View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Reports of the National Academy of Sciences of Belarus

Доклады Национальной академии наук Беларуси
2014 ноябрь–декабрь Том 58 № 6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

В. А. ЕРОВЕНКО, О. В. ГУЛИНА, М. В. МАРТОН

К ТЕОРЕМЕ ГОЛЬДМАНА О ВОЗМУЩЕНИИ ОПЕРАТОРОВ С ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 13.10.2014*

Известно, что согласно теореме Гольдмана, нормально разрешимые операторы, вообще говоря, неустойчивы при возмущении компактными операторами. Сообщение посвящено существенно полурегулярным и существенно регулярным операторам в банаховом пространстве, которые сужают класс нормально разрешимых операторов, но для которых можно рассчитывать на сохранение замкнутости области значений при указанном возмущении.

Пусть T – ограниченный линейный оператор на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B}(X)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих на X.

Рассмотрим произвольный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$. Обозначим через $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ *ядро оператора* T, а через $R(T)$ – *область значений оператора* T. Обозначим *обобщенное ядро* линейного ограниченного оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ через $N^\infty(T) := \bigcup_{k=1}^\infty \{N(T^k)\}$ и *обобщенную область значений* оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ через $R^\infty(T) := \bigcap_{k=1}^\infty \{R(T^k)\}$. Для оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ определим также следующие числовые характеристики: $\alpha(T) := \dim N(T)$ – *нуль оператора* T, или другими словами размерность ядра оператора T, и $\beta(T) := \operatorname{codim} R(T) = \dim(X / R(T))$ – *дефект оператора* T, или размерность коядра оператора T.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *полурегулярным*, если его область значений замкнута, $\overline{R(T)} = R(T)$ и выполняется включение $N(T) \subset R^\infty(T)$. Множество всех полурегулярных операторов обозначим через $\boldsymbol{D}(X)$, т. е. $\boldsymbol{D}(X) := \{T \in \boldsymbol{B}(X) : \overline{R(T)} = R(T)$ и $N(T) \subset R^\infty(T)\}$.

Условие вложения ядра оператора в обобщенную область значений оператора $N(T) \subset R^\infty(T)$, которое присутствует в определении полурегулярных операторов, впервые появилось в классической работе Т. Като о возмущении линейных операторов. Поэтому вложение ядра в обобщенную область значений $N(T) \subset R^\infty(T)$ можно назвать *включением Като.*

Если обе числовые характеристики $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ ограниченного оператора T с замкнутой областью значений бесконечны, то, согласно хорошо известной классической теореме М. А. Гольдмана [1, теорема 1], можно указать такой линейный компактный оператор с бесконечномерной областью значений, даже сколь угодно малый по норме, возмущение которым нарушает свойство замкнутости области значений.

Однако если ядро оператора $N(T)$ «невелико», относительно его области значений, точнее относительно обобщенной области значений $R^\infty(T)$, т. е. речь идет о включении Като $N(T) \subset R^\infty(T)$, то для коммутирующих компактных возмущений можно рассчитывать на устойчивость свойства замкнутости области значений возмущенного оператора (см., например, [2]).

О п р е д е л е н и е 2. Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *относительно регулярным*, если существует такой оператор $S \in \boldsymbol{B}(X)$, что выполняется равенство $TST = T$.

Оператор $S \in \boldsymbol{B}(X)$, обеспечивающий выполнение условия $TST = T$, называется *обобщенным обратным оператором* для оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$, или *псевдообратным оператором* для оператора T. Свойства псевдообратного оператора описаны в [3].

О п р е д е л е н и е 3. Относительно регулярный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *регулярным*, если для него выполняется включение ядра оператора в обобщенную область значений, т. е. $N(T) \subset R^{\infty}(T)$. Множество всех регулярных операторов обозначим через $\boldsymbol{S}(X)$, т. е. $\boldsymbol{S}(X) := \{T \in \boldsymbol{B}(X) : T$ *имеет обобщенный обратный и* $N(T) \subset R^{\infty}(T)\}$.

Рассмотрим теперь условие существенного вложения ядра оператора в обобщенную область значений, т. е. условие вида $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$. Запись $M \subset_e N$ читается так – множество M *существенно содержится* в множестве N, в случае если M и N – подпространства банахова пространства X, означает, что существует конечномерное подпространство $F \subset X$ такое, что $M \subset N + F$. Условие существенного включения ядра оператора в обобщенную область значений $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$ можно записать в следующем виде: $N(T) \subset R^{\infty}(T) + F$, где $F \subset X$ – конечномерное подпространство банахова пространства X. Условие существенного вложения ядра оператора в обобщенную область значений $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$ назовем *существенным включением Като*.

О п р е д е л е н и е 4. Оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *существенно полурегулярным*, если его область значений замкнута $\overline{R(T)} = R(T)$ и выполняется существенное включение Като $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$. Множество всех существенно полурегулярных операторов обозначим через $\boldsymbol{D}_e(X)$.

О п р е д е л е н и е 5. Относительно регулярный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ называется *существенно регулярным*, если для него выполняется существенное включение Като $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$. Соответственно, множество всех существенно регулярных операторов обозначим через $\boldsymbol{S}_e(X)$.

Заметим, что в определении существенно регулярного оператора существенное включение Като $N(T) \subset_e R^{\infty}(T)$ можно заменить на эквивалентные существенные включения, а именно, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Для оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ следующие три условия, а именно, для ядра оператора $N(T)$ и обобщенной области значений $R^{\infty}(T)$, обобщенного ядра оператора $N^{\infty}(T)$ и области значений $R(T)$, обобщенного ядра оператора $N^{\infty}(T)$ и обобщенной области значений $R^{\infty}(T)$, эквивалентны*:

$$N(T) \subset_e R^{\infty}(T),\ N^{\infty}(T) \subset_e R(T),\ N^{\infty}(T) \subset_e R^{\infty}(T).$$

Это утверждение непосредственно следует из следующей леммы.

Л е м м а 1. *Для оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ следующие два включения эквивалентны $N(T) \subset R(T^n) \Leftrightarrow N(T^n) \subset R(T)$.*

Относительно регулярные операторы, действующие в банаховом пространстве, обладают важным свойством для $N(T)$ и $R(T)$, сформулированным в следующей лемме.

Л е м м а 2. *Оператор T относительно регулярный тогда и только тогда, когда $N(T)$ и $R(T)$ – замкнутые дополняемые подпространства банахова пространства X.*

Доказательство леммы приведено, например, в [4; 5].

Из леммы 2 следует, что для рассмотренных выше классов полурегулярных $\boldsymbol{D}(X)$, регулярных $\boldsymbol{S}(X)$, существенно полурегулярных $\boldsymbol{D}_e(X)$ и существенно регулярных $\boldsymbol{S}_e(X)$ операторов, действующих на банаховом пространстве X, справедливы включения $\boldsymbol{S}(X) \subset \boldsymbol{D}(X)$ и $\boldsymbol{S}_e(X) \subset \boldsymbol{D}_e(X)$.

Л е м м а 3. *Если $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – полуфредгольмов оператор, то T является существенно полурегулярным оператором.*

Л е м м а 4. *Если $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – фредгольмовый оператор, то T является существенно регулярным оператором.*

Таким образом, для существенно полурегулярных $\boldsymbol{D}_e(X)$, существенно регулярных $\boldsymbol{S}_e(X)$ и фредгольмовых $\boldsymbol{\Phi}(X)$ операторов, действующих на банаховом пространстве X, справедливо следующее включение $\boldsymbol{\Phi}(X) \subset \boldsymbol{S}_e(X) \subset \boldsymbol{D}_e(X)$. Заметим также, что фредгольмовы операторы, вообще говоря, не являются регулярными, хотя они являются существенно регулярными.

З а м е ч а н и е 1. Если X – гильбертово пространство, то тогда класс регулярных операторов $\boldsymbol{S}(X)$, или класс операторов типа Сафара, совпадает с классом полурегулярных операторов $\boldsymbol{D}(X)$ и, соответственно, класс существенно регулярных операторов $\boldsymbol{S}_e(X)$ совпадает с классом существенно полурегулярных операторов $\boldsymbol{D}_e(X)$.

Класс существенно полурегулярных операторов занимает промежуточное положение между нормально разрешимыми и полуфредгольмовыми операторами. Для того чтобы возмущенный оператор $T + K$, где $K \in \boldsymbol{B}(X)$ – компактный оператор, обладал теми же свойствами, что и существенно полурегулярный оператор T, необходимо наложить на оператор K дополнительное ограничение. Таким ограничением явилось требование перестановочности операторов T и K, т. е. выполнение равенства $TK = KT$.

Заметим, что, пользуясь условием коммутируемости операторов, получены также другие результаты об устойчивости существенно полурегулярных операторов и результаты об инвариантности порожденными ими существенного спектра Апостола при строго сингулярных возмущениях [6; 7].

Следующая теорема является обобщением результата Грабинера о возмущении существенно полурегулярного оператора коммутирующим компактным оператором (см., например, теорему 5.9 [8]).

Т е о р е м а 2. *Пусть $T \in B(X)$ – существенно полурегулярный оператор и $K \in B(X)$ – компактный оператор, коммутирующий с оператором T, т. е. выполняется равенство $TK = KT$, тогда возмущенный оператор $T + K$ также существенно полурегулярный оператор.*

Вообще говоря, в теореме 2 нельзя заменить условие «существенно полурегулярный оператор» на условие «полурегулярный оператор», что проверяется на следующем контрпримере.

К о н т р п р и м е р 1. Пусть $T = I$ в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом $\{e_i: i = 1, 2, \ldots\}$, а A – ортогональный проектор на подпространство, порожденное вектором e_1. Тогда T – полурегулярный оператор, A – оператор конечного ранга (т. е. компактный), кроме того выполняется равенство $TA = AT$, но $T - A$ не является полурегулярным оператором.

Отметим также существенность условия коммутируемости операторов T и K в теореме 2. Соответствующие операторы определены в следующем контрпримере, в котором T – полурегулярный оператор, а K – это компактный оператор с бесконечномерной областью значений.

К о н т р п р и м е р 2. Пусть H – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_{ij}: i, j$ – целые, $i \geq 1\}$, на котором определены ограниченные операторы T и K с помощью следующих равенств $Te_{i0} = 0$, $Ke_{i0} = (\varepsilon / i)e_{i1}$ и $Te_{ij} = e_{ij-1}$, $Ke_{ij} = 0$, для $j \neq 0$. Тогда $\|K\| = \varepsilon$, $TK \neq KT$, $N(T) = \overline{L}\{e_{i0}: i \geq 1\}$, $N(T) \subset R^{\infty}(T)$ и $\overline{R(T)} = R(T)$, т. е. T – полурегулярный оператор, но область значений $R(T + K)$ незамкнута, поэтому оператор $T + K$ не является существенно полурегулярным.

Известно, что свойство нормальной разрешимости оператора с бесконечными числовыми характеристиками $\alpha(T)$ и $\beta(T)$, действующего в бесконечномерном банаховом пространстве, неустойчиво при компактных возмущениях. В этом можно убедиться на следующем простом примере. Нулевой оператор, обозначим его через θ, нормально разрешим, но возмущенный оператор $\theta - A$, где A – компактный оператор с $\dim R(A) = \infty$, уже не является нормально разрешимым. Заметим, что для ненулевых операторов общий результат о неустойчивости нормальной разрешимости без каких-либо ограничений на оператор, действующий в банаховом пространстве, получен в теореме М. А. Гольдмана. В то же время известно, что фредгольмовы операторы устойчивы при компактных возмущениях. Таким образом, существенно регулярные операторы занимают промежуточное положение между классами нормально разрешимых и фредгольмовых операторов, которые, в свою очередь, отличаются рядом свойств, в том числе и свойствами устойчивости при различных возмущениях этих операторов.

Относительно регулярный оператор с бесконечномерным ядром и коядром, вообще говоря, неустойчив при компактном возмущении.

Л е м м а 5. *Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – относительно регулярный и обе его характеристики $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ бесконечны. Тогда существует компактный оператор $K \in \boldsymbol{B}(X)$ такой, что область значений оператора $T - K$ незамкнута.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство леммы вполне конструктивное. Пусть оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – относительно регулярный и обе его характеристики $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ бесконечны. Представим пространство X в виде прямой суммы области значений $R(T)$ оператора T и некоторого соответствующего подпространства X_1, т. е. $X = R(T) \oplus X_1$.

Предположим, что найдется такой линейный компактный оператор K_1, действующий из $N(T)$ в X_1, т. е. $K_1 : N(T) \to X_1$, ядро которого состоит из нуля, т. е. $N(K_1) = \{0\}$. Обозначим через P проектор пространства X на $N(T)$ и определим компактный оператор $K = K_1P$, для ядра и области значений которого справедливы следующие соотношения:

$$N(K) = N(P) \text{ и } R(T) \cap R(K) = \{0\}.$$

Рассмотрим возмущенный оператор $T - K$. Ядро оператора $T - K$ состоит из элементов, удовлетворяющих уравнению $(T - K)x = 0$, откуда $x \in N(T) \cap N(K)$. Таким образом, ядро оператора $T - K$ состоит из нуля, т. е. $N(T - K) = \{0\}$.

Предположим, что область значений возмущенного оператора $T - K$ замкнута. Тогда для любого $k > 0$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|(T - K)x\| \geq k\,\|x\|$. В частности, при $x \in R(P)$ неравенство $\|(T - K)x\| \geq k\,\|x\|$ перепишется в виде $\|Kx\| \geq k\|x\|$, т. е. область значений сужения оператора K на $R(P)$ замкнута. С другой стороны, область значений сужения оператора K на $R(P)$ совпадает с областью значений оператора K.

Подходящий компактный оператор $K_1 : N(T) \to X_1$, нарушающий замкнутость области значений относительно регулярного оператора $T \in \boldsymbol{B}(X)$ с бесконечными числовыми характеристиками $\alpha(T)$ и $\beta(T)$, всегда существует. В общем случае банахова пространства построение искомого оператора K_1 детально изложено в работе [9]. Заметим, что в лемме 5 рассматривается относительно регулярный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$, но не полуфредгольмовый.

Если на существенно регулярный оператор $T \in \boldsymbol{B}(X)$ и компактный оператор $K \in \boldsymbol{B}(X)$ наложить дополнительное ограничение, а именно, добавить условие коммутируемости операторов T и K, т. е. $TK = KT$, то можно получить следующий результат.

Т е о р е м а 3. *Пусть $T \in \boldsymbol{S}_e(X)$ – существенно регулярный оператор, для которого, по крайней мере, одна из числовых характеристик $\alpha(T)$ или $\beta(T)$ конечна, т. е. $\alpha(T) < \infty$ или $\beta(T) < \infty$. Пусть $K \in \boldsymbol{B}(X)$ – компактный оператор, коммутирующий с оператором T, т. е. справедливо $TK = KT$. Тогда возмущенный оператор $T - K$ также существенно регулярный, т. е. оператор $T - K \in \boldsymbol{S}_e(X)$.*

Другие классы возмущений для существенно регулярных операторов, действующих в банаховом пространстве, как подмножества операторов с замкнутой областью значений рассмотрены в [10; 11].

В заключение заметим, что относительно регулярные операторы, вообще говоря, неустойчивы при компактных возмущениях, однако при дополнительных ограничениях на размерность ядра или коядра относительно регулярные операторы становятся устойчивыми при компактных возмущениях. Так, если $T \in \boldsymbol{B}(X)$ – относительно регулярный оператор и $K \in \boldsymbol{B}(X)$ – компактный оператор, то оператор $T - K$ является относительно регулярным тогда и только тогда, когда $\alpha(T) < \infty$ или $\beta(T) < \infty$ [12].

Литература

1. *Гольдман М. А.* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, № 2. С. 201–204.
2. *Еровенко В. А., Мартон М. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 6. С. 16–20.
3. *Еровенко В. А., Гулина О. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 6. С. 27–32.
4. *Caradus S. R.* Generalized Inverses and operator theory. Kingston, 1978.
5. *Schmoeger Ch.* // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 175, N 1. P. 315–320.
6. *Еровенко В. А., Мартон М. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 18–22.
7. *Еровенко В. А., Мартон М. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 2. С. 38–42.
8. *Grabiner S.* // J. Math. Soc. Japan. 1982. Vol. 34, N 2. P. 317–337.
9. *Goldberg S.* Unbounded linear operators. Theory and applications. N. Y., 1966.
10. *Еровенко В. А., Гулина О. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 27–31.
11. *Еровенко В. А., Гулина О. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 6. С. 22–27.
12. *Schmoeger Ch.* // Portugalie Math. 1994. Vol. 51, N 4. P. 617–628.

V. A. EROVENKO, O. V. GULINA, M. V. MARTON

erovenko@bsu.by; gulina_o@mail.ru; marton_m@mail.ru

TO GOLDMAN’S THEOREM OF PERTURBATION OF THE OPERATORS WITH A CLOSED RANGE BY COMPACT OPERATORS

Summary

The article is devoted to the stability properties of the essentially semi-regular operators and essentially regular operators in Banach space under compact commuting perturbations.