ISSN 0002–354X (print)
УДК 004.942

Поступило в редакцию 06.01.2016
Received 06.01.2016

Член-корреспондент В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан

Институт прикладной физики НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

РЕКУРРЕНТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ РЕШЕНИЯ

При высокой размерности задачи фильтр Калмана становится труднореализуемым в реальном масштабе времени из-за больших вычислительных затрат. В качестве альтернативы рассмотрена методика синтеза фильтра на основе рекуррентного метода наименьших квадратов с регуляризацией решения. Методика дает возможность сократить вычислительные затраты, однако при этом возрастает дисперсия ошибок фильтрации. На примере показана степень этого увеличения и даны рекомендации по выбору величины коэффициента регуляризации.

Ключевые слова: фильтрация, метод наименьших квадратов, регуляризация.

Corresponding Member V. M. Artemiev, A. O. Naumov, L. L. Kokhan

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

RECURSIVE LINEAR FILTERING OF RANDOM SEQUENCES USING THE LEAST SQUARES METHOD WITH SOLUTION REGULARIZATION

When the dimension of the problem is high, the Kalman filter becomes difficult to realize in real time due to computational costs. Alternatively, the technique of synthesis of the filter on the basis of the recursive least squares method with solution regularization is considered. The technique allows reducing the computational costs, but it increases the variance of the filtering error. By the example, the extent of this increase is shown and the recommendations for selection of the regularization coefficient are given.

Keywords: filtering, least squares method, regularization.

Введение. Для решения задач линейной фильтрации случайных последовательностей, наблюдаемых на фоне аддитивных помех, используют статистический подход на основе фильтра Калмана (ФК), обеспечивающий минимальную дисперсию ошибок фильтрации [1]. Однако при высокой размерности задачи ФК становится труднореализуемым в реальном масштабе времени из-за больших вычислительных затрат. Альтернативой статистическому служит детерминистский подход, когда фильтрация осуществляется на основе результатов лишь текущих измерений [2] с привлечением эмпирических данных. При этом снижение вычислительных затрат происходит за счет того, что не требуется проведения операций статистического усреднения. Для реализации такого подхода основным является метод наименьших квадратов (МНК), где в качестве критерия оптимальности используется квадратичная форма невязки решения [3; 4]. Получаемые при этом алгоритмы фильтрации требуют использования всей последовательности измерений, начиная с момента начала работы фильтра. Очевидно, что при большом числе периодов измерений фильтры такого рода становятся малопригодными. Задачу фильтрации целесообразно решать рекуррентно, как это имеет место у ФК, используя лишь оценки на предыдущем шаге фильтрации и текущие измерения. В такой постановке для синтеза алгоритмов фильтрации можно использовать рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) [5], однако это обычно приводит к необходимости решения некорректных (плохо обусловленных) задач [6].

В настоящей работе предлагается методика синтеза рекуррентных линейных фильтров случайных последовательностей на основе РМНК (ФНК) с регуляризацией решения, что позволяет решать широкой круг задач с меньшими вычислительными затратами, чем у ФК.

Формулировка задачи. Полезный сигнал $\mathbf{x}_k$ является случайной последовательностью в виде m-мерного вектора $\boldsymbol{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{mk}]^T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ есть дискретное время, а символ «T» обозначает операцию транспонирования. Модель сигнала задается линейным конечно-разностным уравнением вида

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}_k$ – матрица размерности $m \times m$, а случайный m-мерный вектор $\mathbf{w}_k = [w_{1k}, w_{2k}, \ldots, w_{mk}]^T$ есть формирующее воздействие модели полезного сигнала в виде центрированного белого шума с ковариационной матрицей $\mathbf{Q}_k$.

Модель n-мерного вектора измерений $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, z_{2k}, \ldots, z_{nk}]^T$ определяется линейным уравнением

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \tag{2}$$

где матрица измерений $\mathbf{H}_k$ имеет размерность $m \times n$, а случайный вектор $\mathbf{v}_k = [v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk}]^T$ есть центрированный белый шум с ковариационной матрицей $\mathbf{R}_k$, который моделирует ошибки измерений и является шумовым воздействием для канала измерений.

Задача состоит в нахождении уравнений оценки вектора полезного сигнала $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_{1k}, \hat{x}_{2k}, \ldots, \hat{x}_{mk}]^T$ на основе выбранного критерия оптимальности и текущих измерений $\mathbf{z}_k$ методом РМНК. Использование принципа регуляризации позволяет получить единую методику синтеза алгоритмов фильтрации для различных типов задач. Так, если $m < n$, задача будет переопределенной и решения в обычном смысле может не существовать. Такая ситуация характерна для задач фильтрации с комплексированием измерений от нескольких источников. Случай $m > n$ приводит к недоопределенной задаче, что возникает при ограниченных возможностях измерений. Даже если $m = n$, решение может быть неединственным за счет шумов измерений. Регуляризация позволяет обойти эти трудности.

Уравнения фильтра. В основе методики синтеза лежит выбор критерия оптимальности $J_k(\hat{x}_k)$. Для метода наименьших квадратов в основе критерия используется квадратичная форма невязки (КФН) $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k)$, где символ «–1» обозначает операцию обращения матрицы. При синтезе по такому критерию задача может оказаться некорректной и для регуляризации решения в состав критерия следует дополнительно включить сглаживающий квадратичный функционал, выбор которого производится исходя из сущности решаемой задачи. Для сформулированных выше исходных данных подходящим вариантом является квадратичная форма $(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$, вытекающая из модели полезного сигнала (1). В результате критерий $J_k(\hat{x}_k)$ синтеза ФНК выглядит следующим образом:

$$J_k(\hat{x}_k) = (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k) + \alpha (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \mathbf{Q}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \tag{3}$$

где α является положительным коэффициентом регуляризации, величина которого выбирается из эмпирических соображений или по результатам моделирования и позволяет компенсировать отсутствие знаний априорной статистики. Этот критерий определяет текущие потери фильтрации в детерминистской постановке и его можно трактовать следующим образом: первое слагаемое учитывает влияние измерений $\mathbf{z}_k$ на качество решения $\hat{\mathbf{x}}_k$; второе позволяет согласовать его с решением $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на предыдущем шаге фильтрации с учетом модели (1), а коэффициент α определяет вес этого слагаемого.

Оптимальные оценки $\hat{\mathbf{x}}_k$ находятся из условия минимума критерия (3). Необходимое условие минимума представляется в виде уравнения

$$\frac{\partial J_k(\hat{x}_k)}{\partial \hat{x}_k} = -2\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_k) + 2\alpha \mathbf{Q}_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = 0.$$

Его решение приводит к уравнению оптимального ФНК, который имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{2k}\mathbf{z}_k. \quad (4)$$

Здесь матричный коэффициент $\mathbf{K}_{1k}$ размерности $m \times m$ имеет форму

$$\mathbf{K}_{1k} = \alpha(\alpha\mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k)^{-1}\mathbf{Q}_k^{-1}\mathbf{A}_k \quad (5)$$

и задает экстраполяцию оценки $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ на следующий шаг. Матричный коэффициент усиления $\mathbf{K}_{2k}$ размерности $m \times n$ определяется равенством

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}^*\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{2k}^*(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{K}_{1k}^*\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (6)$$

и позволяет уточнить экстраполированное значение за счет наблюдения $\mathbf{z}_k$ на текущем шаге фильтрации. Структура уравнения (4) говорит о рекуррентном характере фильтрации. Путем эквивалентных преобразований оно сводится к структуре фильтра с обратной связью

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{K}_{1k}^*\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{2k}^*(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{K}_{1k}^*\hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{K}_{1k}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{2k}\mathbf{H}_k)^{-1}\mathbf{K}_{1k} = \mathbf{A}_k, \; \mathbf{K}_{2k}^* = \mathbf{K}_{2k}. \quad (8)$$

В этом случае структура ФНК и первое слагаемое в формуле (7) совпадают с ФК.

Коэффициенты усиления ФНК находятся по формулам (5), (6) или (8), в то время как у ФК это требует решения ковариационного уравнения совместно с уравнением для оптимального коэффициента усиления, что более трудоемко. Однако уменьшение вычислительных затрат достигается за счет снижения точности фильтрации. Объем вычислений коэффициентов усиления ФНК в основном связан с обращением матрицы $(\alpha\mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k)$. Для вычислений можно воспользоваться формулой матричного тождества $(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{C}^T(\mathbf{D} + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}$ [7], что приводит к выражению

$$(\alpha\mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{H}_k^T\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{H}_k)^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{L}_k\mathbf{Q}_k,$$

где

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{I} - \alpha^{-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{H}_k^T(\mathbf{R}_k + \alpha^{-1}\mathbf{H}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{H}_k^T)^{-1}\mathbf{H}_k.$$

Точность фильтрации. Качество работы ФНК оценивается величиной потерь (3) и для детерминистского подхода синтезированный фильтр оптимален. В то же время при статистическом подходе качество определяется путем оценки величин дисперсий ошибок фильтрации. В линейном случае оптимальным является ФК, обеспечивающий минимально возможные значения этих дисперсий. Очевидно, что в тех же условиях фильтрации дисперсии ошибок ФНК будут выше, поэтому результаты ФК могут служить оценкой нижних границ величин этих ошибок. Представляет интерес сравнение дисперсий ошибок обоих фильтров при одинаковых условиях работы, что дает возможность оценки снижения точности фильтрации при переходе от статистического к детерминистскому подходу.

Вектор ошибок фильтрации равен $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. После подстановки выражений (1), (2), (4), (5) и (6) приходим к следующему уравнению ошибок ФНК:

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{1k}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{K}_{2k}\mathbf{z}_k = \mathbf{K}_{1k}\mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{L}_k\mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{2k}\mathbf{v}_k. \quad (9)$$

Вектор математических ожиданий ошибок обозначается через $\mathbf{m}_{ek} = \langle \mathbf{e}_k \rangle$, где угловыми скобками обозначена операция нахождения математического ожидания. Усредняя обе части (9) получаем уравнение для вектора математических ожиданий ошибок

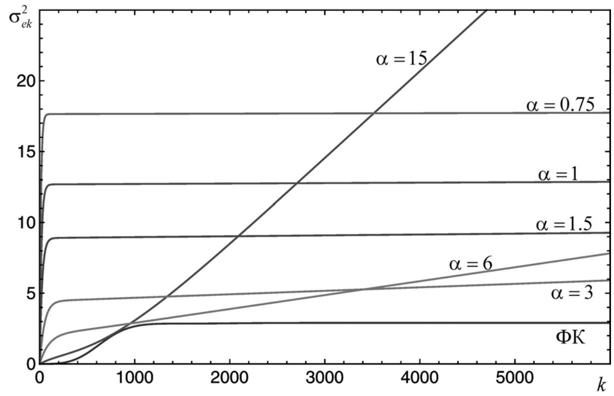
$$\mathbf{m}_{ek} = \mathbf{K}_{1k}\mathbf{m}_{ek-1} + \mathbf{L}_k\mathbf{m}_{wk} - \mathbf{K}_{2k}\mathbf{m}_{vk}, \quad (10)$$

где $\mathbf{m}_{wk} = \langle \mathbf{w}_k \rangle$ и $\mathbf{m}_{vk} = \langle \mathbf{v}_k \rangle$ есть математические ожидания воздействий. В нашем случае мы полагаем их равными нулю, что сводит (10) к однородному уравнению $\mathbf{m}_{ek} = \mathbf{K}_{1k}\mathbf{m}_{ek-1}$. Его решение с течением времени стремится к нулю и это говорит о том, что уравнение ФНК (4) обеспечивает несмещенность оценок.

При статистически независимых дискретных белых шумах $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{v}_k$, а также учитывая независимость значений ошибок $\mathbf{e}_{k-1}$ в момент времени $k-1$ от воздействий $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{v}_k$ в последующий момент времени k, можно получить уравнение для ковариационной матрицы ошибок $\mathbf{P}_k = \left\langle (\mathbf{e}_k - \mathbf{m}_{ek})(\mathbf{e}_k - \mathbf{m}_{ek})^T \right\rangle$ в следующем виде:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{K}_{1k}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{K}_{1k}^T + \mathbf{L}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{L}_k^T + \mathbf{K}_{2k}\mathbf{R}_k\mathbf{K}_{2k}^T \quad (11)$$

с начальным условием $\mathbf{P}_0$. Диагональные элементы этой матрицы являются дисперсиями ошибок фильтрации каждой из составляющих вектора $\mathbf{x}_k$.



Дисперсии ошибок измерения дальности σ^2_{ek} у ФК и ФНК при различных значениях коэффициента регуляризации α

Variance of filtering errors of measurement of the range σ^2_{ek} of the Kalman filter and the least squares filter at different values of the regularization coefficient α

Выбор величины коэффициента α можно осуществлять следующим образом. Первоначально задаются значением α = 1, что соответствует критерию максимального правдоподобия, если воздействия $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{v}_k$ имеют гауссово распределение [4]. Полученные из уравнения (11) значения дисперсий ошибок будут больше, чем у ФК. Затем путем моделирования находят значения α, соответствующие устойчивому решению (11) и наименьшим значениям дисперсий ошибок. В итоге ФНК обеспечивает величину дисперсий, хотя и большую чем у ФК, но меньшую чем у метода максимального правдоподобия.

Пример сравнения дисперсий ошибок ФНК и ФК. Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации текущих координат дальности до маневрирующего воздушного объекта по данным радиолокатора сопровождения (РЛС). Статистическая модель изменения координат приведена в [8] и имеет вид системы стохастических конечно-разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{1k} &= x_{1k-1} + T_0 x_{2k-1} + 0,5T_0^2 x_{3k-1}; \\ x_{2k} &= x_{2k-1} + T_0 x_{3k-1}; \\ x_{3k} &= a_3 x_{3k-1} + w_{3k};\ 0 < a_3 < 1. \end{aligned} \quad (12)$$

В этих уравнениях посредством x_{1k} обозначена дальность до объекта (в метрах) в моменты времени $k = 0, 1, 2, \ldots$; x_{2k} – скорость изменения дальности (мс$^{-1}$); x_{3k} – ускорение (мс$^{-2}$), которое формируется воздействием w_{3k} в виде центрированного дискретного белого шума с постоянной дисперсией $\sigma^2_{w_3}$. Параметр T_0 (с) задает величину периода поступления измерений дальности от РЛС. В векторной форме уравнения (12) могут быть представлены в виде (1) со следующими значениями векторов и матриц:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix};\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & T_0 & 0,5T_0^2 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix};\ \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{3k} \end{pmatrix};\ \mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{w_3} \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что дальность x_{1k} измеряется с аддитивной ошибкой v_{1k} в виде центрированного белого шума с постоянной дисперсией $\sigma^2_{v_1}$, статистически независимого от w_{3_k}. Линейная модель измерений задается уравнением (2), где имеют место значения

$$\mathbf{H} = (1 \quad 0 \quad 0);\ \mathbf{z}_k = z_{1k};\ \mathbf{v}_k = v_{1k};\ \mathbf{R}_k = \sigma^2_{v_1}.$$

При расчетах использованы следующие исходные данные: период поступления измерений $T_0 = 10^{-3}$ с; дисперсия ошибки измерения дальности $\sigma^2_{v_1} = 900\,\text{м}^2$; дисперсия изменения ускорения в установившемся режиме $\sigma^2_3 = 400\,\text{м}^2/\text{с}^{-4}$; величина коэффициента a_3 = 0,968, соответствующая длительности корреляции ускорения в установившемся режиме 30 с; дисперсия формирующего воздействия ускорения для этих данных $\sigma^2_{w_3} = 25{,}2\,\text{м}^2/\text{с}^{-4}$.

Используя выражение (11) для ковариационной матрицы ошибок ФНК и ковариационного уравнения ФК [1; 2] при заданных параметрах модели входного воздействия и ряда значений коэффициентов α получены графики изменения дисперсий ошибок оценок дальности σ^2_{ek} у ФК и ФНК, приведенные на рисунке.

Графики показывают, что наименьшими значениями дисперсий ошибок обладает ФК. Для метода максимального правдоподобия (α = 1) эта дисперсия возрастает примерно в 4 раза. Увеличивая значение коэффициента регуляризации α, дисперсия ошибки вначале уменьшается (примерно до α = 4), а затем решение становится неустойчивым (α = 6; 15). Наименьшее значение устойчивой величины дисперсии имеет место при α = 3, когда дисперсия ошибок ФНК примерно в 2 раза больше, чем у ФК.

Заключение. Использование фильтра на основе рекуррентного метода наименьших квадратов с регуляризацией решения позволяет сократить затраты на вычисление коэффициентов усиления по сравнению с фильтром Калмана, однако это достигается за счет увеличения дисперсий ошибок фильтрации. Снижение их величин осуществляется путем эмпирического выбора величины коэффициента регуляризации, что делает возможным получение дисперсий ошибок ФНК, хотя и больших, чем у ФК, но меньших, чем при использовании метода максимального правдоподобия.

Список использованных источников

1. Jazwinski, A. H. Stochastic Process and Filtering Theory / A. H. Jazwinski. – NY: Academic Press, 1970. – 362 p.
2. Степанов, О. А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации / А. О. Степанов. – СПб., 2009. – Ч. 1: Введение в теорию оценивания. – 496 с.
3. Линник, Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений / Ю. В. Линник. – Изд. 2-е, доп. и испр.– М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.
4. Эльясберг, П. Е. Определение движения по результатам измерений / П. Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 267 с.
5. Альберт, А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Альберт. – М.: Наука, 1977. – 215 с.
6. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 232 с.
7. Себер, Д. Линейный регрессионный анализ / Д. Себер. – М.: Мир, 1980. – 322 с.
8. Фарина, А. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей / А. Фарина, Ф. Студер. – М., 1993. – 319 с.

References

1. Jazwinski A. H. *Stochastic Process and Filtering Theory*. New York, Academic Press, 1970. 362 p.
2. Stepanov O. A. *Fundamentals of theory of estimation as applied to the tasks of navigation information processing. Part 1: An introduction to Theory of Estimation*. Saint-Petersburg, 2009. 496 p. (in Russian)
3. Linnik Yu. V. *Least squares method and the fundamentals of the mathematical-statistical theory of observation processing*, 2nd ed. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 349 p.
4. Elyasberg P. E. *Motion determination in terms of the measurement results*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 267 p.
5. Albert A. *Regression, pseudoinversion and recursive estimation*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 215 p.
6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *The methods of solution of ill-posed tasks*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 232 p.
7. Seber D., Lee A. J. *Linear regression analysis*. 2nd ed. Wiley, 2003. 582 p. doi.org/10.1002/9780471722199.
8. Farina A., Studer F. *Digital processing of radar information. Target support*. Moscow, 1993. 319 p.

Информация об авторах

Артемьев Валентин Михайлович – член-корреспондент, д-р техн. наук, профессор, гл. науч. сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by.

Наумов Александр Олегович – заведующий лабораторией, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by.

Information about the authors

Artemiev Valentin Michailovich – Corresponding Member, D. Sc. (Engineering), Professor, Chief researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by.

Naumov Alexander Olegovich – Head of the Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by.

Кохан Леонид Леонидович – ст. науч. сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by.

Kokhan Leonid Leonidovich – Senior researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by.

Для цитирования

Артемьев, В. М. Рекуррентная линейная фильтрация случайных последовательностей методом наименьших квадратов с регуляризацией решения / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 102–107.

For citation

Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Recursive linear filtering of random sequences using the least squares method with solution regularization. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 102–107. (in Russian)