Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 январь–февраль Том 58 № 1

УДК 517.933

М. В. МИЛОВАНОВ, О. Г. МЕДВЕДЕВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА К ИЗУЧЕНИЮ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ С ДВУМЯ ЭКСПОНЕНТАМИ

(Представлено членом-корреспондентом В. И. Янчевским)

Белорусский государственный педагогический университет, Минск *Поступило 30.09.2013*

1. Если $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ – произвольная гладкая функция $2n$ переменных, то система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

называется уравнениями Гамильтона. Система эта полностью зависит от выбора функции H, которая называется ее гамильтонианом.

Обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами – это гамильтонова система с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2) + c_1^2 e^{\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n} + c_2^2 e^{\beta_1 q_1 + \dots + \beta_n q_n}. \tag{1}$$

Стандартная цепочка Тоды с двумя экспонентами задается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + c^2 (e^{2(q_1 - q_2)} + e^{2(q_2 - q_3)}). \tag{2}$$

Обобщенные цепочки Тоды возникают при решении многих физических задач [1; 2].

В работе [3] показано, что любая обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами либо интегрируется в квадратурах, либо сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2\right)\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}\right) \tag{3}$$

в полукруге $1 - x^2 - y^2 > 0, \ \ y > 0$, с ненулевыми коэффициентами k и λ одного знака.

Для стандартной цепочки Тоды (2) $k = -1, \ \lambda = -\frac{1}{27}$.

Скорее всего, уравнение (3) в общем случае не интегрируется. Тем не менее, с его помощью можно получать важную информацию о решениях цепочек Тоды с двумя экспонентами.

2. Пусть цепочка Тоды с гамильтонианом (1) приводится к уравнению (3). Как показано в [3], каждое частное решение (3) позволяет найти решение исходной гамильтоновой системы, зависящее от $2n - 2$ произвольных постоянных.

Очевидно, уравнение (3) имеет следующие два однопараметрических семейства линейных решений

$$y = \pm\sqrt{k\lambda}\, x + C. \tag{4}$$

Это позволяет указать два $(2n - 1)$-параметрических семейства решений системы с гамильтонианом (1), которые, в отличие от (4), невозможно угадать. Объем статьи не позволяет выписать эти решения явно.

Таким образом, исходная обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами имеет два $(2n-1)$-параметрических семейства ее точных решений в элементарных функциях.

3. Уравнение (3) не поддается изучению с помощью элементарных методов. Возникла идея применить к (3) методы группового анализа дифференциальных уравнений. Эти методы были разработаны Софусом Ли во второй половине XIX в. и явились исходным пунктом его теории непрерывных групп, т. е. групп Ли. Изложение всей нужной нам теории содержится в книге Ли и Шефферса [4].

Групповой анализ дифференциального уравнения основан на вычислении его группы симметрии. Если она содержит разрешимую подгруппу той же размерности, что и порядок уравнения, то его можно проинтегрировать в квадратурах. В частности, если группа симметрии уравнения второго порядка имеет размерность два, то это уравнение интегрируется. Если же его группа симметрии одномерна, то уравнение можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка.

Алгебра Ли группы Ли, допускаемой уравнением (3), состоит из операторов

$$\chi = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$$

удовлетворяющих следующему условию инвариантности [4, теорема 35]:

$$\begin{gathered}\eta_{xx} + y_1(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} + (\eta_y - 2\xi_x - 3y_1\xi_y)f = \\ \xi f_x + \eta f_y + (\eta_x + y_1(\eta_y - \xi_x) - y_1^2\xi_y)f_{y_1},\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$f = f(x, y, y_1) = \left(\lambda - \frac{1}{k}y_1^2\right)\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2}\right),$$

а ξ_x, η_y, ξ_{xy}, ... обозначают соответствующие частные производные.

Записывая функции f, f_x, f_y, f_{y_1} по степеням y_1 и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y_1 в равенстве (5), получим расщепление условия (5) по параметру y_1 на следующие 4 условия:

$$\begin{cases}\eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)\lambda\left(\dfrac{k}{y} + \dfrac{2y}{1-x^2-y^2}\right) = \dfrac{4\lambda xy}{(1-x^2-y^2)^2}\xi + \lambda\left(-\dfrac{k}{y^2} + \dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2}\right)\eta, \\ (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) - \lambda\left(\dfrac{k}{y} + \dfrac{2y}{1-x^2-y^2}\right)3\xi_y = -\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{k}{y} + \dfrac{2y}{1-x^2-y^2}\right)\eta_x, \\ (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{k}{y} + \dfrac{2y}{1-x^2-y^2}\right)\eta_y = -\dfrac{1}{k}\dfrac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2}\xi - \dfrac{1}{k}\left(-\dfrac{k}{y^2} + \dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2}\right)\eta, \\ -\xi_{yy} + \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{k}{y} + \dfrac{2y}{1-x^2-y^2}\right)\xi_y = 0.\end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, оператор χ зависит от функций $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных (6). Требуется найти общее решение этой системы.

4. Интегрирование системы (6) – весьма громоздкая и технически сложная задача. Наиболее удобные для вычислений случаи, когда $k = -\frac{1}{n}$, где n – произвольное натуральное число. Оказалось, что при таких k и любых $\lambda < 0$ группа симметрии уравнения (3) нульмерна, т. е. групповой анализ ничего не дает.

Было замечено однако, что система (6) существенно упрощается, если в ней положить $\lambda = 0$. Возникла мысль заменить уравнение (3) более простым уравнением

$$y'' = -\frac{1}{k}\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2}\right)y'^2, \tag{7}$$

которое получается из (3) при $\lambda = 0$. Можно надеяться, что решения уравнения (7) сохраняют существенные особенности решений уравнения (3) при достаточно малом λ. И в то же время группа симметрии уравнения (7) может оказаться нетривиальной.

Действительно, вычисления показали, что при $k = -\frac{1}{n}$ группа симметрии уравнения (7) одномерна и порождается оператором

$$\chi = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2-1}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{8}$$

который не зависит от выбора параметра n. Непосредственная проверка убеждает, что оператор (8) удовлетворяет системе (6) при $\lambda = 0$ и любом ненулевом $k \in R$. Это означает, что уравнение (7) всегда имеет нетривиальную группу симметрии и, следовательно, допускает более глубокое изучение по сравнению с уравнением (3).

Более поздние независимые вычисления в Maple показали, что уравнение (3) при любых ненулевых k и λ одного знака имеет нульмерную группу симметрии, а уравнение (7) при любом ненулевом k имеет одномерную группу симметрии.

5. Поскольку уравнение (7) имеет одномерную группу симметрии, оно сводится к уравнению первого порядка. Соответствующая теория изложена в [4, гл. 16, § 5].

Запишем оператор (8) в виде

$$\chi = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

так что

$$\xi = x,\ \ \eta = \frac{y^2-1}{y}.$$

Согласно теории, сначала находим дважды продолженный оператор χ'':

$$\chi'' \equiv \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta'\frac{\partial}{\partial y'} + \eta''\frac{\partial}{\partial y''},$$

где

$$\eta' \equiv \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx},\ \ \eta'' \equiv \frac{d\eta'}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx},$$

причем переменная y считается функцией переменной x.

Имеем

$$\chi'' \equiv x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2-1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{y^2}y'\frac{\partial}{\partial y'} + \left(\frac{1-y^2}{y^2}y'' - \frac{2}{y^3}y'^2\right)\frac{\partial}{\partial y''}.$$

Функция

$$u = \frac{x^2}{1-y^2} \tag{9}$$

является решением уравнения

$$\chi f \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2-1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

а функция

$$v = \frac{1-y^2}{y^2 y'^2} \tag{10}$$

есть независимое от u решение уравнения

$$\chi' f \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2-1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{y^2}y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Очевидно, функции u и v удовлетворяют уравнению $\chi'' f = 0$.

Формула для третьего решения уравнения $\chi'' f = 0$, независимого от u и v, указана в [4]:

$$w = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} y' + \dfrac{\partial v}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} y'}. \tag{11}$$

Согласно этой формуле,

$$w = -\frac{(1-y^2)^2[y'^2 + (1-y^2)yy'']}{xy^3(1-y^2+xyy')y'^3}. \tag{12}$$

Выразим y через x и u с помощью (9):

$$y^2 = \frac{u-x^2}{u}, \ \ y = \sqrt{\frac{u-x^2}{u}}, \tag{13}$$

так как $y > 0$.

Выразим y' через x, u, v с помощью (10) и (13):

$$y'^2 = \frac{x^2}{(u-x^2)v}, \ \ y' = \pm\sqrt{\frac{x^2}{(u-x^2)v}}. \tag{14}$$

Выразим y'' через x, u, v, w с помощью (12), (13) и (14).

В случае $y' > 0$

$$y'' = -\frac{w\dfrac{u}{x}\left(1 + \dfrac{u}{x}\sqrt{\dfrac{x^2}{uv}}\right) + \dfrac{u}{u-x^2}\sqrt{\dfrac{uv}{x^2}}}{v\sqrt{\dfrac{\left(u-x^2\right)v}{x^2}}}. \tag{15}$$

В случае $y' < 0$

$$y'' = \frac{w\dfrac{u}{x}\left(1 - \dfrac{u}{x}\sqrt{\dfrac{x^2}{uv}}\right) - \dfrac{u}{u-x^2}\sqrt{\dfrac{uv}{x^2}}}{v\sqrt{\dfrac{\left(u-x^2\right)v}{x^2}}}. \tag{16}$$

Так как по условию $1 - x^2 - y^2 > 0$, то $1 - y^2 > 0$; а поскольку $y > 0$ и предполагается, что $x \neq 0$, то $u > 0$, $v > 0$ и формулы (13)–(16) имеют смысл в рассматриваемой ситуации. Если подставить функции y, y' и y'', определенные этими формулами, в уравнение (7), то, согласно теории Ли, должно получиться равенство, содержащее u, v, w и не содержащее x. Поскольку из формулы (11) видно, что $w = \dfrac{dv}{du}$, полученное равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $v = v(u)$.

В случае $y' > 0$ получается равенство

$$w\frac{u}{x}\left(1 + \frac{u}{x}\sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) = \frac{2-k(1-u)}{k(1-u)}\sqrt{\frac{uv}{x^2}},$$

которое при $x > 0$ принимает вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+a)v}{(1-u)(u+\sqrt{uv})}, \tag{17}$$

а при $x < 0$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+a)v}{(1-u)(u-\sqrt{uv})}, \tag{18}$$

где $a = \dfrac{2-k}{k}$.

Параметр a, в зависимости от выбора k, может принимать любые действительные значения, кроме –1.

В случае $y' < 0$ получается равенство

$$w\frac{u}{x}\left(1-\frac{u}{x}\sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right)=-\frac{2-k(1-u)}{k(1-u)}\sqrt{\frac{uv}{x^2}},$$

которое при $x > 0$ принимает вид (18), а при $x < 0$ – вид (17).

6. Приведем уравнения (17) и (18) к более удобному виду.

Мы знаем, что $u > 0$, $v > 0$. Рассмотрим новую функцию

$$h(u)=\sqrt{v(u)},\ \ v(u)=h^2(u). \tag{19}$$

Так как $v'(u)=2h(u)h'(u)$ и в то же время, согласно (17),

$$v'(u)=\frac{(u+a)h^2(u)}{(1-u)(u+\sqrt{u}\ h(u))},$$

то

$$h'(u)=\frac{(u+a)h(u)}{2(1-u)\sqrt{u}(\sqrt{u}+h(u))}.$$

Рассмотрим вместо u новую независимую переменную t:

$$t=\sqrt{u},\ \ u=t^2. \tag{20}$$

Ясно, что $t > 0$. Функция $h(u)$ превращается при этом в функцию

$$z(t)=h(t^2). \tag{21}$$

Имеем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t+z)}. \tag{22}$$

Таким образом, уравнение (17) привелось к уравнению (22).

Та же замена переменных (19), (20) и (21) приводит уравнение (18) к уравнению

$$\frac{dz}{dt}=\frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t-z)}. \tag{23}$$

Так как $t=\sqrt{u}$ и $u=\dfrac{x^2}{1-y^2}$, где $x\neq 0$ и $1-x^2-y^2>0$, то $1-y^2>x^2$ и, следовательно, $0<t<1$. В то же время $z=h(t^2)=h(u)=\sqrt{v(u)}>0$. Это означает, что уравнения (22) и (23) следует рассматривать при $0<t<1,\ \ z>0$.

Если каждой точке $M(x, y)$ круга $1-x^2-y^2>0$ поставить в соответствие число $t=\sqrt{u}=\sqrt{\dfrac{x^2}{1-y^2}}$, то $t\to 1$ тогда и только тогда, когда $M(x, y)$ неограниченно приближается к окружности $1-x^2-y^2=0$.

7. Уравнения (22) и (23) являются уравнениями Абеля второго рода. Такие уравнения иногда интегрируются, иногда – нет. Вполне возможно, что уравнения (22), (23) не интегрируются в квадратурах. Тем не менее, с их помощью можно получить сколь угодно точное описание общего решения уравнения (7) вблизи границы полукруга $1-x^2-y^2>0,\ \ y>0$. А это, в свою очередь, приводит к описанию поведения интегральных кривых обобщенных цепочек Тоды (1) «на бесконечности», если только в соответствующем уравнении (3) параметр λ достаточно мал.

Перепишем уравнения (22) и (23) в виде

$$\frac{dt}{dz}=\frac{(1-t^2)(t\pm z)}{(t^2+a)z},$$

или

$$\frac{dt}{dz}=\frac{(1-t^2)t}{(t^2+a)z}\pm\frac{1-t^2}{t^2+a}. \qquad (24)$$

Так как $\alpha\neq-1$, то при $t\to1$ дробь $\frac{1-t^2}{t^2+a}\to0$. Поэтому при значениях t, близких к 1, уравнения (24) можно заменить одним более простым уравнением

$$\frac{dt}{dz}=\frac{(1-t^2)t}{(t^2+a)z}$$

с разделяющимися переменными, которое без труда интегрируется:

$$z=C\frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad (25)$$

где $C>0$ – произвольная постоянная.

При $k=-1$ имеем

$$z=C\frac{1-t^2}{t^3},\ \ C>0.$$

Все это означает, что при значениях t, близких к 1, общие решения уравнений (22) и (23) приближенно описываются формулой (25). В этом легко убедиться и непосредственно, подставляя функции (25) в эти уравнения.

Если переменные z и t связаны равенством (25), то в силу формул (19), (20) и (21) переменные v и u связаны соотношением

$$v=\frac{C^2}{u}\left(\frac{u}{1-u}\right)^{\frac{2}{k}},$$

которое с учетом формул (9) и (10) можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y=y(x)$. Согласно [4, гл. 13, § 5], такое уравнение допускает оператор (8), а потому по теореме 8 из [4] интегрируется в квадратурах. В результате мы получаем приближенное описание интегральных кривых уравнения (7) вблизи окружности $1-x^2-y^2=0$.

8. Поскольку уравнение (7) рассматривается в полукруге $1-x^2-y^2>0,\ \ y>0$, то это описание следовало бы дополнить изучением его интегральных кривых вблизи оси Ox, т. е. при малых значениях y. Оказалось, что подобное исследование допускает даже исходное уравнение (3). Перепишем его в виде

$$y''=\frac{1-x^2+ay^2}{y(1-x^2-y^2)}(k\lambda-y'^2),\ \ a=\frac{2-k}{k}. \qquad (26)$$

Можно считать, что $y<\varepsilon<1-x^2$ при достаточно малом $\varepsilon>0$. Так как y^2 очень мало, то в уравнении (26) его можно опустить, и мы получаем уравнение, не содержащее переменной x:

$$yy''+y'^2-k\lambda=0,$$

где $k\lambda>0$. В [5, № 6.107] указано его общее решение

$$y^2=k\lambda x^2+C_1x+C_2,\ \ y=\pm\sqrt{k\lambda}x+C,$$

где C_1, C_2, C – произвольные постоянные. Поэтому с любой точностью можно утверждать, что интегральные кривые уравнения (3) пересекают достаточно узкую полосу полукруга, примыкающую к оси Ox, по кусочкам гипербол или прямых, которые при $\lambda\to0$ превращаются в кусочки парабол или прямых, параллельных оси Ox.

Литература

1. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М., 1984.
2. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.
3. *Милованов М. В., Медведева О. Г.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 3. С. 37–42.
4. *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. М.; Ижевск, 2011. Т. 1.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

M. V. MILOVANOV, O. G. MEDVEDEVA

mvmil@mail.ru; olga_medvedeva@tut.by

AN APPLICATION OF GROUP ANALYSIS METHODS TO THE STUDY OF GENERALIZED TODA LATTICES WITH TWO EXPONENTS

Summary

In the article, we consider the equation $y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k}y'^2\right)\left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2}\right)$ in the semicircle $1-x^2-y^2>0,\ y=y(x)>0,$ $k\lambda>0$, to which the generalized Toda lattices with a Hamiltonian containing two exponents reduce.

For sufficiently small in absolute value λ, this equation can be replaced by a simpler equation setting $\lambda = 0$. It is proved that the latter has one-dimensional symmetry group and reduces to a differential first-order equation, by means of which one can get an arbitrarily accurate description of the general solution of the simplified second-order equation near the boundary of the semicircle.