

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

**ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ**  
**TECHNICAL SCIENCES**

УДК 532.516, 532.135  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-761-768>

Поступило в редакцию 18.09.2019  
Received 18.09.2019

**В. И. Байков, А. Д. Чорный**

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск,  
Республика Беларусь*

**УВЛЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ  
ДВИЖУЩЕЙСЯ НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНОЙ**

*(Представлено академиком О. Г. Пенязьковым)*

**Аннотация.** Проведен теоретический анализ увлечения жидкости движущейся наклонной поверхностью. Приведена общая постановка задачи для неньютоновской жидкости. Решение этой задачи позволит вскрыть основные физические принципы и механизмы процесса во всем диапазоне скоростей извлечения, реализуемом на практике. Рассмотрен случай увлечения вязкопластической жидкости, обладающей конечным пределом текучести.

**Ключевые слова:** скорость извлечения, толщина пленки жидкости, статический и динамический мениск

**Для цитирования:** Байков, В. И. Увлечение неньютоновской жидкости движущейся наклонной пластиной / В. И. Байков, А. Д. Чорный // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 6. – С. 761–768. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-761-768>

**Valentin I. Baikov, Andrei D. Chorny**

*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

**CAPTURING A NON-NEWTONIAN FLUID BY A MOVING INCLINED PLATE**

*(Communicated by Academician Oleg G. Penyazkov)*

**Abstract.** Fluid capturing by a moving inclined surface is analyzed theoretically. A task for non-Newtonian fluid is stated in general form. The solving of this task enables revealing the basic physical principles and the mechanisms of the fluid withdrawal process over an entire range of withdrawal velocities realized in practice. The case of withdrawal of finite yield stress viscoplastic fluid is considered.

**Keywords:** withdrawal velocity, fluid film width, static and dynamic menisci

**For citation:** Baikov V. I., Chorny A. D. Capturing a non-Newtonian fluid by a moving inclined plate. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 761–768 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-6-761-768>

В [1] дана постановка задачи увлечения вязкопластической жидкости вертикально движущейся плоской поверхностью и получены ее частные решения. В настоящей работе приведено общее решение задачи увлечения произвольной жидкости плоской наклонной поверхностью.

Пусть плоская поверхность извлекается под некоторым углом  $\beta$  к поверхности жидкости, изначально покоящейся в открытой ванне (рисунок). Толщина слоя, уносимая плоской поверхностью, уменьшается с удалением от горизонтальной поверхности жидкости, стремясь к постоян-

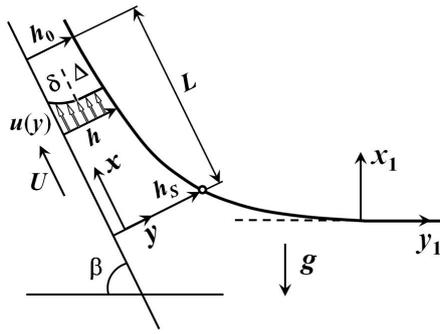


Схема увлечения жидкости наклонной поверхностью

Sketch of a fluid captured by a moving inclined plate

ной величине  $h_0$ . Из-за действия силы тяжести извлекаемая поверхность захватывает с собой лишь часть приводимой ею в движение жидкости. Поэтому на свободной поверхности жидкости существует линия застоя  $h_s$  (перпендикулярная плоскости чертежа), где скорость движения равна нулю. В результате скорость свободной поверхности пленки жидкости, уносимой плоской поверхностью, возрастает от нуля на линии застоя до максимальной величины в области постоянной толщины пленки  $h_0$ . Линия застоя отделяет пристеночную зону уносимой жидкости от зоны жидкости, остающейся в ванне. Запишем для каждой из этих зон уравнения для формы свободной поверхности жидкости, а затем сошьем полученные для них решения, что позволит найти толщину  $h_0$  извлеченной пленки жидкости.

Примем линию застоя за начало отсчета и направим ось  $x$  вдоль плоской поверхности в направлении ее движения, а ось  $y$  – перпендикулярно поверхности. Над линией застоя толщина пленки  $h$  определяется соотношением сил внутреннего трения, поверхностного натяжения, гравитации и инерции. Эта зона называется зоной динамического мениска движущейся жидкости. Запишем для нее уравнения неразрывности и движения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \sin \beta + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \cos \beta + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Они должны быть дополнены краевыми условиями. Полагаем, что плоская поверхность непроницаема и на ней выполняется условие прилипания

$$u = U, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

На свободной поверхности пленки, уравнение которой записывается в виде  $y = h(x)$ , должны выполняться условия двух типов – кинематические и динамические. Так как в каждый момент времени через свободную поверхность пленки отсутствует поток жидкости, то кинематическим условием является

$$v = u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = h. \quad (4)$$

Динамические условия в общем виде выражают равенство нормальных и касательных напряжений, действующих со стороны жидкости и окружающего газа, и имеют вид

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[ \tau_{xx} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \tau_{yy} - 2\tau_{xy} \frac{dh}{dx} \right] \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \quad \text{при } y = h, \quad (5)$$

$$\tau_{xy} \left[ 1 - \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \frac{dh}{dx} \quad \text{при } y = h. \quad (6)$$

Из динамических условий (5), (6) следует при  $y = h$

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[ \tau_{yy} - \tau_{xy} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \quad (7)$$

или

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} + \tau_{yy} - \tau_{xy} \frac{dh}{dx}. \quad (8)$$

При интегрировании уравнения (2) от 0 до  $h$  и уравнения (3) от  $y$  до  $h$  с учетом условий (4), (6), (8) и уравнения неразрывности (1) можно получить

$$\begin{aligned} \sigma h \frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 h}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} - \rho g \sin \beta - \rho g \cos \beta h \frac{dh}{dx} - \tau_{xy}(x, 0) - \\ - \frac{d}{dx} \int_0^h \{ \rho [u^2(x, y) - v^2(x, y)] + \tau_{yy}(x, y) - \tau_{xx}(x, y) \} dy + \\ + \frac{d^2}{dx^2} \int_0^h \left\{ \int_y^h [\tau_{xy}(x, \eta) - \rho u(x, \eta)v(x, \eta)] d\eta \right\} dy = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (6), (7), (9) для тонкой пленки допускают существенное упрощение. Поскольку толщина пленки мала, все производные поперек пленки велики по сравнению с производными вдоль пленки ( $\partial / \partial y \gg \partial / \partial x$ ). Обозначим через  $h_0$  характерный поперечный размер, а через  $L$  – характерный продольный размер. Тогда для тонкослойных течений  $\varepsilon = h_0 / L \ll 1$ . Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{\varepsilon x}{h_0}, \bar{y} = \frac{y}{h_0}, \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \bar{u} = \frac{u}{U}, \bar{v} = \frac{v}{\varepsilon U}, \bar{\tau}_{ik} = \frac{\tau_{ik} h_0}{\mu_c U}, \bar{P} = \frac{P}{\rho U^2}, \\ \text{Re} = \frac{\rho U h_0}{\mu_c} = \frac{T(\gamma \text{Ca})^{3/2}}{(\sin \beta)^{1/2}}, \text{Ca} = \frac{\mu_c U}{\sigma}, T = h_0 \left( \frac{\rho g \sin \beta}{\mu_c U} \right)^{1/2}, \gamma = \frac{\sigma}{\rho} \left( \frac{\mu_c^4}{\rho^4} g \right)^{-1/3}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mu_c$  – характерная вязкость. В результате с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$  из уравнений (6), (7) и (9) получим

$$\sigma h \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g \sin \beta - \rho g \cos \beta h \frac{dh}{dx} - \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad (11)$$

$$P - P_0 = \sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \tau_{yy}(x, y), \text{ при } y = h, \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \frac{dh}{dx} \text{ при } y = h. \quad (13)$$

Система уравнений (11)–(13) получена без каких-либо предположений о реологическом состоянии увлекаемой жидкости, и таким образом справедлива как для ньютоновских, так и не-ньютоновских жидкостей, увлекаемых движущейся наклонной поверхностью.

Дальнейшее упрощение полученных уравнений возможно при задании конкретного реологического уравнения состояния жидкости. Рассмотрим вязкопластическую жидкость, для которой наибольшее распространение получила линейная модель Шведова–Бингама:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{du}{dy} + \mu_p \frac{du}{dy} \quad \text{при } |\tau| > \tau_0, \quad (14)$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{при } |\tau| \leq \tau_0.$$

Величину  $\tau_0$  называют пределом текучести, а коэффициент  $\mu_p$  – пластической вязкостью. Обобщение реологического уравнения (14) на случай пространственного течения дано в [2]

$$\tau_{ik} = \left[ \frac{\tau_0}{\sqrt{0,5e_{lm}e_{lm}}} + \mu_p \right] e_{ik} \quad \text{при } |\tau| > \tau_0; \quad e_{ik} = 0 \quad \text{при } |\tau| \leq \tau_0.$$

Здесь  $e_{ik} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ ,  $e_{ik} = e_{ki}$ .

В двумерном случае получим

$$\tau_{xx} = 2 \left( \frac{\tau_0}{A} + \mu_p \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2 \left( \frac{\tau_0}{A} + \mu_p \right) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \left( \frac{\tau_0}{A} + \mu_p \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (15)$$

$$A = \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Проведя оценку членов в уравнениях (15) с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$ , находим с помощью соотношений (10)

$$A = \frac{U}{h_0} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|, \quad \tau_{xy} = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \mu_p \frac{U}{h_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \quad \tau_{xx} - \tau_{yy} = 4\varepsilon \left( \frac{\tau_0}{|\partial \bar{u} / \partial \bar{y}|} + \mu_p \frac{U}{h_0} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}.$$

Тогда для зоны динамического мениска уравнения (11)–(13) с точностью для членов порядка  $\varepsilon^2$  примут вид

$$\sigma \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g h \sin \beta - \rho g h \frac{d}{dx} \cos \beta - \left( \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (16)$$

$$P - P_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - 2 \left( \frac{\tau_0}{|\partial u / \partial y|} + \mu_p \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при } y = h, \quad (17)$$

$$\tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = h.$$

Уравнение неразрывности (3) представим в интегральном виде. Для этого проинтегрируем его по  $y$  от 0 до  $h$ , изменим порядок интегрирования и дифференцирования, учтем условия непроницаемости плоской поверхности и кинематическое условие (4) на поверхности пленки. В результате, вводя расход жидкости  $Q = \int_0^h u dy$ , получим формулу  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = 0$ , которая означает, что в каждом поперечном сечении увлеченной пленки расход жидкости постоянен

$$Q = \int_0^h u dy = \text{const}. \quad (18)$$

Найдем распределение скоростей  $u(x, y)$  в пленке. Для этого получим решение для участка постоянной толщины  $h = h_0 = \text{const}$ . Здесь уравнения движения (2), (3) примут вид

$$\frac{d}{dy} \left( \tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu_p \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \rho g \sin \beta = 0, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \cos \beta = 0. \quad (19)$$

при граничных условиях  $u_0 = U$  при  $y = 0$ ;  $\tau_0 \operatorname{sign} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu_p \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$ ,  $P = P_0$  при  $y = h_0$ .

Из второго уравнения (19) получим  $P - P_0 = \rho g (h_0 - y) \cos \beta$ , а из первого, с учетом  $\partial u_0 / \partial y < 0$ , находим

$$\mu_p \partial u_0 / \partial y = \tau_0 - \rho g (h - \delta) \sin \beta. \quad (20)$$

Исходя из второго условия реологического уравнения состояния (14), имеем при некотором значении  $y = \delta$  равенство  $0 = \tau_0 - \rho g (h_0 - \delta) \sin \beta$ . Отсюда следует  $\delta = h_0 - \tau_0 / \rho g \sin \beta$ , т. е. в области  $0 \leq y < \delta$  будет осуществляться вязкопластическое течение пленки, а в зоне толщиной  $\Delta = h_0 - \delta = \tau_0 / \rho g \sin \beta$ , где координата  $y$  лежит в пределах  $\delta \leq y \leq h$ , происходит квазитвердое движение пленки.

Интегрируя уравнение (20), с учетом условия прилипания жидкости к наклонной поверхности, находим распределение скорости для зоны вязкопластического течения ( $0 \leq y < \delta$ )

$$u_0(y) = U + \frac{\tau_0}{\mu_p} y - \frac{\rho g}{\mu_p} h_0^2 \sin \beta \left( \frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right). \quad (21)$$

Для скорости квазитвердой зоны  $\Delta$  при  $\delta \leq y \leq h_0$  получим, подставляя в (21)  $y = \delta$ ,

$$u_0^0 = U + \frac{\tau_0 h_0}{\mu_p} - \frac{\rho g}{2\mu_p} h_0^2 \sin \beta - \frac{\tau_0^2}{2\mu_p \rho g \sin \beta},$$

а для расхода жидкости имеем

$$Q = \int_0^\delta u dy + \int_\delta^h u_0 dy = Uh + \frac{\tau_0 h_0^2}{2\mu_p} - \frac{\rho g h_0^3 \sin \beta}{3\mu_p} - \frac{\tau_0^3}{6\mu_p \rho^2 g^2 \sin^2 \beta}. \quad (22)$$

Представим распределение скоростей  $u(x, y)$  в зоне динамического мениска, исходя из соотношения (21), в виде

$$u(x, y) = U + \frac{\tau_0}{\mu_p} y - a(x) \left( \frac{y}{h(x)} - \frac{y^2}{2h^2(x)} \right). \quad (23)$$

Здесь неизвестная функция  $a(x)$  определяется из условия (18) постоянства расхода жидкости в пленке. Из соотношения (23) находим

$$-\tau_0 + \mu_p \frac{\partial u}{\partial y} = -\mu_p \frac{a(x)}{h(x)} \left( 1 - \frac{y}{h(x)} \right). \quad (24)$$

Отсюда и реологического уравнения состояния (14) следует, что в области  $0 \leq y < \delta$ , где  $\delta$  определится условием

$$\delta(x) = h - \frac{\tau_0 h^2}{\mu_p a},$$

происходит вязкопластическое течение пленки, а в зоне толщиной

$$\Delta(x) = h - \delta = \frac{\tau_0 h^2}{\mu_p a},$$

где координата  $y$  находится в пределах  $\delta \leq y \leq h$ , происходит квазитвердое движение пленки со скоростью

$$u^0(x) = U + \frac{\tau_0 h}{\mu_p} - \frac{a}{2} - \frac{\tau_0^2 h^2}{2\mu_p^2 a}. \quad (25)$$

Для расхода жидкости в зоне динамического мениска получим с помощью (22), (25) уравнение

$$Q = \int_0^{\delta(x)} u(x, y) dy + \int_{\delta(x)}^{h(x)} u_0(x) dy = Uh(x) + \frac{\tau_0 h^2(x)}{2\mu_p} - \frac{a(x)h(x)}{3} - \frac{\tau_0^3 h^4(x)}{6\mu_p^3 a^2(x)}, \quad (26)$$

где  $Q$  находится из соотношения (22) для участка постоянной толщины пленки  $h_s$ . Уравнение (26) позволяет найти вид функции  $a(x)$ .

Уравнение (16) динамического мениска после подстановки соотношения (24) при  $y = 0$  примет вид

$$\sigma \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g \sin \beta - \rho g \frac{dh}{dx} \cos \beta + \mu_p \frac{a(x)}{h^2} = 0. \quad (27)$$

Оно справедливо в пределах изменения толщины пленки от  $h_0$  в зоне постоянной толщины до  $h_s$  на линии застоя. Найдем положение линии застоя  $h_s$ . По определению на линии застоя скорость поверхности пленки  $u^0|_{h_s}$  равна нулю. Тогда из соотношения (25) следует

$$U + \frac{\tau_0 h_s}{\mu_p} - \frac{a_s}{2} - \frac{\tau_0^2 h_s^2}{2\mu_p^2 a_s} = 0.$$

С другой стороны, ввиду постоянства расхода жидкости  $Q$  в каждом поперечном сечении пленки, из (26) имеем

$$U + \frac{\tau_0 h_s}{\mu_p} - \frac{a_s}{2} - \frac{\tau_0^2 h_s^2}{2\mu_p^2 a_s} = 0.$$

Системы этих двух уравнений позволяют определить на линии застоя величины  $a_s$  и  $h_s$ . Решение данной системы уравнений относительно  $h_s$  дает

$$h_s = 3 \frac{Q}{U} \left( 1 + \frac{3Q}{2U} \frac{\tau_0}{\mu_p U} \right) \text{ при } x = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим область течения жидкости, находящейся ниже линии застоя и остающейся в ванне. Здесь характерная скорость движения жидкости значительно меньше скорости извлечения пластины  $U$ , а характерный масштаб движения жидкости для широкой и глубокой ванны намного больше толщины  $h_0$  увлекаемой пленки жидкости. Поэтому пространственные производные скоростей и напряжений значительно меньше, чем в области динамического мениска, и ими в уравнениях движения (2), (3) можно пренебречь по сравнению с силами тяжести и поверхностного натяжения. Тогда форму поверхности жидкости определяют соотношения

$$\rho g + \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0 \quad (29)$$

с граничным условием

$$P - P_0 = -\sigma \frac{\partial^2 h_1}{\partial x_1^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right)^2 \right]^{-3/2} \text{ при } y_1 = h_1. \quad (30)$$

Здесь система координат связана с горизонтальной поверхностью жидкости в ванне и ось  $x_1$  отсчитывается от нее вертикально вверх, а ось  $y_1$  – параллельно горизонтальной поверхности жидкости (рисунок). Из равенств (29), (30) получим уравнение

$$\frac{d^2 h_1}{dx_1^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{\rho g}{\sigma} x_1 \quad (31)$$

равновесной формы поверхности жидкости в поле силы тяжести. Поэтому зону ниже линии застоя назовем областью статического мениска.

Найдем форму поверхности жидкости в области статического мениска. Однократным интегрированием уравнения (31) и удовлетворением граничного условия  $dh/dx_1 \rightarrow -\infty$  при  $x_1 = 0$  (поверхность жидкости вдали от пластины горизонтальна), находим

$$\frac{dh_1}{dx_1} \left[ 1 + \left( \frac{dh_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\rho g}{\sigma} x_1^2 - 1. \quad (32)$$

Для неподвижной стенки решение дифференциального уравнения (32) следует искать, полагая  $h_1 = -b \text{ctg} \beta$  при  $x_1 = b$ , где  $b$  – высота подъема жидкости под действием капиллярной силы. Она в случае полностью смачиваемой жидкостью твердой стенки определяется из требования  $dh_1/dx_1 = -\text{ctg} \beta$  при  $x_1 = b$  и равна  $b = \left( \frac{2\sigma}{\rho g} (1 - \cos \beta) \right)^{1/2}$ .

Интегрирование уравнения (32), с учетом указанных выше условий, позволяет найти формулу поверхности жидкости ниже линии застоя

$$h_1 \left( \frac{\rho g}{\sigma} \right)^{1/2} = \sqrt{2} (\sqrt{1 + \cos \beta} - \sqrt{1 - \cos \beta} \text{ctg} \beta) - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos \beta}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos \beta}} - \sqrt{4 - \rho g x_1^2 / \sigma} + \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{4 - \rho g x_1^2 / \sigma}}{2 - \sqrt{4 - \rho g x_1^2 / \sigma}}. \quad (33)$$

Для определения толщины  $h_0$ , наносимой пленки жидкости, сравним решение для зоны статического мениска с решением уравнения (27) динамического мениска. Очевидно, что на линии застоя  $h_s$  давление в жидкости, определяемое как со стороны динамической, так и статической области, должно быть одним и тем же. Тогда, исходя из условий (19) и (30) и, учитывая, что член  $2 \left( \frac{\tau_0}{|\partial u / \partial y|} + \mu_p \right) \frac{\partial u}{\partial x}$  в условии (17) следует опустить, поскольку он на линии застоя  $h_s$  того же порядка малости, что и члены, отброшенные при выводе уравнений (29), (30), находим условие

сравнения для динамической и статической областей  $\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{d^2 h_1}{dx_1^2} \left[ 1 + \left( \frac{dh_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2}$  при  $h = h_s$ . Это условие на основании уравнения (31) принимает вид

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{\rho g}{\sigma} x_1 \text{ при } h = h_s. \quad (34)$$

Таким образом, для случая увлечения наклонной поверхностью вязкопластической жидкости, обладающей конечным пределом текучести, получена замкнутая система уравнений (22), (26)–(28), (33) и (34), которая позволяет найти решение в диапазоне скоростей извлечения, реализуемом на практике.

### Список использованных источников

1. Байков, В. И. Увлечение вязкопластической жидкости движущейся вертикально пластиной / В. И. Байков, А. Д. Чорный // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 95–101.
2. Balmforth, N. J. Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoplastic Fluid Mechanics / N. J. Balmforth, I. A. Frigaard, G. Ovarlez // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2014. – Vol. 46, N 1. – P. 121–146. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141424>

### References

1. Baikov V. I., Chorny A. D. Capturing a viscoplastic liquid by a moving vertical plate. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 1, pp. 95–101 (in Russian).
2. Balmforth N. J., Frigaard I. A., Ovarlez G. Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoplastic Fluid Mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2014, vol. 46, no. 1, pp. 121–146. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141424>

**Информация об авторах**

*Байков Валентин Иванович* – д-р техн. наук, гл. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: baikov@hmti.ac.by.

*Чорный Андрей Дмитриевич* – канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией. Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: anchor@hmti.ac.by.

**Information about the authors**

*Baikov Valentin Ivanovich* – D. Sc. (Engineering), Chief Researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: baikov@hmti.ac.by.

*Chorny Andrei Dmitrievich* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anchor@hmti.ac.by.