ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267

Поступило в редакцию 25.04.2018
Received 25.04.2018

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. В 1950 г. Х. Массера доказал, что скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, т. е. таких, что период решения несоизмерим с периодом уравнения. Для разностных уравнений с дискретным временем сильная нерегулярность означает, что период уравнения является взаимно простым по отношению к периоду его решения. Известно, что в случае дискретных уравнений упомянутый результат Х. Массеры полного аналога не имеет.

Цель работы – исследовать возможность реализации аналога теоремы Х. Массеры для некоторых классов разностных уравнений. Для этого рассматривается класс линейных разностных уравнений. Доказано, что линейное однородное нестационарное периодическое дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличных от постоянных.

Ключевые слова: периодические разностные уравнения, периодические последовательности, сильно нерегулярные периодические решения

Для цитирования. Деменчук, А. К. О сильно нерегулярных периодических решениях линейного однородного дискретного уравнения первого порядка / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 3. – С. 263–267. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

STRONGLY IRREGULAR PERIODIC SOLUTIONS OF THE FIRST-ORDER LINEAR HOMOGENEOUS DISCRETE EQUATION

(Communicated by Academician Nikolai A. Izobov)

Abstract. In 1950 J. Massera proved that a first-order scalar periodic ordinary differential equation has no strongly irregular periodic solutions, that is, such solutions whose period of solution is incommensurable with the period of equation. For difference equations with discrete time, strong irregularity means that the period of the equation and the period of its solution are relatively prime numbers. It is known that in the case of discrete equations, the above result of J. Massera has no complete analog.

The purpose of this article is to investigate the possibility to realize Massera's theorem for certain classes of difference equations. To do this, we consider the class of linear difference equations. It is proved that a first-order linear homogeneous non-stationary periodic discrete equation has no strongly irregular non-stationary periodic solutions.

Keywords: difference periodic equations, periodic sequences, strongly irregular periodic solutions

For citation: Demenchuk A. K. Strongly irregular periodic solutions the first-order linear homogeneous discrete equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 263–267 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267

Введение. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ – соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел, $y=(y_n)=(y(n))\,(n\in\mathbb{N})$ – скалярная функция (последовательность), определенная на $\mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}$, т. е. $y:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Множество таких последовательностей обозначим через S^1. Далее будем считать, что пустые суммы и произведения членов последовательности $(y(n))$ равны соответственно 0 и 1, т. е. для $k\in\mathbb{N}$ и $m\in\mathbb{Z}$, $k>m$ имеем $\sum_{j=k}^{m}y_j=0$ и $\prod_{j=k}^{m}y_j=1$.

О п р е д е л е н и е 1. *Последовательность $y\in S^1$ называется периодической с периодом $\omega\in\mathbb{N}$ (ω-периодической), если для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $y_{n+\omega}=y_n$.*

Естественно, что если число ω – период последовательности y, то его кратные также будут периодами этой последовательности, т. е. для любых $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ имеем $y(n+m\omega)=y(n)$. Поэтому в дальнейшем под периодом последовательности, как правило, будем понимать наименьший из периодов. В таком случае, в частности, всякая постоянная последовательность будет 1-периодической. Множество ω-периодических последовательностей обозначим через PS_{ω}^1.

Периодические последовательности при определенных условиях могут быть решениями дискретных (разностных) уравнений. Проблеме существования и построения периодических решений дискретных уравнений посвящено достаточно большое число работ [1–4]. В указанных работах в основном изучались решения, период которых совпадает с периодом самого уравнения. Хотя полученные в этом направлении результаты во многом аналогичны соответствующим результатам для обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее в некоторых случаях имеются значительные различия. Отметим одно из них.

Как известно [5; 6], нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных периодических решений таких, что периоды решения и уравнения несоизмеримы. Более того, Н. П. Еругин [7, с. 203] доказал, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений. Представляется интересным исследовать подобные вопросы для дискретных уравнений. С этой целью рассмотрим уравнение

$$x_{n+1}=X(x_n,n),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

правая часть которого является ω-периодической, т. е. существует такое наименьшее $\omega\in\mathbb{N}$, что для любого фиксированного $n_0\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $X(x_{n_0},n+\omega)=X(x_{n_0},n)$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Далее под периодом уравнения вида (1) будем понимать период его правой части.

По аналогии с [8] введем следующее

О п р е д е л е н и е 2. *Периодическое решение с периодом Ω уравнения (1) такое, что числа ω и Ω взаимно просты, будем называть сильно нерегулярным.*

В [9] показано, что при определенных условиях дискретное уравнение (1) может допускать сильно нерегулярное периодическое решение. Действительно, пусть m – произвольное нечетное число и $(h_n)\in PS_m^1$. Тогда дискретное m-периодическое уравнение $x_{n+1}=-x_n-(1-x_n^2)h_n$ будет иметь сильно нерегулярное периодическое решение $x_n=(-1)^n$ периода $\Omega=2$, который будет взаимно простым с числом m.

Постановка задачи. Как видим, теорема Массера [5] об отсутствии сильно нерегулярных периодических решений у скалярного обыкновенного уравнения для разностных уравнений, вообще говоря, полного аналога не имеет. В связи с этим возникает вопрос о возможности реализации аналога упомянутой теоремы Массера для более узких классов уравнений вида (1), в частности, линейных разностных уравнений, а именно: может ли линейное однородное нестационарное периодическое дискретное уравнение иметь сильно нерегулярные периодические решения, отличные от постоянных? Ответ на этот вопрос и является целью настоящего сообщения.

Основной результат. Рассмотрим линейное однородное периодическое дискретное уравнение

$$x_{n+1}=a_n x_n,\quad n\in\mathbb{N},\quad a\in PS_{\omega}^1,\quad \omega\ge 2. \tag{2}$$

Будем интересоваться сильно нерегулярными Ω-периодическими решениями уравнения (2). Исследование разобьем на два случая.

1. Хотя бы один из коэффициентов a_n уравнения равен нулю.

Выберем наименьшее $k \in \mathbb{N}$ такое, что $a_k = 0$. Тогда из (2) вытекает, что для всех $n > k$ имеем $x_n = 0$. В таком случае общее решение (2) запишется в виде $x = (x_1, \dots, x_k, 0, 0, 0, \dots)$. Это решение может быть периодическим только тогда, когда оно является тривиальным. Значит в данном случае разностное уравнение (2) не имеет отличного от постоянного периодического решения.

2. Все коэффициенты a_n уравнения отличны от нуля.

Пусть $a_n \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что (2) имеет сильно нерегулярное Ω-периодическое решение (φ_n), отличное от постоянного. Тогда выполняется цепочка равенств

$$\varphi_n = a_{n-1}\varphi_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}\varphi_{n-2} = \dots = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 \varphi_1,$$

откуда находим

$$\varphi_n = c\prod_{j=1}^{n-1} a_j, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где $\varphi_1 = c$ – произвольная вещественная постоянная. Заметим, что если $c = 0$, то решение (3) уравнения (2) будет тривиальным. Поэтому при дальнейшем рассмотрении этот случай исключаем и считаем, что $c \neq 0$.

Согласно определению 1, функция (3) будет Ω-периодической в том и только в том случае, когда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\varphi_n = \varphi_{n+\Omega}$, т. е.

$$c\prod_{j=1}^{n-1} a_j = c\prod_{j=1}^{n+\Omega-1} a_j. \tag{4}$$

Равенства (4) можно записать в следующем виде:

$$c\prod_{j=1}^{n-1} a_j \ \ (1 - \prod_{j=n}^{n+\Omega-1} a_j) = 0.$$

Так как $c \neq 0$ и $a_j \neq 0$, $j \in \mathbb{N}$, то

$$\prod_{j=n}^{n+\Omega-1} a_j = 1, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{5}$$

Покажем, что соотношения (5) могут выполняться лишь в том случае, когда последовательность (a_n) является Ω-периодической, т. е. $a_n = a_{n+\Omega}$, $n = 1, 2, \dots$. Действительно, выпишем первые два из равенств (5)

$$a_1 a_2 \cdots a_\Omega = 1, \qquad a_2 a_3 \cdots a_\Omega a_{\Omega+1} = 1.$$

Умножая обе части второго равенства на a_1, получаем

$$(a_1 a_2 a_3 \cdots a_\Omega) a_{\Omega+1} = a_1,$$

а значит, $a_{1+\Omega} = a_1$.

Далее, взяв второе и третье из равенств (5): $a_2 a_3 \cdots a_{\Omega+1} = 1$ и $a_3 a_4 \cdots a_{\Omega+1} a_{\Omega+2} = 1$, получаем

$$(a_2 a_3 a_4 \cdots a_{\Omega+1}) a_{\Omega+2} = a_2, \quad a_{2+\Omega} = a_2.$$

Продолжая этот процесс при прозвольном $k \in \mathbb{N}$, имеем серию равенств

$$P_k = a_k a_{k+1} \cdots a_{\Omega+k-1} = 1, \quad P_{k+1} = a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{\Omega+k-1} a_{\Omega+k} = 1,$$

$$a_k = a_k P_{k+1} = P_k a_{\Omega+k} = a_{k+\Omega}.$$

Значит, для выполнения условия (5) функция (a_n) должна быть Ω-периодической.

Таким образом, получаем, что последовательность (a_n) имеет два периода ω и Ω, которые являются взаимно простыми числами. Как известно, любое натуральное число можно представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами чисел ω и Ω.

Возьмем произвольное $n_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку для любого $d \in \mathbb{N}$ найдутся такие $p, q \in \mathbb{Z}$, что $d = p\omega + q\Omega$, то верно равенство

$$a_{n_0+d} = a_{n_0+p\omega+q\Omega}. \tag{6}$$

Как показано ранее, последовательность (a_n) имеет периоды ω и Ω. Поэтому

$$a_{n_0+d} = a_{n_0} = \text{const} \tag{7}$$

при любом $d \in \mathbb{N}$. Из равенств (6), (7) в силу произвольности выбора $n_0 \in \mathbb{N}$ получаем $a_{n+d} = a_n = \text{const}$, $d \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность (a_n) является постоянной, что противоречит неравенству $\omega \geq 2$.

Таким образом, имеет место аналог теоремы Массера для линейных однородных разностных уравнений. Другими словами, справедлива

Т е о р е м а. *У линейного однородного нестационарного периодического дискретного уравнения (2) первого порядка отсутствуют сильно нерегулярные периодические решения, отличные от постоянного.*

З а м е ч а н и е. *Как следует из [3] уравнение (2) при определенных условиях может допускать* ω*-периодическое решение, отличное от постоянного.*

Заключение. Для линейного однородного нестационарного периодического дискретного уравнения первого порядка имеет место аналог теоремы Массера об отсутствии у скалярного периодического обыкновенного дифференциального уравнения периодических решений таких, что период решения несоизмерим с периодом уравнения.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках Отдельного проекта фундаментальных и прикладных научных исследований НАН Беларуси «Исследование свойств спектров дискретных систем при возмущениях их коэффициентов».

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Special Project of Fundamental and Applied Scientific Research of the National Academy of Sciences of Belarus “Investigation of the properties of the spectra of discrete systems under perturbations of their coefficients”.

Список использованных источников

1. Agarwal, R. P. Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods and Applications / R. P. Agarwal. – New York: Marcel Dekker, Inc., 1992. – 777 p.

2. Agarwal, R. P. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations / R. F. Agarwal, J. Popenda // Mathl. Comput. Modelling. – 1995. – Vol. 22, N 1. – P. 11–19. https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00096-k

3. Janglajew, K. R. Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations / K. R. Janglajew, E. L. Schmeidel // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol. 2012, N 1. – P. 195. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195

4. Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations / S. Elaydi. – Third Ed. – Springer, 2005. – 540 p.

5. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria, Montevideo. – 1950. – Vol. 4, N 1. – P. 37–45.

6. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журн. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.

7. Еругин, Н. П. Линейные системы дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск: Изд-во Акад. наук БССР, 1963. – 272 с.

8. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 186 с.

9. Ласунский, А. В. О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения / А. В. Ласунский // Тр. Карельского научного центра РАН. – 2012. – № 5. – С. 44–48.

References

1. Agarwal R. P. *Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods and Applications*. New York, Marcel Dekker, Inc., 1992. 777 p.

2. Agarwal R. P., Popenda J. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 1995, vol. 22, no. 1, pp. 11–19. https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00096-k

3. Janglajew K. R., Schmeidel E. L. Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2012, vol. 2012, no. 1, pp. 195. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195

4. Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations*. Third Ed. Springer, 2005. 540 p.

5. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Boletin de la Facultad de Ingenieria y agrimensura de Montevideo*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45 (in Spanish).

6. Kurzweil J., Veivoda O. On periodic and almost periodic solutions of the ordinary differential systems. *Chekhoslovatskii matematicheskii zhurnal = Czechoslovak mathematical journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).

7. Erugin N. P. *Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients*. Minsk, Publishing house of the Academy of Sciences BSSR, 1963. 272 p. (in Russian).

8. Demenchuk A. K. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrucken, LAP Lambert Academic Publishing, 2012. 186 p. (in Russian).

9. Lasunskii A. V. On the period of solutions of the discrete periodic logistic equation. *Trudy Karelskogo nauchnogo centra Rossiiskoi akademii nauk = Transactions of Karelian research centre of Russian Academy of Science*, 2012, no. 5, pp. 44–48 (in Russian).

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – д-р физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.

Information about the author

Demenchuk Aleksandr Konstantinovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Leading Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.