2(\delta')^2$  с его решением  $\delta = 4 \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+1)(13n+20)}} \sqrt{2(n+1)(n+2)t}$ .

Используя норму  $E_1$ , имеем условие

$$E_1 = \int_0^{\delta} \left| \left( 1 - 4 \sqrt{\frac{(2n+1)(13n+20)}{(2n+3)(2n+5)}} \frac{x}{\sqrt{2(n+1)(n+2)}} \right)^n - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right) \right| dx \rightarrow \min. \tag{32}$$

Из (32) находим  $n = 2,7549$ . Анализ показателей точности полученного решения ( $\varepsilon = 1,80\%$ ,  $E_1 = 0,0323$ ) свидетельствует о том, что норма  $E_1$ , несмотря на достижение достаточно низкого значения, все же при использовании «сильных» интегральных соотношений не дает максимально возможного эффекта (табл. 3).

Теперь обратимся к схеме оптимизации (11) на основе нормы  $E_1^L$ , «привязанной» к дифференциальному уравнению теплопроводности. В данном случае имеем  $n = 2,543$ , чему отвечает решение с параметрами точности:  $\varepsilon = 1,76\%$ ,  $E_1 = 0,0352$  (табл. 3).

Поскольку ИКТФ «идеологически» близок к УИМ (рассматривается исключительно температурная функция), мы вправе ожидать достаточно хорошего аппроксимационного решения на основе совместного применения соответствующих интегральных соотношений. Приравняв правые части выражений для фронтов  $\delta(t)$ , получим уравнение

$$\sqrt[4]{\frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+1)(13n+20)}} \sqrt{2(n+1)(n+2)t} = \sqrt{(n+1)(n+2)t}, \quad (33)$$

из которого находим  $n = 2,6242$ . Сравнение найденного из (33) значения  $n = 2,6242$  со степенью  $n = 2,670$  (УИМ –  $E_1$ ) указывает на их очень незначительное отличие (рис. 3, б). Также отмечаем практически полное слияние графиков для отклонения  $|\Delta T|$ . Анализ полученного решения ( $\varepsilon = 1,38\%$ ,  $E_1 = 0,0333$ ) и других решений с использованием УИМ свидетельствует о том, что данное решение является наилучшим (для УИМ) (табл. 2, 3).

**Заключение.** На основе рассмотрения классической задачи для полуограниченного пространства с заданием на поверхности постоянной температуры и описанием температурного профиля с помощью параболы при показателе степени  $n$  предложена новая концепция построения определяющих интегральных соотношений. Данная концепция предполагает введение в рассмотрение локальных функций для теплового потока либо температуры, непосредственно определяемых из дифференциального уравнения теплопроводности. Такой подход позволил получить ряд новых интегральных соотношений, в частности, улучшенное интегральное соотношение для  $T$ -момента, интеграл квадратичного теплового потока, интеграл квадратичной температурной функции. Предложены две схемы оптимизации показателя степени  $n$  на основе новых норм  $E_1$  и  $E_1^L$ . По сравнению с нормой Лангфорда, применяемой в схеме Майера, значительно повышена эффективность нахождения оптимальных решений. В итоге на основе предложенных новых интегральных соотношений, в совокупности с новыми схемами минимизации ошибки, получено оптимальное решение в виде простой параболы с погрешностью  $\varepsilon = 1,23\%$ . По уровню аппроксимационного представления данное решение существенно превосходит все известные аналогичные решения.

#### Список использованных источников

1. Goodman, T. R. Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer / T. R. Goodman // *Adv. Heat Transfer*. – 1964. – Vol. 1. – P. 51–122. [https://doi.org/10.1016/s0065-2717\(08\)70097-2](https://doi.org/10.1016/s0065-2717(08)70097-2)
2. Wood, A. S. A new look at the heat balance integral method / A. S. Wood // *Applied Mathematical Modelling*. – 2001. – Vol. 25, N 10. – P. 815–824. [https://doi.org/10.1016/s0307-904x\(01\)00016-6](https://doi.org/10.1016/s0307-904x(01)00016-6)
3. Braga, W. Analytical Solution for One-Dimensional Semi-Infinite Heat Transfer Problem with Convection Boundary Condition / W. Braga, M. Mantelli, J. Azevedo // 38<sup>th</sup> AIAA Thermophysics Conference, Canada. – 2005. – Paper AIAA-2005-4686. <https://doi.org/10.2514/6.2005-4686>
4. Langford, D. The heat balance integral method / D. Langford // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 1973. – Vol. 16, N 12. – P. 2424–2428. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(73\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90026-4)
5. Кот, В. А. Метод граничных характеристик / В. А. Кот // *Инженерно-физический журнал*. – 2015. – Т. 88, № 6. – С. 1345–1363.
6. Carslaw, H. S. *Conduction of Heat in Solids* / H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. – 2nd ed. – Oxford, 1992.
7. Hristov, J. The heat-balance 2<sup>nd</sup> ed., integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and exercises / J. Hristov // *Thermal Science*. – 2009. – Vol. 13, N 2. – P. 27–48. <https://doi.org/10.2298/tsci0902027h>
8. Myers, T. G. Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods / T. G. Myers // *International Communication in Heat and Mass Transfer*. – 2009. – Vol. 36, N 2. – P. 143–147. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013>

9. Volkov, V. N. A refinement of the integral method in solving the heat conduction equation / V. N. Volkov, V. K. Li-Orlov // *Heat Transfer Soviet Research*. – 1970. – Vol. 2, N 2. – P. 41–47.
10. Sadoun, N. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions / N. Sadoun, E. K. Si-Ahmed, P. Colinet // *Applied Mathematical Modelling*. – 2006. – Vol. 30, N 6. – P. 531–544. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.003>
11. Mitchell, S. L. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions / S. L. Mitchell, T. G. Myers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2010. – Vol. 53, N 17–18. – P. 3540–3551. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.04.015>
12. Gupta, R. S. Constrained integral method for solving moving boundary problems / R. S. Gupta, N. C. Banik // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1988. – Vol. 67, N 2. – P. 211–221. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90126-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90126-0)
13. Gupta, R. S. Diffusion of oxygen in a sphere with simultaneous absorption / R. S. Gupta, N. C. Banik // *Applied Mathematical Modelling*. – 1990. – Vol. 14, N 3. – P. 114–121. [https://doi.org/10.1016/0307-904x\(90\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0307-904x(90)90044-6)
14. Hristov, J. The heat-balance integral: 1. How to calibrate the parabolic profile? / J. Hristov // *Comptes Rendus Mecanique*. – 2012. – Vol. 340, N 7. – P. 485–492. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2012.03.001>
15. Zien, T. F. Approximate calculation of transient heat conduction / T. F. Zien // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14, N 3. – P. 404–406. <https://doi.org/10.2514/3.7111>
16. Zien, T. F. Integral solution of ablation problems with time-dependent heat flux / T. F. Zien // *AIAA Journal*. – 1978. – Vol. 16, N 12. – P. 1287–1295. <https://doi.org/10.2514/3.61045>

## References

1. Goodman T. R. Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer. *Advances in Heat Transfer*, 1964, vol. 1, pp. 51–122. [https://doi.org/10.1016/s0065-2717\(08\)70097-2](https://doi.org/10.1016/s0065-2717(08)70097-2)
2. Wood A. S. A new look at the heat balance integral method. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, vol. 25, no. 10, pp. 815–824. [https://doi.org/10.1016/s0307-904x\(01\)00016-6](https://doi.org/10.1016/s0307-904x(01)00016-6)
3. Braga W., Mantelli M., Azevedo J. Analytical Solution for One-Dimensional Semi-Infinite Heat Transfer Problem with Convection Boundary Condition. *38<sup>th</sup> AIAA Thermophysics Conference*, Canada, 2005, paper AIAA-2005-4686. <https://doi.org/10.2514/6.2005-4686>
4. Langford D. The heat balance integral method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1973, vol. 16, no. 12, pp. 2424–2428. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(73\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90026-4)
5. Kot V. A. Method of boundary characteristics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, no. 6, pp. 1390–1408. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1324-1>
6. Carslow H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*, 2<sup>nd</sup> ed. Oxford, 1992.
7. Hristov J. The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and exercises. *Thermal Science*, 2009, vol. 13, no. 2, pp. 27–48. <https://doi.org/10.2298/tsci0902027h>
8. Myers T. G. Optimizing the exponent in the heat balance and refined integral methods. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 2009, vol. 36, no. 2, pp. 143–147. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.013>
9. Volkov V. N., Li-Orlov V. K. A refinement of the integral method in solving the heat conduction equation. *Heat Transfer Soviet Research*, 1970, vol. 2, no. 2, pp. 41–47.
10. Sadoun N., Si-Ahmed E. K., Colinet P. On the refined integral method for the one-phase Stefan problem with time-dependent boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, 2006, vol. 30, no. 6, pp. 531–544. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.06.003>
11. Mitchell S. L., Myers T. G. Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, vol. 53, no. 17–18, pp. 3540–3551. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.04.015>
12. Gupta R. S., Banik N. C. Constrained integral method for solving moving boundary problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, vol. 67, no. 2, pp. 211–221. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90126-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90126-0)
13. Gupta R. S., Banik N. C. Diffusion of oxygen in a sphere with simultaneous absorption. *Applied Mathematical Modelling*, 1990, vol. 14, no. 3, pp. 114–121. [https://doi.org/10.1016/0307-904x\(90\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0307-904x(90)90044-6)
14. Hristov J. The heat-balance integral: 1. How to calibrate the parabolic profile? *Comptes Rendus Mecanique*, 2012, vol. 340, no. 7, pp. 485–492. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2012.03.001>
15. Zien T. F. Approximate calculation of transient heat conduction. *AIAA Journal*, 1976, vol. 14, no. 3, pp. 404–406. <https://doi.org/10.2514/3.7111>
16. Zien T. F. Integral solution of ablation problems with time-dependent heat flux. *AIAA Journal*, 1978, vol. 16, no. 12, pp. 1287–1295. <https://doi.org/10.2514/3.61045>

## Информация об авторе

*Кот Валерий Андреевич* – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [valery.kot@hmti.ac.by](mailto:valery.kot@hmti.ac.by).

## Information about the author

*Kot Valery Andreevich* – Ph. D. (Engineering), Senior researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [valery.kot@hmti.ac.by](mailto:valery.kot@hmti.ac.by).