Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **январь–февраль** **Том 59 № 1**

МАТЕМАТИКА

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС ГРАФА БЕЗ МИНОРА $K_{2,4}$

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 22.12.2014*

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный связный граф порядка n и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A = A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей), или его *спектром*. Обозначим через $N(v) = N_G(v) = \{u \in V(G) \mid u \sim v\}$ окружение произвольной вершины $v \in V$ в графе G, и пусть $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Тогда степень вершины v в графе G равна $\deg_G(v) = \deg(v) = |N(v)|$. Пусть $S_v(A^l)$ обозначает сумму элементов строки матрицы A^l, соответствующей вершине $v \in V$. Из алгебраической теории графов хорошо известно, что сумма $S_v(A^l)$ равна числу маршрутов длины l, которые начинаются в вершине $v \in V$ графа G. Легко видеть, что для произвольного графа G справедливы равенства $S_v(A) = \deg(v)$ и $S_v(A^2) = \sum_{u \in N(v)} \deg(u)$.

Наибольшее собственное значение λ_1 называется *спектральным радиусом* графа G и часто обозначается через $\rho(G)$. Согласно известной теореме Перрона–Фробениуса, спектральный радиус $\rho(G)$ является положительным действительным числом кратности 1 и существует положительный собственный вектор (с положительными компонентами), относящийся к нему, называемый *вектором Перрона*. Изучение спектрального радиуса графа имеет не только теоретическое значение в структурной теории графов, но и непосредственное применение в различных прикладных и смежных областях естествознания, таких как теоретическая физика, гармонический анализ, алгоритмическая теория и географические сети.

Напомним, что граф H называется *минором* или *H-минором* графа G или G называется графом *с минором H*, если граф H может быть получен из графа G путем последовательного выполнения следующих операций: удаления ребер, стягивания ребер и удаления изолированных вершин. Другими словами, говорят, что H – минор графа G, если можно отождествить каждую вершину $v \in H$ с некоторым связным подграфом C_v из G так, что C_u и C_v являются вершинно непересекающимися подграфами при $u \neq v$, и для каждого ребра uv из H в графе G существует ребро между подграфами C_u и C_v.

Для заданного графа H граф G называется графом *без минора H*, или *свободным от минора H*, если граф H не является минором графа G.

Так, хорошо известна характеризация Вагнера планарных графов, как графов без обоих миноров K_5 и $K_{3,3}$, а также внешнепланарных графов, как графов без обоих миноров K_4 и $K_{2,3}$. В ряде работ [1–4] были получены верхние оценки для спектральных радиусов таких графов, а также графов отдельно без миноров K_5, $K_{3,3}$, $K_{2,3}$.

В данной работе рассматриваются графы без минора $K_{2,4}$. Совсем недавно группой американских и японских математиков была получена полная характеризация таких графов [5]. Ясно, что графы порядка менее 6 являются свободными от минора $K_{2,4}$ и все 4-связные графы порядка не менее 6 всегда имеют минор $K_{2,4}$. Действительно, для полных графов это очевидно. А для не-полного графа две несмежные вершины вместе с четырьмя вершинно непересекающимися цепями с концами в этих вершинах, существование которых гарантируется теоремой Менгера, дают минор $K_{2,4}$. Поэтому рассмотрим сначала 3-связные графы.

Введем некоторые дополнительные определения. Для $n \geq 3$, $0 \leq r, s \leq n - 3$ обозначим через $G_{n,r,s}$ граф, состоящий из остовной цепи $v_1 v_2 \ldots v_n$, которую будем называть *сердцевиной*, а также ребер $v_1 v_{n-i}$, где $1 \leq i \leq r$, и ребер $v_n v_{1+j}$, где $1 \leq j \leq s$. Граф $G_{n,r,s}$ с дополнительным ребром $v_1 v_n$ будет обозначаться через $G^+_{n,r,s}$. Сразу заметим, что $G^+_{n,r,s} \cong G^+_{n,s,r}$, при *инволюции* σ, такой, что $\sigma(v_i) = v_{n+1-i}$ для всех $1 \leq i \leq n$, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $r \leq s$. Кроме того, граф $G^+_{n,1,n-3}$ изоморфен колесу W_n с центром в вершине v_n. Отметим, что все графы $G^+_{n,r,s}$ являются планарными. При $r = 2$ остовная цепь $v_{n-2} v_{n-3} \ldots v_2 v_1 v_{n-1} v_n$ называется *второй сердцевиной* графа $G_{n,2,n-3}$ и является образом сердцевины графа $G^+_{n,2,n-4}$ при изоморфизме $\sigma: G^+_{n,2,n-4} \cong G_{n,2,n-3}$, который две вершины v_{n-1}, v_n оставляет неподвижными, а $\sigma(v_i) = v_{n+1-i}$ для всех $1 \leq i \leq n - 2$. Введем в рассмотрение следующее семейство графов:

$$\mathcal{G} = \{G^+_{n,1,n-3} \mid n \geq 4\} \cup \{G^{(+)}_{n,r,s} \mid n \geq 5, 2 \leq r \leq s \leq n-3, r + s = n - 1 \text{ или } n - 2\}.$$

Справедливо следующее утверждение [5].

Т е о р е м а 1. *Пусть G – 3-связный граф. Тогда G является свободным от минора $K_{2,4}$ тогда и только тогда, когда или $G \in \mathcal{G}$ или G является одним из девяти графов, изображенных на рис.* 1.

Для того чтобы описать структуру 2-связных графов, свободных от минора $K_{2,4}$, введем дополнительные определения.

Простой граф G называется *внешнепланарным*, если существует такое вложение его в плоскость, при котором каждая вершина лежит на границе внешней неограниченной грани. Внешнепланарный граф называется *максимальным*, если при добавлении любого дополнительного ребра нарушается свойство планарности. Ребро внешнепланарного графа, лежащее на границе внешней грани, назовем его *внешним ребром*. Вершину $v \in V$ внешнепланарного графа G, для которой существует некоторое внешнее ребро $e = uw$ этого графа с $\{u, w\} \subset N(v)$, будем называть вершиной, *смежной с ребром e*.

Простой граф H называется *xy-внешнепланарным* графом, если он имеет остовную xy-цепь, а все остальные ребра можно разместить по одну сторону от этой цепи. Другими словами, это эквивалентно тому, что граф H можно *вложить* в замкнутый диск D так, что гамильтонова xy-цепь лежит на границе диска D.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. *Пересечение* $G \cap H$ простых графов G и H определяется аналогично.

Подмножество ребер $F \subset E(G)$ графа G без минора $K_{2,4}$ называется *подразбиваемым*, если граф, образованный из графа G с помощью подразбиения всех ребер из F, остается свободым от минора $K_{2,4}$.

Справедливо следующее утверждение [5].

Т е о р е м а 2. *Пусть G – 2-связный граф. Тогда G является свободным от минора $K_{2,4}$ тогда и только тогда, когда граф G является одним из следующих графов*:

1) *G – внешнепланарный граф*;

2) *G является объединением трех xy-внешнепланарных графов H_1, H_2, H_3, взаимно пересекающихся только по вершинам x, y, т. е. $|V(H_i)| \geq 3$ для каждого i и $V(H_i) \cap V(H_j) = \{x, y\}$ при $i \neq j$, и, возможно, самого ребра xy*;

3) *G получается из 3-связного графа G_0 без минора $K_{2,4}$ с помощью замены каждого ребра $x_i y_i$ из подразбиваемого подмножества ребер $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_k y_k\}$ на $x_i y_i$-внешнепланарный подграф H_i, где $V(H_i) \cap V(G_0) = \{x_i, y_i\}$ для каждого i и $V(H_i) \cap V(H_j) \subseteq V(G_0)$ при $i \neq j$.*

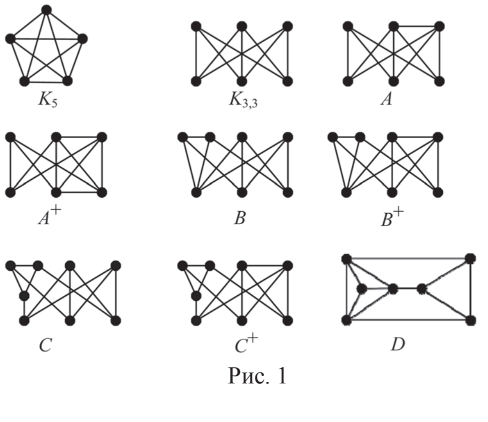


Рис. 1

Осталось указать все подразбиваемые подмножества для 2-связных графов без минора $K_{2,4}$, перечисленных в теореме 1 [5].

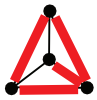
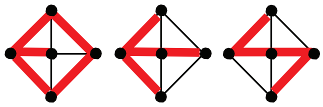
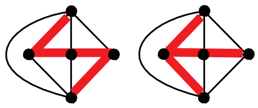
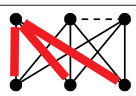
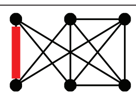
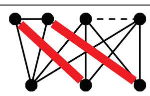
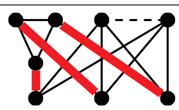
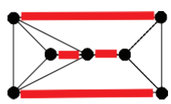
Т е о р е м а 3. *а) Граф* $G^{+}_{n,1,n-3} \cong W_n$ *с* $n \geq 6$ *имеет* $n - 1$ *максимальное подразбиваемое множество ребер, каждое из которых содержит все ребра обода и одну спицу колеса* W_n:

б) Граф $G_{n,2,s}$ *с* $s \geq 4$, $n \geq 6$, *и граф* $G^{+}_{n,2,s}$ *с* $s \geq 3$, $n \geq 6$, *имеют два максимальных подразбиваемых множества ребер: множество ребер сердцевины и множество ребер второй сердцевины;*

в) Граф $G^{(+)}_{n,r,s}$ *с* $r \geq 3$, $n \geq 6$ *имеет единственное максимальное подразбиваемое множество ребер: множество ребер сердцевины*;

г) Все максимальные подразбиваемые множества ребер для девяти графов, перечисленных в теореме 1, а также для графов $K_4 \cong W_4$, $W_5 \cong G_{5,2,2}$, $K_5 \setminus e \cong G^{+}_{5,2,2}$, $G_{6,2,2}$, $G^{+}_{6,2,2} \cong G_{6,2,3}$, $G_{7,2,3}$ *представлены в табл. 1.*

Таблица 1

Граф	Максимальные подразбиваемые множества ребер	Число симметричных копий
$K_4 \cong {}_{W}4$		12
$W_5 \cong G_{5,2,2}$		4
$K_5 \setminus e \cong G^{+}_{5,2,2}$		6
$G_{6,2,2}$	Множество ребер сердцевины	6
$G^{+}_{6,2,2} \cong G_{6,2,3}$	Множество ребер сердцевины, множество ребер второй сердцевины	1 2
$G_{7,2,3}$	Множество ребер сердцевины и множество ребер второй сердцевины $\{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7, v_3v_7\}$	1
K_5	$\varnothing$	1
A, $K_{3,3}$		A: 1 $K_{3,3}$: 6
A^{+}		1
B, B^{+}		1
C, C^{+}		1
D		3

Для исследования верхней оценки спектрального радиуса графа G без минора $K_{2,4}$ нам понадобятся следующие полезные леммы.

Л е м м а 1 [6]. *Пусть* G *– связный граф и* H *– собственный подграф графа* G. *Тогда имеет место строгое неравенство* $\rho(H) < \rho(G)$.

Л е м м а 2. *Пусть* A *– матрица смежности связного простого графа* G *порядка* n. *Если существует неотрицательный вектор* $y \neq 0$ *и полином* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, *такие, что* $f(A)y \leq ry$ *для некоторого действительного числа* r, *то* $f(\rho(G)) \leq r$.

Действительно, пусть x – вектор Перрона матрицы $A = A^T$. Тогда для спектрального радиуса $\rho = \rho(G)$ из неравенства $f(A)y \le ry$ ($r \in \mathbb{R}$) следует

$$f(\rho)x^T y = (f(A^T)x)^T y = x^T f(A)y \le rx^T y,$$

откуда получаем $f(\rho) \le r$.

С л е д с т в и е. *Для произвольного полинома $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и матрицы смежности A связного простого графа G порядка n имеет место неравенство*

$$f(\rho) \le \max_{v \in V(G)} S_v(f(A)).$$

З а м е ч а н и е. Аналогично можно показать, что если существует неотрицательный вектор $y \ne 0$ и полином $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, такие, что $f(A)y \ge ry$ для некоторого $r \in \mathbb{R}$, то $f(\rho(G)) \ge r$.

Поэтому для произвольного полинома $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и матрицы смежности A связного простого графа G порядка n имеет место неравенство

$$\min_{v \in V(G)} S_v(f(A)) \le f(\rho).$$

Л е м м а 3. *Для произвольного максимального внешнепланарного графа $G = (V, E)$ порядка n с матрицей смежности A и любой его вершины $v \in V$ справедливо неравенство*

$$S_v(A^2) = \sum_{u \in N(v)} \deg(u) \le n - 4 + 3\deg(v).$$

Кроме того, если вершина $v \in V$ смежна с некоторым внешним ребром, то справедливо неравенство

$$S_v(A^2) = \sum_{u \in N(v)} \deg(u) \le n - 5 + 3\deg(v).$$

Действительно, пусть вершина $v \in V$ смежна с вершинами $u_1, u_2, \ldots, u_d$ ($d = \deg(v)$) в порядке их обхода по внешней границе против часовой стрелки. Причем, в силу максимальности внешнепланарного графа ребра vu_1 и vu_d являются внешними ребрами. Обозначим через $n_i \ge 0$ ($i = \overline{1, d-1}$) число вершин, лежащих между вершинами u_i и u_{i+1} на внешней границе. Тогда имеем равенство $\sum_{i=1}^{d-1} n_i + (d+1) = n.$ В силу планарности графа G максимальная сумма степеней двух вершин u_i и u_{i+1} в графе, индуцированном этими вершинами и n_i вершинами, лежащими между ними на внешней границе, не превосходит $n_i + 3$, если $n_i > 0$, и не превосходит 2, если $n_i = 0$. Поэтому имеем

$$\sum_{u \in N(v)} \deg(u) \le \sum_{i=1}^{d-1} (n_i + 3) + d = \sum_{i=1}^{d-1} n_i + 3(d-1) + d = n + 3d - 4,$$

если $n_i > 0$ ($i = \overline{1, d-1}$), и $\sum_{u \in N(v)} \deg(u) \le n + 3d - 5$, если $n_i = 0$ для некоторого i.

С л е д с т в и е. *Для произвольного максимального внешнепланарного графа $G = (V, E)$ порядка n имеет место следующая верхняя оценка*: $\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{n - \frac{7}{4}}$.

Действительно, из полученного неравенства $S_v(A^2) \le n - 4 + 3\deg(v)$ и равенства $S_v(A) = \deg(v)$ следует, что $S_v(A^2 - 3A) \le n - 4$. А значит, в силу следствия леммы 2 имеем $\rho^2 - 3\rho \le n - 4$, откуда получаем требуемую оценку.

Пусть $G = G^+_{n,1,n-3}$ (рис. 2). Тогда $\deg(v_i) = 3$ при $i = \overline{1, n-1}$ и $\deg(v_n) = n - 1$. Поэтому $\sum_{u \sim v_i} \deg(u) = 3 + 3 + (n-1) = n - 1 + 2\deg(v_i)$ при $i \ne n$ и $\sum_{u \sim v_n} \deg(u) = 3(n-1) = n - 1 + 2\deg(v_n)$. Следовательно, по лемме 2 $\rho^2 - 2\rho \le n - 1$, откуда получаем оценку

$$\rho(G) \le 1 + \sqrt{n}. \qquad (1)$$

Пусть $G = G^{(+)}_{n,r,s}$ (рис. 2). Тогда в силу леммы 1 можно считать, что $G = G^+_{n,r,s}$ и, кроме того, $r + s = n - 1$. Тогда $\deg(v) = 3$ при $v \ne v_1, v_{n-r}, v_n$, $\deg(v_{n-r}) = 4$, $\deg(v_1) = r + 2$, $\deg(v_n) = s + 2$. Поэтому нетрудно непосредственно проверить, что $\max_{v \in V(G)} S_v(A^2)$ достигается для вершин v_1, v_2, v_{n-1} и v_n. Следовательно,

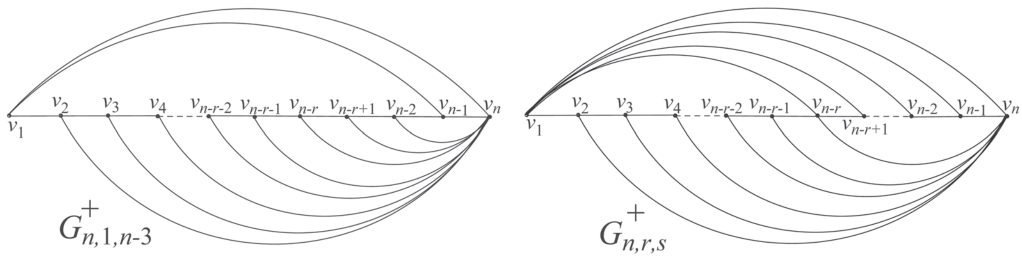


Рис. 2

$$\max_{v\in V(G)} S_v(A^2)=\sum_{u\sim v_n}\deg(u)=3s+4+(r+2)=(r+s+1)+2(s+2)+1=n+1+2\deg(v_n).$$

Поэтому по Лемме 2 $\rho^2-2\rho\le n+1$, откуда получаем оценку

$$\rho(G)\le 1+\sqrt{n+2}. \tag{2}$$

Осталось отметить, что оценка (2) больше, чем оценка (1) и для всех графов, изображенных на рис. 1, кроме полного графа K_5 (для которого, как 4-регулярного графа, $\rho(K_5)=4$), можно непосредственно проверить (например, с помощью пакета Mathcad), что неравенство (2) также справедливо. Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть G – 3-связный граф порядка n, свободный от минора $K_{2,4}$ и отличный от K_5. Тогда его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G)\le 1+\sqrt{n+2}.$$

Для полного графа K_5 $\rho(K_5)=4$.

Рассмотрим теперь 2-связный граф G порядка N, свободный от минора $K_{2,4}$.

1) Если G – внешнепланарный граф порядка N, то, как уже показано в следствии из леммы 3, его спектральный радиус $\rho(G)\le\frac{3}{2}+\sqrt{N-\frac{7}{4}}$.

2) Пусть теперь $G=\bigcup_{i=1}^{3}H_i$, где каждый H_i – xy-внешнепланарный граф. Кроме того, в силу леммы 1 можно считать, что ребро xy также принадлежит графу G, и каждый граф $G_i=H_i+xy$ является максимальным внешнепланарным графом порядка n_i+2, $n_i\ge 1$, т. е. $\bigcap_{i=1}^{3}G_i=\{xy\}$ и $\operatorname{ord}(G)=N=\sum_{i=1}^{3}n_i+2$.

Возьмем произвольную вершину $v\in G$. Не ограничивая общности, можно считать, что $v\in G_1$. Если $v\notin N[x]\cup N[y]$, то согласно лемме 3 имеем

$$\sum_{u\in N(v)}\deg(u)=(n_1+2)-4+3\deg_{G_1}(v)=n_1-2+3\deg(v)<N-6+3\deg(v).$$

Если $v\notin N[y]$, но $v\in N(x)$, то согласно лемме 3 имеем

$$\sum_{u\in N(v)}\deg(u)=\sum_{u\in N(v)}\deg_{G_1}(u)+\deg_{G\setminus G_1}(x)\le(n_1+2)-4+3\deg_{G_1}(v)+n_2+n_3=N-4+3\deg(v).$$

Пусть $v\in N(x)\cap N(y)$, т. е. вершина $v\in G_1$ смежна с внешним ребром xy внешнепланарного графа G_1. Тогда согласно лемме 3 и так как в силу планарности каждого графа G_i ($i=2, 3$) максимальная сумма степеней двух вершин x и y в каждом графе G_i-xy, равна n_i+1, имеем

$$\sum_{u\in N(v)}\deg(u)=\sum_{\substack{u\sim v\\ u\in G_1}}\deg_{G_1}(u)+\deg_{G\setminus G_1}(x)+\deg_{G\setminus G_1}(y)\le$$

$$(n_1+2)-5+3\deg_{G_1}(v)+(n_2+1)+(n_3+1)=N-3+3\deg(v).$$

Наконец, пусть $v=x$. Тогда имеем

$$\sum_{u\in N(v)} \deg(u) = \sum_{\substack{u\sim v\\ u\in G_1\\ u\neq y}} \deg_{G_1}(u) + \deg_{G_1}(y) + \sum_{\substack{u\sim v\\ u\in G_2\\ u\neq y}} \deg_{G_2}(u) + \deg_{G_2}(y) + \sum_{\substack{u\sim v\\ u\in G_3\\ u\neq y}} \deg_{G_3}(u) + \deg_{G_3}(y) - 2 \le$$

$$(n_1+2) - 4 + 3\deg_{G_1}(x) + (n_2+2) - 4 + 3\deg_{G_2}(x) + (n_3+2) - 4 + 3\deg_{G_3}(x) - 2 =$$

$$N - 10 + 3(\deg_{G_1}(x) + \deg_{G_2}(x) + \deg_{G_3}(x)) = N - 10 + 3(\deg(x)+2) = N - 4 + 3\deg(x).$$

Выбирая наибольшую из найденных верхних оценок, имеем

$$\max_{v\in V(G)} S_v(A^2) \le N - 3 + 3\deg(v).$$

Тогда по лемме 2 $\rho^2 - 3\rho \le N-3$, откуда получаем верхнюю оценку

$$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{3}{4}}.$$

3) а) Рассмотрим граф $G^+_{n,1,n-3} \cong W_n$, $n \ge 6$, с вершинами v_i $(i=\overline{1,n-1})$ обода, перечисленными в порядке их обхода по часовой стрелке, и ступицей v_n. Пусть $G = \mathrm{ext}(G^+_{n,1,n-3})$ – граф, получаемый из него заменой всех ребер $e_i = v_i v_{i+1}$ $(i=\overline{1,n-2})$, $e_{n-1} = v_{n-1}v_1$ обода и одной спицы $e_n = v_1 v_n$ e_i-внешнепланарными графами H_i $(i=\overline{1,n})$ соответственно (рис. 3). В силу леммы 1 можно считать, что граф G содержит все ребра e_i $(i=\overline{1,n})$, и каждый подграф $G_i = H_i + e_i$ является максимальным внешнепланарным графом порядка $k_i + 2$, $k_i \ge 1$. Порядок полученного графа G равен $N = \sum_{i=1}^{n} k_i + n$ и $G_i \cap G_{i+1} = v_i$ $(i=\overline{1,n-1})$, $G_{n-1} \cap G_n \cap G_1 = v_1$. Тогда для произвольного подмножества $I \in \{1, 2, \ldots, n\}$ мощности l имеем следующую оценку:

$$\sum_{i\in I} k_i = N - n - \sum_{j\notin I} k_j \le N - n + l - n = N - 2n + l \le N - 12 + l.$$

Используя эту оценку нетрудно проверить, что $\max\limits_{v\in V(G)} S_v(A^2)$ достигается в вершине $v \in G_1$, смежной с ребром v_1v_2. Для этой вершины в силу леммы 3 и полученной выше оценки имеем

$$\sum_{u\in N(v)} \deg(u) \le (k_1+2) - 5 + 3\deg(v) + (k_{n-1}+1) + (k_n+1) + (k_2+1) =$$

$$k_1 + k_2 + k_{n-1} + k_n + 3\deg(v) \le N - 8 + 3\deg(v).$$

Тогда по лемме 2 $\rho^2 - 3\rho \le N-8$, откуда получаем оценку для спектрального радиуса рассматриваемого графа G:

$$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{23}{4}}.$$

б), в) Рассмотрим теперь общий случай, когда граф G получается из графа $G^+_{n,r,s}$ с $r \ge 2$, $n \ge 6$ заменой подразбиваемого множества ребер $\{e_i\}$ с помощью e_i-внешнепланарных графов H_i. Обозначим граф G через $\mathrm{ext}^j(G^+_{n,r,s})$, где j = 1, если множество ребер $\{e_i\}$ составляют сердцевину графа $G^+_{n,r,s}$ и j = 2, если множество ребер $\{e_i\}$ составляют вторую сердцевину графа $G^+_{n,r,s}$. Пусть

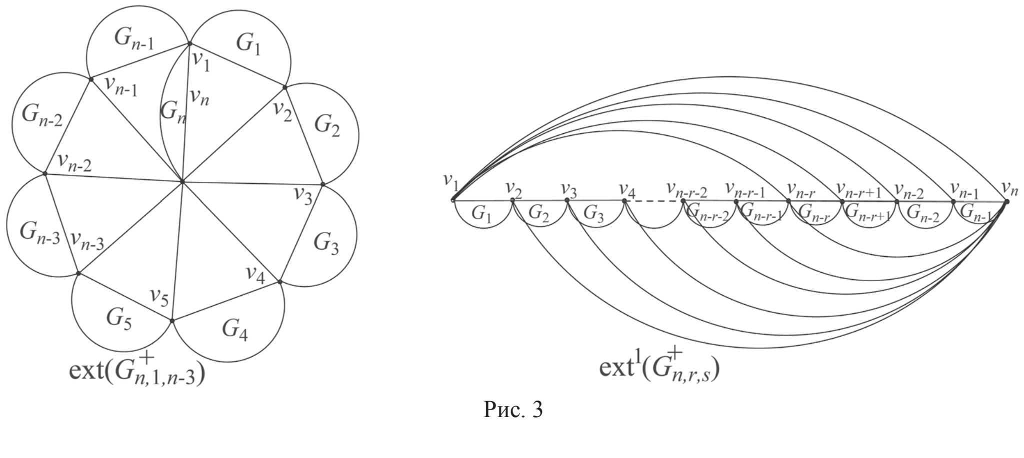


Рис. 3

$j = 1$ и $r \ge 2$, $n \ge 6$ (рис. 3). Тогда из того, что $r \le s$, и так как в силу леммы 1 можно считать, что $r + s = n - 1$, легко проверить, что $\max\limits_{v \in V(G)} S_v(A^2)$ достигается в единственной вершине $v_n \in \mathrm{ext}^1(G^+_{n,r,s})$, для которой имеем

$$\sum_{u \in N(v_n)} \deg(u) \le \sum_{j=1}^{n-r-1} (k_j + 3) + (n - r - 2) + 2 + (k_{n-r} + 1) + (r + 1) + (k_{n-1} + 2) - 4 + 3\deg_{G_{n-1}}(v_n) +$$

$$(k_{n-2} + 2) = \left(\sum_{j=1}^{n-r} k_j + k_{n-2} + k_{n-1} \right) + n - 1 + \deg(v_n) \le N - r + 2 + 3\deg(v_n),$$

поскольку здесь для произвольного подмножества $I \in \{1, 2, \ldots, n\}$ мощности l имеем следующую оценку:

$$\sum_{i \in I} k_i = N - n - \sum_{j \notin I} k_j \le N - n + l + 1 - n = N - 2n + (l + 1).$$

В частности, при $r = 2$ отсюда получаем, что для графа $G = \mathrm{ext}^1(G^+_{n,2,s})$

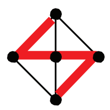
$$\max_{v \in V(G)} S_v(A^2) \le N + 3\deg(v).$$

Нетрудно проверить, что и для графа $G = \mathrm{ext}^2(G^+_{n,2,s})$ верна аналогичная оценка. Тогда по лемме 2 имеем $\rho^2 - 3\rho \le N$, откуда получаем оценку для спектрального радиуса графа $G = \mathrm{ext}^j(G^+_{n,2,s})$, $j = 1, 2$, $n \ge 6$:

$$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N + \frac{9}{4}}.$$

Оценки, аналогично полученные для графов $K_4 \cong W_4$, $W_5 \cong G_{5,2,2}$, $K_5 \setminus e \cong G^+_{5,2,2}$, $G_{7,2,3}$ (относительно подразбиваемого множества ребер $\{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7, v_3v_7\}$) и девяти графов малых порядков, представлены в табл. 2.

Таблица 2

$K_4 \cong W_4$	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N + \frac{5}{4}}$
$W_5 \cong G_{5,2,2}$ 	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N + \frac{5}{4}}$
$K_5 \setminus e \cong G^+_{5,2,2}$	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N + \frac{9}{4}}$
$G_{7,2,3}$ $\{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7, v_3v_7\}$	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{15}{4}}$
A, $K_{3,3}$	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{7}{4}}$
A^+	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{11}{4}}$
B, B^+	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{11}{4}}$
C, C^+	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{19}{4}}$
D	$\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{7}{4}}$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 5. *Пусть G – 2-связный граф порядка N, свободный от минора $K_{2,4}$. Тогда его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

1) $\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{7}{4}}$, *если G – внешнепланарный граф*;

2) $\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - \frac{3}{4}}$, *если G является объединением трех xy-внешнепланарных графов H_1, H_2, H_3, взаимно пересекающихся только по ребру xy, т. е. $|V(H_i)| \ge 3$ для каждого i и $V(H_i) \cap V(H_j) = \{xy\}$ при $i \ne j$*;

3) $\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N + \frac{9}{4}}$, *если* $G = \mathrm{ext}^j(G^+_{n,2,s})$, $j = 1, 2$, $n \ge 6$;

4) $\rho(G) \le \frac{3}{2} + \sqrt{N - r + \frac{17}{4}}$, *если* $G = \mathrm{ext}^1(G^+_{n,r,s})$, $r \ge 3$, $n \ge 7$.

Оценки спектрального радиуса для остальных графов малых порядков указаны в табл. 2.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф14РА-004).

Литература

1. *Ellingham M. N., Zha X.* // J. Combinatorial Theory. 2000. Vol. 78. P. 45–56.
2. *Shu J., Hong Y.* // Acta Math. Appl. Sinica. 2001. Vol. 5. P. 167–175.
3. *Fang Kun-Fu* // J. Inequal. Appl. 2009. Article ID 852406. 5 p.
4. *Yu G., Shu J., Hong Y.* // Electronic J. Linear Algebra. 2012. Vol. 23. P. 171–179.
5. *Ellingham M. N., Marshall E. A., Ozeki K., Tsuchiya S.* // http://arxiv.org/abs/1409.4632. 2014.
6. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs. Berlin, 2011.

V. I. BENEDIKTOVICH

vbened@im.bas-net.by

SPECTRAL RADIUS OF A $K_{2,4}$-MINOR-FREE GRAPH

Summary

In this article, upper bounds of spectral radii of $K_{2,4}$-minor-free graphs have been obtained.