Доклады Национальной академии наук Беларуси
2015 январь–февраль Том 59 № 1

УДК 517.9

Академик И. В. ГАЙШУН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА СДВИГА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Институт математики НАН Беларуси, Минск *Поступило 04.02.2015*

Введение. Классическая теорема Перрона утверждает, что любая квадратная матрица A с положительными элементами обладает простым положительным характеристическим числом λ_0, которому соответствует собственный вектор x_0 с положительными компонентами, при этом число λ_0 является экстремальным, а именно, любое характеристическое число матрицы A, отличное от λ_0, по модулю меньше λ_0 (см., напр., [1–3]). Элементы λ_0 и x_0 будем называть перроновским характеристическим числом и перроновским собственным вектором матрицы A.

Цель работы – распространить теорему Перрона на операторы сдвига, подробно исследованные в [4].

Далее используются следующие определения и обозначения. Матрица $A = (a^{kl})$ называется неотрицательной, $A \geq 0$ (положительной, $A > 0$), если $a^{kl} \geq 0$ ($a^{kl} > 0$) для всех k, l. Модуль $|A|$ матрицы A над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел определяется как матрица, составленная из элементов $|a^{kl}|$. Если матрица B имеет такие же размеры, что и матрица A, то запись $A \geq B$ ($A > B$) означает, что $A - B \geq 0$ ($A - B > 0$). Легко проверить, что $|A + B| \leq |A| + |B|$ и $|cA| = |c|\,|A|$ при любом $c \in \mathbb{C}$. Когда A и B квадратные матрицы размера $n \times n$, то $|AB| \leq |A|\,|B|$; кроме того, $|Ax| \leq |A|\,|x|$ при каждом $x \in \mathbb{C}^n$.

Операторы сдвига. Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $c(\mathbb{Z}, n)$ – банахово пространство ограниченных последовательностей $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_s (|\varphi_1(s)|^2 + \ldots + \|\varphi_n(s)|^2)^{1/2}$, и пусть $A_j = (a_j^{kl})$ ($j \in \mathbb{Z}$) – такая последовательность ($n \times n$)-матриц над полем $\mathbb{C}$, что ряд Лорана

$$T(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j z^j$$

сходится в кольце $0 < \rho_1 < |z| < \rho_2$, содержащем единичную окружность. Тогда отображение $Q : c(\mathbb{Z}, n) \to c(\mathbb{Z}, n)$, заданное соотношением

$$(Q\varphi)(s) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j \varphi(s + j),$$

является линейным ограниченным оператором (оператором сдвига [4]). Согласно [4, с. 30–31] спектр $\sigma(Q)$ этого оператора точечный и

$$\sigma(Q) = \bigcup_{z \in \mathbf{C}, |z|=1} \sigma(T(z)), \tag{1}$$

где $\sigma(T(z))$ – множество характеристических чисел матрицы $T(z)$.

Теорема о спектре оператора *Q*. Пусть c_+ – конус в пространстве $c(\mathbb{Z}, n)$, образованный неотрицательными последовательностями. Оператор Q называется положительным, если $Qc_+ \subset c_+$ (см. [5]).

Легко доказать, что свойство положительности оператора Q эквивалентно требованию $A_j \geq 0$ ($j \in \mathbb{Z}$). Далее считаем это требование выполненным. Дополнительно предположим, что $A_0 > 0$ и, следовательно, матрица

$$A = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j$$

положительна.

Т е о р е м а. *При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения:*

перроновское характеристическое число λ_0 *матрицы A является простым собственным числом оператора Q, которому отвечает собственная постоянная положительная последовательность* $\varphi_0(s) \equiv x_0$ (x_0 *– перроновский вектор матрицы A*);

для любого $\mu \in \sigma(Q)$, *отличного от* λ_0, *выполняется неравенство*

$$|\mu| < \lambda_0. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение (за исключением простоты собственного числа λ_0) следует из соотношения $T(1) = A$ и формулы (1). Установим оценку (2). Для этого предположим противное: для некоторого $\mu \in \sigma(Q)$, $\mu \neq \lambda_0$, справедливо соотношение

$$|\mu| \geq \lambda_0. \quad (3)$$

В силу (1) существует такое $z_\mu \in \mathbb{C}$, $|z_\mu| = 1$, что $\mu \in \sigma(T(z_\mu))$. Обозначим через w собственный вектор матрицы $T(z_\mu)$, отвечающий характеристическому числу μ, т. е. $T(z_\mu)w = \mu w$. Тогда $|\mu|\,|w| = |T(z_\mu)|\,|w| \leq |T(z_\mu)|\,|w| \leq A|w|$. Так как согласно [1, с. 309–310] $\lambda_0 = \max\{\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ (Λ – множество неотрицательных чисел λ, для каждого из которых существует неотрицательный ненулевой вектор x, удовлетворяющий неравенству $Ax \geq \lambda x$), то $|\mu| \leq \lambda_0$, что, с учетом предположения (3), приводит к равенству $|\mu| = \lambda_0$. Значит $A|w| \geq \lambda_0|w|$; согласно [1, с. 310], отсюда вытекает, что $A|w| = \lambda_0|w|$.

Таким образом, $|T(z_\mu)w| = \lambda_0|w| = A|w|$. Несложный анализ этого равенства приводит к выводу, что $T(z_\mu) = A$. Следовательно, $Aw = \mu w$ и потому $|Aw| = A|w|$, откуда вытекает существование ненулевого неотрицательного вектора v и комплексного числа $c \neq 0$, для которых $w = cv$, что в итоге обеспечивает соотношение $Aw = \lambda_0 w$, а это возможно лишь при $\lambda_0 = \mu$, вопреки предположению $\lambda_0 \neq \mu$. Полученное противоречие доказывает неравенство (2).

Установим, наконец, простоту собственного числа λ_0 оператора Q. Для этого заметим, что, в силу результатов монографии [4, с. 17–20], оператор $Q_0 = Q - \lambda_0 I$ (I – тождественное отображение) допускает разложение $Q_0 = P_1 R P_2$, где P_1 и P_2 – обратимые ограниченные операторы сдвига. Поэтому уравнение $(Q - \lambda_0 I)\varphi = 0$ эквивалентно уравнению $R\psi = 0 (\psi = P_2\varphi)$, которое, в свою очередь, равносильно системе $\psi_1(s+1) - \psi_2(s) = 0$, $\psi_2(s) = 0, ..., \psi_n(s) = 0$. Решениями этой системы являются лишь постоянные последовательности $(c, 0, \ldots, 0)$, что немедленно приводит к заключению: каждое решение уравнения $(Q - \lambda_0 I)\varphi = 0$ постоянно и пропорционально вектору x_0. Теорема доказана.

Отметим, что [3, с. 586] величина λ_0 может быть вычислена следующим образом:

$$\lambda_0 = \max_{x>0} \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \min_{x>0} \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j,$$

где α_{ij} – элементы матрицы A.

З а м е ч а н и е. Хотя выводы доказанной теоремы полностью аналогичны классической теореме Перрона, между этими теоремами имеется следующее существенное различие. Если в теореме Перрона λ_0 – изолированная часть спектра положительной матрицы, то в случае оператора Q собственное число λ_0, вообще говоря, изолированным не является.

Литература

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1976.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1988.
3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.
4. *Гайшун И. В.* Многопараметрические системы управления. Минск, 1996.
5. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М., 1962.

I. V. GAISHUN

math@im.bas-net.by

SOME PROPERTIES OF A SPECTRUM OF A SHIFT OPERATOR WITH NON-NEGATIVE COEFFICIENTS

Summary

The known Perron theorem for a spectrum of a positive matrix is distributed on shift operators in space of limited sequences.