ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 514.142

Поступило в редакцию 25.10.2017
Received 25.10.2017

Академик В. И. Янчевский[1], А. А. Рыжков[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

СТРОЕНИЕ ВЕТВЯЩИХСЯ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ ИНВОЛЮТИВНЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ

Аннотация. Данное сообщение ставит своей целью описание внутренней структуры слабо разветвлённых ветвящихся алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями, над гензелевыми дискретно нормированными полями в виде прямой суммы их алгебр инерции и специальных образующих, принадлежащих идеалам нормирований.

Ключевые слова: алгебра с делением, унитарные инволюции, слабо разветвлённые алгебры

Для цитирования: Янчевский, В. И. Строение ветвящихся дискретно нормированных гензелевых инволютивных алгебр с делением / В. И. Янчевский, А. А. Рыжков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 1. – С. 7–12.

Academician Vyacheslav I. Yanchevskii[1], Alexander A. Ryzhkov[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

STRUCTURE OF RAMIFIED DISCRETELY VALUED HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS WITH INVOLUTIONS

Abstract. The aim of the article is to describe the inner structure of ramified division algebras with second-kind involutions over discretely valued henselian fields as the direct sum of their inertial algebras and special generators from valuation ideals.

Keywords: division algebra, unitary involutions, tamely ramified algebras

For citation: Yanchevskii V. I., Ryzhkov A. A. Structure of ramified discretely valued Henselian division algebras with involutions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 7–12 (in Russian).

Введение. Проблема неразветвлённых подъёмов подалгебр алгебр вычетов алгебр с нормированием восходит ещё к классическому периоду (напр., [1]). С другой стороны, в работах Э. Витта [2], У. Шарлау [3] и других эта проблема изучалась в контексте изучения групп Брауэра полей с нормированием. Наконец, в работах Джейкоба, Уодсворта [4] и Платонова, Янчевского [5] она была полностью решена в случае слабо разветвлённых алгебр над полями с произвольными гензелевыми нормированиями. В теории линейных алгебраических групп важное значение имеет описание групп рациональных точек, которые возникают как специальные унитарные группы одномерных анизотропных эрмитовых форм алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями (т. е. с нетривиальным действием на центре заданной алгебры). Для инволютивных алгебр (т. е. алгебр с такими инволюциями τ) вышеупомянутая проблема является более сложной, так как в этой ситуации требуется не только установление существования неразветвлённых подъёмов, но также и их τ-инвариантность.

Напомним, что со всякой алгеброй, обладающей унитарной инволюцией τ, связан целый класс центринвариантных инволюций (т. е. инволюций, действующих на центре алгебры также как и τ). В [6] установлено (для случая, когда центр алгебры гензелев дискретно нормирован) существование в классе центринвариантных инволюций инволюции μ с μ-инвариантным неразветвлённым подъёмом алгебры вычетов заданной слабо разветвлённой центральной алгебры с унитарной инволюцией. Для гензелевых дискретно нормированных инволютивных алгебр с унитарными инволюциями τ мы устанавливаем справедливость более сильного чем в [6] утверждения о существовании τ-инвариантного подъёма, не требующего перехода к центринвариантной инволюции. Помимо этого, в [6] было доказано, что подходящий переход к центринвариантной инволюции μ обеспечивает не только существование μ-инвариантной алгебры инерции (т. е. μ-инвариантного неразветвлённого подъёма алгебры вычетов), но также и существование μ-инвариантной образующей идеала нормирования заданной алгебры, действующей специальным образом на алгебре инерции.

Отметим, что упомянутые свойства, связанные со строением алгебр с унитарными инволюциями, оказались достаточными для успешного изучения унитарных групп в случае изотропных форм. Однако при изучении групп, связанных с анизотропными формами, переход к центринвариантным инволюциям оказывается обременительным, что привело к необходимости установления существования τ-инвариантных алгебр инерции и τ-инвариантных образующих идеалов нормирования, специальным образом действующих на алгебре инерции заданной алгебры с заданной инволюцией τ. Доказательство существования таких алгебр инерции и таких τ-инвариантных элементов в случае алгебр с дискретным нормированием приводит к полному описанию внутренней структуры таких алгебр, что и составляет основное содержание сообщения. Наконец, заметим, что представленные результаты играют ключевую роль при описании унитарных приведенных групп Уайтхеда алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями, центральных над гензелевыми дискретно нормированными полями.

Для точного изложения результатов сообщения нам потребуются следующие обозначения и определения.

Определение 1. *Унитарной инволюцией центральной K-алгебры D называется её антиавтоморфизм τ второго порядка с нетривиальным ограничением на K. Для поля k инвариантов τ поля K, K / k – квадратичное расширение Галуа. В этом случае τ называется K / k-инволюцией.*

Определение 2. *Нормирование поля называется дискретным, если его упорядоченная группа значений изоморфна подгруппе аддитивной группы целых чисел (с естественным порядком).*

Пусть K – поле с гензелевым дискретным нормированием ($\mathrm{char}\, K \neq 2$), D – центральная K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией.

Через $Z(D)$ будем обозначать центр алгебры D.

В случае гензелевого поля k его нормирование v_k однозначно продолжается до нормирований v_K поля K и $v_D = v$ алгебры D.

Тогда для нормирования v определены:

кольцо нормирования $V_D = \{d \in D^* \mid v(d) \geq 0\} \cup \{0\}$;

идеал нормирования $M_D = \{d \in D^* \mid v(d) > 0\} \cup \{0\}$ (единственный двусторонний максимальный идеал кольца V_D);

группа v-единиц $U_D = V_D - M_D = V_D^*$ и её подгруппа $1 + M_D = \{1 + m \mid m \in M_D\}$;

алгебра вычетов $\overline{D} = V_D / M_D$ нормирования v и группа значений $\Gamma_D = v(D^*)$.

Более общо, для произвольного подмножества $S \subset V_D$ через $\overline{S}$ будем обозначать совокупность образов элементов из S при каноническом гомоморфизме (гомоморфизме редукции, гомоморфизме перехода к вычетам) из V_D в $\overline{D}$.

Так как $V_D{}^\tau = V_D$ и $M_D{}^\tau = M_D$, то вместе с инволюцией τ определена её редукция $\overline{\tau} : \overline{D} \to \overline{D}$ для произвольного $d \in V_D : (d + M_D)^{\overline{\tau}} = d^\tau + M_D$.

Определение 3. *Центральная K-алгебра D с делением индекса n называется циклической, если в ней существует максимальное подполе Z, являющееся циклическим расширением* *поля K. В этом случае сама алгебра представляется для подходящего элемента* $\Pi \in D$ *в виде прямой суммы*

$$D = Z + Z\Pi + Z\Pi^2 + \ldots Z\Pi^{n-1},$$

причём автоморфизм i_Π *при ограничении на* Z *индуцирует образующую циклической группы Галуа* $\mathrm{Gal}(Z / K)$, *поэтому* $\Pi^n = \pi \in K$. *Такая алгебра будет обозначаться через* (Z, π).

Отметим вначале справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией* τ. *Тогда D не содержит некоммутативных K-подалгебр, вполне разветвлённых над своими центрами.*

Нам потребуется также следующее

О п р е д е л е н и е 4. *Расширение полей L / K называется диэдральным степени n, если его группа Галуа некоммутативна и представима в виде полупрямого произведения циклической группы* $\langle h \rangle$ *порядка n и группы* $\langle \tau \rangle$ *второго порядка со следующим определяющим соотношением:*

$$\tau h \tau = h^{-1}.$$

С помощью предложения 1 доказывается следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией* τ, *причём расширение K / k слабо разветвлено. Тогда центр* $Z(\overline{D})$ *алгебры вычетов – нетривиальное диэдральное расширение поля* $\overline{k}$ *подходящей степени n, делящее индекс D.*

Т е о р е м а 2. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией* τ, *причём нормирование поля K дискретно и расширение K / k не является слабо разветвлённым. Тогда центр алгебры вычетов* $Z(\overline{D}) / \overline{k}$ *– либо нетривиальное диэдральное расширение подходящей степени n, делящее индекс D, либо абелево расширение экспоненты* 2.

Описание центров $Z(\overline{D})$ алгебр вычетов $\overline{D}$ позволяет установить структуру слабо разветвлённых гензелевых дискретно нормированных центральных ветвящихся K-алгебр с делением, обладающих унитарными K / k-инволюциями. Более точно, имеет место следующая основная теорема, берущая начало в [6].

Т е о р е м а 3. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией* τ. *Тогда существуют* τ*-инвариантная алгебра инерции* I_D *алгебры D и такой* τ*-инвариантный элемент* $\Pi \in D$, *что* I_D *инвариантна относительно внутреннего автоморфизма* i_Π *и алгебра D представляется в виде прямой суммы*

$$D = I_D + I_D\Pi + I_D\Pi^2 + \ldots + I_D\Pi^{n-1},$$

причём автоморфизм i_Π *при ограничении на центр* I_D *индуцирует образующую циклической группы Галуа порядка n центра* I_D *над полем K.*

Для специальных полей $\overline{k}$ теорема 3 позволяет получить более полную информацию о таких алгебрах.

О п р е д е л е н и е 5. *Поле L называется квазиконечным, если оно совершенно и обладает изоморфизмом топологических групп*

$$\Phi : \widehat{Z} \to \mathrm{Gal}(L_s / L),$$

где L_s *– алгебраическое замыкание L.*

Определение 5 эквивалентно тому, что поле L обладает единственным (обязательно циклическим) расширением L_n степени n для любого натурального n, причём объединение L_n даёт поле L_s.

Далее исследуем вышеприведённые алгебры для специальных полей $\overline{k}$. Для квазиконечных полей имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией τ, причём $\overline{k}$ – квазиконечное поле. Тогда $D = K$.*

Т е о р е м а 5. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией τ, причём $\overline{k}$ – локальное поле. Тогда существуют τ-инвариантная алгебра инерции I_D алгебры D, являющаяся либо коммутативной, либо кватернионной, и такой τ-инвариантный элемент $\pi \in D$, что алгебра I_D инвариантна относительно внутреннего автоморфизма i_π, а алгебра D представляется в виде*

$$D = I_D + I_D\pi + I_D\pi^2 + \ldots + I_D\pi^{n-1},$$

причём автоморфизм i_π при ограничении на центр I_D индуцирует образующую циклической группы Галуа порядка n центра I_D над полем K.

Докажем теорему 5 используя следующее утверждение, описывающее слабо разветвлённые алгебры с унитарными инволюциями над локальными полями.

Л е м м а 1. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией τ, причём k – локальное поле. Тогда индекс алгебры D не превосходит двух.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что $\overline{D}/\overline{k}$ – циклическое расширение, поскольку является конечным расширением конечного поля $\overline{k}$. Обозначим через E неразветвлённый τ-инвариантный подъём $\overline{D}$ в алгебре D. Тогда D является циклической алгеброй вида (KE, γ) для подходящего элемента $\gamma \in K$. Для таких алгебр с унитарными K / k-инволюциями необходимо выполнение следующего условия Алберта:

$$\gamma\gamma^\tau = N_{E/k}(x),$$

где $x \in E$. Учитывая, что $x = \Pi_k u$, где Π_k – простой элемент кольца нормирования поля k, $u \in U_E$. Вычислим нормирование обеих частей последнего равенства:

$$2v(\Pi_K) = nv(\Pi_k), \tag{1}$$

где $n = \operatorname{ind} D$; Π_K – простой элемент кольца нормирования поля K. Предположим, что $n > 2$. Тогда приходим к противоречию, поскольку $v(\Pi_k) \geq v(\Pi_K)$. Далее, пусть $n = 2$. Из того, что расширение E / k неразветвлено и квадратично, заключаем, что $\overline{K} = \overline{k}$. Это возможно в следующих двух случаях: расширение K / k вполне разветвлено и расширение K / k непосредственно. Вначале рассмотрим случай вполне разветвлённого расширения K / k. Тогда $v(\Pi_K) = v(\Pi_k)/2$, и в виду (1) приходим к противоречию с предположением, что $n > 2$. В случае непосредственного расширения K / k равенство (1) выполняется только при условии $n \leq 2$. Таким образом, $\operatorname{ind} D \leq 2$.

Перейдём к доказательству теоремы 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Вначале рассмотрим случай $\overline{\tau}|_{\overline{K}} \neq id$. Тогда $\overline{D}$ – алгебра с унитарной инволюцией над локальным полем. Следовательно, применяя лемму 1, получаем, что $\operatorname{ind} \overline{D} \leq 2$. Далее, использую основную теорему 3, заключаем, что существует τ-инвариантная алгебра инерции I_D алгебры D, являющаяся либо коммутативной, либо кватернионной.

Далее, пусть $\overline{\tau}|_{\overline{K}} = id$. Тогда $\overline{D}$ – алгебра с инволюцией первого рода. В этом случае экспонента алгебры совпадает с индексом и не может быть больше двух. Следовательно, $\overline{D}$ либо поле, либо алгебра кватернионов. Таким образом, существует τ-инвариантная алгебра инерции I_D алгебры D, являющаяся либо коммутативной, либо кватернионной. Однако если I_D является алгеброй кватернионов и $\overline{D}$ – алгебра с инволюцией первого рода, то $I_D = A \otimes_{Z_\tau} Z$, где A – алгебра кватернионов. Поскольку Z / Z_τ – квадратичное расширение, то оно расщепляет алгебру A. Следовательно, I_D коммутативна.

Для C_1-полей $\overline{k}$ существование циклических слабо разветвлённых ветвящихся алгебр с унитарными инволюциями установлено в следующем утверждении.

Т е о р е м а 6. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, D – слабо разветвлённая центральная ветвящаяся K-алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией τ, причём $\overline{k}$ — C_1-поле. Тогда для подходящих τ-инвариантного подполя Z и τ-инвариантного элемента π алгебра D вида циклической алгебры* (Z, π).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что алгебра $\overline{D}$ коммутативна, поскольку $\overline{k}$ – C_1-поле и все C_1-поля имеют размерность 1 (см. [7; 8]), и потому группа Брауэра $\mathrm{Br}(\overline{k})$ тривиальна. Следовательно ввиду основной теоремы 3 заключаем, что алгебра инерции $I_D = Z$ является коммутативным расширением поля K и существует τ-инвариантный элемент $\pi \in D$, что автоморфизм i_π при ограничении на Z индуцирует образующую циклической группы Галуа порядка n $\mathrm{Gal}(Z / K)$.

Таким образом, получаем, что алгебра $D = (Z, \pi)$ – ветвящаяся слабо разветвлённая алгебра с делением, обладающая унитарной инволюцией с τ-инвариантным подполем Z и τ-инвариантным элементом π.

В заключение опишем пример построения ветвящейся слабо разветвлённой алгебры D с делением, обладающей унитарной K / k-инволюцией.

Т е о р е м а 7. *Пусть $\tilde{K} / \tilde{k}$ – квадратичное расширение Галуа, причём $\tilde{k}$ – C_1-поле и $\tilde{\varepsilon}_n \in \tilde{k}$ – примитивный корень из 1 степени n, где $n = \mathrm{ind}\, D$. Тогда для подходящих Z и π существует алгебра $D = (Z, \Pi)$, где $\Pi^n = \pi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde{Z} / \tilde{K}$ – циклическое расширение поля $\tilde{K}$, порождённое корнем степени n из элемента $b \in \tilde{K} / \tilde{k}$ Для поля $\tilde{k}$ и для дискретной линейно упорядоченной группы $\mathbb{Z}$ существует гензелево поле k такое, что $\overline{k} = \tilde{k}$ и $\Gamma_k = \mathbb{Z}$. Обозначим через Z неразветвлённый подъём $\tilde{Z}$ как $\tilde{k}$-алгебры. Пусть $D = (Z, \Pi)$ для подходящего элемента $\Pi^n = \pi \in k$. Запишем эту алгебру в следующем виде: $(K(\Pi), \gamma)$ для подходящего элемента $\gamma \in K$. Для таких алгебр с инволюцией второго рода необходимо выполнение критерия Алберта:

$$\gamma\gamma^\tau = N_{K(\Pi)/k}(x), \tag{2}$$

где $x \in E$. Учитывая, что $x = \pi^m u$, вычислим нормирование от обеих частей последнего равенства:

$$2v(\Pi_k) = mv(\Pi_k), \tag{3}$$

где Π_k – простой элемент кольца нормирования поля k; $u \in U_E$. Равенство (3) становится верным при $m = 2$. В равенстве (2) перейдём к вычетам, учитывая, что $N_{K(\Pi)/k}(x) = \pi^2 u^n$:

$$\overline{v}\,\overline{v}^{\tau} = \overline{u}^n, \tag{4}$$

где $\gamma = \pi v$, $v \in U_K$. Заметим, что $\overline{v}\,\overline{v}^{\tau} = N_{\tilde{K}/\tilde{k}}(\overline{v})$. Так как $\tilde{k}$ – C_1-поле и $\tilde{K} / \tilde{k}$ – конечное расширение, отображение нормы $N_{\tilde{K}/\tilde{k}}$ – сюръективно, а потому для подходящего $\overline{v} \in \overline{K}$ имеет место равенство $\overline{v}\,\overline{v}^{\tau} = \overline{u}^n$. Таким образом из равенства (2) следует, что

$$\pi^2 vv^\tau = \pi^2 u^n (1 + m), \tag{5}$$

где $m \in M_k$. В силу слабой разветвлённости расширения K / k и взаимной простоты 2 и n заключаем, что $(1 + m) = N_{K/k}(1 + p)$ для подходящего $p \in M_K$. Положим $y = \pi^2 u(1 + p)$. Тогда справедливость равенства $\gamma\gamma^\tau = N_{K(\Pi)/k}(y)$ очевидна ввиду вышеизложенного.

Таким образом, получаем, что алгебра $D = \langle Z, \Pi \rangle$ – циклическая ветвящаяся слабо разветвлённая алгебра с делением, обладающая унитарной K / k-инволюцией, что и требовалось.

Заключение. Получен окончательный результат о внутренней структуре слабо разветвлённых ветвящихся алгебр с делением, обладающих унитарными инволюциями τ, над гензелевыми дискретно нормированными полями в виде прямой суммы их τ-инвариантных алгебр инерции и специальных τ-инвариантных образующих, принадлежащих идеалам нормирований.

Список использованных источников

1. Nakayama, T. Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern / T. Nakayama // J. Reine Angew. Math. – 1938. – Bd. 178. – S. 11–13. doi.org/10.1515/crll.1938.178.11

2. Witt, E. Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern / E. Witt // J. Reine Angew. Math. – 1937. – Vol. 176. – P. 153–156. doi.org/10.1515/crll.1937.176.153

3. Scharlau, W. Über die Brauer-Gruppe eines Hensel-Körpers / W. Scharlau // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1969. – Vol. 33, N 3–4. – P. 243–249. doi.org/10.1007/bf02992939

4. Jacob, B. Division algebras over Henselian fields / B. Jacob, A. Wadsworth // Journal of Algebra. – 1990. – Vol. 128, N 1. – P. 126–179. doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r

5. Платонов, В. П. Гипотеза Дьедонне о строении унитарных групп над телом и эрмитова *K*-теория / В. П. Платонов, В. И. Янчевский // Изв. Акад. наук СССР, сер. матем. – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 1266–1294.

6. Янчевский, В. И. Приведенная унитарная *K*-теория и тела над гензелевыми и дискретно нормированными полями / В. И. Янчевский // Изв. Акад. наук СССР, сер. матем. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 879–918.

7. Серр, Ж.-П. Когомологии Галуа / Ж.-П. Серр. – Москва: Мир, 1968. – 208 с.

8. Serre, J.-P. Local fields / J.-P. Serre. – New York; Berlin: Springer-Verlag, 1979. – Vol. 67. – 249 p. doi.org/10.1007/978-1-4757-5673-9

References

1. Nakayama T. Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1938, bd. 178, s. 11–13 (in German). doi.org/10.1515/crll.1938.178.11

2. Witt E. Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 1937, vol. 176, pp. 153–156 (in German). doi.org/10.1515/crll.1937.176.153

3. Scharlau W. Über die Brauer-Gruppe eines Hensel-Körpers. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1969, vol. 33, no. 3–4, pp. 243–249 (in German). doi.org/10.1007/bf02992939

4. Jacob B., Wadsworth A. Division algebras over Henselian fields. *Journal of Algebra*, 1990, vol. 128, no. 1, pp. 126–179. doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r

5. Platonov V. P., Yanchevskii V. I. Dieudonné's conjecture on the structure of unitary groups over a division ring, and hermitiank-theory. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1985, vol. 25, no. 3, pp. 573–599. doi.org/10.1070/IM1985v025n03ABEH001308

6. Jančevskiĭ V. I. Reduced unitaryk-theory and division rings over discretely valued hensel fields. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1979, vol. 13, no. 1, pp. 175–213. doi.org/10.1070/IM1979v013n01ABEH002018

7. Serre J.-P. *Galois cohomology*. Springer, 1964. 208 p. doi.org/10.1007/978-3-642-59141-9

8. Serre J.-P. *Local fields*. New York, Berlin, Springer-Verlag, 1979, vol. 67. 249 p. doi.org/10.1007/978-1-4757-5673-9

Информация об авторах

Янчевский Вячеслав Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by.

Рыжков Александр Андреевич – магистрант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alexander.ryzhkov.96@gmail.com.

Information about the authors

Yanchevskii Vyacheslav Ivanovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by.

Ryzhkov Alexander Andreevich – Undergraduate. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexander.ryzhkov.96@gmail.com.