ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 530.12,524.6,531
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-278-281

Поступило в редакцию 22.06.2018
Received 22.06.2018

Ю. А. Курочкин

Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ДВУМЕРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМИ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Аннотация. Показано, что совершая преобразования типа Леви–Чивита в двумерных уравнениях Гельмгольца и Клейна–Фока возможно определение когерентных состояний стандартным образом. При этом, если в случае эллиптического уравнения Гельмгольца преобразование Леви–Чивита реализуется комплексным квадратичным отображением, то в случае гиперболического уравнения типа Клейна–Фока оно реализуется аналогом такого отображения, определенного для функций двойного переменного. Найдены координатные и импульсные представления построенных когерентных состояний. Целью построения когерентных состояний описанным образом является дальнейшее развитие модели адронов, предложенной в [1; 2].

Ключевые слова: двумерное уравнение Гельмгольца, уравнение типа Клейна–Фока, преобразование Леви–Чивита, операторы рождения (уничтожения), когерентные состояния, поперечные возбуждения, партоны, координатное (импульсное) представление

Для цитирования: Курочкин, Ю. А. Когерентные состояния, связанные с двумерными эллиптическим и гиперболическим уравнениями / Ю. А. Курочкин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 3. – С. 278–281. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-278-281

Yurii A. Kurochkin

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

COHERENT STATES ASSOCIATED WITH TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC AND HIPERBOLIC EQUATIONS

(Communicated by Corresponding Member Lev M. Tomilchik)

Abstract. In this article it is shown that by performing Levi–Chivita-type transformations in the two-dimensional Helmholtz and Klein–Fock-type equations, it is possible to determine coherent states in a standard way. Moreover, if in the case of the Helmholtz elliptic equation the Levi–Civita transformation is realized by a complex quadratic map, then in the case of the Klein–Fock-type equation it is realized by an analogue of such a map however defined for functions of a double variable. The coordinate and momentum representations of the coherent state are found. The purpose of constructing coherent states in the described manner is a further development of the hadron model proposed in [1; 2].

Keywords: scalar particle, Helmholtz equation, Klein–Fock type equation, Levi–Civita transformations, creation (annihilation) operators, coherent states, partons, coordinate (momentum) represantation

For citation: Kurochkin Yu. A. The coherent states which connection with two dimensional elliptic and hyperbolic equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 3, pp. 278–281 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-278-281

Введение. Как известно, существуют проблемы с введением обычных (не обобщенных [3]) когерентных состояний в релятивистском случае [4]. Покажем ниже, что применение квадратичных конформных преобразований в комплексной области и их аналога для функций двойного переменного (в литературе такие преобразования часто называют преобразованиями Леви–Чивита [5]), к двумерному уравнению Гельмгольца и двумерному уравнению типа Клейна–Фока–Гордона соответственно дает возможность в случае последнего уравнения, которое инвариантно относительно двумерных преобразований Лоренца также ввести когерентные состояния.

Будем рассматривать двумерное уравнение Гельмгольца (стационарное двумерное уравнение Шредингера)

$$\frac{\partial^2\psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y)}{\partial y^2} = \Lambda_\perp^2\psi(x, y) \tag{1}$$

и двумерное уравнение типа Клейна–Фока–Гордона

$$\frac{\partial^2\varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi(z, t)}{\partial t^2} = \Lambda_\parallel^2\varphi(z, t). \tag{2}$$

Осуществим следующие замены переменных в (1): $\psi(x, y) \to \Phi_1(\eta, \xi)$ и проведем комплексификацию $x + iy = (\eta + i\xi)^2 = \eta^2 - \xi^2 + 2i\eta\xi$, тогда это уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2\Phi_1(\eta, \xi)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2\Phi_1(\eta, \xi)}{\partial \xi^2} = 4\Lambda_\perp^2(\eta^2 + \xi^2)\Phi_1(\eta, \xi). \tag{3}$$

В уравнении (2) сделаем замены $(jz + t) = (\chi + j\zeta)^2 = j(\chi^2 + \zeta^2) + 2\chi\zeta$ и $\varphi(z, t) \to \Phi_2(\chi, \zeta)$. Здесь нами использовались аналитические функции, определенные над двойными числами для которых $j^2 = 1$. При этом вместо (3) получим

$$\frac{\partial^2\Phi_2(\chi, \zeta)}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2\Phi_2(\chi, \zeta)}{\partial \zeta^2} = 4\Lambda_\parallel{}^2(\chi^2 - \zeta^2)\Phi_2(\chi, \zeta). \tag{4}$$

Отметим, что функции, заданные над двойными числами, являются адекватным аппаратом для описания релятивистских систем [6; 7] (см. также [8]).

Определение когерентных состояний. Теперь обратимся к (3), учитывая, что именно для таких состояний возможно введение когерентных состояний. Данное уравнение является уравнением осцилляторного типа. Сформулируем его в терминах когерентных состояний. Для этого перепишем как

$$L_1\Phi_1(\eta', \xi') = \frac{\partial^2\Phi_1(\eta', \xi')}{\partial \eta'^2} + \frac{\partial^2\Phi_1(\eta', \xi')}{\partial \xi'^2} - (\eta'^2 + \xi'^2)\Phi_1(\eta', \xi') = 0, \tag{5}$$

где $\eta' = 2\sqrt{\Lambda_\perp}\eta$, $\xi' = 2\sqrt{\Lambda_\perp}\xi$ и введем операторы рождения и уничтожения

$$a_1{}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi' \mp \frac{\partial}{\partial \xi'}\right),\ a_2{}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta' \mp \frac{\partial}{\partial \eta'}\right). \tag{6}$$

При этом оператор уравнения (5) может быть выражен через операторы (6) как

$$L_1 = -2(a_1{}^+a_1{}^- + a_2{}^+a_2{}^- + 1).$$

В (4) введем новые переменные $\chi' = 2\sqrt{\Lambda_\parallel}\chi$, $\zeta' = 2\sqrt{\Lambda_\parallel}\zeta$. Тогда оно примет вид

$$L_2\Phi_2(\chi', \zeta') = \frac{\partial^2\Phi_2(\chi', \zeta')}{\partial \chi'^2} - \frac{\partial^2\Phi_2(\chi', \zeta')}{\partial \zeta'^2} - (\chi'^2 - \zeta'^2)\Phi_2(\chi', \zeta') = 0. \tag{7}$$

Введем операторы рождения и уничтожения, связанные с (7),

$$b_1{}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi' \mp \frac{\partial}{\partial \chi'}\right),\ b_2{}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta' \mp \frac{\partial}{\partial \zeta'}\right). \tag{8}$$

Оператор L_2 выражается через операторы (8) следующим образом:

$$L_2 = -2(b_1{}^+b_1{}^- - b_2{}^+b_2{}^-). \tag{9}$$

Для каждой пары операторов рождения и уничтожения (6), (8) справедливы соотношения

$$[a_k^-, a_l^+] = \delta_{kl} I, [a_k^+, a_l^+] = [a_k^-, a_l^-] = [a_k^-, I] = [a_k^+, I] = 0,$$

где k, l = 1, 2 соответствуют η' или ξ'

$$[b_k^-, b_l^+] = \delta_{kl} I, [b_k^+, b_l^+] = [b_k^-, b_l^-] = [b_k^-, I] = [b_k^+, I] = 0, \tag{10}$$

определяющие алгебру Гейзенберга–Вейля.

Когерентные состояния, как известно, определяются как собственные состояния операторов уничтожения с комплексными собственными значениями [3]

$$a_1^- \left|\alpha_1\right\rangle = \alpha_1 \left|\alpha_1\right\rangle, a_2^- \left|\alpha_2\right\rangle = \alpha_2 \left|\alpha_2\right\rangle. \tag{11}$$

Соответственно для $b^{\mp}{}_k$

$$b^-{}_1 \left|\beta_1\right\rangle = \beta_1 \left|\beta_1\right\rangle, b^-{}_2 \left|\beta_2\right\rangle = \beta_2 \left|\beta_2\right\rangle. \tag{12}$$

Диагональный матричный элемент от оператора (9) в обкладках когерентных состояний (12) дает

$$-2(n_1 + n_2 + 2) = 0, \tag{13}$$

т. е. ведет к противоречию, выражение (13) нереализуемо. Данное обстоятельство объяснимо, так как собственные значения одномерного, а следовательно в данном случае и двумерного осциллятора не могут равняться нулю [9].

Для выражений (10), (12) соответствующий матричный элемент равен

$$-2(n_3 - n_4) = 0. \tag{14}$$

Выражение (14) не противоречиво, так как n_3 в принципе может равняться n_4.

Координатные и импульсные представления когерентных состояний в новых переменных. Решение уравнения (11), (12) в координатном $(\eta', \xi', \chi', \zeta')$ представлении дается выражением:

$$\left\langle \eta', \xi' \right\|\left. \alpha_1, \alpha_2 \right\rangle = \Phi(\eta', \xi') = \frac{1}{\pi} e^{i(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'')} \times e^{i\sqrt{2}(\alpha_1''\eta' + \alpha_2''\xi')} \times e^{-\frac{1}{2}[(\eta' - \sqrt{2}\alpha_1')^2 + (\xi' - \sqrt{2}\alpha_2')^2]} \tag{15}$$

$$\left\langle \chi', \zeta' \right\|\left. \beta_1, \beta_2 \right\rangle = \Phi(\chi', \zeta') = \frac{1}{\pi} e^{i(\beta_1'\beta_1'' + \beta_2'\beta_2'')} \times e^{i\sqrt{2}(\beta_1''\chi' + \beta_2''\zeta')} \times e^{-\frac{1}{2}[(\chi' - \sqrt{2}\beta_1')^2 + (\zeta' - \sqrt{2}\beta_2')^2]}. \tag{16}$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha_1' + i\alpha_1'', \alpha_2 = \alpha_2' + i\alpha_2'', \beta_1 = \beta_1' + i\beta_1'', \beta_2 = \beta_2' + i\beta_2''$.

Импульсное представление в смысле операторов $i\partial / \partial\eta', i\partial / \partial\xi', i\partial / \partial\chi', i\partial / \partial\zeta'$ с собственными значениями $p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'}$ имеет вид

$$\left\langle p_{\eta'}, p_{\xi'} \right\|\left. \alpha_1, \alpha_2 \right\rangle = \Phi(p_{\eta'}, p_{\xi'}) = \frac{1}{\pi} e^{-i(\alpha_1'\alpha_1'' + \alpha_2'\alpha_2'')} \times e^{-i\sqrt{2}(\alpha_1' p_{\eta'} + \alpha_2' p_{\xi'})} \times e^{-\frac{1}{2}[(p_{\eta'} - \sqrt{2}\alpha_1'')^2 + (p_{\xi'} - \sqrt{2}\alpha_2'')^2]}$$

$$\left\langle p_{\chi'}, p_{\zeta'} \right\|\left. \beta_1, \beta_2 \right\rangle = \Phi(p_{\chi'}, p_{\zeta'}) = \frac{1}{\pi} e^{-i(\beta_1'\beta_1'' + \beta_2'\beta_2'')} \times e^{-i\sqrt{2}(\beta_1' p_{\chi'} + \beta_2' p_{\zeta'})} \times e^{-\frac{1}{2}[(p_{\chi'} - \sqrt{2}\beta_1'')^2 + (p_{\zeta'} - \sqrt{2}\beta_2'')^2]}. \tag{17}$$

Отметим также, что выражения (15)–(17) при обращающихся в ноль собственных значениях $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, представляют собой решения, соответствующие вакуумным состояниям в представлении чисел заполнения и являются решениями уравнений (5) и (7) соответственно.

Заключение. Показано, что совершая преобразования типа Леви–Чивита в двумерных уравнениях Гельмгольца и уравнении типа Клейна–Фока возможно определение когерентных состояний стандартным образом. При этом, если в случае эллиптического уравнения Гельмгольца преобразование Леви–Чивита реализуется комплексным квадратичным отображением, то в случае гиперболического уравнения Клейна–Фока оно реализуется аналогом такого отображения, определенного для функций двойного переменного. Найдены координатные и импульсные представления построенных когерентных состояний.

В модели адрона, предложенной в [1], партоны – составляющие адрона рассматривались как когерентные возбуждения на орисфере релятивистского импульсного пространства. Модель носила феноменологический характер и не была подчинена каким-либо уравнениям. Целью построения когерентных состояний описанным выше образом является дальнейшее развитие предложенной модели адронов и установление возможных ограничений, следующих из уравнений теории поля.

Благодарности. Автор благодарит участников семинара лаборатории теоретической физики за полезное обсуждение работы и Л. М. Томильчика за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф16Д-003.

Acknowledgements. The author is grateful to the participants of the seminar of the Laboratory of Theoretical Physics for useful discussion of the work and to L. M. Tomilchik for valuable comments. The work was sponsored by the Grant of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research no. Ф16Д-003.

Список использованных источников

1. Hadron Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space / Y. Kurochkin [et al.] // Письма в журн. «Физика элементарных частиц и атомного ядра». – 2016. – Т. 13, № 3. – С. 454–460.
2. Кварк во внешнем неабелевом калибровочном поле магнитного типа: когерентные состояния / Ю. А. Курочкин [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 4. – С. 39–43.
3. Переломов, А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. – М., 1987. – 268 с.
4. Точные решения релятивистских волновых уравнений / В. Г. Багров [и др.] // Точные решения релятивистских волновых уравнений. – Новосибирск, 1982. – 143 с.
5. Kalnins, E. G. Coulomb-Oscillator duality in space of constant curvature / E. G. Kalnins, W. Miller, Jr., G. S. Pogosyan // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41, N 5. – P. 2629–2657. https://doi.org/10.1063/1.533263
6. Курочкин, Ю. А. Двойные числа в задаче о движении электрического заряда во внешних полях / Ю. А. Курочкин // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. – Минск, 1991. – С. 98–101.
7. Богуш, А. А. Классическая теория векторного поля на псевдоевклидовой плоскости в терминах аналитических функций двойного переменного и ее связь с теорией релятивистских струн / А. А. Богуш, В. В. Грицев, Ю. А. Курочкин // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности. – Минск, 1997. – С. 45–49.
8. Акивис, М. А. О гладких линиях на проективных плоскостях над некоторыми ассоциативными алгебрами / М. А. Акивис // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, вып. 2. – С. 227–237.
9. Ландау, Л. Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М., 1989. – 767 с.

References

1. Kurochkin Y., Kulchitsky Y., Harkusha S., Russakovich N. Hadron as coherent state on the horosphere of the Lobachevsky momentum space. *Physics of the Particles and Nuclei Letters*, 2016, vol. 13, no. 3, pp. 285–288. https://doi.org/10.1134/s1547477116030158
2. Kurochkin Yu. A., Harkusha S. N., Kulchitsky Yu. A., Russakovich N. A. Quark in the external gluon field of magnetic type: coherent states. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 4, pp. 39–43.
3. Perelomov A. M. *Generalized coherent states and their applications.* Moscow, 1987. 268 p. (in Russian).
4. Bogrov V. G., Gitman D. M., Ternov I. M., Khalilov V. R., Shapovalov V. N. *Exact solutions of the relativistic wave equations.* Novosibirsk, 1982. 143 p. (in Russian).
5. Kalnins E. G., Miller W., Jr., Pogosyan G. S. Coulomb-Oscillator duality in space of constant curvature. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 2629–2657. https://doi.org/10.1063/1.533263
6. Kurochkin Yu. A. Double numbers in the problem on the motion of an electric charge in external fields. *Kovariantnye metody v teoreticheskoi fizike. Fizika elementarnykh chastits i teoriya otnositel'nosti* [*Covariant methods in theoretical physics. Elementary particle physics and relativity theory*]. Minsk, 1991, pp. 98–101 (in Russian).
7. Bogush A. A., Gritsev V. V., Kurochkin Yu. A. Classical theory of vector field on a pseudo-Euclidean plane in terms of the analytical functions of a double variable and its relationship with theory of relativistic string. *Kovariantnye metody v teoreticheskoi fizike. Fizika elementarnykh chastits i teoriya otnositel'nosti* [*Covariant methods in theoretical physics. Elementary particle physics and relativity theory*]. Minsk, 1997, pp. 45–49 (in Russian).
8. Akivis M. A. Smooth lines on projective planes over certain associative algebras. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1987, vol. 41, no. 2, pp. 131–136. https://doi.org/10.1007/bf01138334
9. Landau L. D., Lifshits E. M. *Quantum mechanics. Non-relativistic theory.* Moscow, 1989. 767 p. (in Russian).

Информация об авторе

Курочкин Юрий Андреевич – д-р физ.-мат. наук, заведующий центром. Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by.

Information about the author

Kurochkin Yurii Andreevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by.