

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

О. И. ДУГИНОВ

ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ ЗАДАЧИ  
О НАИМЕНЬШЕМ ПОКРЫТИИ ВЕРШИН ГРАФА БИКЛИКАМИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск

Поступило 05.03.2014

**Введение.** Бикликой в обыкновенном графе называется подграф, изоморфный некоторому связному полному двудольному графу. Бикликовым покрытием вершин графа называется множество  $S$  биклик этого графа такое, что каждая вершина графа содержится хотя бы в одной биклике из  $S$ . Если при этом любые две биклики из  $S$  не имеют общих вершин, то  $S$  называется бикликовым разбиением вершин графа  $G$ . Известно [1], что любое бикликовое покрытие вершин графа  $G$  можно преобразовать за полиномиальное время в бикликовое разбиение вершин графа  $G$  без увеличения количества биклик.

Л е м м а 1 ([1]). Для любого графа  $G$  следующие два утверждения равносильны:

1. Существует бикликовое покрытие вершин графа  $G$ , состоящее из не более чем  $k$  биклик;
2. Существует бикликовое разбиение вершин графа  $G$ , состоящее из не более чем  $k$  биклик.

Бикликовое покрытие (разбиение) вершин графа  $G$  называется *наименьшим*, если оно содержит наименьшее число биклик. Количество биклик в наименьшем бикликовом покрытии вершин графа  $G$  называется *числом бикликового покрытия вершин* графа  $G$  и обозначается через  $b(G)$ . Из леммы 1 следует, что количество биклик в наименьшем бикликовом разбиении вершин графа  $G$  равно  $b(G)$ .

Задача нахождения наименьшего бикликового разбиения вершин графа находит применение в области биологии, управлении сетями, при анализе данных и электронной торговле [1–5]. Эта задача полиномиально эквивалентна задаче нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа [1]. Известно, что последняя задача является NP-трудной в классе двудольных графов [1; 2].

В данной работе рассматривается задача нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа в классе двудольных графов, которые не содержат порожденных подграфов, изоморфных простому циклу на шести вершинах. Мы покажем, что данная задача в классе  $C_6$ -свободных двудольных графов тесно связана с задачами вершинных раскрасок графа. На основе этой связи мы построим полиномиальный алгоритм, который решает рассматриваемую графовую задачу в двух подклассах хордальных двудольных графов – двудольные перестановочные графы и двудольные дистанционно-наследуемые графы.

**Основные определения и предварительные сведения.** Рассматриваются только конечные неориентированные графы  $G = (V, E)$  без кратных ребер и петель с множеством вершин  $V = V(G)$  и множеством ребер  $E = E(G)$ . Используется стандартная теоретико-графовая терминология (см., напр., [6; 7]). Множество вершин графа  $G$ , смежных с вершиной  $v \in V$ , называется *окружением* вершины  $v$  в графе  $G$  и обозначается как  $N_G(v)$ . Расстояние между двумя вершинами  $u, v$  в графе  $G$  будем обозначать как  $d_G(u, v)$ . Пусть  $v$  – вершина и  $S \subseteq V \setminus \{v\}$  – непустое подмножество вершин графа  $G$ . Тогда тот факт, что в графе  $G$  вершина  $v$  смежна с каждой вершиной из множества  $S$  будем обозначать как  $v \sim S$ . Подграф графа  $G$ , порожденный подмножеством вершин  $S \subseteq V$ ,

обозначается как  $G[S]$ . Множество  $S$  клик графа  $G$  называется *кликовым покрытием вершин* графа  $G$ , если каждая вершина  $G$  содержится хотя бы в одной клике из  $S$ . Наименьшее число клик в кликовом покрытии вершин графа  $G$  будем обозначать как  $\Theta(G)$ . Хорошо известно, что  $\Theta(G) = \chi(\bar{G})$ , где  $\chi(\bar{G})$  – хроматическое число дополнения графа  $G$ .

Пусть  $F$  – это семейство графов. Тогда граф называется *F-свободным*, если он не содержит порожденных подграфов, изоморфных графам из  $F$ . Как обычно, полный граф, простая цепь и простой цикл на  $n$  вершинах обозначаются как  $K_n, P_n, C_n$  соответственно. *Хордальным двудольным графом* называется двудольный граф, который не содержит простых циклов длины не меньше 6 в качестве порожденных подграфов. (*Двудольным перестановочным графом* называется (двудольный) граф  $G$  такой, что существует две перестановки  $P, Q$  множества его вершин  $V(G)$  такие, что  $uv \in E(G)$  тогда и только тогда, когда в  $P$  вершина  $u$  предшествует вершине  $v$ , а в  $Q$  вершина  $v$  предшествует вершине  $u$ ). (*Двудольным дистанционно-наследуемым графом* называется (двудольный) граф  $G$  такой, что для каждого связного порожденного подграфа  $H$  графа  $G$  выполняется  $d_H(u, v) = d_G(u, v)$  для любых двух вершин  $u, v \in V(H)$ ). Класс двудольных перестановочных графов и класс двудольных дистанционно-наследуемых графов содержатся в классе хордальных двудольных графов [7].

Приведем вспомогательное утверждение, которое потребуется далее.

**Л е м м а 2.** Пусть граф  $G = (V, E)$  является  $K_3$ -свободным и  $S \subseteq V$  – независимое множество в графе  $G$ , которое удовлетворяет следующим условиям:

1.  $|S| \geq 3$ ;
2.  $d_G(u, v) = 2$  для любых двух различных вершин  $u, v \in S$ ;
3.  $\bigcap_{u \in S} N_G(u) = \emptyset$ , т. е. в графе  $G$  не существует вершины  $w \in V \setminus S$  такой, что  $w \sim S$ .

Тогда существуют три различные вершины  $x, y, z \in S$ , которые содержатся в некотором порожденном подграфе графа  $G$ , изоморфном  $C_6$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство проведем по индукции по числу вершин в независимом множестве  $S$  графа  $G$ , не содержащего  $K_3$  в качестве порожденного подграфа.

Пусть  $|S| = 3$  и  $S = \{x, y, z\}$  – независимое множество в графе  $G$ . Покажем, что существует порожденный подграф графа  $G$ , изоморфный  $C_6$ , который содержит вершины  $x, y, z$ . По условию  $d_G(x, y) = 2, d_G(y, z) = 2, d_G(x, z) = 2$  и не существует вершины графа  $G$ , смежной одновременно с каждой вершиной  $x, y, z$ . Тогда существуют три попарно различные вершины  $w_1, w_2, w_3 \in V \setminus S$  такие, что  $w_1 \sim \{x, y\}, w_2 \sim \{y, z\}$  и  $w_3 \sim \{x, z\}$  (рис. 1). Вершины  $w_1, w_2, w_3$  попарно несмежны в графе  $G$ , поскольку в противном случае граф  $G$  содержит подграф, изоморфный  $K_3$ . Следовательно, подграф графа  $G$ , порожденный множеством вершин  $\{x, y, z, w_1, w_2, w_3\}$ , изоморфен  $C_6$  и содержит вершины  $x, y, z$ .

Пусть  $k > 3$  – натуральное число. Рассмотрим произвольное  $k$ -вершинное независимое множество  $S$  графа  $G$ , которое удовлетворяет всем условиям леммы. Покажем, что и в этом случае существуют три различные вершины  $x, y, z \in S$ , которые содержатся в некотором порожденном подграфе графа  $G$ , изоморфном  $C_6$ . Возможны только следующие два случая:

- i) существует множество  $S' \subset S$  такое, что  $|S'| = |S| - 1$  и  $\bigcap_{u \in S'} N_G(u) = \emptyset$ ;
- ii) для любого множества  $S' \subset S$  такого, что  $|S'| = |S| - 1$  справедливо  $\bigcap_{u \in S'} N_G(u) \neq \emptyset$ .

В случае i) множество вершин  $S'$  является независимым в графе  $G$  и удовлетворяет всем условиям леммы. По индуктивному предположению, в множестве вершин  $S'$  (а значит и в множестве вершин  $S$ ) существуют три различные вершины  $x, y, z$ , которые содержатся в некотором порожденном подграфе графа  $G$ , изоморфном  $C_6$ .

Рассмотрим случай ii). Пусть  $x, y, z$  – это три произвольные различные вершины, принадлежащие независимому множеству  $S$ . Тогда в графе  $G$  существуют вершины  $w_1, w_2$  и  $w_3$  такие, что

$$w_1 \in \bigcap_{u \in S \setminus \{z\}} N_G(u), \quad w_2 \in \bigcap_{u \in S \setminus \{x\}} N_G(u), \quad w_3 \in \bigcap_{u \in S \setminus \{y\}} N_G(u).$$

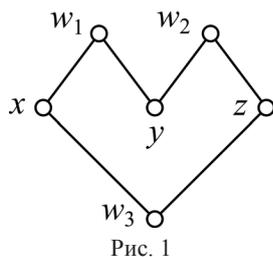


Рис. 1

Заметим, что в графе  $G$  вершины  $w_1, w_2, w_3$  являются попарно различными и вершина  $w_1$  несмежна с вершиной  $z$ , вершина  $w_2$  несмежна с вер-

шиной  $x$  и вершина  $w_3$  несмежна с вершиной  $y$ , так как в противном случае нарушается условие  $\bigcap_{u \in S} N_G(u) = \emptyset$  (рис. 2). Более того, в графе  $G$  вершины  $w_1, w_2$  и  $w_3$  попарно несмежны (в противном случае граф  $G$  содержал бы подграф, изоморфный  $K_3$ , что невозможно, так как по условию граф  $G$  является  $K_3$ -свободным). Следовательно, подграф графа  $G$ , порожденный множеством вершин  $\{x, y, z, w_1, w_2, w_3\}$ , изоморфен  $C_6$  и содержит вершины  $x, y, z$ . Лемма доказана.

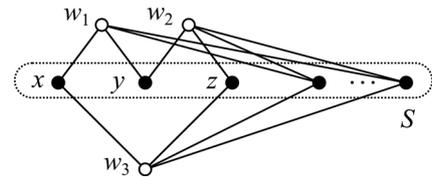


Рис. 2

**Характеризация бикликового покрытия вершин графа в терминах вершинной раскраски графа.** В этом разделе дадим новые свойства биклик графа, на основе которых построим характеристику бикликового покрытия вершин ( $K_3, C_5, C_6$ )-свободного графа в терминах вершинных раскрасок графа.

**Т е о р е м а 1.** Пусть граф  $G = (V, E)$  является  $(K_3, C_5)$ -свободным. Если подмножество вершин  $S \subseteq V$  такое, что для любых двух вершин  $u, v \in S$  выполняется  $d_G(u, v) \leq 2$  и порожденный подграф  $G[S]$  графа  $G$  содержит хотя бы одно ребро, то  $G[S]$  является бикликой графа  $G$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $G = (V, E)$  – это  $(K_3, C_5)$ -свободный граф и подмножество вершин  $S \subseteq V$  такое, что  $d_G(u, v) \leq 2$  для любых двух вершин  $u, v \in S$  и граф  $G[S]$  содержит ребро  $e = ab$ .

Методом от противного покажем, что  $G[S]$  является связным графом. Пусть граф  $G[S]$  несвязен, т. е. существует вершина  $w \in S$  такая, что в графе  $G[S]$  нет  $(a, w)$ -цепей и  $(b, w)$ -цепей. Так как  $d_G(a, w) \leq 2$  и  $d_G(b, w) \leq 2$ , то в графе  $G$  существует  $(a, w)$ -цепь и  $(b, w)$ -цепь, длины которых равны 2. Возможны только следующие два случая:

а)  $(a, w)$ -цепь и  $(b, w)$ -цепь имеют две общие вершины;

б)  $(a, w)$ -цепь и  $(b, w)$ -цепь имеют ровно одну общую вершину (рис. 3). Нетрудно видеть, что в обоих случаях граф  $G$  содержит  $C_5$  или  $K_3$  в качестве порожденных подграфов, что невозможно, поскольку по условию граф  $G = (V, E)$  является  $(K_3, C_5)$ -свободным. Следовательно, граф  $G[S]$  является связным.

Известно [8, с. 129], что связный граф является полным двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит  $K_3$  и  $P_4$  в качестве порожденных подграфов. Таким образом, для того чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что граф  $G[S]$  является  $(K_3, P_4)$ -свободным. Так как граф  $G$  не содержит  $K_3$  в качестве порожденного подграфа, то граф  $G[S]$  также не содержит  $K_3$  в качестве порожденного подграфа. Предположим, что в графе  $G[S]$  существует порожденный подграф, изоморфный  $P_4$ , т. е. существует подмножество  $S' \subseteq S$  такое, что  $S' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  и граф  $G[S']$  изоморфен  $P_4$ . Не теряя общности, пусть множество ребер графа  $G[S']$  состоит из ребер  $x_1x_2, x_2x_3$  и  $x_3x_4$ . Так как  $d_G(x_1, x_4) \leq 2$ , то существует вершина  $y$  графа  $G$ , которая смежна с обеими вершинами  $x_1$  и  $x_4$ . Нетрудно видеть, что граф  $G[S' \cup \{y\}]$  или изоморфен  $C_5$ , или содержит  $K_3$  в качестве порожденного подграфа, что невозможно, так как граф  $G$  является  $(K_3, C_5)$ -свободным. Поэтому, граф  $G[S]$  не содержит  $P_4$  в качестве порожденного подграфа. Теорема доказана.

**Т е о р е м а 2.** Пусть граф  $G = (V, E)$  является  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободным и  $S \subseteq V$  – непустое подмножество вершин графа  $G$  такое, что для любых двух вершин  $u, v \in S$  выполняется  $d_G(u, v) \leq 2$ . Тогда порожденный подграф  $G[S]$  графа  $G$  является или бикликой графа  $G$ , или пустым графом таким, что существует вершина  $w \in V \setminus S$  такая, что  $w \sim S$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $G = (V, E)$  – это  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободный граф и  $S \subseteq V$  – непустое подмножество вершин графа  $G$  такое, что  $d_G(u, v) \leq 2$  для любых  $u, v \in S$ .

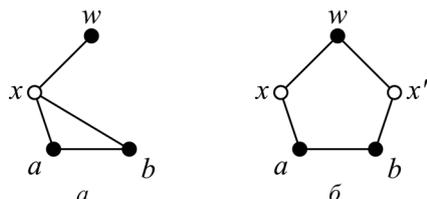


Рис. 3

Если  $|S| = 1$ , то, по определению,  $G[S]$  является бикликой графа  $G$ .

Пусть  $|S| \geq 2$ . Если граф  $G[S]$  содержит хотя бы одно ребро, то  $G[S]$  является бикликой графа  $G$ . Это непосредственно следует из теоремы 1. Пусть теперь  $G[S]$  – пустой граф, т. е.  $S$  является независимым множеством в графе  $G$ . Покажем, что

в этом случае существует вершина  $w \in V \setminus S$  такая, что  $w \sim S$ . Для этого рассмотрим два случая:  $|S| = 2$  и  $|S| \geq 3$ . Пусть  $|S| = 2$  и  $S = \{x, y\}$ . Так как  $G[S]$  является пустым графом и  $d_G(x, y) \leq 2$ , то в графе  $G$  существует  $(x, y)$ -цепь длины два. Следовательно, существует вершина  $w \in V \setminus \{x, y\}$  смежная в графе  $G$  с вершиной  $x$  и с вершиной  $y$ . Пусть теперь  $|S| \geq 3$  и не существует вершины  $w \in V \setminus S$  такой, что  $w \sim S$ , т. е.  $\bigcap_{u \in S} N_G(u) = \emptyset$ . В этом случае, согласно лемме 2, в графе  $G$  существует порожденный подграф, изоморфный  $C_6$ , что невозможно, поскольку  $C_6$  является одним из запрещенных порожденных подграфов для графа  $G$ . Следовательно, существует вершина  $w \in V \setminus S$  такая, что  $w \sim S$ . Теорема доказана.

Теорема 2 дает возможность охарактеризовать бикликовое покрытие вершин  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободного графа в терминах вершинной раскраски графа.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $G = (V, E)$  – граф и  $k$  – натуральное число. Функция  $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  называется *гипердистанционной раскраской* графа  $G$  (в  $k$  цветов), если  $c(u) \neq c(v)$  для любых двух вершин  $u, v \in V$  таких, что  $d_G(u, v) > 2$ . Наименьшее число  $k$ , при котором для графа  $G$  существует гипердистанционная раскраска в  $k$  цветов будем называть *гиперхроматическим числом* графа  $G$  и обозначать как  $\chi_H(G)$ .

**Л е м м а 3.** Для любого графа  $G$  выполняется  $\chi_H(G) \leq b(G)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$  – бикликовое покрытие вершин графа  $G$ . Рассмотрим функцию  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ , которая определяется так: для каждой вершины  $u \in V(G)$  положим  $c(u)$  равным наименьшему  $i$ , для которого биклика  $B_i$  содержит вершину  $u$ . Функция  $c$  является гипердистанционной раскраской графа  $G$ . Это следует из следующего факта: любые две вершины, принадлежащие одной биклике графа, в этом графе находятся на расстоянии не более 2. Действительно, если  $c(u) = c(v)$ , то существует биклика графа  $G$ , которая содержит вершины  $u$  и  $v$  и, как следствие этого,  $d_G(u, v) \leq 2$ . Если  $r = b(G)$ , то существует гипердистанционная раскраска  $c$  графа  $G$  в не более чем  $b(G)$  цветов. Следовательно,  $\chi_H(G) \leq b(G)$ . Лемма доказана.

Отметим, что существуют графы, для которых неравенство из леммы 3 является строгим. Например,  $\chi_H(C_5) = 1$ ,  $b(C_5) = 2$  и следовательно,  $\chi_H(C_5) < b(C_5)$ ;  $\chi_H(\bar{P}_5) = 1$ ,  $b(\bar{P}_5) = 2$  и, таким образом  $\chi_H(\bar{P}_5) < b(\bar{P}_5)$ . На рис. 4 изображен двудольный граф  $G^*$ , для которого  $\chi_H(G^*) < b(G^*)$ . Несложно видеть, что  $\chi_H(G^*) = 2$  (гипердистанционная раскраска графа  $G^*$  в два цвета определяется так: «черным» вершинам поставим в соответствие 1, а «белым» вершинам – 2) и  $b(G^*) = 3$ . Следующая теорема указывает класс графов такой, что равенство  $\chi_H(G) = b(G)$  справедливо для любого графа  $G$  из этого класса графов.

**Т е о р е м а 3.** Для любого  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободного графа  $G$  выполняется  $\chi_H(G) = b(G)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Неравенство  $\chi_H(G) \leq b(G)$  следует из леммы 3. Для того чтобы доказать неравенство в другую сторону, рассмотрим гипердистанционную раскраску  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  для  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободного графа  $G$ . Пусть  $V_i = \{u \in V(G) : c(u) = i\}$ , где  $i = 1, 2, \dots, k$ . Без потери общности можно предполагать, что  $V_i \neq \emptyset$  для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Согласно теореме 2, порожденный подграф  $G[V_i]$  графа  $G$  является или бикликой графа  $G$ , или пустым графом, который удовлетворяет следующему условию: существует вершина  $w_i \in V(G) \setminus V_i$  такая, что  $w_i \sim V_i$  в графе  $G$ . В первом случае все вершины из множества  $V_i$  содержатся в биклике  $G[V_i]$  графа  $G$ , которую обозначим  $B_i$ . Во втором случае все вершины из множества  $V_i$  содержатся в биклике  $B_i = G[V_i \cup \{w_i\}]$ . Таким образом, для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  существует биклика  $B_i$ , которая содержит все вершины из множества  $V_i$ . Следовательно, множество биклик  $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  является бикликовым покрытием вершин графа  $G$ . Положив  $k = \chi_H(G)$ ,

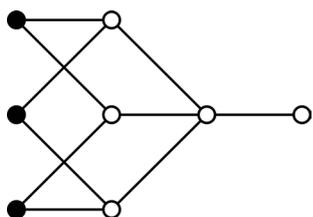


Рис. 4

приходим к существованию бикликового покрытия вершин графа  $G$ , которое состоит из  $\chi_H(G)$  биклик. Поэтому,  $b(G) \leq \chi_H(G)$ . Теорема доказана.

Для графа  $G = (V, E)$  всегда можно построить граф  $G' = (V, E')$  такой, что  $uv \in E'$  тогда и только тогда, когда  $d_G(u, v) > 2$ . Отметим, что граф  $G'$  изоморфен графу  $G^2$  (дополнение квадрата графа  $G$ ). Непосредственно из определений следует, что  $\chi_H(G) = \chi(G')$ , где  $\chi(G')$  –

хроматическое число графа  $G'$ . Следующие два утверждения непосредственно следуют из теоремы 3.

У т в е р ж д е н и е 1. Для любого  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободного графа  $G$  выполняется

$$b(G) = \chi(\overline{G^2}).$$

У т в е р ж д е н и е 2. Для любого  $(K_3, C_5, C_6)$ -свободного графа  $G$  выполняется

$$b(G) = \Theta(G^2).$$

**Полиномиальная разрешимость задачи в классе двудольных перестановочных графов и двудольных дистанционно-наследуемых графов.** Из утверждения 1 следует, что вычисление значения параметра  $b(G)$  для  $C_6$ -свободного двудольного графа  $G$  равносильно вычислению хроматического числа  $\chi(G^2)$ . Если значение параметра  $\chi(G^2)$  может быть найдено за полиномиальное время, то значение параметра  $b(G)$  также может быть вычислено за полиномиальное время. Более того, по правильной раскраске графа  $\overline{G^2}$  в  $\chi(\overline{G^2})$  цветов за полиномиальное время можно восстановить наименьшее бикликовое покрытие вершин графа  $G$ . Это следует из доказательства теоремы 3.

**Т е о р е м а 4.** Задача нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа решается за полиномиальное время в классе двудольных перестановочных графов и в классе двудольных дистанционно-наследуемых графов.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Двудольные перестановочные графы и двудольные дистанционно-наследуемые графы являются  $C_6$ -свободными двудольными графами. Это означает, что нахождение наименьшего бикликового покрытия вершин графа  $G$  в случае, когда граф  $G$  является двудольным перестановочным или двудольным дистанционно-наследуемым сводится к нахождению правильной раскраски графа  $G^2$  в наименьшее число цветов или кликового покрытия вершин графа  $G^2$ , которое содержит наименьшее число кликов.

1. Пусть  $G = (V, E)$  – произвольный двудольный перестановочный граф. Тогда граф  $G$  является двудольным графом косравнимости [7, с. 93]. Дамашке в работе [9] доказал, что класс графов косравнимости замкнут относительно графовой операции возведения в степень. Поэтому  $G^2$  является графом косравнимости и  $G^2$  – соответственно, графом сравнимости, для которого хроматическое число (вместе с оптимальной правильной раскраской) может быть найдено за линейное время, при условии, что граф задан в виде списков смежности [10].

2. Пусть теперь  $G = (V, E)$  – произвольный двудольный дистанционно-наследуемый граф. Известно [7, с. 164], что четная степень любого дистанционно-наследуемого графа является хордальным графом. Таким образом,  $G^2$  – хордальный граф. Известно, что задача нахождения наименьшего (по мощности) кликового покрытия вершин хордального графа разрешима за линейное время [11]. Теорема доказана.

**Заключение.** В работе рассмотрена задача нахождения наименьшего бикликового покрытия вершин графа. Доказано, что эта задача решается за полиномиальное время в классе двудольных перестановочных графов и в классе двудольных дистанционно-наследуемых графов. Открытым вопросом остается сложностной статус данной графовой задачи в классе хордальных двудольных графов.

## Литература

1. Fleischner H., Mujuni E., Paulusma D., Szeider S. // Theoretical Computer Science. 2009. Vol. 410. P. 2045–2053.
2. Heydari M. H., Morales L., Shields C. O. jr., Sudborough I. H. // Proceedings of 40<sup>th</sup> Annual Hawaii International Conference on System Sciences. 2007. P. 270.
3. Bein D., Morales D., Bein W. et al. // Proceedings of 41<sup>th</sup> Hawaii International Conference on System Sciences. 2008. P. 475.
4. Zhilin Z., Wang P. // Applied Mechanics and Materials. 2010. Vol. 40–41. P. 189–194.
5. Zhao M. T. // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 710. P. 687–691.
6. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., 2008.

7. Brandstädt A., Le V. B., Spinrad J. Graph classes: a survey. SIAM. 1999.
8. Fishburn P., Hammer P. // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 160. P. 127–148.
9. Damaschke P. // Discrete Applied Mathematics. 1992. Vol. 35. P. 67–72.
10. McConnel R., Spinrad J. // Proceedings of the eight annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. 1997. P. 19–25.
11. Gavril F. // SIAM J. on Computing. 1972. Vol. 1. P. 180–187.

*O. I. DUGINOV*

oduginov@gmail.com

## **POLYNOMIALLY SOLVABLE CASES OF THE MINIMUM BICLIQUE VERTEX-COVER PROBLEM**

### **Summary**

The problem of covering the vertex set of a simple graph with a minimum number of complete bipartite subgraphs is studied. It is well known that this problem is NP-complete even for bipartite graphs. This article gives a polynomial time algorithm for solving the considered graph problem when the graph is bipartite permutation or bipartite distance-hereditary.