Доклады Национальной академии наук Беларуси
2015 март–апрель Том 59 № 2

УДК 517.9

А. И. ЖУК[1], О. Л. ЯБЛОНСКИЙ[2]

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ К АССОЦИИРОВАННЫМ РЕШЕНИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

(Представлено членом-корреспондентом Я. В. Радыно)

[1]*Брестский государственный технический университет*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск*
Поступило 03.09.2014

В настоящее время имеется несколько различных подходов к трактовке нелинейных уравнений с обобщенными функциями. Различные трактовки одного и того же нелинейного уравнения приводят к различным решениям (см., напр., [1–5]). Предпочесть ту или иную интерпретацию можно только с помощью каких-либо соображений, используемых при моделировании практической задачи. Следует отметить, что решения, полученные в указанных работах, охватываются единым подходом с позиций алгебр новых обобщенных функций или мнемофункций. Такие алгебры были предложены Ж. Ф. Коломбо [6] и Ю. В. Егоровым [7]. Общая конструкция подобных алгебр была предложена А. Б. Антоневичем и Я. В. Радыно [8]. При таком подходе полученное решение является новой обобщенной функцией. Поэтому возникает задача нахождения условий, при которых новая обобщенная функция определяет (ассоциирует) обычную функцию или распределение (обобщенную функцию) [9–14].

В работе изучается задача Коши

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t))L'(t), \\ x(0) = x^0, \quad t \in T = [0, a], \end{cases} \tag{1}$$

где $x^0 \in \mathbb{R}^p$; $x : T \to \mathbb{R}^p$ – p-мерная функция; $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p \otimes q}$ – матричнозначная функция и $L : T \to \mathbb{R}^q$ – q-мерная функция, каждая компонента является функцией ограниченной вариации на отрезке T; $L'(t)$ – производная в смысле пространства обобщенных функций.

В данном сообщении уравнение (1) рассматривается как уравнение в дифференциалах в алгебре мнемофункций, построенной в [12]. Подобный подход использовался при различных предположениях, например, в [9–11; 13; 14], где были найдены условия, при которых полученная в качестве решения мнемофункция ассоциирована с обычной. Последнюю естественно назвать ассоциированным решением задачи (1).

По построению новая обобщенная функция является классом эквивалентных последовательностей гладких функций. Таким образом, при определенных условиях каждая из последовательностей сходится в некотором топологическом пространстве к обычной функции. Практически во всех работах в данном направлении устанавливался только порядок скорости сходимости этих последовательностей. В этом сообщении мы найдем явные выражения для констант, определяющих скорость сходимости.

В задаче (1) будем считать, что L непрерывна справа и $L(t) = 0$ при $t \le 0$ и $L(t) = L(a)$ при $t > a$. Вариацию многомерной функции определим как сумму вариаций каждой компоненты, т. е. для $L = (L^1, \ldots, L^q)^T$ положим $\operatorname*{var}_{u \in (s;\, t]} L(u) = \sum_{j=1}^{q} \operatorname*{var}_{u \in (s;\, t]} L^j(u)$ и $\operatorname*{var}_{u \in (s;\, t)} L(u) = \lim_{\varepsilon \to +0} \operatorname*{var}_{u \in (s;\, t-\varepsilon]} L(u)$.

Функция f удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le M\left|x_1-x_2\right|. \tag{2}$$

Кроме того, пусть для всех $x\in\mathbb{R}^p$

$$\left|f(x)\right|\le M(1+\left|x\right|), \tag{3}$$

здесь $|x|=|x^1|+\dots+|x^p|$ для $x=(x^1,\dots,x^p)$ и $|f|=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}|f^{ij}|$ для $f=(f^{ij})_{i=1,\dots,p;\,j=1,\dots,q}$.

Задаче (1) соответствует уравнение в дифференциалах (см., напр., [10; 12]), которое на уровне представителей имеет вид следующей конечно-разностной задачи

$$\begin{cases} x_n(t+h_n)-x_n(t)=f_n(x_n(t))(L_n(t+h_n)-L_n(t)),\\ x_n\big|_{[0,\,h_n)}=x_n^0,\ t\in T,\end{cases} \tag{4}$$

где $h_n>0$, $x_n^0\in C^\infty[0,h_n)$

$$L_n(t)=(L*\rho_n)(t)=\int_0^{1/n}L(t+s)\rho_n(s)ds, \tag{5}$$

а ρ_n – последовательность стандартных «шапочек», т. е. $\rho_n(t)=n\rho(nt)$, $\rho\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho\ge 0$, $\operatorname{supp}\rho=[0;1]$, $\int_0^1\rho(s)ds=1$. А также

$$f_n(x)=(f*\tilde\rho_n)(x)=\int_{[0;1/n]^p}f(x+v)\tilde\rho_n(v)dv, \tag{6}$$

где $\tilde\rho_n(t)=n\tilde\rho(nt)$, $\tilde\rho\in C^\infty(\mathbb{R}^p)$, $\tilde\rho\ge0$, $\operatorname{supp}\tilde\rho=[0,1]^p$, $\int_{[0,1]^p}\tilde\rho(u)du=1$.

Цель данного сообщения – найти конкретные оценки скорости сходимости последовательности решения задач (4).

Для любой точки $t\in T$ справедливо представление $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t\in[0,h_n)$, $m_t\in\mathbb{N}$. Положим $t_k=t_k(t)=\tau_t+kh_n$, $k=0,1,2,\dots$.

Тогда решение задачи (4) будет иметь вид

$$x_n(t)=x_n^0(\tau_t)+\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n(x_n(t_k))(L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)).$$

Чтобы описать предел последовательности x_n, рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)=x^0+\int_0^{t+}f(x(s-))dL(s), \tag{7}$$

здесь интеграл Лебега–Стилтьеса вычисляется на множестве $(0;t]$.

Л е м м а. *Пусть функция f удовлетворяет условиям (2) и (3). Тогда для решения x задачи (7) выполняются следующие неравенства для всех $t,s\in T$, $t>s$:*

$$\left|x(t)\right|\le K\left(1+\left|x^0\right|\right)-1,\quad \operatorname*{var}_{u\in(s,t]}x(u)\le MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{u\in(s,t]}L(u),$$

где $K=\exp\left(M\operatorname*{var}_{u\in T}L(u)\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойств интеграла Лебега и неравенства (3) имеем

$$1+\left|x(t)\right|\le1+\left|x^0\right|+\int_0^{t+}\left|f(x(s-))\right|d\operatorname*{var}_{u\in(0;s]}L(u)\le1+\left|x^0\right|+M\int_0^{t+}(1+\left|x(s-)\right|)d\operatorname*{var}_{u\in(0;s]}L(u).$$

Применяя в последнем выражении неравенство Гроноулла (см., напр., [15]), получаем

$$\left|x(t)\right|\le\left(1+\left|x^0\right|\right)\exp\left(M\operatorname*{var}_{u\in(0;t]}L(u)\right)-1.$$

Второе неравенство леммы вытекает из первого и формулы (3). Лемма доказана.

Отметим, что предельным переходом в неравенствах леммы 1 получаем

$$\left|x(s)-x(t-)\right|\le\operatorname*{var}_{u\in(s,t)}x(u)\le MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{u\in(s,t)}L(u).$$

Следующая теорема дает оценки скорости сходимости последовательности x_n.

Т е о р е м а. *Пусть функция f удовлетворяет условиям (2) и (3), L – непрерывная справа функция ограниченной вариации, x_n и x – решения задач (4) и (7) соответственно. Тогда*

$$\int_T |x_n(t)-x(t)|dt \le K\int_T |x_n^0(\tau_t)-x_0|dt+\frac{K|T|}{n}\operatorname*{var}_{u\in T}L(u)+2MK^2|T|\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+$$

$$MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(\int_T\sum_{k=0}^{m_t}\operatorname*{var}_{s\in(t-kh_n,t-kh_n+1/n]}L(s)dt+M|T|\int_T\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\right),$$

где $|T|=a$ – длина отрезка $T=[0;a]$, $K=\exp\left(M\operatorname*{var}_{u\in T}L(u)\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если t_m, m = 1, 2, …, определены после формулы (6), то при $t_m \ge t_0+1/n+h_n$ справедливы следующие преобразования:

$$|x_n(t_m)-x(t_m)|\le|x_n^0(t_0)-x_0|+\left|\int_0^{t_0+1/n+h_n}f(x(s-))\,dL(s)\right|+$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}(f_n(x_n(t_k))-f(x(t_k)))[L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)]\right|+$$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}f(x(t_k))[L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)]-\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}f(x(s-))dL(s)\right|=I_0+I_1+I_2+I_3.$$

Для слагаемого I_1 из неравенства (3) и леммы получаем

$$I_1\le M\int_0^{t_0+1/n+h_n}\left(1+\left|x(s-)\right|\right)d\operatorname*{var}_{u\in(0;s]}L(u)\le MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{u\in(0;1/n+2h_n]}L(u).$$

Используя вид f_n из равенства (6) и неравенства (2) имеем

$$I_2\le M\sum_{k=0}^{m-1}|x_n(t_k)-x(t_k)||L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)|+\frac{M}{n}\operatorname*{var}_{u\in(0;t_m+1/n]}L(u).$$

Для оценки I_3 заметим, что интегрируя по частям в равенстве (5) получаем $L_n(t)=\int_T F_n(s-t)dL(s)$, где $F_n(s)=\int_s^{1/n}\rho_n(u)du$. Из определения ρ_n следует, что функция F_n не возрастает и $0\le F_n\le 1$. Причем $F_n(s)=0$ для $s\ge 1/n$ и $F_n(s)=1$ для $s\le 0$.

$$I_3=\left|\sum_{k=0}^{m-1}f(x(t_k))\int_T[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]dL(s)-\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}f(x(s-))dL(s)\right|=$$

$$\left|\int_{t_0}^{t_m+1/n}\sum_{k=0}^{m-1}f(x(t_k))[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]dL(s)-\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}f(x(s-))dL(s)\right|\le$$

$$\left|\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}\left(\sum_{s-1/n-h_n<t_k<s\le t_m}f(x(t_k))[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]-f(x(s-))\right)dL(s)\right|+$$

$$\left|\int_{t_0}^{t_0+1/n+h_n}\sum_{k=0}^{m-1}f(x(t_k))[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]dL(s)\right|+$$

$$\left|\int_{t_m}^{t_m+1/n}\sum_{k=0}^{m-1}f(x(t_k))[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]dL(s)\right|=I_3^1+I_3^2+I_3^3.$$

Как и для I_1 из неравенства (3) и леммы получаем

$$I_3^2+I_3^3\le MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+\operatorname*{var}_{s\in(t_m,t_m+1/n]}L(s)\right).$$

Для I_3^1 заметим, что $\sum\limits_{s-1/n-h_n<t_k<s\le t_m}[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]=1$ при $t_0+1/n+h_n<s\le t_m$.
Тогда из неравенств леммы и формулы (2) вытекает

$$I_3^1=\left|\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}\sum_{s-1/n-h_n<t_k<s}(f(x(t_k))-f(x(s-)))[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]dL(s)\right|\le$$

$$M^2K\left(1+\left|x^0\right|\right)\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}\sum_{s-1/n-h_n<t_k<s}\operatorname*{var}_{u\in(t_k,s)}L(u)[F_n(s-t_{k+1})-F_n(s-t_k)]d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\le$$

$$M^2K\left(1+\left|x^0\right|\right)\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u).$$

Таким образом, объединяя все полученные неравенства, имеем при $t_m\ge t_0+1/n+h_n$

$$|x_n(t_m)-x(t_m)|\le|x_n^0(t_0)-x_0|+M\sum_{k=0}^{m-1}|x_n(t_k)-x(t_k)||L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)|+\frac{M}{n}\operatorname*{var}_{u\in(0;t_m+1/n]}L(u)+$$
$$MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(2\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+\operatorname*{var}_{s\in(t_m,t_m+1/n]}L(s)+M\int_{t_0+1/n+h_n}^{t_m}\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\right).\tag{8}$$

Если $t_m<t_0+1/n+h_n$, то действуя также, как и выше получаем

$$|x_n(t_m)-x(t_m)|\le|x_n^0(t_0)-x_0|+\left|\int_0^{t_m}f(x(s-))dL(s)\right|+\left|\sum_{k=0}^{m-1}f(x(t_k))[L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)]\right|+$$
$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}(f_n(x_n(t_k))-f(x(t_k)))[L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)]\right|\le|x_n^0(t_0)-x_0|+2MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{u\in(0;1/n+2h_n]}L(u)+$$
$$MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{s\in(t_m,t_m+1/n]}L(s)+M\sum_{k=0}^{m-1}|x_n(t_k)-x(t_k)||L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)|+\frac{M}{n}\operatorname*{var}_{u\in(0;t_m+1/n]}L(u).$$

С учетом неравенства (8) получим для всех m = 1, 2, …

$$|x_n(t_m)-x(t_m)|\le|x_n^0(t_0)-x_0|+M\sum_{k=0}^{m-1}|x_n(t_k)-x(t_k)||L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)|+\frac{M}{n}\operatorname*{var}_{u\in(0;t_m+1/n]}L(u)+$$
$$MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(2\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+\operatorname*{var}_{s\in(t_m,t_m+1/n]}L(s)+M\int_{t_m\wedge(t_0+1/n+h_n)}^{t_m}\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\right).$$

Поэтому для всех m = 1, 2, …

$$|x_n(t_m)-x(t_m)|\le|x_n^0(t_0)-x_0|+M\sum_{k=0}^{m-1}|x_n(t_k)-x(t_k)||L_n(t_{k+1})-L_n(t_k)|+\frac{M}{n}\operatorname*{var}_{u\in T}L(u)+$$
$$MK\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(2\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+\max_{1\le k\le m}\operatorname*{var}_{s\in(t_k,t_k+1/n]}L(s)+M\int_T\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\right).\tag{9}$$

Применяя дискретную лемму Гронуолла (см., напр., [10] или [15]) к неравенству (9), получим для всех m = 1, 2, …

$$|x_n(t_m)-x(t_m)|\le K|x_n^0(t_0)-x_0|+\frac{MK}{n}\operatorname*{var}_{u\in T}L(u)+2MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+$$
$$MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(\max_{1\le k\le m}\operatorname*{var}_{s\in(t_k,t_k+1/n]}L(s)+M\int_T\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\right).$$

Поэтому для всех $t\in T$

$$|x_n(t)-x(t)|\le K|x_n^0(t_0)-x_0|+\frac{MK}{n}\operatorname*{var}_{u\in T}L(u)+2MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]}L(s)+$$
$$MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(\sum_{k=0}^{m_t}\operatorname*{var}_{s\in(t-kh_n,t-kh_n+1/n]}L(s)+M\int_T\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)}L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]}L(u)\right).\tag{10}$$

Проинтегрируем обе части неравенства (10) по $t\in T=[0;a]$

$$\int_T |x_n(t)-x(t)|dt \le K\int_T |x_n^0(\tau_t)-x_0|dt + \frac{MK|T|}{n}\operatorname*{var}_{u\in T} L(u) + 2MK^2|T|\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]} L(s) +$$
$$MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(\int_T \sum_{k=0}^{m_t}\operatorname*{var}_{s\in(t-kh_n,t-kh_n+1/n]} L(s)dt + M|T|\int_T \operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)} L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]} L(u)\right), \quad (11)$$

где $|T| = a$ – длина отрезка T. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть $n\to\infty$, $h_n \to 0$ так, что $nh_n \to \infty$. Если выполнены условия теоремы и $\int_T |x_n^0(\tau_t)-x_0|dt \to 0$, то $\int_T |x_n(t)-x(t)|dt \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что правая часть неравенства (11) при сделанных предположениях стремится к нулю. По сути дела следует обосновать сходимость последних двух слагаемых. Для этого заметим, что $\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)} L(u) = \operatorname*{var}_{u\in(0,s)} L(u) - \operatorname*{var}_{u\in(0,s-1/n-h_n]} L(u) \to 0$ для всех $s\in T$, поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости в силу ограниченности вариации функции L следует, что $\int_T \operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)} L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]} L(u) \to 0$.

Рассмотрим слагаемое $\int_T \sum_{k=0}^{m_t}\operatorname*{var}_{s\in(t-kh_n,t-kh_n+1/n]} L(s)dt$. Для этого заметим, что для $1/n \le h_n$ справедливы следующие неравенства

$$\int_T \sum_{k=0}^{m_t}\operatorname*{var}_{s\in(t-kh_n,t-kh_n+1/n]} L(s)dt = \int_T\int_T \sum_{k=0}^{m_t} 1_{(t-kh_n,t-kh_n+1/n]}(s)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]} L(u)dt =$$
$$\int_T\int_T \sum_{k=0}^{m_t} 1_{(s+kh_n-1/n,s+kh_n]}(t)dtd\operatorname*{var}_{u\in(0,s]} L(u) \le \frac{|T|}{nh_n}\operatorname*{var}_{u\in T} L(u).$$

Тогда из теоремы вытекает справедливость следствия.

З а м е ч а н и е. *Пусть $\mu_1,\mu_2,\ldots$ – моменты скачков функции L. Зададим произвольное $\varepsilon>0$ и выберем n_0 так, чтобы $\sum_{i=n_0+1}^{\infty}|\Delta L(\mu_i)| < \varepsilon$. При больших n верно неравенство $|\mu_i-\mu_j| > 2h_n + 2/n$ для всех $1\le i,j\le n_0$, $i\ne j$. При этом $\operatorname*{var}_{s\in(t_m,t_m+1/n]} L(s) \le \varepsilon + \max_{t\in T}\operatorname*{var}_{s\in(t,t+1/n]} L^c(s)$, если $t_m \notin \bigcup_{i=1}^{n_0}(\mu_i - 1/n;\mu_i]$. Применяя лемму Гронуолла к неравенству (8) получаем оценку*

$$|x_n(t)-x(t)| \le K|x_n^0(t_0)-x_0| + \frac{K}{n}\operatorname*{var}_{u\in(0;t+1/n]} L(u) + 2MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\operatorname*{var}_{s\in(0,1/n+2h_n]} L(s) +$$
$$MK^2\left(1+\left|x^0\right|\right)\left(\varepsilon + \max_{t\in T}\operatorname*{var}_{s\in(t,t+1/n]} L^c(s) + M\int_{t_0+1/n+h_n}^{t}\operatorname*{var}_{u\in(s-1/n-h_n,s)} L(u)d\operatorname*{var}_{u\in(0,s]} L(u)\right), \quad (12)$$

справедливую для $t\in T_n^\varepsilon = T\setminus \bigcup_{i=1}^{n_0}\bigcup_{k=0}^{\infty}(\mu_i + kh_n - 1/n;\mu_i + kh_n]$.

Неравенства типа (12) в случае, когда $nh_n\to\infty$ были установлены в [11; 13] без указания того, что они справедливы для $t\in T_n^\varepsilon$, что привело к ошибочному утверждению о наличии поточечной сходимости. Поэтому рассуждения в этих работах следует дополнить тем фактом, что мера Лебега множества $T\setminus T_n^\varepsilon$ стремится к нулю при $n\to\infty$, $h_n\to 0$, $nh_n\to\infty$ для каждого $\varepsilon>0$. Проинтегрировав неравенство (12) по $t\in T$ получаем, как и выше, что $x_n \to x$ в смысле пространства $L^1(T)$. Это означает, что в следующих утверждениях [11, теорема 2; 13; 14, теорема 1], посвященных случаю $nh_n\to\infty$, поточечную сходимость следует заменить на сходимость в пространстве $L^1(T)$.

Литература

1. *Antosik P., Liegza J.* // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. Varna, 1979. P. 20–26.
2. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. М., 1991.
3. *Das P. C., Sharma R. R.* // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22, N 1. P. 145–158.
4. *Pandit S. G., Deo S. G.* // Lect. Notes. Math. 1982. Vol. 954.
5. *Kurzweil J.* // Czech. Math. J. 1958. Vol. 8, N 1. P. 360–388.
6. *Colombeau J. F.* Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1985.

7. *Егоров Ю. В.* // УМН. 1990. Т. 45, вып. 5 (275). С. 3–40.
8. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 2. С. 267–270.
9. *Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Юферева И. В.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 3, № 12. С. 2080–2082.
10. *Yablonski A.* // Nonlinear Analysis. 2005. Vol. 63. P. 171–197.
11. *Ковальчук А. Н., Новохрост В. Г., Яблонский О. Л.* // Изв. вузов. Математика. 2005. № 3. С. 23–31.
12. *Лазакович Н. В.* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 23–27.
13. *Жук А. И., Яблонский О. Л.* // Тр. Ин-та математики. 2011. Т. 19, № 2. С. 43–51.
14. *Жук А. И., Яблонский О. Л.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 20–23.
15. *Groh J.* // Illinois J. of Mathematics. 1980. Vol. 24, N 2. P. 244–263.

A. I. ZHUK, A. L. YABLONSKI

aizhuk85@mail.ru, yablonski@bsu.by

ESTIMATION OF A CONVERGENCE RATE TO ASSOCIATED SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH GENERALIZED COEFFICIENTS IN THE ALGEBRA OF MNEMOFUNCTIONS

Summary

Systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of mnemofunctions. A convergence rate to associated solutions of differential equations is estimated.