Доклады Национальной академии наук Беларуси

2014 **март–апрель** **Том 58 № 2**

УДК 517.977

Н. М. ДМИТРУК

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МУЛЬТИАГЕНТНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 03.03.2014*

Одними из важных с точки зрения приложений объектов исследования являются мультиагентные системы, характеризующиеся относительной автономностью составляющих их подсистем, неполнотой доступной им информации о поведении системы в целом, ориентированностью на достижение общей (групповой) цели и отсутствием центрального управляющего органа [1; 2]. Подобные объекты характерны для формаций мобильных роботов и автономных летательных аппаратов, транспортных и коммуникационных систем, энергетических комплексов, биологических, экономических и социальных систем. Среди актуальных целей управления такими объектами – стабилизация, синхронизация, консенсус, формообразование, оптимизация.

Прикладная направленность в изучении мультиагентных систем требует также адекватного учета действующих на объекты неопределенностей и построения робастных обратных связей, реализующих цели управления [3; 4].

Цель работы – развить алгоритм децентрализованного управления, предложенный в работе [4] для оптимизации многосвязных динамических систем, на задачу терминального управления группой автономных объектов, связанных общими ограничениями и целью.

1. На промежутке времени $T=[0,t^*]$ рассмотрим группу из q автономных линейных стационарных объектов управления (мультиагентную систему) вида

$$\dot{x}_i(t)=A_i x_i(t)+B_i u_i(t)+M_i w_i(t),\ \ x_i(0)=x_{i0},\ \ i\in I=\{1,\dots,q\}, \tag{1}$$

где $x_i(t)\in R^{n_i}$ – состояние i-го объекта в момент t; $u_i(t)\in U_i\subset R^{r_i}$ – значение управляющего воздействия i-го объекта в момент t; $w_i(t)\in W_i\subset R^{p_i}$ – неизвестное кусочно-непрерывное возмущение, действующее на i-й объект; A_i, B_i, M_i – матрицы соответствующих размерностей. Множества доступных значений управления U_i и возможных значений возмущения W_i – заданные выпуклые компакты, содержащие начало координат. Для управления используются дискретные управляющие воздействия с периодом квантования h: $u_i(t)\equiv u_i(s)$, $t\in[s,s+h[$, $s\in T_h=\{0,h,\dots,t^*-h\}$, $h=t^*/N$, N – натуральное число.

Будем считать, что в процессе управления состояния каждого объекта измеряются в моменты $\tau\in T_h\cup t^*$ полно и точно, для того чтобы различать переменные модели (1) и измеренное текущее состояние i-го объекта, последнее будет обозначаться верхним индексом *, т. е. $x_i^*(\tau)$ – фактическое состояние i-го объекта в момент времени $\tau\in T_h\cup t^*$.

В момент времени t^* заданы следующие связи на терминальные состояния объектов:

$$\underline{g}^l\le\sum\nolimits_{k\in K^l}H_k^l x_k(t^*)\le\overline{g}^l,\ \ l\in L=\{1,\dots,l^*\}, \tag{2}$$

где $K^l\subseteq I$, $|K^l|\ge 2$, $l\in L$; $H_k^l\in R^{m^l\times n_k}$, $k\in K^l$, $\underline{g}^l,\overline{g}^l\in R^{m^l}$, $\underline{g}^l\le\overline{g}^l$, $l\in L$.

Поскольку объекты (1) содержат неизвестные возмущения, терминальные ограничения (2) требуется выполнить с гарантией, т. е. при любой возможной реализации $w_i(t)\in W_i$, $t\in T$.

Целью управления объектами (1), связанными ограничениями (2), является минимизация гарантированного значения терминального критерия качества $J(u) = \max_{w_i(\cdot), i\in I} \sum_{k\in I} c'_k x_k(t^*)$.

Далее для достижения поставленной цели описываются два способа управления: оптимальное централизованное управление в реальном времени [5] и оптимальное децентрализованное управление (распределенное, групповое, коллективное управление [1–4]).

2. При централизованном управлении мультиагентная система (1) рассматривается как единая большая система вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t),\ x(0) = x_0, \tag{3}$$

где $x(t) = (x_k(t), k\in I) \in R^n$; $u(t) = (u_k(t), k\in I) \in R^r$; $w(t) = (w_k(t), k\in I)\in R^p$; $n = \sum_{k\in I} n_k$; $r = \sum_{k\in I} r_k$; $p = \sum_{k\in I} p_k$; A, B, M – соответствующие блочно-диагональные матрицы; $u(t)\in U = U_1\times\cdots\times U_q$; $w(t)\in W = W_1\times\cdots\times W_q$, $t\in T$.

Цель управления системой (3) состоит в переводе в момент t^* с гарантией на общее терминальное множество $x(t^*)\in X^*$, и минимизации гарантированного значения критерия качества $J(u) = \max\limits_{w} c'x(t^*)$, где $c = (c_k, k\in I)$; $X^* = \{x\in R^n : \underline{g} \le Hx(t^*) \le \overline{g}\}$; $\underline{g} = (\underline{g}^l, l\in L)$; $\overline{g} = (\overline{g}^l, l\in L)$; $H = \begin{pmatrix} H_k^l, & k\in I \\ l\in L & \end{pmatrix}$ с $H_k^l = 0_{m^l\times n_k}$, $k\notin K^l$, $l\in L$.

При *централизованном управлении* системой (3) в реальном времени [4; 5] имеется общий центр управления, который в каждый текущий момент времени $\tau\in T_h$ по измеренному состоянию $x^*(\tau)$ всей группы вычисляет значение управляющего сигнала $u^*(\tau)$ *для всех объектов*. Это значение подается на вход системы (3) до поступления следующего измерения состояния в момент $\tau + h : u^*(t) = u^*(\tau)$, $t\in[\tau, \tau+h[$. Выполняемая центром в темпе поступления измерений процедура дает централизованное управляющее воздействие $u^*(t)$, $t\in T$, которое называется реализацией оптимальной обратной связи в реальном времени [5].

Значение $u^*(\tau)$ находится по решению вспомогательной задачи оптимального управления, которую будем обозначать $P(\tau)$. Формулировка задачи $P(\tau)$ зависит от того, какая в ней учитывается информация о возможных будущих возмущениях [6]. В настоящей работе остановимся на простейшей формулировке

$$P(\tau) \colon J^0(\tau) = \min_u \max_w c'x(t^*), \tag{4}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t),\ x(\tau) = x^*(\tau),\ x(t^*)\in X^*,\ u(t)\in U,\ w(t)\in W,\ t\in T(\tau) = [\tau, t^*].$$

В задаче (4) требуется построить оптимальную гарантирующую программу $u^0(t\,|\,\tau, x^*(\tau))$, $t\in T(\tau)$. Ее значение в момент времени τ подается на вход (3): $u^*(t) = u^*(\tau) = u^0(\tau\,|\,\tau, x^*(\tau))$, $t\in[\tau, \tau+h[$. Полученная в результате оптимальная обратная связь называется [6] размыкаемой.

Как показано в [6], численное решение задачи гарантированного оптимального управления (4) сводится к вычислению векторов $\underline{\gamma}(\tau), \overline{\gamma}(\tau)$ и числа $\gamma^0(\tau)$:

$$\underline{\gamma}(\tau) = \int_\tau^{t^*} \min_{w(t)\in W} He^{A(t^*-t)}Mw(t)dt,\ \overline{\gamma}(\tau) = \int_\tau^{t^*} \max_{w(t)\in W} He^{A(t^*-t)}Mw(t)dt,\ \gamma^0(\tau) = \int_\tau^{t^*} \max_{w(t)\in W} c'e^{A(t^*-t)}Mw(t)dt,$$

где минимум и максимум вычисляются покомпонентно, и решению детерминированной задачи

$$c'x(t^*) \to \min_u,\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(\tau) = x^*(\tau),\ x(t^*)\in X^*(\tau),\ u(t)\in U,\ t\in T(\tau), \tag{5}$$

с $X^*(\tau) = \{x\in R^n : \underline{g} - \underline{\gamma}(\tau) \le Hx \le \overline{g} - \overline{\gamma}(\tau)\}$. Гарантированное значение критерия качества задачи $P(\tau)$ равно $J^0(\tau) = \gamma^0(\tau) + c'x^0(t^*)$, где $x^0(t)$, $t\in T(\tau)$, – оптимальная траектория (5).

П р е д п о л о ж е н и е 1. *Задача* $P(\tau)$ *имеет решение в начальный момент времени* $\tau = 0$.

При выполнении предположения 1 $P(\tau)$ имеет решение при всех $\tau\in T_h$.

3. *Децентрализованное управление* группой объектов (1) организуем согласно подходу [4]. Пусть каждый i-й объект имеет *собственный управляющий орган* (регулятор), который в режиме реального времени вырабатывает управляющие сигналы $u_i^*(\tau)$, $\tau\in T_h$, *только для i-го агента*. При этом он использует информацию о текущем состоянии $x_i^*(\tau)$ своего объекта и некоторую информацию о поведении остальных объектов, необходимую для осуществления взаимодействия между агентами группы и достижения ими общей цели управления.

Будем считать, что i-й регулятор обменивается информацией о своем поведении не со всеми агентами группы, как в [4], а лишь с теми, которые являются *соседними* по отношению к нему. Соседние объекты определим по наличию между ними связи в (2), т. е. объекты i и j являются соседними, если существует такой индекс $l \in L$, что $i,\ j \in K^l$.

Пусть $L_i = \{l \in L : i \in K^l\}$ – совокупность индексов ограничений (2), включающих терминальное состояние $x_i(t^*)$ объекта i. Тогда $N_i = \cup_{l \in L_i} K^l \setminus \{i\}$ – все соседи i-й системы.

Далее предполагается, что i-й регулятор обменивается информацией о собственном состоянии и планируемых действиях только с регуляторами соседних объектов $k \in N_i$, при этом в канале передачи данных имеется запаздывание, равное периоду квантования h. Такое предположение можно считать стандартным в литературе по управлению мультиагентными системами [2; 3]. Конкретная информация, которой обмениваются регуляторы, будет указана ниже.

Обозначим: $P_i(\tau)$ – задача оптимального управления, решая которую в момент времени τ i-й регулятор находит значение $u_i^*(\tau)$; $u_i^d(\cdot \mid \tau) = (u_i^d(t \mid \tau), t \in T(\tau))$ – оптимальная программа задачи $P_i(\tau)$ (i-я оптимальная локальная программа); $x_i^d(\cdot \mid \tau) = (x_i^d(t \mid \tau), t \in T(\tau))$ – соответствующая ей траектория детерминированной системы $\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i^d(t \mid \tau),\ x_i(\tau) = x_i^*(\tau)$; $y_i^l(\tau) = H_i^l x_i^d(t^* \mid \tau)$ – выходные сигналы i-й детерминированной системы; $y^l(\tau) = \sum_{k \in K^l} y_k^l(\tau)$ – выходной сигнал, соответствующий l-му ограничению (2), $l \in L$.

Следуя [4], задачу i-го регулятора $P_i(\tau)$ сформулируем следующим образом. В задаче (4) в качестве начального состояния i-го объекта возьмем измеренное текущее состояние $x_i^*(\tau)$, в качестве состояний агентов, соседних с i-м, возьмем векторы $x_k^d(\tau \mid \tau - h),\ k \in N_i$. Последнее соответствует предположению о том, что все остальные объекты на промежутке $[\tau - h, \tau]$ придерживались выработанной в момент $\tau - h$ оптимальной программы, при этом они не были подвержены действию возмущений, т. е. $w_k(t) \equiv 0,\ t \in [\tau - h, \tau]$. Далее, в задаче (4) будем искать минимум только по управлению $u_i(\cdot)$ объекта i, а остальные управления $u_k(\cdot)$ будем считать параметрами, полагая их равными оптимальным локальным программам, построенным в предыдущий момент времени $\tau - h : u_k(t) = u_k^d(t \mid \tau - h),\ t \in T(\tau),\ k \in N_i$. Поведение объектов $k \in N_i$ на $T(\tau)$ предполагается детерминированным. Отметим, что ограничения, в которые не входит i-й объект, т. е. $l \notin L_i$, опускаются, поскольку они не содержат переменных оптимизации $u_i(\cdot)$. По тем же соображениям исключаются уравнения движения агентов, не являющихся соседними для i. Наконец, в задаче (4) модифицируем ограничения согласно правилам из [4].

Применив изложенные выше правила к (4), получим следующую задачу i-го регулятора

$$P_i(\tau) : J_i^d(\tau) = \min_{u_i} \max_{w_i} \sum_{k \in N_i} c_k' x_k(t^*), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + M_i w_i(t),\ x_i(\tau) = x_i^*(\tau),\\ \dot{x}_k(t) = A_k x_k(t) + B_k u_k^d(t \mid \tau - h),\ x_k(\tau) = x_k^d(\tau \mid \tau - h),\ k \in N_i,\\ \underline{g}_i^l(\tau) \le \sum_{k \in K^l} H_k^l x_k(t^*) \le \overline{g}_i^l(\tau),\ l \in L_i,\ u_i(t) \in U_i,\ w_i(t) \in W_i,\ t \in T(\tau),\end{gathered}$$

где $\underline{g}_i^l(\tau) = y^l(\tau - h) + \underline{\Omega}_i^l[\underline{g}^l - y^l(\tau - h)],\ \overline{g}_i^l(\tau) = y^l(\tau - h) + \overline{\Omega}_i^l[\overline{g}^l - y^l(\tau - h)],\ \underline{\Omega}_i^l, \overline{\Omega}_i^l \in R^{m^l \times m^l}$ – диагональные матрицы, составленные из весовых коэффициентов со значениями из отрезка [0, 1]; $\sum_{k \in K^l} \underline{\Omega}_k^l = \sum_{k \in K^l} \overline{\Omega}_k^l = E_{m^l \times m^l}$.

Поскольку в $P_i(\tau)$ динамика объектов $k \in N_i$ детерминирована и не зависит от выбора управления $u_i(\cdot)$, их терминальные состояния $x_k(t^*)$ и соответствующие дифференциальные уравнения можно исключить из задачи (6). Терминальные ограничения тогда примут вид

$$\underline{g}_i^l(\tau) \le H_i^l x_i(t^*) + \sum_{k \in K^l \setminus i} y_k^l(\tau - h) \le \overline{g}_i^l(\tau),\ l \in L_i,$$

или, обозначив $\underline{\alpha}_i^l(\tau) = y_i^l(\tau - h) + \underline{\Omega}_i^l[\underline{g}^l - y^l(\tau - h)],\ \overline{\alpha}_i^l(\tau) = y_i^l(\tau - h) + \overline{\Omega}_i^l[\overline{g}^l - y^l(\tau - h)]$, вид

$$\underline{\alpha}_i^l(\tau) \le H_i^l x_i(t^*) \le \overline{\alpha}_i^l(\tau),\ l \in L_i.$$

При этом для любого $l \in L_i$ выполняется $\underline{\alpha}_i^l(\tau) \le \overline{\alpha}_i^l(\tau)$.

Таким образом, задача оптимального управления $P_i(\tau)$, которую решает оптимальный регулятор i-го агента в момент времени $\tau \in T_h \setminus \{0\}$ принимает вид

$$P_i(\tau): J_i^d(\tau) = \min_{u_i} \max_{w_i} c_i' x_i(t^*), \tag{7}$$

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + M_i w_i(t),\ x_i(\tau) = x_i^*(\tau),$$
$$\underline{\alpha}_i^l(\tau) \le H_i^l x_i(t^*) \le \overline{\alpha}_i^l(\tau),\ l \in L_i,\ u_i(t) \in U_i,\ w_i(t) \in W_i,\ t \in T(\tau).$$

Для инициализации алгоритма децентрализованного управления в момент времени $\tau = 0$ используется оптимальная централизованная программа задачи $P(0): u_i^d(t\,|\,0) = u_i^0(t\,|\,0),\ t \in T$.

Как и при централизованном управлении (см. п. 2), значение в момент τ оптимальной программы, построенной регулятором, подается на вход i-го объекта до получения следующего измерения. Таким образом, управляющее воздействие для i-го объекта:

$$u_i^*(t) \equiv u_i^*(\tau) = u_i^d(\tau\,|\,\tau),\ t \in [\tau, \tau + h[,\ \tau \in T_h.$$

Аналогично [6] и п. 2, можно записать эквивалентную (7) детерминированную задачу

$$c_i' x_i(t^*) \to \min_{u_i},\ \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t),\ x_i(\tau) = x_i^*(\tau),\ x_i(t^*) \in X_i^*(\tau),\ u_i(t) \in U_i,\ t \in T(\tau), \tag{8}$$

где $X_i^*(\tau) = \{x_i \in R^{n_i} : \underline{\alpha}_i^l(\tau) - \underline{\gamma}_i^l(\tau) \le H_i^l x_i \le \overline{\alpha}_i^l(\tau) - \overline{\gamma}_i^l(\tau), l \in L_i\}$,

$$\underline{\gamma}_i^l(\tau) = \int_\tau^{t^*} \min_{w_i(t)\in W_i} H_i^l e^{A_i(t^*-t)} M_i w_i(t)dt,\ \overline{\gamma}_i^l(\tau) = \int_\tau^{t^*} \max_{w_i(t)\in W_i} H_i^l e^{A_i(t^*-t)} M_i w_i(t)dt.$$

Гарантированное значение критерия качества задачи $P_i(\tau)$ равно $J_i^d(\tau) = \gamma_i^0(\tau) + c' x_i^d(t^*)$, где

$$\gamma_i^0(\tau) = \int_\tau^{t^*} \max_{w_i(t)\in W_i} c_i' e^{A_i(t^*-t)} M_i w_i(t)dt.$$

Отметим связь между $\underline{\gamma}(\tau), \overline{\gamma}(\tau),\ \underline{\gamma}_i^l(\tau), \overline{\gamma}_i^l(\tau)$ и $\gamma^0(\tau),\ \gamma_i^0(\tau)$: $\gamma^0(\tau) = \sum_{i\in I} \gamma_i^0(\tau)$,

$$\underline{\gamma}(\tau) = (\underline{\gamma}^l(\tau), l \in L) : \underline{\gamma}^l(\tau) = \sum_{k\in K^l} \underline{\gamma}_i^l(\tau);\ \overline{\gamma}(\tau) = (\overline{\gamma}^l(\tau), l \in L) : \overline{\gamma}^l(\tau) = \sum_{k\in K^l} \overline{\gamma}_i^l(\tau). \tag{9}$$

Централизованная задача оптимального управления $P(\tau)$ имеет n состояний, r входов и $m = \sum_{l\in L} m^l$ терминальных ограничений. В задаче $P_i(\tau)$ – n_i состояний, r_i входов и $\sum_{l\in L_i} m^l$ терминальных ограничений. При большом числе q агентов задача $P_i(\tau)$ значительно проще задачи централизованного управления $P(\tau)$. Более того, размерность $P_i(\tau)$ не зависит от q, и все задачи $P_i(\tau),\ i \in I$, решаются регуляторами параллельно, что позволяет говорить о распределении как функций управления, так и вычислений между q регуляторами. Отметим, что благодаря учету особенностей связей между агентами группы и их независимой динамике, в $P_i(\tau)$ по сравнению с [4] понижена не только размерность входа, но и размерность состояния, а также, в случае $|L_i| < |L|,\ i \in I$, уменьшено число ограничений.

Как следует из формулировки (7), для мультиагентной системы (1) по сравнению с многосвязной системой из [4] можно сократить и объем данных, передающихся по информационному каналу между соседними объектами. Для формирования задачи $P_i(\tau)$ регулятор i-й системы в каждый момент времени $\tau \in T_h \setminus \{0\}$ получает следующую информацию:

1) состояние $x_i^*(\tau)$ собственного объекта;

2) от каждой соседней системы $k \in N_i$ с запаздыванием на h: выходные сигналы $y_k^l(\tau - h) = H_k^l x_k^d(t^*\,|\,\tau - h),\ l \in L_i$, соответствующие k-й оптимальной локальной программе $u_k^d(\cdot\,|\,\tau - h)$, построенной в момент времени $\tau - h$.

4. Предложенная в п. 3 схема децентрализованного управления обладает рядом важных свойств, сформулированных в следующих теоремах.

Т е о р е м а 1. *Для любых* $\tau \in T_h \setminus \{0\}$ *и реализовавшегося возмущения* $w^*(t),\ t \in [0, \tau]$, *децентрализованная программа* $u^d(\cdot\,|\,\tau) = (u_k^d(\cdot\,|\,\tau), k \in I)$ *допустима в централизованной задаче* $P(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем момент $\tau \in T_h \setminus \{0\}$. Рассмотрим задачу (8). Ее оптимальная программа $u_i^d(\cdot\,|\,\tau)$ порождает траекторию $x_i^d(\cdot\,|\,\tau)$, на которой выполняются терминальные ограничения: $\underline{\alpha}_i^l(\tau) - \underline{\gamma}_i^l(\tau) \le H_i^l x_i^d(t^*\,|\,\tau) \le \overline{\alpha}_i^l(\tau) - \overline{\gamma}_i^l(\tau),\ l \in L_i$. Просуммируем эти неравенства по $i \in K^l,\ l \in L$. В силу $\sum_{i\in K^l} \underline{\alpha}_i^l(\tau) = \sum_{i\in K^l} y_i^l(\tau - h) + \Omega_i^l[\underline{g}^l - y^l(\tau - h)] = \underline{g}^l$, $\sum_{i\in K^l} \overline{\alpha}_i^l(\tau) = \overline{g}^l$

и равенств (9) получим $\underline{g}^l - \underline{\gamma}^l(\tau) \le \sum_{k\in K^l} H_k^l x_k^d(t^* \mid \tau) \le \overline{g}^l - \overline{\gamma}^l(\tau),\ l \in L,$ или эквивалентно $\underline{g} - \gamma(\tau) \le Hx^d(t^* \mid \tau) \le \overline{g} - \overline{\gamma}(\tau)$. Это означает выполнение ограничений задачи (5) на управлении $u^d(t \mid \tau),\ t \in T(\tau)$, т. е. его допустимость в задаче $P(\tau)$. □

П р е д п о л о ж е н и е 2. *Для любого* $\tau \in T_h$ *выполняется* $\underline{\gamma}_i^l(\tau) = \underline{\Omega}_i^l \underline{\gamma}^l(\tau),\ \overline{\gamma}_i^l(\tau) = \overline{\Omega}_i^l \overline{\gamma}^l(\tau)$.

Т е о р е м а 2. *В предположениях 1, 2 задачи* $P_i(\tau),\ i \in I$, *имеют решение при всех* $\tau \in T_h \setminus \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $u_i^d(t \mid \tau - h) \in U_i,\ t \in T(\tau)$, (сужение оптимальной локальной программы задачи $P_i(\tau - h)$) – допустимое программное управление в $P_i(\tau)$. Тогда, согласно теоремам существования, в задаче $P_i(\tau)$ существует и оптимальная программа.

Пусть $x_i(t^*)$ – терминальное состояние системы управления из (8) с $u_i(t) = u_i^d(t \mid \tau - h), t \in T(\tau)$. Нетрудно показать, что $H_i^l x_i(t^*) = y_i^l(\tau - h) + H_i^l e^{A_i(t^* - \tau)}[x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau \mid \tau - h)]$, где для второго слагаемого, в силу введенных обозначений и предположения 2, выполняется неравенство $H_i^l e^{A_i(t^* - \tau)}[x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau \mid \tau - h)] \le \overline{\gamma}_i^l(\tau - h) - \overline{\gamma}_i^l(\tau) = \overline{\Omega}_i^l \overline{\gamma}^l(\tau - h) - \overline{\gamma}_i^l(\tau)$. Из теоремы 1 следует $y^l(\tau - h) \le \overline{g} - \overline{\gamma}^l(\tau - h)$, откуда $\overline{\gamma}^l(\tau - h) \le \overline{g} - y^l(\tau - h)$. Окончательно получим $H_i^l x_i(t^*) \le y_i^l(\tau - h) + \overline{\Omega}_i^l \overline{\gamma}^l(\tau - h) - \overline{\gamma}_i^l(\tau) \le y_i^l(\tau - h) + \overline{\Omega}_i^l[\overline{g} - y^l(\tau - h)] - \overline{\gamma}_i^l(\tau) = \overline{\alpha}_i^l(\tau) - \overline{\gamma}_i^l(\tau)$. Аналогично устанавливается, что $H_i^l x_i(t^*) \ge \underline{\alpha}_i^l(\tau) - \underline{\gamma}_i^l(\tau)$, откуда следует, что $x_i(t^*) \in X_i^*(\tau)$ в (8), и функция $u_i^d(t \mid \tau - h),\ t \in T(\tau)$, является программой в $P_i(\tau)$. □

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда имеют место следующие неравенства:*

1) $J_i^d(\tau) \le J_i^d(\tau - h)$;

2) $J^0(\tau) \le \sum_{i\in I} J_i^d(\tau) \le J^0(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу $P_i(\tau)$ и программу $u_i^d(t \mid \tau - h) \in U_i,\ t \in T(\tau)$. Гарантированное значение критерия качества на данном управлении равно $\gamma_i^0(\tau) + c_i' x_i(t^*) \ge J_i^d(\tau)$, поскольку $J_i^d(\tau)$ – оптимальное значение. Аналогично рассуждениям теоремы 2 получим

$$c_i' x_i(t^*) = c_i' x_i^d(t^* \mid \tau - h) + c_i' e^{A_i(t^* - \tau)}[x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau \mid \tau - h)] \le c_i' x_i^d(t^* \mid \tau - h) + \gamma_i^0(\tau - h) - \gamma_i^0(\tau),$$

что влечет $J_i^d(\tau) \le \gamma_i^0(\tau) + c_i' x_i(t^*) \le c_i' x_i^d(t^* \mid \tau - h) + \gamma_i^0(\tau - h) = J_i^d(\tau - h)$.

Второе неравенство следует из условия 1), неравенства $\sum_{i\in I} J_i^d(h) \le J^0(0)$ и теоремы 1. □

Из теоремы 3 и того факта, что $J^0(\tau) \to J^0(0)$ при $w^* \to 0$, где $w^* = \max_{w_i \in W_i,\, i\in I} w_i$, следует субоптимальность децентрализованной программы $u^d(\cdot \mid \tau)$ в задаче централизованного оптимального управления $P(\tau)$ при малых возмущениях.

Выводы. Доказанные теоремы устанавливают три важных свойства предложенной в п. 3 схемы управления:

1. Выполнение с гарантией ограничений, связывающих поведение автономных систем, несмотря на распределение функций управления между q регуляторами и присутствие запаздывания в канале передачи информации;
2. Реализуемость схемы распределенного управления в силу разрешимости всех локальных задач оптимального управления;
3. Субоптимальность децентрализованного управления в реальном времени.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ.

Литература

1. *Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г.* Распределенные системы планирования действий коллективов роботов. М., 2002.
2. *Scattolini R.* // J. of Process Control. 2009. N 19. P. 723–731.
3. *Richards A., How J. P.* // Int. J. of Control. 2007. Vol. 80, N 9. P. 1517–1531.
4. *Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51, № 7. С. 1209–1227.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 15–18.
6. *Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.

N. M. DMITRUK

dmitrukn@bsu.by

OPTIMAL CONTROL OF MULTI-AGENT DYNAMICAL SYSTEMS UNDER UNCERTAINTIES

Summary

This article deals with an optimal control problem for a group of dynamically decoupled linear systems subject to unknown disturbances and coupling constraints. A distributed control scheme is proposed, guaranteeing the robust constraints satisfaction, the recursive feasibility of local optimal control problems solved in real-time by the agents and the suboptimality of performance of the distributed control.