

Máster en Matemática Aplicada

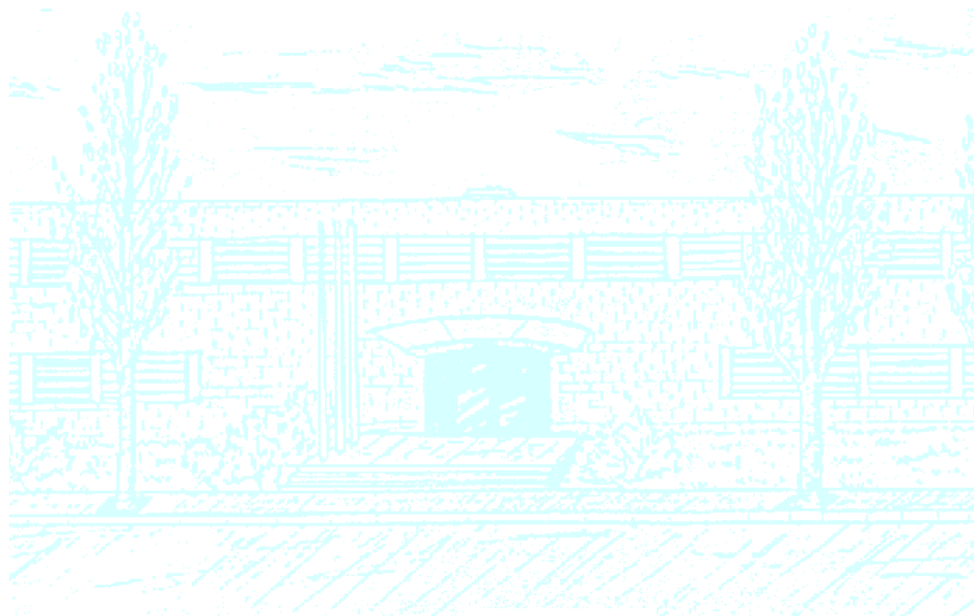
Título: Torcimiento de cuárticas planas lisas

Autor: Elisa Lorenzo García

Director: Joan-Carles Lario Loyo

Departamento: MA2

Convocatoria: Octubre 2010



Facultat de Matemàtiques
i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Índice general

Introducción	2
Capítulo 1. Cuárticas planas lisas	3
1. Espacios de móduli	3
2. Curvas de género 3	3
3. Invariantes de Dixmier-Ohno	4
4. Puntos de Weierstrass	6
5. Automorfismos de cuárticas planas lisas	6
6. Criterio de Weil	9
7. Primera restricción en el cálculo de los twists	9
Capítulo 2. Twists y cohomología	11
1. Cohomología de Galois	11
2. Twists y cuerpos de definición	12
3. Una representación auto-dual	12
4. Problemas de inmersión en teoría de Galois	13
Capítulo 3. Cálculo de $H^1(G_{\mathbb{Q}}, \text{Aut}(C))$	15
1. Segunda restricción en el cálculo de los twists	15
2. Programa en GAP para calcular los cociclos	16
3. Construcción de las ecuaciones de los twists	19
Capítulo 4. Cálculo de los twists	21
1. Caso I	22
2. Caso II	23
3. Caso III	24
4. Caso IV	25
5. Caso V	26
6. Caso VI	28
7. Caso VII	29
8. Caso VIII	31
9. Caso IX	32
10. Caso X	33
11. Caso XI	35
12. Caso XII	36
Capítulo 5. Un ejemplo concreto	37
Conclusiones	40
Apéndice: invariantes de Dixmier-Ohno de los modelos de Henn	41
Bibliografía	46

Introducción

El espacio de móduli de curvas algebraicas lisas de género g sobre \mathbb{C} clasifica estas curvas salvo isomorfismo. Un punto del espacio de móduli representa una clase de curvas respecto a la relación de ser \mathbb{C} -isomorfas. Dada una curva algebraica sobre \mathbb{Q} su punto del espacio de móduli contiene todas las curvas isomorfas a ella pero no todas estarán también definidas sobre \mathbb{Q} .

Un twist de una curva lisa definida sobre \mathbb{Q} es otra curva definida sobre \mathbb{Q} en su punto del espacio de móduli, donde se suele considerar la relación de equivalencia de ser \mathbb{Q} -isomorfas.

Así determinar los twists de una curva definida sobre \mathbb{Q} es obtener la información aritmética que se encuentra codificada en su punto del espacio de móduli.

Si el género es 1, las curvas son curvas elípticas y sus twists son bien conocidos, consultar [SILV86]. Si el género es 2 en los trabajos [CARD01] y [CARD06] se determinan los twists de estas curvas.

Este trabajo se centra en el caso de género 3 no hiperelíptico. Las curvas de género 3 no hiperelípticas están en correspondencia biunívoca con las cuárticas planas lisas. Así determinar sus twists es determinar los twists de las cuárticas planas lisas.

En [HENN76] se da una clasificación de las cuárticas planas en función de su grupo de automorfismos. Utilizaremos esta clasificación para calcular los twists. En esta memoria se determinan para todas las cuárticas planas lisas, que admitan un modelo de Henn definido sobre \mathbb{Q} , todos los twists que provengan de cociclos *completos*. Esta segunda restricción es técnica y será explicada posteriormente. De todas maneras, las herramientas que se proporcionan pueden ser de utilidad para poder llegar a determinar los twists de una curva cualquiera de género 3 no hiperelíptica definida sobre \mathbb{Q} .

Breve descripción del contenido de cada capítulo

En el capítulo primero se recogen algunos hechos conocidos sobre curvas de género 3 no hiperelípticas. En particular, que existe una correspondencia unívoca entre cuárticas planas lisas y curvas de género 3 no hiperelípticas. Además se muestra la clasificación de las cuárticas planas lisas a partir de su grupo de automorfismos debida a [HENN76].

En el capítulo segundo se dan los resultados teóricos que se necesitarán para el desarrollo posterior del cálculo de los twists: sobre cohomología de Galois, cuerpos de definición, formas diferenciales y problemas de inmersión de Galois. El resultado clave es la existencia de una correspondencia biunívoca entre los twists de una curva C y el conjunto de cohomología $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$.

En el capítulo tercero se expone la estrategia a seguir para determinar los twists y se muestra un programa elaborado en GAP que permite calcular el conjunto $H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ para un cierto L cuerpo normal asociado a los twists de la curva de partida C . Se introducen los cociclos que llamamos *completos*.

En el capítulo cuarto, usando este programa y la estrategia expuesta en el capítulo tercero, se dan los twists de las cuárticas planas lisas que admiten un modelo de Henn definido sobre \mathbb{Q} y provienen de cociclos completos. Finalmente, en el capítulo quinto se muestra un ejemplo concreto de cómo se ha llevado a cabo el cálculo de los twists.

Cuárticas planas lisas

Para simplificar la terminología, a lo largo de la memoria, por curva de género g definida sobre un cuerpo k entenderemos una curva algebraica proyectiva y lisa de género g sobre k . Habitualmente el cuerpo de definición será el cuerpo de los números racionales. Estaremos interesados en el caso de género $g = 3$ y no hiperelíptico.

1. Espacios de módulos

El espacio de módulos M_g de curvas de género g es un esquema cuyos puntos parametrizan las clases de isomorfismo de estas curvas. Formalmente, si Sch denota la categoría de esquemas y Sets la de conjuntos, se considera el funtor contravariante $\mathcal{M}_g : \text{Sch} \rightarrow \text{Sets}$ definido por

$$\mathcal{M}_g(S) = \{\text{clases de } S\text{-isomorfismo de curvas lisas de género } g \text{ sobre } S\}.$$

Este funtor es representable; es decir, existe un esquema M_g y un isomorfismo de functores $\phi : \mathcal{M}_g \rightarrow \text{Mor}(-, M_g)$ tal que $\phi(\mathcal{M}_g(\text{Spec } \mathbb{C}))$ proporciona una biyección entre las clases de isomorfismo de curvas lisas de género g sobre \mathbb{C} y los puntos en $M_g(\mathbb{C})$. El esquema M_g recibe el nombre de espacio de módulos y verifica una cierta propiedad universal que lo caracteriza salvo isomorfismos. Además, Mumford prueba que M_g es una variedad algebraica quasi-proyectiva e irreducible, [MUMF65]. Su dimensión es $\dim M_0 = 0$, $\dim M_1 = 1$ y $\dim M_g = 3g - 3$ para $g \geq 2$. Los puntos del espacio de módulos correspondientes a curvas hiperelípticas constituyen una subvariedad H_g de dimensión $2g - 1$. Así, M_3 tiene dimensión 6 y H_3 tiene dimensión 5.

2. Curvas de género 3

DEFINICIÓN 2.1. Sea C una curva de género g definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Sea $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base del espacio de formas diferenciales holomorfas $\Omega^1(C)$. Se define el morfismo canónico como

$$\begin{aligned} \phi : C &\longrightarrow \mathbb{P}^{g-1} \\ P &\longrightarrow [\omega_1(P) : \dots : \omega_g(P)]. \end{aligned}$$

La imagen $\phi(C)$ no está contenida en ningún hiperplano por ser $\omega_1, \dots, \omega_g$ una base. Además, ϕ sólo tiene dos opciones, a saber: se trata de una inmersión y en tal caso se dice que la curva C es no hiperelíptica, o bien tiene grado dos, y en tal caso se dice que la curva C es hiperelíptica. En el caso no hiperelíptico, decimos que $\phi(C)$ es un modelo canónico de C y resulta ser una curva de grado $2g - 2$.

OBSERVACIÓN 2.1. En curvas planas de grado $d \geq 2$ la definición de curva hiperelíptica es equivalente a que la curva sea isomorfa a una del tipo $y^2 z^{d-2} = f(x, z)$.

PROPOSICIÓN 2.1. Existe una correspondencia biunívoca entre cuárticas planas lisas y curvas lisas de género 3 no hiperelípticas.

DEMOSTRACIÓN. Si C es una cuártica plana hiperelíptica entonces es singular, luego si es lisa es no hiperelíptica y tiene género 3.

Si C es una curva lisa de género 3 no hiperelíptica, se tiene por el morfismo canónico una inmersión de C en \mathbb{P}^2 a una curva plana de grado 4; i.e., a una cuártica plana lisa, que también tiene género 3 y por tanto dicha inmersión es un isomorfismo. \square

3. Invariantes de Dixmier-Ohno

El j -invariante de Klein para curvas elípticas y los invariantes de Igusa para curvas de género 2 proporcionan coordenadas apropiadas para el espacio de móduli de curvas de género 1 y 2, respectivamente.

Para curvas de género 3, en un artículo publicado en 1987, Dixmier da un conjunto de 7 invariantes con pesos a partir de un trabajo de Salmon de 1879 y prueba que son algebraicamente independientes. Y a partir de unos resultados de Shioda de 1967, Dixmier prueba que sus invariantes generan un subanillo del anillo de invariantes sobre el que éste es libre de rango 50.

En 2006 Ohno determina un conjunto completo de generadores y relaciones para el anillo de invariantes de cuárticas planas lisas. El resultado de Ohno coincide con otros de Brumer, ambos no publicados. En [GIRA06] se encuentra una exposición detallada sobre estos invariantes asociados a cuárticas ternarias.

A continuación repasamos brevemente las notaciones y resultados necesarios para definir los invariantes de las cuárticas planas lisas, los cuales permiten dotar de buenas coordenadas al espacio de móduli M_3 con el fin de determinar cuando dos curvas no hiperelípticas de género 3 son isomorfas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado (de característica distinta de 2 y de 3).

Sea $V = \mathbb{C}^n$ equipado con la acción estándar por la izquierda de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la cual induce una acción por la derecha en el álgebra $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, para cada $\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y cada $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ se define la acción $F^\gamma(x) = F(\gamma(x))$ para todo $x \in V$. Por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$ se denota el conjunto de polinomios homogéneos de grado d .

DEFINICIÓN 3.1. *Un covariante de grado r y orden m es una aplicación*

$$\psi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_m$$

tal que cumple:

i) $\psi(F + G) = \psi(F) + \psi(G)$

ii) $\psi(\lambda F) = \lambda^r \psi(F)$

iii) *es un homomorfismo de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ -módulos, es decir, $\psi(F^\gamma) = \psi(F)^\gamma$*

iv) *los coeficientes de $\psi(F)$ dependen polinómicamente de los coeficientes de $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$.*

Un invariante es un covariante de orden 0.

Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ la base dual de la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V^* . Entonces $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ da la acción contragradiente por la derecha en polinomios de $\mathbb{C}[u_1, \dots, u_n]$ que se denotará por $G^{\gamma*}$, con γ_* la inversa traspuesta de γ .

DEFINICIÓN 3.2. *Un contravariante de grado r y orden m es una aplicación*

$$\psi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d \longrightarrow \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n]_m$$

tal que cumple:

i) $\psi(F + G) = \psi(F) + \psi(G)$

ii) $\psi(\lambda F) = \lambda^{-r} \psi(F)$

iii) *es un homomorfismo de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ -módulos, es decir, $\psi(F^\gamma) = \psi(F)^{\gamma*}$*

iv) *los coeficientes de $\psi(F)$ dependen polinómicamente de los coeficientes de $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$.*

Se extiende la aplicación lineal $V \times V^* \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $(u_i, x_j) \longrightarrow \delta_{ij}$ a un operador diferencial:

$$D : \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n] \times \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

identificando el monomio $u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}$ de grado total m con el operador $\frac{\partial^m}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_n} x_n}$. Además se denota a $D(\psi, \varphi)$ por $D_\psi(\varphi)$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea φ un covariante y ψ un contravariante en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_d$. Entonces $D_\varphi(\psi)$ es un contravariante de orden $\mathrm{ord}(\varphi) - \mathrm{ord}(\psi)$ y $D_\psi(\varphi)$ un covariante de orden $\mathrm{ord}(\psi) - \mathrm{ord}(\varphi)$ y ambos de grado $\mathrm{deg}(\varphi) + \mathrm{deg}(\psi)$.*

Si φ es una cuártica ternaria se define $D(\varphi) = \frac{1}{2} \mathrm{Hess}(\varphi)$ y por $D(\varphi)^*$ se denota a su adjunta clásica. Además si $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$ siendo A, B matrices del mismo tamaño se definen:

$$J_{11}(\varphi, \psi) = \langle D(\varphi), D(\psi) \rangle \quad \text{y} \quad J_{22}(\varphi, \psi) = \langle D(\varphi)^*, D(\psi)^* \rangle$$

$$J_{30}(\varphi, \psi) = J_{30}(\varphi) = \det(D(\varphi)) \text{ y } J_{03}(\varphi, \psi) = J_{03}(\psi) = \det(D(\psi)).$$

Finalmente dadas dos formas binarias $F(x, y)$, $G(x, y)$ de grados r, s respectivamente se define su k -transvectante como:

$$(F, G)^k = \frac{(r-k)!(s-k)!}{r!s!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial x_2} \right)^k F(x_1, y_1) G(x_2, y_2) |_{(x_i, y_i) = (x, y)}.$$

LEMA 3.1. Sea $R(x, y) = a_{40}x^4 + 4a_{31}x^3y + 6a_{22}x^2y^2 + 4a_{13}xy^3 + a_{04}y^4$ y $Q = (R, R)^4$. Entonces

$$\sigma = \frac{1}{2}(R, R)^4 = a_{40}a_{04} - 4a_{31}a_{13} + 3a_{22}^2$$

$$\psi = \frac{1}{6}(R, Q)^4 = a_{40}a_{22}a_{04} - a_{40}a_{13}^2 - a_{31}^2a_{04} + 2a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}^3$$

son invariantes en $\mathbb{C}[x, y]_4 \rightarrow \mathbb{C}$ de grados 2 y 3, respectivamente. Además, salvo escalar, el invariante $\sigma^3 - 27\psi^2$ es el discriminante de la forma $R(x, y)$.

Dada una cuártica plana lisa por su ecuación $F(x, y, z) = 0$, se define

$$R(x, y) = F(x, y, -ux - vy)$$

y se obtienen aplicando a R el lema anterior los invariantes σ y ψ . Por H se denota el Hessiano de F . Entonces se tiene la siguiente tabla de covariantes y contravariantes:

Covariantes	Contravariantes
$\tau = 12^{-1}D_\rho(F)$	$\rho = 144^{-1}D_F(\psi)$
$\xi = 72^{-1}D_\sigma(H)$	$\eta = 12^{-1}D_\xi(\sigma)$
$\nu = 8^{-1}D_\eta(D_\rho(H))$	$\chi = 8^{-1}D_\tau^2(\psi)$

De donde se definen los invariantes de Dixmier:

$$\begin{aligned} I_3 &= 144^{-1}D_\sigma(F) & I_9 &= J_{11}(\tau, \rho) & I_{15} &= J_{30}(\tau) \\ I_6 &= 4608^{-1}(D_\psi(H) - 8I_3^2) & I_{12} &= J_{03}(\rho) & I_{18} &= J_{22}(\tau, \rho), \end{aligned}$$

junto con el discriminante I_{27} . A los que se le añaden los calculados por Ohno:

$$\begin{aligned} J_9 &= J_{11}(\xi, \rho) & J_{15} &= J_{30}(\xi) & I_{21} &= J_{03}(\eta) \\ J_{12} &= J_{11}(\tau, \eta) & J_{18} &= J_{22}(\xi, \rho) & J_{21} &= J_{11}(\nu, \eta). \end{aligned}$$

Se obtiene así un sistema completo de generadores del anillo de invariantes de las cuárticas planas lisas. Se trata de invariantes proyectivos con pesos $(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9)$. A veces es útil considerar los invariantes absolutos:

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) = \left(\frac{I_6}{I_3^2}, \frac{I_9}{I_3^3}, \frac{I_{12}}{I_3^4}, \frac{I_{15}}{I_3^5}, \frac{I_{18}}{I_3^6}, \frac{I_{27}}{I_3^9} \right)$$

$$(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6) = \left(\frac{J_9}{I_3^3}, \frac{J_{12}}{I_3^4}, \frac{J_{15}}{I_3^5}, \frac{J_{18}}{I_3^6}, \frac{I_{21}}{I_3^7}, \frac{J_{21}}{I_3^7} \right)$$

Con lo que dos cuárticas planas lisas son isomorfas, si y sólo si, los invariantes $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$ evaluados en ecuaciones que las definan toman el mismo valor. Así un punto en el espacio de módulos $M_3 \setminus H_3$ queda definido por el valor de estos 13 invariantes evaluados en una curva cualquiera perteneciente a dicho punto. Obsérvese que como estos 13 invariantes no son independientes, 13 números complejos arbitrarios no definen en general un punto del espacio de módulos.

Obsérvese también que a una curva definida sobre \mathbb{Q} le corresponden invariantes racionales. El recíproco no es cierto, pues una curva no definida sobre \mathbb{Q} puede tener también invariantes racionales.

4. Puntos de Weierstrass

El conjunto de los puntos de Weierstrass de una curva es de gran utilidad para el estudio de los automorfismos de la curva, pues dicho conjunto permanece invariante bajo ellos. Además el estudio de los puntos de Weierstrass de dos curvas isomorfas permite determinar los isomorfismos entre ellas. Algunas referencias sobre los puntos de Weierstrass son [GRIF78], [VERM83], [NART05].

Sea K un divisor canónico de C , entonces por el teorema de Riemann-Roch dado un divisor D se tiene

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g,$$

donde como es habitual $l(D)$ representa la dimensión del espacio vectorial

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathbb{C}(C) : \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Restando dicha expresión para los divisores mP y $(m-1)P$ siendo m un entero positivo y $P \in C$ se obtiene:

$$(l(mP) - l((m-1)P)) + (l(K - (m-1)P) - l(K - mP)) = 1$$

y como ambos sumandos son no negativos uno de ellos es nulo y el otro igual a 1.

DEFINICIÓN 4.1. Sean C una curva de género g y $P \in C$. Un entero $1 \leq m \leq 2g-1$ se llama un gap en P si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

- i) $l((m-1)P) = l(mP)$
- ii) $l(K - (m-1)P) - l(K - mP) > 0$.

Se tiene por tanto que:

$$1 \leq l(0) \leq l(P) \leq l(2P) \leq \dots \leq l((2g-1)P) = g$$

donde $g-1$ son desigualdades estrictas y g son igualdades; se obtiene así la secuencia de gaps:

$$1 \leq m_1 < \dots < m_g \leq 2g-1.$$

DEFINICIÓN 4.2. El peso de un punto $P \in C$ se define como $w(P) := \sum_{i=1}^g (m_i - 1)$. Se dice que P es ordinario si $w(P) = 0$; en caso contrario se dice que P es un punto de Weierstrass de C .

OBSERVACIÓN 4.1. P es un punto ordinario si y sólo si su secuencia de gaps es $(1, 2, \dots, g)$.

En las cuárticas planas lisas los puntos de Weierstrass son los puntos P de inflexión y los hay de dos tipos: aquellos en los que $\operatorname{mult}_P(C, T_P C) = 3$, y en tal caso $w(P) = 1$, y aquellos en los que $\operatorname{mult}_P(C, T_P C) = 4$, y en tal caso $w(P) = 2$.

TEOREMA 4.1. El número de puntos de Weierstrass de una curva es finito. Es más, se cumple

$$\sum_{P \in C} w(P) = (g-1)g(g+1).$$

Así en una cuártica plana lisa C , si $a(C)$ denota el número de puntos de Weierstrass de peso 1 y $b(C)$ el número de puntos de Weierstrass de peso 2 se tiene que $a(C) + 2b(C) = 24$.

5. Automorfismos de cuárticas planas lisas

Los resultados sobre automorfismos de cuárticas planas se han obtenido de [BARS05], [HENN76] y [VERM83].

PROPOSICIÓN 5.1. Cada automorfismo de una cuártica plana lisa C está dado por un elemento de $\operatorname{PGL}(3, \mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Un automorfismo de C induce un automorfismo en $\Omega^1(C)$ y por tanto un automorfismo de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, i.e., un elemento de $\operatorname{PGL}(3, \mathbb{C})$, y C está canónicamente inmersa en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ por el morfismo canónico. \square

OBSERVACIÓN 5.1. Lo mismo puede decirse de un isomorfismo entre cuárticas planas lisas.

PROPOSICIÓN 5.2. Sea C una curva y $\varphi \in \operatorname{Aut}(C)$. Si $P \in C$ es un punto de Weierstrass, $\varphi(P)$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del hecho de que n es un gap en el punto P si y sólo si existe una diferencial $\omega \in \Omega^1(C)$ con $\operatorname{ord}_P(\omega) = n-1$. Por ser la aplicación φ^* inducida en $\Omega^1(C)$ un isomorfismo, la secuencia de gaps en P se preserva y por tanto φ manda puntos de Weierstrass a puntos de Weierstrass, y además de igual peso. \square

OBSERVACIÓN 5.2. *Dadas dos cuárticas planas lisas isomorfas puede hallarse un isomorfismo entre ellas calculando el conjunto de puntos de Weierstrass de cada una de ellas y considerando las matrices 3x3 que manden 3 puntos de Weierstrass de la primera a 3 de la segunda.*

Sea C una curva de género mayor o igual que 2, entonces por el teorema 4.1 el número de puntos de Weierstrass es finito. Sea $S_{WP(C)}$ el grupo de permutación del conjunto de puntos de Weierstrass de C , y sea $\lambda : \text{Aut}(C) \rightarrow S_{WP(C)}$ el homomorfismo que manda cada automorfismo a la permutación de puntos de Weierstrass que produce. Si C es no hiperelíptica, entonces λ es un monomorfismo, en caso contrario $\ker \lambda = \{id, w\}$ donde w denota la involución hiperelíptica. Lo que implica que el grupo de automorfismos de una curva de género $g \geq 2$ es finito. Además del teorema de Riemann-Hurwitz se deduce la siguiente cota:

TEOREMA 5.1. (Hurwitz) *Una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ tiene a los sumo $84(g-1)$ automorfismos.*

Así, para género 3 se obtiene la cota de 168 automorfismos, que se alcanza únicamente para la llamada cuártica de Klein.

LEMA 5.1. *Dado $\varphi \in \text{Aut}(C)$ de orden primo p , entonces $p \leq g$ o bien $p = g+1$ o bien $p = 2g+1$.*

Por tanto para género 3 los únicos primos que pueden dividir al orden del grupo de automorfismos de una curva son 2, 3 y 7.

A continuación se muestra una clasificación completa de todas las cuárticas planas lisas con grupo de automorfismo no trivial salvo \mathbb{C} -isomorfismo. Dicha clasificación es debida a [HENN76] y en [BARS05] se encuentra un resumen de la demostración de dicha clasificación basada en las propiedades de los puntos de Weierstrass y en los resultados anteriores.

Caso	Modelo de Henn	Dimensión
I	$x^4 + x^2F(y, z) + G(y, z)$	4
II	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2 + by^2z^2 + cz^2x^2$	3
III	$z^3y + x(x-y)(x-ay)(x-by)$	2
IV	$x^3z + y^3z + x^2y^2 + axyz^2 + bz^4$	2
V	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2 + bxyz^2$	2
VI	$z^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4$	1
VII	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2$	1
VIII	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2 + ay^2z^2 + az^2x^2$	1
IX	$x^4 + xy^3 + yz^3$	0
X	$x^4 + y^4 + xz^3$	0
XI	$x^4 + y^4 + z^4$	0
XII	$x^3y + y^3z + z^3x$	0

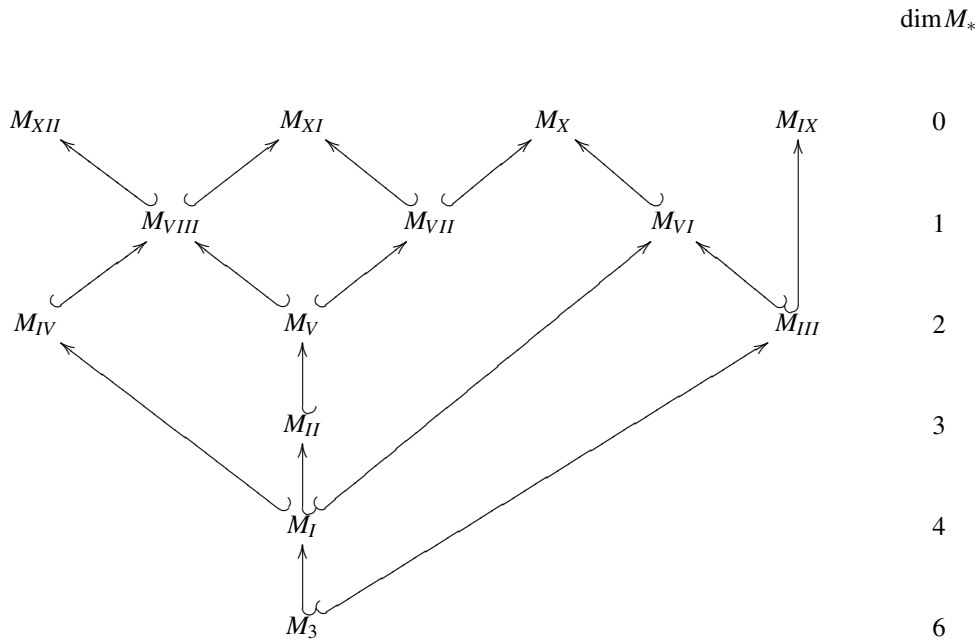
Dada una cuártica plana lisa C con grupo de automorfismos no trivial, ésta resulta ser isomorfa a alguna de las que aparecen en la tabla para ciertos parámetros. A las cuárticas de la tabla se las llamará modelos de Henn. El modelo de Henn de una curva C no tiene por qué ser único; por ejemplo las curvas $x^4 + y^4 + z^4 + ix^2y^2$ y $x^4 + y^4 + z^4 - ix^2y^2$ son isomorfas. En otras palabras, distintos modelos de Henn pueden dar lugar a curvas isomorfas, tal y como ocurre con los modelos de Legendre para el caso de curvas elípticas. Obsérvese que si una curva está definida sobre \mathbb{Q} entonces admite un modelo de Henn en la tabla definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Los grupos de automorfismos de cada una de las curvas y generadores de los mismos se recogen en la tabla siguiente:

Caso	Aut(C)	Generadores de Aut(C) en PGL(3, ℂ)
I	\mathbb{Z}_2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
II	V_4	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
III	\mathbb{Z}_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$
IV	S_3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
V	D_4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
VI	\mathbb{Z}_6	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$
VII	GAP(16,3)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
VIII	S_4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
IX	\mathbb{Z}_9	$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$ con $\omega^3 = \xi$
X	$S_4 \times \mathbb{Z}_2$	$\begin{pmatrix} \frac{3-i\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{3+i\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3i-\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{3i+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$
XI	GAP(96,64)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$
XII	PSL(2,7)	$\frac{-1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 \\ \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$ con $\zeta^7 = 1$, primitiva.

Para una demostración detallada de que en el caso XII hay una única curva salvo isomorfismo consultar [REYS89], además se calcula explícitamente el grupo de automorfismos a partir de los puntos de Weierstrass. Para otras propiedades aritméticas de la curva de Klein consultar [ELKI98].

Se tiene la siguiente estratificación en el espacio de módulos M_3 según los casos correspondientes a los grupos de automorfismos de las curvas no-hiperelípticas:



6. Criterio de Weil

Sea C_0 una cuártica plana lisa definida sobre \mathbb{Q} . Entonces, dependiendo del grupo de automorfismos $\text{Aut}(C_0)$, la curva C_0 admite algún modelo de Henn C con unos ciertos parámetros algebraicos; sin embargo estos parámetros no tienen por qué ser racionales. En general, C queda definida sobre cierta extensión de cuerpos de números K/\mathbb{Q} .

TEOREMA 6.1. (*Criterio de Weil*) Sea C una curva definida sobre una extensión finita de Galois K/\mathbb{Q} , entonces C es isomorfa a una curva definida sobre \mathbb{Q} , si y sólo si, existen isomorfismos $\psi_\sigma : {}^\sigma C \rightarrow C$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tales que para todos $\sigma, \tau \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ se tiene que $\psi_{\sigma\tau} = \psi_\sigma \circ \psi_\tau$.

Así el primer paso para determinar a qué curvas definidas sobre \mathbb{Q} no les corresponde un modelo de Henn definido sobre \mathbb{Q} , es ver para qué modelos de Henn con parámetros no racionales se obtienen invariantes de Dixmier-Ohno racionales. Hemos calculado estos invariantes en el Apéndice en función de sus parámetros. El siguiente paso es encontrar un isomorfismo entre ellas, lo cual puede hacerse mediante el estudio de los puntos de Weierstrass, determinarlos todos a partir del grupo de automorfismos de C y ver si existen isomorfismos verificando la condición del criterio de Weil.

Por ejemplo, la curva $C : x^4 + y^4 + z^4 + ix^2y^2 = 0$ (caso VII con parámetro $a = i$) es isomorfa a $x^4 + y^4 + z^4 - ix^2y^2 = 0$, ambas con invariantes normalizados:

$$\left(1, 0, -3 \cdot 37^2 11^{-3}, -3^{-1} 37^2 11^{-3}, 0, -2 \cdot 37^2 11^{-3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2^{10} 3^{-9} 5^6 11^{-9}\right).$$

Y un isomorfismo entre ellas viene dado por la matriz $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se verifica el criterio de Weil y por tanto C es isomorfa a alguna curva definida sobre \mathbb{Q} . De hecho, es isomorfa a la curva $y^4 + z^4 - x^4 - x^2y^2 = 0$.

7. Primera restricción en el cálculo de los twists

Como ya se ha dicho, una cuártica plana lisa C definida sobre \mathbb{Q} no tiene por qué tener un modelo de Henn definido también sobre \mathbb{Q} , aunque sí lo admite definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Esto supone que la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre su grupo de automorfismos no tiene por qué ser la misma que en alguno de sus modelos de Henn, lo que afectará, como se verá más adelante, a la hora de calcular los twists. Este es el motivo por el que el trabajo se centra sólo en las cuárticas que admiten un modelo de Henn definido sobre \mathbb{Q} .

Así, con vistas a una generalización de este trabajo, además de las ideas consideradas en la sección anterior, interesa tener controladas las posibles acciones de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre los grupos de automorfismos de las cuárticas planas lisas. Para ello es conveniente considerar las posibles $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -estructuras de dichos grupos.

$G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras. Para simplificar, denotemos $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ y sea H un grupo finito. Dar una $G_{\mathbb{Q}}$ -estructura en H es dar una acción continua respecto a la topología de Krull y la discreta respectivamente:

$$G_{\mathbb{Q}} \times H \longrightarrow H \quad (\sigma, x) \longrightarrow \sigma x$$

compatible con la estructura de grupo de H , es decir, $\sigma(xy) = \sigma x \sigma y$. Tal acción es equivalente a dar un homomorfismo continuo de grupos

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow S = \text{Aut}(H).$$

El homomorfismo $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow S = \text{Aut}(H)$ factoriza por una extensión finita de Galois K/\mathbb{Q} con $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathcal{T} \subseteq S$.

Un homomorfismo de $G_{\mathbb{Q}}$ -grupos $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ con las acciones $\rho_i : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Aut}(H_i)$ es un homomorfismo de grupos que traslada las acciones, es decir, tal que $\varphi(\rho_1(\sigma)x) = \rho_2(\sigma)(\varphi(x))$. Cuando los dos grupos son iguales, la condición de que tengan estructuras equivalentes (exista un isomorfismo de $G_{\mathbb{Q}}$ -grupos), es equivalente a que ambos homomorfismos ρ_i difieran en un automorfismo interno de S . Así,

$$\text{Hom}(G_{\mathbb{Q}}, S) / \text{Inn}(S)$$

clasifica $G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras de H salvo equivalencia. Es claro que $G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras equivalentes factorizan sobre las mismas extensiones.

Dos acciones definidas sobre el mismo cuerpo K son equivalentes si los isomorfismos de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ a \mathcal{T}_i son conjugados. Fijado un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de S , sea \mathcal{T} uno de ellos, entonces

$$\text{Aut}(\mathcal{T}) / \text{Inn}(S) \mid_{\mathcal{T}}$$

clasifica $G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras salvo equivalencia asociadas al subgrupo \mathcal{T} .

Como en los últimos cuatro casos de la clasificación de Henn no hay parámetros en los modelos, no hará falta calcular el número de $G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras, pues sólo puede darse una, la dada en la clasificación. Para el resto de casos se ha obtenido:

Grupos	Número de $G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras
\mathbb{Z}_2	1
V_4	4
\mathbb{Z}_3	2
S_3	14
D_4	10
\mathbb{Z}_6	2
$Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_2$	≥ 4
S_4	14

Sin embargo, no todas estas $G_{\mathbb{Q}}$ -estructuras tienen por qué ser realizables, en el sentido de que exista una curva definida sobre \mathbb{Q} cuyo grupo de automorfismos tenga la $G_{\mathbb{Q}}$ -estructura dada. Sobre cómo aplicar esta idea en género dos puede consultarse [CARD01] y [CARD06].

Twists y cohomología

En este capítulo se resume la teoría cohomológica necesaria para el estudio posterior de los twists. Empezamos recordando la definición siguiente.

DEFINICIÓN 0.1. *Dada una curva C/\mathbb{Q} se define un twist suyo como una curva C'/\mathbb{Q} isomorfa a C sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Dos twists se identifican cuando son isomorfos sobre \mathbb{Q} . El conjunto de twists módulo \mathbb{Q} -isomorfismo se denota por $\text{Twist}(C)$.*

1. Cohomología de Galois

A continuación se recuerda brevemente la cohomología de Galois. Esta cohomología será clave para el estudio de los twists.

Sea K un cuerpo perfecto y \bar{K} una clausura algebraica de K . Se denota por G_K el grupo de Galois de \bar{K} sobre K , al que se dota de la topología profinita. Sea M un G_K -grupo, es decir, un grupo sobre el que G_K actúa de manera compatible con la estructura del grupo M .

DEFINICIÓN 1.1. *El 0-grupo de cohomología de Galois viene dado por*

$$H^0(G_K, M) = \{m \in M : \sigma m = m \ \forall \sigma \in G_K\}.$$

DEFINICIÓN 1.2. *El conjunto de 1-cociclos $Z^1(G_K, M)$ está formado por las aplicaciones continuas $\xi : G_K \rightarrow M$ que cumplen la llamada condición de cociclo: $\xi_{\sigma\tau} = \xi_\sigma \sigma \xi_\tau$ para cualesquiera $\sigma, \tau \in G_K$. Se define el 1-conjunto de cohomología de Galois*

$$H^1(G_K, M) = Z^1(G_K, M) / \sim$$

donde la relación de equivalencia viene dada por: $\xi \sim \eta$ si, y sólo si, existe $x \in M$ tal que $\xi_\sigma = x \eta_\sigma \sigma x^{-1}$ para todo $\sigma \in G_K$ (en tal caso se dice que los cociclos son cohomólogos.)

Si M es abeliano, entonces $H^1(G_K, M)$ hereda la estructura de grupo abeliano.

Obsérvese también que, si la acción de G_K sobre M es trivial, la condición de cociclo es simplemente la condición de homomorfismo y la relación de equivalencia resulta de hacer cociente por los automorfismos internos. Así, en este caso se tiene:

$$H^1(G_K, M) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(G_K, M) / \text{Inn}(M).$$

En el caso en que M es además abeliano, simplemente se tiene:

$$H^1(G_K, M) \simeq \text{Hom}_{\text{cont}}(G_K, M).$$

TEOREMA 1.1. (Silverman) *Dada una curva C/\mathbb{Q} se tiene una biyección*

$$\text{Twist}(C/\mathbb{Q}) \longleftrightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$$

dada por $\{\phi : C' \rightarrow C\} \mapsto \xi_\sigma = \phi \circ \sigma \phi^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN. La aplicación está bien definida, pues si dos curvas son isomorfas sobre \mathbb{Q} sus imágenes dan lugar a cociclos cohomólogos. Para la inyectividad sean C'/\mathbb{Q} y C''/\mathbb{Q} dos twists de C/\mathbb{Q} que tienen la misma imagen, sean $\phi : C' \rightarrow C$ y $\psi : C'' \rightarrow C$ los isomorfismos correspondientes. Entonces, existe $\alpha \in \text{Aut}(C)$ tal que $\alpha(\psi \sigma \psi^{-1}) = (\phi \sigma \phi^{-1}) \sigma \alpha$ para todo $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Sea ahora $\theta = \phi^{-1} \alpha \psi : C'' \rightarrow C'$, el objetivo es probar que este isomorfismo está de hecho definido sobre \mathbb{Q} . Si $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, entonces se tiene

$$\sigma \theta = (\sigma \phi^{-1} \sigma \alpha) \sigma \psi = \phi^{-1} \alpha \psi \sigma \psi^{-1} \sigma \psi = \phi^{-1} \alpha \psi = \theta.$$

Luego, efectivamente, C' y C'' son \mathbb{Q} -isomorfas.

En cuanto a la sobreyectividad, sea $\xi \in H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ para el que se debe construir el twist correspondiente. Considérese $\overline{\mathbb{Q}}(C)_\xi$ un cuerpo isomorfo a $\overline{\mathbb{Q}}(C)$ mediante un isomorfismo $Z : \overline{\mathbb{Q}}(C) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}(C)_\xi$ tal que ambos cuerpos sólo se diferencian en la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sobre ellos, siendo esta ${}^\sigma Z(f) = Z({}^\sigma f \xi_\sigma)$.

Se tiene que el cuerpo fijo en $\overline{\mathbb{Q}}(C)_\xi$ por $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ es el cuerpo de funciones de una curva C'/\mathbb{Q} , y por el isomorfismo Z en los cuerpos de funciones sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ estas curvas resultan ser $\overline{\mathbb{Q}}$ -isomorfas. Por último es fácil comprobar que este twist proporciona el cociclo deseado. \square

2. Twists y cuerpos de definición

En la sección anterior se ha dado un método para determinar el conjunto de twists de una curva definida sobre \mathbb{Q} a partir del conjunto de cohomología $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$. El objetivo en ésta es determinar las extensiones L/\mathbb{Q} por las que factorizan dichos cociclos.

Sea C/\mathbb{Q} y C'/\mathbb{Q} un twist suyo, y sea $\phi : C' \rightarrow C$ un isomorfismo entre ellas. Sean K y K' los mínimos cuerpos de definición de $\text{Aut}(C)$ y $\text{Aut}(C')$, respectivamente. Sea, además, M el mínimo cuerpo donde está definido ϕ .

LEMA 2.1. (Fité, [FITE10]) $L = MK$ es el mínimo cuerpo donde están definidos todos los isomorfismos entre C y C' . Se tiene que $L = MK' = MK$. Además, los cuerpos L , K y K' son extensiones de Galois de \mathbb{Q} .

DEFINICIÓN 2.1. El cuerpo L se llamará cuerpo de definición del twist entre C y C' .

La minimalidad de K y L proporciona la inyectividad de los siguientes morfismos:

$$\lambda_K : \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(\text{Aut}(C)), \quad \sigma \rightarrow \{\alpha \rightarrow {}^\sigma \alpha\}$$

$$\lambda_L : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Aut}(C), \quad \sigma \rightarrow \phi \circ {}^\sigma \phi^{-1}$$

$$\lambda : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(C) \rtimes_{\text{id}} \text{Aut}(\text{Aut}(C)), \quad \sigma \rightarrow (\phi \circ {}^\sigma \phi^{-1}, \lambda_K(\bar{\sigma}))$$

donde $\bar{\sigma}$ es la imagen de σ por la proyección natural $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. De hecho, se cumple la propiedad siguiente.

PROPOSICIÓN 2.1. (Fité, [FITE10]) Se tiene un morfismo inyectivo

$$\lambda : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$$

definido por $\sigma \rightarrow (\phi \circ {}^\sigma \phi^{-1}, \bar{\sigma})$.

3. Una representación auto-dual

Sea C una curva de género g . Dado un cociclo $\xi \in H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ que factoriza por $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ interesa dar un método para determinar la ecuación del correspondiente twist. En esta sección se dan las herramientas que permiten obtenerlo en el caso no hiperelíptico de género $g = 3$.

Sea $\phi : C_1 \rightarrow C_2$ un morfismo de curvas definidas sobre un cuerpo K . Entonces, se induce de forma natural un morfismo entre los cuerpos de funciones de las curvas:

$$\begin{aligned} \phi^* : K(C_2) &\rightarrow K(C_1) \\ f &\rightarrow f \circ \phi \end{aligned}$$

y éste a su vez induce un morfismo entre los espacios de las formas diferenciales holomorfas de ambas curvas:

$$\begin{aligned} \phi^* : \Omega_K^1(C_2) &\rightarrow \Omega_K^1(C_1) \\ fdg &\rightarrow (\phi^* f)d(\phi^* g). \end{aligned}$$

LEMA 3.1. (Silverman, [SILV86]) Sea V un \bar{K} -espacio vectorial en el que $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ actúa continuamente de forma compatible con su acción en \bar{K} . Entonces

$$V \simeq \bar{K} \otimes_K V^{G_K}.$$

TEOREMA 3.1. Sea $\phi : C' \rightarrow C$ un isomorfismo definido sobre L , y sea ξ el cociclo correspondiente. El espacio vectorial $\Omega^1(C)$ de las formas diferenciales holomorfas de C , que tiene dimensión el género g de la curva, cumple la propiedad:

$$(\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L)_{\xi}^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q})} \simeq \Omega_{\mathbb{Q}}^1(C')$$

donde la acción viene dada por $\sigma(\omega \otimes l) = (\xi_{\sigma}^*)^{-1}(\sigma\omega) \otimes \sigma l$.

DEMOSTRACIÓN. El lema anterior sigue siendo cierto cuando en vez de \bar{K} se toma una extensión finita de Galois, así sustituyendo \bar{K} por L , K por \mathbb{Q} y V por $\Omega_L^1(C)$ y teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}(C') \simeq L(C)_{\xi}^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q})}$ se concluye el resultado. \square

El caso de cuárticas planas lisas es especialmente interesante. En efecto, una vez escogida una base $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ de $\Omega^1(C)$, la inmersión canónica de C en \mathbb{P}^2 permite asociar a cada automorfismo $\phi \in \text{Aut}_K(C)$ una matriz $B \in \text{PGL}_3(K)$ que proporciona el automorfismo a nivel de la curva canónica imagen en \mathbb{P}^2 . La matriz B depende de la base escogida y, en esta misma base, al morfismo inducido (aplicación lineal) $\phi^* : \Omega^1(C) \rightarrow \Omega^1(C)$ le corresponde la matriz transpuesta B' .

De modo similar, el isomorfismo $\phi : C' \rightarrow C$ puede ser visto como una matriz A a nivel de las curvas canónicas imagen una vez fijadas bases en los respectivos espacios. En estas bases, al morfismo $\phi^* : \Omega^1(C') \rightarrow \Omega^1(C)$ le corresponde la matriz A' .

Entonces, fijada una base dx_i de $\Omega^1(C)$, denotaremos por ξ_{σ} la correspondiente matriz en $\text{PGL}_3(K)$. A nivel de los espacios de diferenciales holomorfas, se tiene $(\xi_{\sigma}^*)^{-1} = (\sigma A \circ A^{-1})^t$ y el isomorfismo del teorema es de hecho el siguiente:

$$\sum dx_j \otimes b_{ji} \longleftrightarrow dx'_i$$

con $(\phi^*)^{-1} = (A')^{-1} = (b_{ij})$.

Para cuárticas planas lisas se puede comprobar fácilmente que la anterior acción es auto-dual. En otras palabras, la acción contragradiente sobre $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L$, dada matricialmente por por

$$\sigma(\omega \otimes l) = \xi_{\sigma}(\omega) \otimes \sigma l,$$

también proporciona el espacio vectorial $\Omega^1(C')$. Es decir, se tiene el isomorfismo

$$(\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L)_{\xi}^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q})^{\vee}} \simeq \Omega_{\mathbb{Q}}^1(C')$$

dado por

$$\sum dx_j \otimes a_{ji} \longleftrightarrow dx'_i$$

con $\phi = A^{-1} = (a_{ij})$.

4. Problemas de inmersión en teoría de Galois

Para determinar los cuerpos mínimos de definición L de los twists, es necesario resolver algunos problemas de inmersión en teoría de Galois; a continuación se introducen algunos conceptos sobre estos problemas de inmersión.

Dados Q y N grupos, se dice que un grupo G es una extensión de Q por N si existe una sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1.$$

Siempre hay una extensión trivial, que es el producto directo de Q y N .

Dada una extensión de Galois K/\mathbb{Q} , pongamos $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, sea H un grupo y \tilde{G} una extensión de G por H ,

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \tilde{G} \longrightarrow G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1.$$

Se define el problema de inmersión de Galois como aquel que pide determinar, cuando las haya, todas las extensiones de Galois L/\mathbb{Q} tales que $\text{Gal}(L/K) \simeq H$, $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \tilde{G}$ y se tenga el siguiente diagrama conmutativo, donde la primera sucesión exacta es la dada por la extensión de grupos y la segunda la dada por los homomorfismos naturales de inclusión y proyección:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
1 & \longrightarrow & \text{Gal}(L/K) & \longrightarrow & \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Este problema no tiene por qué tener solución; si no la tiene hay que detectarlo, y si la tiene hay que hallar todas las soluciones. Resolver uno de estos problemas en general es complicado, pues no hay una teoría general, y hay que enfrentarse a cada caso por separado.

En el estudio posterior se deberán resolver problemas de este tipo, donde L y K son los definidos en las secciones anteriores. El siguiente teorema, que aparece en [COX89] para $p = 3$, permitirá resolver estos problemas.

TEOREMA 4.1. *Sea p primo, ζ una raíz p -ésima primitiva de la unidad y $K = \mathbb{Q}(\zeta)$. El problema de inmersión de Galois*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{A}^1(\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \text{Gal}(M/K) & \longrightarrow & \text{Gal}(M/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

con $\mathcal{A}^1(\mathbb{F}_p)$ el grupo lineal afín o grupo de Fröbenius, tiene como única familia de soluciones $M = K(\sqrt[p]{m})$ con m entero positivo cuando $p > 2$.

DEMOSTRACIÓN. Los cuerpos $M = K(\sqrt[p]{m})$, con m entero positivo, son claramente solución del problema de inmersión. Sea M ahora una solución cualquiera. Sea τ un levantamiento en $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ de un generador de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Se cumple $\tau(\zeta) = \zeta^k$ con k un cierto elemento primitivo de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Si σ es un generador de $\text{Gal}(M/K) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, entonces $\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{a})/\mathbb{Q})$ implica que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^k$.

Sea α un elemento primitivo entero algebraico de la extensión $M^{(\tau)}/\mathbb{Q}$. Entonces como $K(\alpha) \subseteq M$ y $p \mid [K(\alpha) : \mathbb{Q}]$, $p-1 \mid [K(\alpha) : \mathbb{Q}]$ con $\text{mcd}(p, p-1) = 1$ se concluye que $M = K(\alpha)$. Se definen entonces $u_i \in M$ por:

$$u_i = \alpha + \zeta^i \sigma^{-1}(\alpha) + \zeta^{2i} \sigma^{-2}(\alpha) + \dots + \zeta^{(p-1)i} \sigma^{-(p-1)}(\alpha),$$

con $i = 0, 1, \dots, p-1$. Los u_i son enteros algebraicos que satisfacen $\sigma(u_i) = \zeta^i u_i$ y $\tau(u_i) = u_i$ puesto que $\tau(\alpha) = \alpha$ y $\tau\sigma^{-l} = \sigma^{-lk}\tau$. Como u_0 es fijo por σ , τ tenemos que u_0 es entero. Del mismo modo se tiene que u_1^p, \dots, u_{p-1}^p son enteros. Si $u_1 \neq 0$, se afirma que $M = K(u_1)$. En caso contrario como $[M : K] = p$ se tiene que $u_1 \in K$ y se contradice $\sigma(u_1) = \zeta u_1$ y $u_1 \neq 0$. Así haciendo $m = u_1^p$ se puede suponer positivo y se concluye el resultado.

Si $u_i \neq 0$ con $i > 1$ se procede de forma análoga. Queda pues el caso $u_1 = u_2 = \dots = u_{p-1} = 0$, pero en tal caso

$$u_0 = u_0 + u_1 + \dots + u_{p-1} = p\alpha \in \mathbb{Z},$$

lo que contradice que α sea un elemento primitivo de la extensión M/K . □

Cuando en vez de un primo p se considera un entero positivo $q = p^r$ potencia de primo el resultado sigue siendo cierto, y la demostración dada cambiando p por q puede adaptarse. El único paso delicado es cuando se afirma que $M = K(u_1)$, pues queda descartar los casos en que $[K(u_1) : K] = p^j$ con $j \in \{1, \dots, r-1\}$ pues ahora $[M : K] = p^r$. Supongamos pues que $[K(u_1) : K] = p^j$ y sea $\bar{\sigma} \in \text{Gal}(K(u_1)/K)$ la restricción de σ , entonces $\bar{\sigma}(u_1) = \xi u_1$ y $\bar{\sigma}$ tiene orden p^r , lo que contradice $[K(u_1) : K] = p^j$ con $j < r$.

Cálculo de $H^1(G_{\mathbb{Q}}, \text{Aut}(C))$

En este capítulo se desarrolla la estrategia, basada en los resultados anteriores, que se usará para determinar los twists de las cuárticas planas lisas que admiten un modelo de Henn definido sobre \mathbb{Q} y provienen de ciertos cociclos a los que llamaremos *completos*. De todos modos, la estrategia es general y sirve para cuárticas planas lisas arbitrarias. Como antes, C denota una cuártica plana lisa. El primer paso es determinar el conjunto de cohomología $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$, pues por el Teorema 1.1 del capítulo 2 este conjunto de cohomología está en biyección con el conjunto $\text{Twist}(C)$.

1. Segunda restricción en el cálculo de los twists

Por ser los cociclos continuos con la topología profinita de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, todo cociclo factoriza por una extensión finita de Galois L/\mathbb{Q} . De hecho, la subextensión mínima por la que factoriza cada cociclo es lo que antes hemos llamado el cuerpo mínimo de definición L del twist asociado al cociclo. Así, es suficiente determinar el conjunto finito

$$H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C)).$$

Como hemos comentado anteriormente, sabemos que $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ es un subgrupo de $\text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. De aquí en adelante consideraremos únicamente cociclos del tipo siguiente:

$$\xi : \text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(C)$$

donde la acción de (φ, σ) sobre $\text{Aut}(C)$ viene dada por la acción natural de la segunda componente σ . De este modo, por restricción obtenemos ciertos cociclos

$$\xi : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(C)$$

que llamaremos *completos*. Debemos hacer notar que no todos los cociclos de $H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ son completos, es decir, no todos provienen de cociclos en $H^1(\text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$. No obstante, el hecho de que la extensión L/\mathbb{Q} deba contener K como subcuerpo intermedio hace que en muchos casos todos sean completos.

Así, determinaremos $H^1(\text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$, donde ahora todos los datos son conocidos para los modelos de la estratificación de Henn. Para cubrir todos los casos, deberíamos calcular $H^1(H, \text{Aut}(C))$, para todo subgrupo $H \subseteq \text{Aut}(C) \rtimes_{\text{id}} \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Para calcular los cociclos se dará una representación por generadores y relaciones de $\text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, se mandarán los generadores a todos los posibles elementos de $\text{Aut}(C)$ y se verificará para qué combinaciones se obtienen cociclos. El modo de comprobar que una aplicación dada por su valor en los generadores y extendida por la condición de cociclo es un cociclo es verificar que envía las relaciones a la identidad de $\text{Aut}(C)$. Se verá que todo cociclo se determina de este modo y que toda aplicación así construida produce un cociclo.

Dado un cociclo, si se conoce qué valor toma sobre los generadores se sabe qué valor toma sobre todos los elementos a través de la relación de cociclo, con lo que queda completamente determinado. Y obviamente ha de cumplir que manda las relaciones a la identidad de $\text{Aut}(C)$.

A la inversa, si se asignan valores de $\text{Aut}(C)$ a los generadores de modo que se cumpla que las relaciones van a la identidad esto determina un cociclo. Para ello habrá que comprobar que a cada elemento se le está asignando un único valor de $\text{Aut}(C)$ y que la relación de cociclo se cumple para cualesquiera elementos.

En adelante será de utilidad considerar la siguiente interpretación de los cociclos:

LEMA 1.1. *Existe una biyección entre los elementos $\xi \in H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ y los homomorfismos*

$$\bar{\xi} : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \quad \sigma \longrightarrow (\xi_{\sigma}, \sigma)$$

tales que compuestos con la segunda proyección natural π_2 de $\text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ dan la identidad en $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Además, dos cociclos son cohomólogos si, y sólo si, los homomorfismos correspondientes difieren en un automorfismo interno de $\text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ dado por un elemento de la forma $(\varphi, 1)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado un cociclo ξ la aplicación $\bar{\xi}$ es un homomorfismo, pues

$$\bar{\xi}(\sigma\tau) = (\xi_{\sigma\tau}, \sigma\tau) = (\xi_{\sigma}^{\sigma} \xi_{\tau}, \sigma\tau) = (\xi_{\sigma}, \sigma)(\xi_{\tau}, \tau) = \bar{\xi}(\sigma) \bar{\xi}(\tau).$$

Recíprocamente, dado un homomorfismo $\bar{\xi} : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ tal que $\pi_2 \circ \bar{\xi} = \text{id}_{\text{Gal}(L/\mathbb{Q})}$, sea π_1 la primera proyección de $\text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, entonces se tiene que $\pi_1 \circ \bar{\xi}$ es un cociclo, y además este cociclo induce el homomorfismo de partida $\bar{\xi}$.

Por último, un cociclo ξ es cohomólogo a otro η si y sólo si existe $\varphi \in \text{Aut}(C)$ tal que $\xi_{\sigma} = \varphi \circ \eta_{\sigma} \circ \sigma(\varphi^{-1})$, lo cual ocurre si, y sólo si, $\bar{\xi}(\sigma) = (1, \varphi) \bar{\eta}(\sigma) (1, \varphi^{-1})$. \square

Así, comprobar que a cada elemento se le está asignando un único valor de $\text{Aut}(C)$ y que la relación de cociclo se cumple para cualesquiera elementos se desprende entonces del siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 1.1. Sean $\langle S | R \rangle$ una presentación de un grupo y H otro grupo. Si $f : S \rightarrow H$ es una aplicación tal que $f(R) = 1$, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\psi : \langle S | R \rangle \rightarrow H$ tal que $\psi(\bar{s}) = f(s)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi : \langle S \rangle \rightarrow H$ el homomorfismo de grupos que se obtiene al extender la aplicación f . Como $\psi(s^{-1}rs) = 1$ para todo $r \in R$ y $s \in S$ se tiene que $N_S(R) \subseteq \ker(\psi)$, luego ψ factoriza a través del cociente $\langle S | R \rangle$. Se denota el correspondiente morfismo $\langle S | R \rangle \rightarrow H$ por la misma letra ψ . Obviamente $\psi(\bar{s}) = f(s)$, de donde además se desprende la unicidad. \square

Finalmente, calculados los cociclos, habrá que hacer cociente por los cobordes. La forma óptima de calcular los cociclos módulo cobordes, y que es la que se utiliza, es la siguiente. Partimos de una presentación finita del grupo $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ por generadores y relaciones. Sea g_1 el primer generador de la presentación de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Como g_1 es de orden finito, esto da una primera relación que permite descartar elementos de $\text{Aut}(C)$ que puedan ser imágenes de g_1 por un cociclo. Como posteriormente se deberá hacer cociente por los cobordes, esto permite quedarse sólo con representantes de clases de la siguiente relación de equivalencia en $\text{Aut}(C)$: $\varphi \sim \psi \iff \exists \phi$ tal que $\varphi = \phi \circ \psi \circ g_1 \phi^{-1}$.

Para cada imagen ξ_{g_1} de g_1 obtenida en el paso anterior, consideramos g_2 el siguiente generador y examinamos a qué elementos puede enviarse g_2 a partir de su orden; de éstos, se escogen como candidatos un elemento por cada clase de equivalencia dada por la relación anterior pero admitiendo sólo los ϕ que hacen $\xi_{g_1} = \phi \circ \xi_{g_1} \circ g_1 \phi^{-1}$. Una vez que se tiene los candidatos se comprueba la condición de cociclo para las relaciones que involucren a g_1 y g_2 .

Procediendo de este modo con el resto de generadores, se acaban calculando todos los cociclos módulo cobordes sin repeticiones.

En la mayoría de los casos, los cociclos se han computado a mano siguiendo este procedimiento. Aun así, se ha elaborado en GAP un programa que permite calcular los cociclos. El programa ha sido muy útil a la hora de comprobar los cálculos, así como para resolver los casos que resultaba impracticable hacer a mano.

2. Programa en GAP para calcular los cociclos

A continuación se muestra el programa en GAP elaborado para calcular los cociclos de $H^1(G, \text{Aut}(C))$, donde $G = \text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. El programa está basado en la forma de considerar los cociclos del Lema 1.1; es decir, se buscan los homomorfismos de la forma:

$$\bar{\xi} : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$$

$$\sigma \mapsto (\xi_{\sigma}, \sigma).$$

Mostramos el programa para el caso IV en la estratificación de Henn. Primero se introducen las matrices que definen $\text{Aut}(C)$:

```
m1:= [[E(3),0,0], [0,E(3)^2,0], [0,0,1]];
m2:= [[0,1,0], [1,0,0], [0,0,1]];
AutC := Group([m1,m2]);
```

Se introduce el grupo $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ y se calcula $\text{Aut}(\text{Aut}(C))$:

```
G:= AbelianGroup(IsPcGroup, [2]);
AutAutC := AutomorphismGroup(AutC);
id := Identity(AutAutC);
```

Se da la acción de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ sobre $\text{Aut}(C)$ a través de los generadores:

```
m1t:= m1^2;
m2t:= m2;
```

Se busca el elemento de $\text{Aut}(\text{Aut}(C))$ que produce dicha acción. Esto se hace consiguiendo que se anulen simultáneamente las siguientes expresiones:

```
zero := [[0,0,0], [0,0,0], [0,0,0]];
phi := Filtered(AutAutC, i -> m1^i-m1t = zero and m2^i-m2t = zero) [1];
```

El siguiente paso es determinar $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$, para lo que debe construirse el producto semidirecto correspondiente, luego lo primero es definir la aplicación de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ en $\text{Aut}(\text{Aut}(C))$:

```
hom := GroupHomomorphismByImages(G, AutAutC, GeneratorsOfGroup(G), [phi]);
GalLQ := SemidirectProduct(G, hom, AutC);
```

Como interesa trabajar con el menor número posible de generadores de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, se pasa el grupo obtenido como una presentación finita y simplificada del mismo:

```
iso0 := IsomorphismFpGroup(GalLQ, "g");
F := Image(iso0);
iso := IsomorphismSimplifiedFpGroup(F);
GLQ := Image(iso); GensLQ := GeneratorsOfGroup(GLQ);
Gens := List(GensLQ, i->PreImage(iso0, PreImage(iso, i)));
```

Y así se sabe qué generadores basta utilizar.

El siguiente paso es determinar $\text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$, para lo que hay que definir primero la acción de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sobre $\text{Aut}(C)$ (que está definida por la de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ dada antes). Luego se debe ver a donde se proyectan los generadores de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sobre $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$:

```
tmp:= List(Gens, i->Factorization(G, Image(Projection(GalLQ), i)));
```

Con esta información ya se puede definir la acción:

```
homdos:= GroupHomomorphismByImages(GalLQ, AutAutC, Gens, [phi, id]);
ONES := SemidirectProduct(GalLQ, homdos, AutC);
```

El siguiente paso es determinar a qué elementos se puede mandar los generadores de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sobre $\text{Aut}(C) \rtimes \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Esto se hará en varios pasos. Primero se impone la condición de que $\sigma \rightarrow (\cdot, \sigma)$:

```
can:= List(Gens, i->Elements(RightCoset
(Image(Embedding(ONES, 2)), Image(Embedding(ONES, 1), i))));
```

Por querer homomorfismos el orden de la imagen de cada generador debe dividir al orden del generador. Esto se podría determinar más adelante, pero se intenta trabajar en todo momento con el menor número de opciones, para que computacionalmente sea menos costoso.

```
fil:= List(can,j->Filtered(j,i->IsInt(Order(j[1])/Order(i)))));
```

Por los mismos motivos anteriores conviene fijar ya un representante de clases de conjugación en $\text{Aut}(C) \times \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ para las posibles imágenes del primer generador. El modo de proceder aquí es el mismo que se utilizaba a la hora de calcular los cociclos a mano.

```
fiscov:= List(fil[1],i->Unique(List(Elements(Image(Embedding(ONES,2))),j->j^(-1)*i*j)));
embedfiscov:= Unique(List(fiscov,i->SortedList(i)));
fil[1]:= List(embedfiscov,i->i[1]);
```

El siguiente paso es determinar todos los homomorfismos que mandan los generadores de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ a las posibles imágenes fil . Se muestran dichos homomorfismos por las imágenes de los generadores.

```
maps:= List(Cartesian(fil),i->GroupHomomorphismByImages(GalLQ,ONES,Gens,i));
morfs:= Filtered(maps,i->i <>fail);
tot:= List(morfs,i->List(Gens,j->Image(i,j)));
```

Se le asigna a cada homomorfismo dado por las imágenes de los generadores de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ la lista de las imágenes conjugadas, tot1 . Se depura la lista de homomorfismos para sólo quedarse con un representante tot2 :

```
tot1:= Unique(List(tot,i->List(Elements
(Image(Embedding(ONES,2))),k->[k^(-1)*i[1]*k,k^(-1)*i[2]*k ])));
tot2:= Unique(List(tot1,i->SortedList(i)[1]));
```

Finalmente, los cociclos se muestran con:

```
tot2;
```

Y su número se calcula con:

```
Length(tot2);
```

El programa entero corrido para este caso (el IV) muestra lo siguiente:

```
m1:= [[E(3),0,0],[0,E(3)^2,0],[0,0,1]];
m2:= [[0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]];
AutC := Group([m1,m2]);

AutAutC := AutomorphismGroup(AutC);
id := Identity(AutAutC);

m1t:= m1^2;
m2t:= m2;

zero := [[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]];
phi := Filtered(AutAutC,i->m1^i-m1t = zero and m2^i-m2t = zero)[1];

G:= AbelianGroup(IsPcGroup,[2]);
```

```

hom := GroupHomomorphismByImages(G, AutAutC, GeneratorsOfGroup(G), [phi]);
GalLQ := SemidirectProduct(G, hom, AutC);
iso0 := IsomorphismFpGroup(GalLQ, "g");
F := Image(iso0);
iso := IsomorphismSimplifiedFpGroup(F);
GLQ := Image(iso);
GensLQ := GeneratorsOfGroup(GLQ);
Gens := List(GensLQ, i->PreImage(iso0, PreImage(iso, i)));

[ f1, f2 ]

tmp:= List(Gens, i->Factorization(G, Image(Projection(GalLQ), i)));

[ x1, <identity ...>]

homdos:= GroupHomomorphismByImages(GalLQ, AutAutC, Gens, [phi, id]);
ONES := SemidirectProduct(GalLQ, homdos, AutC);

can:= List(Gens, i->Elements(RightCoset
    (Image(Embedding(ONES, 2)), Image(Embedding(ONES, 1), i))));
fil:= List(can, j->Filtered(j, i->IsInt(Order(j[1])/Order(i))));

fiscov:= List(fil[1], i->Unique(List
    (Elements(Image(Embedding(ONES, 2))), j->j^(-1)*i*j));
embedfiscov:= Unique(List(fiscov, i->SortedList(i)));
fil[1]:= List(embedfiscov, i->i[1]);

maps:= List(Cartesian(fil), i->GroupHomomorphismByImages(GalLQ, ONES, Gens, i));
morfs:= Filtered(maps, i->i <>fail);

tot:= List(morfs, i->List(Gens, j->Image(i, j)));
tot1:= Unique(List(tot, i->List(Elements(Image(Embedding(ONES, 2))),
    k->[k^(-1)*i[1]*k, k^(-1)*i[2]*k])));
tot2:= Unique(List(tot1, i->SortedList(i)[1]));

[ [ f1, f2 ], [ f1, f2*f4 ], [ f1, f2*f4*f5^2 ],
  [ f1*f4*f5^2, f2 ], [ f1*f4*f5^2, f2*f4 ] ]

Length(tot2);

```

5

3. Construcción de las ecuaciones de los twists

El siguiente paso, una vez conocidos los elementos del conjunto de cohomología, es construir explícitamente las ecuaciones de los twists asociados a cada uno de ellos. Sea $\xi \in H^1(\text{Aut}(C) \rtimes_{\lambda_K} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$, se pretende calcular el twist $\phi : C' \rightarrow C$ asociado a él. Esto se hará mediante el isomorfismo

$$(\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L)_{\xi}^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q})} \simeq \Omega_{\mathbb{Q}}^1(C')$$

dado por la acción en $\Omega_L^1(C)$ definida por $\omega \rightarrow \xi_{\sigma}(\sigma \omega)$. Para calcular una base de los puntos fijos de $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L$ deberemos determinar previamente L , esto es, haber resuelto

el siguiente problema de inmersión de Galois:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \text{Aut}(C) & \longrightarrow & \text{Aut}(C) \rtimes_{\text{id}} \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1 \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
1 & \longrightarrow & \text{Gal}(L/K) & \longrightarrow & \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1
\end{array}$$

donde las aplicaciones de la primera sucesión son $\phi \longrightarrow \phi \rtimes_{\text{id}} \text{id}$ y $\phi \rtimes_{\text{id}} \sigma \longrightarrow \sigma$.

Una vez determinado L , a partir de una base suya $\{l_1, \dots, l_m\}$ se obtiene la base $\{dx_i \otimes l_j\}$ de $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L$. Sea

$$\rho_{\xi} : \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{GL}(n \cdot g, \mathbb{Q})$$

el homomorfismo dado por la acción del twist sobre $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L$ en la base $\{dx_i \otimes l_j\}$. Entonces el subespacio de puntos fijos de $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L$ por la acción del twist viene dado por:

$$\bigcap_{\sigma \in \text{Gal}(L/\mathbb{Q})} \text{Ker}(\rho_{\xi}(\sigma) - \text{Id})$$

de donde se obtiene una base. Esta base colocada por columnas da la matriz A correspondiente al isomorfismo $\phi : C' \longrightarrow C$. Sustituyendo por filas en la ecuación F de la curva C se obtiene la ecuación F' del twist C' . Cualquier combinación lineal racional en las columnas de la matriz A (elecciones de distintas bases) produce ecuaciones distintas del mismo twist, es decir distintas cuárticas planas lisas isomorfas sobre \mathbb{Q} entre ellas.

Cálculo de los twists

En este capítulo se muestran las tablas de cociclos completos y twists para cada caso de la estratificación de [HENN76] del espacio de móduli de curvas lisas de género 3 no hiperelípticas cuando los parámetros de los modelos son racionales. Los cociclos y los twists se han construido como se ha indicado anteriormente.

Para cada caso se muestra primero el modelo de Henn de la curva, su grupo de automorfismos y los cuerpos de definición del grupo de automorfismos y de los twists considerados. A continuación se presentan las tablas que contienen información de los cociclos de $H^1(\text{Gal}(L/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ con la notación de los capítulos anteriores, así como las ecuaciones explícitas de los twists. En los casos en los que el isomorfismo entre los twists y la curva de partida no son evidentes se da además las bases de puntos fijos de $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes L$ por la acción del twist.

El modo de leer esta información es el siguiente: se parte de una cuártica plana lisa definida sobre \mathbb{Q} de la cual se quiere determinar todos sus twists. Si su grupo de automorfismos es trivial, que es lo que ocurre en la mayoría de los casos, entonces no tiene ningún twist no trivial. En caso contrario se debe encontrar su modelo en la estratificación de Henn, para ello lo primero es determinar a que grupo es isomorfo su grupo de automorfismos para así determinar en que caso se encuentra, esto puede hacerse con ayuda de los puntos de Weierstrass. Si el caso tiene un modelo con parámetros, estos deben ser hallados. Un modo de determinarlos es por ejemplo calcular explícitamente generadores del grupo de automorfismos de la curva y determinar una matriz de cambio de base que mande estos generadores a elementos del grupo de automorfismos del caso correspondiente. Esta matriz es de hecho el isomorfismo entre la curva de partida y un modelo de Henn suyo, lo que permite determinar los parámetros. Si estos parámetros son racionales, entonces los twists de la curva de partida son los dados en la tabla que se muestra para su caso.

1. Caso I

C	$x^4 + x^2 F(y, z) + G(y, z)$
$\text{Aut}(C)$	$\mathbb{Z}_2 = \langle A \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
K	\mathbb{Q}
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \rangle$
L	$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

Cociclos	
	σ
ξ_1	1
ξ_2	A

Twists	
C_{ξ_1}	$x^4 + x^2 F(y, z) + G(y, z)$
C_{ξ_2}	$x^4 + dx^2 F(y, z) + d^2 G(y, z)$

2. Caso II

C	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2 + by^2z^2 + cz^2x^2$
$\text{Aut}(C)$	$V_4 = \langle A, B \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
K	\mathbb{Q}
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$V_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$
L	$\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$
	$\sigma : \begin{cases} \sqrt{d_1} \rightarrow -\sqrt{d_1} \\ \sqrt{d_2} \rightarrow \sqrt{d_2} \end{cases}, \quad \tau : \begin{cases} \sqrt{d_1} \rightarrow \sqrt{d_1} \\ \sqrt{d_2} \rightarrow -\sqrt{d_2} \end{cases}$

Cociclos		
	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	1	A
ξ_3	1	B
ξ_4	1	AB
ξ_5	A	1
ξ_6	A	A
ξ_7	A	B
ξ_8	A	AB
ξ_9	B	1
ξ_{10}	B	A
ξ_{11}	B	B
ξ_{12}	B	AB
ξ_{13}	AB	1
ξ_{14}	AB	A
ξ_{15}	AB	B
ξ_{16}	AB	AB

Twists	
C_{ξ_1}	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2 + by^2z^2 + cz^2x^2$
C_{ξ_2}	$d_2^2x^4 + y^4 + z^4 + ad_2x^2y^2 + by^2z^2 + cd_2z^2x^2$
C_{ξ_3}	$x^4 + d_2^2y^4 + z^4 + ad_2x^2y^2 + bd_2y^2z^2 + cz^2x^2$
C_{ξ_4}	$x^4 + y^4 + d_2^2z^4 + ax^2y^2 + bd_2y^2z^2 + cd_2z^2x^2$
C_{ξ_5}	$d_1^2x^4 + y^4 + z^4 + ad_1x^2y^2 + by^2z^2 + cd_1z^2x^2$
C_{ξ_6}	$d_1^2d_2^2x^4 + y^4 + z^4 + ad_1d_2x^2y^2 + by^2z^2 + cd_1d_2z^2x^2$
C_{ξ_7}	$d_1^2x^4 + d_2^2y^4 + z^4 + ad_1d_2x^2y^2 + bd_2y^2z^2 + cd_1z^2x^2$
C_{ξ_8}	$d_1^2x^4 + y^4 + d_2^2z^4 + ad_1x^2y^2 + bd_2y^2z^2 + cd_1d_2z^2x^2$
C_{ξ_9}	$x^4 + d_1^2y^4 + z^4 + ad_1x^2y^2 + bd_1y^2z^2 + cz^2x^2$
$C_{\xi_{10}}$	$d_2^2x^4 + d_1^2y^4 + z^4 + ad_1d_2x^2y^2 + bd_1y^2z^2 + cd_2z^2x^2$
$C_{\xi_{11}}$	$x^4 + d_1^2d_2^2y^4 + z^4 + ad_1d_2x^2y^2 + bd_1d_2y^2z^2 + cz^2x^2$
$C_{\xi_{12}}$	$x^4 + d_1^2y^4 + d_2^2z^4 + ad_1x^2y^2 + bd_1d_2y^2z^2 + cd_2z^2x^2$
$C_{\xi_{13}}$	$x^4 + y^4 + d_1^2z^4 + ax^2y^2 + bd_1y^2z^2 + cd_1z^2x^2$
$C_{\xi_{14}}$	$d_2^2x^4 + y^4 + d_1^2z^4 + ad_2x^2y^2 + bd_1y^2z^2 + cd_1d_2z^2x^2$
$C_{\xi_{15}}$	$x^4 + d_2^2y^4 + d_1^2z^4 + ad_2x^2y^2 + bd_1d_2y^2z^2 + cd_1z^2x^2$
$C_{\xi_{16}}$	$x^4 + y^4 + d_1^2d_2^2z^4 + ax^2y^2 + bd_1d_2y^2z^2 + cd_1d_2z^2x^2$

3. Caso III

C	$z^3y + x(x-y)(x-ay)(x-by)$
$\text{Aut}(C)$	$\mathbb{Z}_3 = \langle A \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$S_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$
L	$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m}, \xi)$
	$\sigma : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \xi \sqrt[3]{m} \end{cases}, \tau : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi^2 \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \sqrt[3]{m} \end{cases}$

Cociclos		
	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	A	1
ξ_3	A^2	1

Twists	
C_{ξ_1}	$z^3y + x(x-y)(x-ay)(x-by)$
C_{ξ_2}	$z^3y + mx(x-y)(x-ay)(x-by)$
C_{ξ_3}	$z^3y + m^2x(x-y)(x-ay)(x-by)$

4. Caso IV

C	$x^3z + y^3z + x^2y^2 + axyz^2 + bz^4$
$\text{Aut}(C)$	$S_3 = \langle A, B \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$S_3 \times \mathbb{Z}_2 = \langle \sigma, \tau, \nu \rangle = \text{GAP}(12,4)$
L	$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{m}, \sqrt{n})$
	$\sigma : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \xi \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \end{cases}, \tau : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi^2 \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}, \nu : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi^2 \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \end{cases}$

Cociclos			
	σ	τ	ν
ξ_1	1	1	1
ξ_2	A	1	1
ξ_3	1	1	B
ξ_4	1	B	B
ξ_5	1	B	1

Twists	
C_{ξ_1}	$x^3z + y^3z + x^2y^2 + axyz^2 + bz^4$
C_{ξ_2}	$mx^3z + m^2y^3z + m^2x^2y^2 + amxyz^2 + bz^4$
C_{ξ_3}	$8z(4x^3 + 3nxy^2) + 16bz^4 + 4az^2(4x^2 - ny^2) + (4x^2 - ny^2)^2$
C_{ξ_4}	$z(2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2) + bz^4 + az^2(x^2 + y^2 - xy) + (x^2 + y^2 - xy)^2$
C_{ξ_5}	$z(2x^3 + 6nxy^2) + bz^4 + az^2(x^2 + ny^2) + (x^2 + ny^2)^2$

Base de puntos fijos				
ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
$dx \otimes 1$	$dx \otimes \sqrt[3]{m}$	$(dx + dy) \otimes 1$	$dx \otimes \xi + dy \otimes \xi^2$	$(dx + dy) \otimes 1$
$dy \otimes 1$	$dy \otimes \sqrt[3]{m^2}$	$(dx - dy) \otimes (\xi + \frac{1}{2})\sqrt{n}$	$dx \otimes \xi^2 + dy \otimes \xi$	$(dx - dy) \otimes \sqrt{n}$
$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$

5. Caso V

C	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2 + bxyz^2$
$\text{Aut}(C)$	$D_4 = \langle A, B \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(i)$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$D_4 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle \sigma, \nu, \tau \rangle = \text{GAP}(16,11)$
L	$\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{m}, \sqrt{n})$
	$\sigma : \begin{cases} i \rightarrow i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}, \nu : \begin{cases} i \rightarrow i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow i\sqrt[4]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \end{cases}, \tau : \begin{cases} i \rightarrow -i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \end{cases}$

Cociclos											
	ν	σ	τ		ν	σ	τ		ν	σ	τ
ξ_1	1	1	1	ξ_{24}	A	A	AB^2	ξ_{47}	B^2	AB	B^3
ξ_2	1	1	A	ξ_{25}	A	B^2	1	ξ_{48}	B^2	AB	AB^2
ξ_3	1	1	B	ξ_{26}	A	B^2	A	ξ_{49}	B^2	B^2	1
ξ_4	1	1	AB^2	ξ_{27}	A	B^2	B^2	ξ_{50}	B^2	B^2	A
ξ_5	1	A	1	ξ_{28}	A	B^2	AB^2	ξ_{51}	B^2	B^2	B
ξ_6	1	A	A	ξ_{29}	A	AB^2	1	ξ_{52}	B^2	B^2	AB^2
ξ_7	1	A	B^2	ξ_{30}	A	AB^2	A	ξ_{53}	AB	1	A
ξ_8	1	A	AB^2	ξ_{31}	A	AB^2	B^2	ξ_{54}	AB	1	B
ξ_9	1	B^2	1	ξ_{32}	A	AB^2	AB^2	ξ_{55}	AB	1	B^3
ξ_{10}	1	B^2	A	ξ_{33}	B	A	1	ξ_{56}	AB	1	AB^2
ξ_{11}	1	B^2	B	ξ_{34}	B	A	B^2	ξ_{57}	AB	B^2	A
ξ_{12}	1	B^2	AB^2	ξ_{35}	B	AB	B	ξ_{58}	AB	B^2	B
ξ_{13}	1	AB	A	ξ_{36}	B	AB	B^3	ξ_{59}	AB	B^2	B^3
ξ_{14}	1	AB	B	ξ_{37}	B^2	1	1	ξ_{60}	AB	B^2	AB^2
ξ_{15}	1	AB	B^3	ξ_{38}	B^2	1	A	ξ_{61}	AB	AB	A
ξ_{16}	1	AB	AB^2	ξ_{39}	B^2	1	B	ξ_{62}	AB	AB	B
ξ_{17}	A	1	1	ξ_{40}	B^2	1	AB^2	ξ_{63}	AB	AB	B^3
ξ_{18}	A	1	A	ξ_{41}	B^2	A	1	ξ_{64}	AB	AB	AB^2
ξ_{19}	A	1	B^2	ξ_{42}	B^2	A	A	ξ_{65}	AB	BA	A
ξ_{20}	A	1	AB^2	ξ_{43}	B^2	A	B^2	ξ_{66}	AB	BA	B
ξ_{21}	A	A	1	ξ_{44}	B^2	A	AB^2	ξ_{67}	AB	BA	B^3
ξ_{22}	A	A	A	ξ_{45}	B^2	AB	A	ξ_{68}	AB	BA	AB^2
ξ_{23}	A	A	B^2	ξ_{46}	B^2	AB	B				

Twists	
$C_{\alpha,\beta} : \alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 + z^4 + a\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + b\alpha\beta xy z^2$ con $\alpha, \beta \in \{ \sqrt[4]{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} (1+i)^{n_3} : n_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, n_2, n_3 \in \{0, 1\} \}$ con $\alpha\beta \in \mathbb{Q}$ y $C_{\alpha,\beta} \simeq C_{\beta,\alpha}$ Lo que da los 8 twists: $\xi_1, \xi_3, \xi_9, \xi_{11}, \xi_{37}, \xi_{39}, \xi_{49}$ y ξ_{51}	
$2\alpha^4 x^4 + 2\beta^4 y^4 + 12\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + z^4 +$ $+a(\alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 + 2\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2) + b(\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2) z^2$ con $\alpha, \beta \in \{ \sqrt{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} : n_1, n_2 \in \{0, 1\} \}$ y $\alpha \neq \beta$ Lo que da 12 twists	
$C_{\alpha,\beta}^\pm : 2\alpha^4 x^4 + 2\beta^4 y^4 - 12\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + z^4 +$ $+a(\alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 - 2\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2) + b(\pm\alpha^2 x^2 \pm \beta^2 y^2) z^2$ con $\alpha, \beta \in \{ \sqrt{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} : n_1, n_2 \in \{0, 1\} \}$ y $C_{\alpha,\beta}^\pm \simeq C_{\beta,\alpha}^\pm$ Lo que da 20 twists	
Estos 32 son los correspondientes a: $\xi_2, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8, \xi_{10}, \xi_{12}, \xi_{17}, \xi_{18}, \xi_{19}, \xi_{20}, \xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{24}$ $\xi_{25}, \xi_{26}, \xi_{27}, \xi_{28}, \xi_{29}, \xi_{30}, \xi_{31}, \xi_{32}, \xi_{38}, \xi_{40}, \xi_{41}, \xi_{42}, \xi_{43}, \xi_{44}, \xi_{50}, \xi_{52}$	
$-8\alpha^4 x^4 - 8\beta^4 y^4 - 48\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + z^4 +$ $+4a(\alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 + 2\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2) - 2b(\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2) z^2$ con $\alpha, \beta \in \{ \sqrt{m^{n_1}} \sqrt[2]{n^{n_2}} : n_1, n_2 \in \{0, 1\} \}$ y $\alpha \neq \beta$ Lo que da 12 twists	
$C_{\alpha,\beta}^\pm : -8\alpha^4 x^4 - 8\beta^4 y^4 + 48\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + z^4 +$ $+4a(\alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 - 2\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2) - 2b(\pm\alpha^2 x^2 \pm \beta^2 y^2) z^2$ con $\alpha, \beta \in \{ \sqrt{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} : n_1, n_2 \in \{0, 1\} \}$, $C_{\alpha,\beta}^\pm \simeq C_{\beta,\alpha}^\pm$ y $\alpha \neq \beta$ para $C_{\alpha,\beta}^-$ Lo que da 16 twists	
Estos 28 son los correspondientes a los restantes	

Base de puntos fijos		
8 primeros	32 siguientes	28 últimos
$dx \otimes \alpha$	$(dx + dy) \otimes \alpha$ ó $(dx + dy) \otimes i\alpha$	$(dx + idy) \otimes \alpha$ ó $(dx + idy) \otimes i\alpha$
$dy \otimes \beta$	$(dx - dy) \otimes \beta$ ó $(dx - dy) \otimes i\beta$	$(dx - idy) \otimes \beta$ ó $(dx - idy) \otimes i\beta$
$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$

6. Caso VI

C	$z^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4$
$\text{Aut}(C)$	$\mathbb{Z}_6 = \langle A \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$\mathbb{Z}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle \sigma, \tau \rangle = \text{GAP}(12,4)$
L	$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{m}, \sqrt{n})$
	$\sigma : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi^2 \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}, \tau : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \xi \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}$

Cociclos		
	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	1	A
ξ_3	1	A ²
ξ_4	1	A ³
ξ_5	1	A ⁴
ξ_6	1	A ⁵
ξ_7	A	1
ξ_8	A	A
ξ_9	A	A ²
ξ_{10}	A	A ³
ξ_{11}	A	A ⁴
ξ_{12}	A	A ⁵

Twists	
C_{ξ_1}	$z^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4$
C_{ξ_2}	$16m^2z^3y + 9n^2x^4 - 12anx^2y^2 + 16y^4$
C_{ξ_3}	$mz^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4$
C_{ξ_4}	$16z^3y + 9n^2x^4 - 12nax^2y^2 + 16y^4$
C_{ξ_5}	$m^2z^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4$
C_{ξ_6}	$16mz^3y + 9n^2x^4 - 12anx^2y^2 + 16y^4$
C_{ξ_7}	$16z^3y + 9x^4 - 12ax^2y^2 + 16y^4$
C_{ξ_8}	$m^2z^3y + n^2x^4 + anx^2y^2 + y^4$
C_{ξ_9}	$16mz^3y + 9x^4 - 12ax^2y^2 + 16y^4$
$C_{\xi_{10}}$	$z^3y + n^2x^4 + anx^2y^2 + y^4$
$C_{\xi_{11}}$	$16m^2z^3y + 9x^4 - 12ax^2y^2 + 16y^4$
$C_{\xi_{12}}$	$mz^3y + n^2x^4 + anx^2y^2 + y^4$

7. Caso VII

C	$x^4 + y^4 + z^4 + ax^2y^2$
$\text{Aut}(C)$	$Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle A, B, C \rangle = \text{GAP}(16,13)$
	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(i)$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$(Q_8 \rtimes \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \text{GAP}(32,48)$
L	$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{n_1}, \sqrt{n_2}, \sqrt{n_3}, i)$

Se obtiene 408 cociclos, que por razones obvias no se muestran pero que se calculan a partir del programa en GAP antes mostrado. Los 408 factorizan por subextensiones de L de la forma $L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m}, \sqrt{n}, i)$ o $L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n}, i)$, luego basta con calcular $H^1(\text{Gal}(L_0/\mathbb{Q}), \text{Aut}(C))$ que contiene 176 cociclos. Sean los generadores de $\text{Gal}(L_0/\mathbb{Q})$:

$$v : \begin{cases} i \rightarrow i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow i\sqrt[4]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \end{cases}, \quad \sigma : \begin{cases} i \rightarrow i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}, \quad \tau : \begin{cases} i \rightarrow -i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow \sqrt{n} \end{cases}$$

Cociclos					
v	σ	τ	v	σ	τ
1	1	1, B, A, AB, BC, AC	A	1	1, B, A, AB
1	B ²	1, B, A, AB, BC, AC	A	B ²	1, B, A, AB
1	A	1, B, A, AB	A	A	1, B, A, AB
B	1	1, B, A, AB	A	AB ²	1, B, A, AB
B	B ²	1, B, A, AB	AB	1	1, B, A, AB, BC, AC
B	A	1, B, A, AB	AB	B ²	1, B, A, AB, BC, AC
B	AB ²	1, B, A, AB	AB	A	1, B, A, AB
B ²	1	1, B, A, AB, BC, AC	AB ³	1	1, B, A, AB, BC, AC
B ²	B ²	1, B, A, AB, BC, AC	AB ³	B ²	1, B, A, AB, BC, AC
B ²	A	1, B, A, AB	AB ³	A	1, B, A, AB

Cociclos					
v	σ	τ	v	σ	τ
1	AC	1, AB, BC, AC	BC	AB ² C	1, AB, BC, AC
B ²	AC	1, AB, BC, AC	BC	AC	1, AB, BC, AC
AB	AC	1, AB, BC, AC	AC	1	1, AB, BC, AC
AB ³	AC	1, AB, BC, AC	AC	B ²	1, AB, BC, AC
BC	1	1, AB, BC, AC	AC	AB ² C	1, AB, BC, AC
BC	B ²	1, AB, BC, AC	AC	AC	1, AB, BC, AC

Cociclos						
ν	σ	τ		ν	σ	τ
1	ABC	B,A,BC,AC		C	ABC	B,A,BC,AC
B^2	ABC	B,A,BC,AC		C	AB^3C	B,A,BC,AC
AB	ABC	B,A,BC,AC		ABC	1	B,A,BC,AC
AB^3	ABC	B,A,BC,AC		ABC	B^2	B,A,BC,AC
C	1	B,A,BC,AC		ABC	ABC	B,A,BC,AC
C	B^2	B,A,BC,AC		ABC	AB^3C	B,A,BC,AC

Twists	
$C_{\alpha,\beta}^{\pm} : \alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 + z^4 \pm a \alpha^2 \beta^2 x^2 y^2$ <p>con $\alpha, \beta \in \{\sqrt[4]{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} (1+i)^{n_3} : n_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, n_2, n_3 \in \{0, 1\}\}$ con $\alpha^2 \beta^2 \in \mathbb{Q}$ y $C_{\alpha,\beta}^{\pm} \simeq C_{\beta,\alpha}^{\pm}$</p> <p>Lo que da los primeros 80 twists.</p>	
$C_{\alpha,\beta}^{\pm} : 2\alpha^4 x^4 + 2\beta^4 y^4 \pm 12\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + z^4 + a(\alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 \pm 2\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2)$ <p>con $\alpha, \beta \in \{\sqrt[4]{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} (1+i)^{n_3} : n_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, n_2, n_3 \in \{0, 1\}\}$ con $\alpha^2 \beta^2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq \beta$ y $C_{\alpha,\beta}^{\pm} \simeq C_{\beta,\alpha}^{\pm}$</p> <p>Lo que da los 48 twists siguientes.</p>	
$C_{\alpha,\beta}^{\pm} : 2\alpha^4 x^4 + 2\beta^4 y^4 \pm 12\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2 + z^4 - a(\alpha^4 x^4 + \beta^4 y^4 \pm 2\alpha^2 \beta^2 x^2 y^2)$ <p>con $\alpha, \beta \in \{\sqrt[4]{m^{n_1}} \sqrt{n^{n_2}} (1+i)^{n_3} : n_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, n_2, n_3 \in \{0, 1\}\}$ con $\alpha^2 \beta^2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha \neq \beta$ y $C_{\alpha,\beta}^{\pm} \simeq C_{\beta,\alpha}^{\pm}$</p> <p>Lo que da los últimos 48 twists.</p>	

Base de puntos fijos		
Primeros 80	48 siguientes	últimos 48
$dx \otimes \alpha$	$(dx + dy) \otimes \alpha$	$(dx + idy) \otimes \alpha$
$dy \otimes \beta$	$(dx - dy) \otimes \beta$ ó $(dx - dy) \otimes i\beta$	$(dx - idy) \otimes \beta$ ó $(dx - idy) \otimes i\beta$
$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$	$dz \otimes 1$

8. Caso VIII

C	$x^4 + y^4 + z^4 + a(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$
$\text{Aut}(C)$	$S_4 = \langle A, B \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
K	\mathbb{Q}
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	S_4
L	\mathbb{Q}_f con $f \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 4 con resolvente cúbica irreducible sobre \mathbb{Q} y f irreducible sobre $\mathbb{Q}(\delta)$ siendo δ una raíz cuadrada de su discriminante.

Cociclos		
	(123)	(1432)
ξ_1	1	1
ξ_2	1	B^2
ξ_3	1	AB
ξ_4	A	B
ξ_5	A	AB^2AB^3

Twists	
C_{ξ_1}	$x^4 + y^4 + z^4 + a(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$
C_{ξ_2}	$\delta^4 x^4 + \delta^4 y^4 + z^4 + a(\delta^4 x^2 y^2 + \delta^2 y^2 z^2 + \delta^2 z^2 x^2)$
C_{ξ_3}	$3\delta^4 y^4 + 2z^4 + 12\delta^2 y^2 z^2 + a(2\delta^4 y^2 x^2 + 2\delta^2 z^2 x^2 + z^4 + \delta^4 y^4 - 2\delta^2 z^2 y^2)$
C_{ξ_4}	-
C_{ξ_5}	-

Base de puntos fijos	
ξ_1	$dx \otimes 1, dy \otimes 1, dz \otimes 1$
ξ_2	$dx \otimes \delta, dy \otimes \delta, dz \otimes 1$
ξ_3	$dy \otimes \delta, (dx - dz) \otimes \delta, (dx + dz) \otimes 1$
ξ_4	$dx \otimes (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) \delta + dy \otimes (\alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_4) \delta + dz \otimes (\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4) \delta$ $dx \otimes (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) \delta + dy \otimes (\alpha_3 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_4) \delta + dz \otimes (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_4) \delta$ $dx \otimes \left((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\alpha_3 + \alpha_4)^2 \right) \delta + dy \otimes \left((\alpha_3 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1 + \alpha_4)^2 \right) \delta +$ $+ dz \otimes \left((\alpha_1 + \alpha_3)^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)^2 \right) \delta$ $(dx + dy + dz) \otimes \delta$
ξ_5	$x \otimes (\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4)^2 \delta + dy \otimes (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)^2 \delta + dz \otimes (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4)^2 \delta$ $dx \otimes (\alpha_3 \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_4)^2 \delta + dy \otimes (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4)^2 \delta + dz \otimes (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4)^2 \delta$

9. Caso IX

C	$x^4 + xy^3 + yz^3$
$\text{Aut}(C)$	$\mathbb{Z}_9 = \langle A \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(\omega)$ con $\omega^3 = \xi y \xi^2 + \xi + 1 = 0$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$\mathbb{Z}_9 \rtimes_{id} \mathbb{Z}_6 = \langle \sigma, \tau \rangle$
L	$\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[9]{m})$
	$\sigma : \begin{cases} \omega \rightarrow \omega \\ \sqrt[9]{m} \rightarrow \omega \sqrt[9]{m} \end{cases}, \tau : \begin{cases} \omega \rightarrow \omega^2 \\ \sqrt[9]{m} \rightarrow \sqrt[9]{m} \end{cases}$

Cociclos		
	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	A	1
ξ_3	A^2	1
ξ_4	A^3	1
ξ_5	A^4	1
ξ_6	A^5	1
ξ_7	A^6	1
ξ_8	A^7	1
ξ_9	A^8	1

Twists	
C_{ξ_1}	$x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_2}	$mx^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_3}	$m^2x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_4}	$m^3x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_5}	$m^4x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_6}	$m^5x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_7}	$m^6x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_8}	$m^7x^4 + xy^3 + yz^3$
C_{ξ_9}	$m^8x^4 + xy^3 + yz^3$

10. Caso X

C	$x^4 + y^4 + xz^3$
$\text{Aut}(C)$	$S_4 \times \mathbb{Z}_2 = \langle A, B \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} \frac{3-i\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{3+i\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3i-\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{3i+\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(\xi, i)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$(S_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes V_4 = \text{GAP}(192, 1485)$

Todos los cociclos factorizan por $\text{Gal}(L_0/\mathbb{Q})$ con $L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m}, \sqrt[3]{n}, i, \xi)$, y generado por

$$\sigma : \begin{cases} \sqrt[4]{m} \rightarrow i\sqrt[4]{m} \\ i \rightarrow i \\ \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{n} \rightarrow \sqrt[3]{n} \end{cases}, \tau : \begin{cases} \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ i \rightarrow -i \\ \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{n} \rightarrow \sqrt[3]{n} \end{cases}, \nu : \begin{cases} \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ i \rightarrow i \\ \xi \rightarrow \xi^2 \\ \sqrt[3]{n} \rightarrow \sqrt[3]{n} \end{cases}, \eta : \begin{cases} \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \\ i \rightarrow i \\ \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{n} \rightarrow \xi\sqrt[3]{n} \end{cases}$$

Considérense los elementos de $\text{Aut}(C)$ dados por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

Cociclos									
	σ	τ	ν	η		σ	τ	ν	η
ξ_1	1	1	1	1	ξ_{19}	C^2	1	1	D^2
ξ_2	C	1	1	1	ξ_{20}	C^3	1	1	D^2
ξ_3	C^2	1	1	1	ξ_{21}	1	C	1	D^2
ξ_4	C^3	1	1	1	ξ_{22}	C	C	1	D^2
ξ_5	1	C	1	1	ξ_{23}	C^2	C	1	D^2
ξ_6	C	C	1	1	ξ_{24}	C^3	C	1	D^2
ξ_7	C^2	C	1	1	ξ_{25}	C	1	1	A^2
ξ_8	C^3	C	1	1	ξ_{26}	C^2	1	1	A^2
ξ_9	1	1	1	D	ξ_{27}	C^3	1	1	A^2
ξ_{10}	C	1	1	D	ξ_{28}	C	C	1	A^2
ξ_{11}	C^2	1	1	D	ξ_{29}	C^2	C	1	A^2
ξ_{12}	C^3	1	1	D	ξ_{30}	C^3	C	1	A^2
ξ_{13}	1	C	1	D	ξ_{31}	C	1	1	A^2
ξ_{14}	C	C	1	D	ξ_{31}	C^2	1	1	A^2
ξ_{15}	C^2	C	1	D	ξ_{33}	C^3	1	1	A^2
ξ_{16}	C^3	C	1	D	ξ_{34}	C	C	1	A^2
ξ_{17}	1	1	1	D^2	ξ_{35}	C^2	C	1	A^2
ξ_{18}	C	1	1	D^2	ξ_{36}	C^3	C	1	A^2

Twists	
$x^4 + ay^4 + bxz^3$ $b \in \{1, n, n^2\}$ $a \in \{1, m, m^2, m^3, -4, -4m, -4m^2, -4m^3\}$ Que se corresponden a los 24 primeros	
$9ax^4 + y^4 + 9abxz^3$ $b \in \{n, n^2\}$ $a \in \{m, m^2, m^3, -4m, -4m^2, -4m^3\}$ Que se corresponden a los 12 últimos	

Base de puntos fijos	
24 primeros	12 últimos
$dx \otimes 1$	$dx \otimes \sqrt[4]{a} - dz \otimes \sqrt[4]{a} (1 + i\sqrt{3})$
$dy \otimes \sqrt[4]{a}$	$dy \otimes 1$
$dz \otimes \sqrt[3]{b}$	$dx \otimes \sqrt[4]{a} \sqrt[3]{b} + dz \otimes \sqrt[4]{a} \sqrt[3]{b} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)$

11. Caso XI

C	$x^4 + y^4 + z^4$
$\text{Aut}(C)$	$(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes S_3$
	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(i)$
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \rtimes S_3) \rtimes \mathbb{Z}_2 = \text{GAP}(192,956)$
L	$L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m}, i) \subseteq L$ con $m \in \mathbb{Q}$

Los 15 cociclos que se obtienen factorizan por la subextensión $L_0 = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m}, i)$. Sea $\text{Gal}(L_0/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$ con

$$\sigma : \begin{cases} i \rightarrow i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow i\sqrt[4]{m} \end{cases}, \quad \tau : \begin{cases} i \rightarrow -i \\ \sqrt[4]{m} \rightarrow \sqrt[4]{m} \end{cases}.$$

Sean $C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut}(C)$. Los cociclos son:

Cociclos		
	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	C^3	1
ξ_3	C^2	1
ξ_4	C	1
ξ_5	1	C
ξ_6	C^3	C
ξ_7	C^2	C
ξ_8	C	C
ξ_9	C^3D^2	1
ξ_{10}	C^3D^2	D
ξ_{11}	C^3	D
ξ_{12}	C^3D^3	D
ξ_{13}	C^3D	D
ξ_{14}	D^2	C
ξ_{15}	C^2D^3	D

Twists	
C_{ξ_1}	$x^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_2}	$mx^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_3}	$m^2x^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_4}	$m^3x^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_5}	$-4x^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_6}	$-4mx^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_7}	$-4m^2x^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_8}	$-4m^3x^4 + y^4 + z^4$
C_{ξ_9}	$mx^4 + m^2y^4 + z^4$
$C_{\xi_{10}}$	$mx^4 - 4m^2y^4 + z^4$
$C_{\xi_{11}}$	$mx^4 - 4y^4 + z^4$
$C_{\xi_{12}}$	$mx^4 - 4my^4 + z^4$
$C_{\xi_{13}}$	$mx^4 - 4m^3y^4 + z^4$
$C_{\xi_{14}}$	$-4x^4 + m^2y^4 + z^4$
$C_{\xi_{15}}$	$m^2x^4 - 4my^4 + z^4$

12. Caso XII

C	$x^3y + y^3z + z^3x$
$\text{Aut}(C)$	$\text{PSL}(2,7) = \langle A, B, C \rangle$
	$A = \begin{pmatrix} \zeta^4 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \frac{-1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 \\ \zeta^2 - \zeta^5 & \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 \\ \zeta^4 - \zeta^3 & \zeta - \zeta^6 & \zeta^2 - \zeta^5 \end{pmatrix}$
K	$\mathbb{Q}(\zeta)$ con $\zeta^7 = 1$ raíz primitiva
$\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$	$\text{PSL}(2,7) \rtimes \mathbb{Z}_6 = \text{GAP}(1008,882)$
L	$L_0 = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{m}) \subseteq L$

Todos los cociclos factorizan por la subextensión $L_0 = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[3]{m})$, con $\text{Gal}(L_0/\mathbb{Q})$ generado por:

$$\sigma : \begin{cases} \zeta \rightarrow \zeta \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \zeta \sqrt[3]{m} \end{cases}, \quad \tau : \begin{cases} \zeta \rightarrow \zeta^3 \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \sqrt[3]{m} \end{cases}.$$

Cociclos		
	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	A	1
ξ_3	A ³	1
ξ_4	1	C

Twists	
C_{ξ_1}	$x^3y + y^3z + z^3x$
C_{ξ_2}	$x^3y + y^3z + mz^3x$
C_{ξ_3}	$x^3y + y^3z + m^3z^3x$
C_{ξ_4}	$31x^4 - 4x^3y - 62x^3z - 33x^2y^2 + 69x^2yz + 15x^2z^2 + 26xy^3 - 9xy^2z - 45xyz^2 + 16xz^3 - y^4 - 6y^3z - 3y^2z^2 + 18yz^3 - 9z^4$

Base de puntos fijos	
ξ_1	$dx \otimes 1, dy \otimes 1, dz \otimes 1$
ξ_2	$dx \otimes \sqrt[3]{m^2}, dy \otimes \sqrt[3]{m}, dz \otimes \sqrt[3]{m^4}$
ξ_3	$dx \otimes \sqrt[3]{m^6}, dy \otimes \sqrt[3]{m^3}, dz \otimes \sqrt[3]{m^{12}}$
ξ_4	$dx \otimes (\zeta + \zeta^4 - 2\zeta^6) + dy \otimes (\zeta^2 - 2\zeta^3 + \zeta^4) + dz \otimes (\zeta + \zeta^2 - 2\zeta^5)$ $dx \otimes (\zeta^2 + 2\zeta^4 - \zeta^5 - 2\zeta^6) + dy \otimes (\zeta + 2\zeta^2 - 2\zeta^3 - \zeta^6) + dz \otimes (2\zeta - \zeta^3 + \zeta^4 - 2\zeta^5)$ $dx \otimes (\zeta^3 + 2\zeta^4 - 3\zeta^6) + dy \otimes (2\zeta^2 - 3\zeta^3 + \zeta^5) + dz \otimes (2\zeta - 3\zeta^5 + \zeta^6)$

Un ejemplo concreto

En este capítulo se calcularán paso a paso los twists de la curva $C : z^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4 = 0$ cuando $a \in \mathbb{Q}$, que se corresponde con el caso VI. La idea es mostrar cómo se ha hecho para cada uno de los casos poniendo este ejemplo concreto.

Se tiene $K = \mathbb{Q}(\xi)$ con $\xi^2 + \xi + 1 = 0$ y $\text{Aut}(C) \simeq \mathbb{Z}_6$ generado por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}.$$

Luego $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_2$ y $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \text{GAP}(12, 4) = D_{12}$.

TEOREMA 0.1. *Sea L una extensión de \mathbb{Q} de Galois tal que $K = \mathbb{Q}(\xi) \subseteq L$ y $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \text{GAP}(12, 4)$, entonces existen enteros m y n tales que*

$$L = \mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{m}, \sqrt{n}).$$

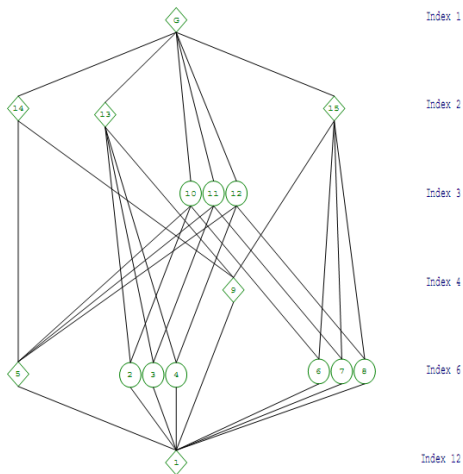
DEMOSTRACIÓN. Se tiene un subgrupo

$$H \simeq \mathbb{Z}_2 \triangleleft \text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \triangleleft \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \text{GAP}(12, 4) = D_{12}.$$

Sea $M = L^H$, entonces $K \subseteq M$ y $\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq S_3$, aplicándole el Teorema 4.1 con $p = 3$ se tiene que $M = \mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{m})$ para algún entero m .

D_{12}

Ordre: 12
Posició: 4



Como L tiene tres subextensiones de grado 2 y $M \subseteq L$, necesariamente se ha de cumplir $L = \mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{m}, \sqrt{n})$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. □

Sea pues $L = \mathbb{Q}(\xi, \sqrt[3]{m}, \sqrt{n})$ y sean $\sigma : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi^2 \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}$ y $\tau : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi \\ \sqrt[3]{m} \rightarrow \xi \sqrt[3]{m} \\ \sqrt{n} \rightarrow -\sqrt{n} \end{cases}$ generadores de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Se

tienen las relaciones $\sigma^2 = \tau^6 = 1$ y $\tau\sigma\tau = \sigma$ y ${}^\sigma A = A^5$ y ${}^\tau A = A$.

El siguiente paso es determinar los cociclos: de $\sigma^2 = 1$ y la relación de cociclo se deduce $\xi_\sigma {}^\sigma \xi_\sigma = 1$, luego ξ_σ puede tomar cualquier valor de $\text{Aut}(C)$. Al hacer cociente por la relación de coborde se puede fijar $\xi_\sigma = 1$, o bien A pues $A^2 = A \cdot 1 \cdot (\sigma A)^{-1}$, $A^3 = A \cdot A \cdot (\sigma A)^{-1}$, $A^4 = A^2 \cdot 1 \cdot (\sigma A^2)^{-1}$ y $A^5 = A^2 \cdot A \cdot (\sigma A^2)^{-1}$ y $1 \neq A^\alpha \cdot A \cdot (\sigma A^\alpha)^{-1}$.

Como $\tau^6 = 1$ se tiene de la relación de cociclo que $\xi_\tau^6 = 1$, luego ξ_τ puede tomar cualquier valor de $\text{Aut}(C)$. Y además para cualquier elección de ξ_σ y ξ_τ , se verifica que $\xi_{\tau\sigma\tau\sigma^{-1}} = 1$. Luego se tiene un representante de todos los cociclos módulo cobordes:

	σ	τ
ξ_1	1	1
ξ_2	1	A
ξ_3	1	A^2
ξ_4	1	A^3
ξ_5	1	A^4
ξ_6	1	A^5
ξ_7	A	1
ξ_8	A	A
ξ_9	A	A^2
ξ_{10}	A	A^3
ξ_{11}	A	A^4
ξ_{12}	A	A^5

Con el programa de GAP antes mostrado se comprueba que efectivamente salen 12 cociclos, aunque los representantes que se dan son distintos.

El siguiente punto es calcular una base de puntos fijos de $\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L$ por la acción de cada twist. Se recuerda que la acción viene dada por $\omega \otimes l \rightarrow \xi_\sigma(\omega) \otimes {}^\sigma l$.

ξ_1 : claramente corresponde al twist trivial, una base de puntos fijos es $dx \otimes 1$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes 1$.

ξ_2 : una base de puntos fijos es $dx \otimes (\xi + \frac{1}{2})\sqrt{n}$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \sqrt[3]{m^2}$, lo que da la matriz del isomorfismo por columnas, y sustituyendo por las filas se obtiene la ecuación del twist:

$$16m^2z^3y + 9n^2x^4 - 12anx^2y^2 + 16y^4.$$

ξ_3 : una base de puntos fijos es $dx \otimes 1$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \sqrt[3]{m}$ y la ecuación del twist es

$$mz^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4.$$

ξ_4 : una base de puntos fijos es $dx \otimes (\xi + \frac{1}{2})\sqrt{n}$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes 1$ y la ecuación del twist es

$$16z^3y + 9n^2x^4 - 12nax^2y^2 + 16y^4.$$

ξ_5 : una base de puntos fijos es $dx \otimes 1$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \sqrt[3]{m^2}$ y la ecuación del twist es

$$m^2z^3y + x^4 + ax^2y^2 + y^4.$$

ξ_6 : una base de puntos fijos es $dx \otimes (\xi + \frac{1}{2})\sqrt{n}$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \sqrt[3]{m}$ y la ecuación del twist es

$$16mz^3y + 9n^2x^4 - 12anx^2y^2 + 16y^4.$$

ξ_7 : una base de puntos fijos es $dx \otimes (\xi + \frac{1}{2})$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \xi^2$ y la ecuación del twist es

$$16z^3y + 9x^4 - 12ax^2y^2 + 16y^4.$$

ξ_8 : una base de puntos fijos es $dx \otimes \sqrt{n}$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \xi^2 \sqrt[3]{m^2}$ y la ecuación del twist es

$$m^2z^3y + n^2x^4 + anx^2y^2 + y^4.$$

ξ_9 : una base de puntos fijos es $dx \otimes (\xi + \frac{1}{2})$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \xi^2 \sqrt[3]{m}$ y la ecuación es

$$16mz^3y + 9x^4 - 12ax^2y^2 + 16y^4.$$

ξ_{10} : una base de puntos fijos es $dx \otimes \sqrt{n}$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \xi^2$ y la ecuación es

$$z^3y + n^2x^4 + anx^2y^2 + y^4.$$

ξ_{11} : una base de puntos fijos es $dx \otimes (\xi + \frac{1}{2})$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \xi^2 \sqrt[3]{m^2}$ y la ecuación es

$$16m^2z^3y + 9x^4 - 12ax^2y^2 + 16y^4.$$

ξ_{12} : una base de puntos fijos es $dx \otimes \sqrt{n}$, $dy \otimes 1$ y $dz \otimes \xi^2 \sqrt[3]{m}$ y la ecuación es

$$mz^3y + n^2x^4 + anx^2y^2 + y^4.$$

Conclusiones

Tras este trabajo y los resultados obtenidos el primer objetivo que se me plantea es completar el estudio de los twists de curvas de género 3 no hiperelípticas, pues han quedado pendientes los casos en que la curva definida sobre \mathbb{Q} de partida no admita un modelo de Henn también definido sobre \mathbb{Q} , así como los casos correspondientes a cociclos no completos. La dirección que se tomará será la mostrada en las secciones 1.6 y 1.7.

Una vez cumplido este objetivo el siguiente paso natural sería calcular los twists de las curvas de género 3 hiperelípticas. Una clasificación suya por grupos de automorfismos se encuentra en [MAGA02].

El siguiente paso es explotar la información obtenida sobre los twists para relacionar las L -series presentes en el escenario: por un lado las L -series de Hasse-Weil asociadas a una curva y sus twists y, por otro, la correspondiente L -serie de Artin asociada a la representación $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}(\Omega_{\mathbb{Q}}^1(C) \otimes_{\mathbb{Q}} L)$. Lo que podría tener especial relevancia en relación a las generalizaciones de las conjeturas de Birch-Swinnerton-Dyer y de Sato-Tate.

Por lo que respecta a cuestiones relativas a la modularidad de L -series de Hasse-Weil, se conoce la respuesta afirmativa en el caso de curvas elípticas (Wiles et al.). Una aportación que relacione la modularidad automorfa de una curva con la de sus twists para género superior sería un resultado en la línea de lo esperado por el programa de Langlands.

Apéndice: invariantes de Dixmier-Ohno de los modelos de Henn

A partir del programa Echidna-2.0 (en Magma) debido a David Kohel se han calculado los invariantes normalizados de Dixmier-Ohno para los modelos de Henn en función de los parámetros, excepto para el caso I que no tiene una forma explícita.

Caso II

$I_3 : 1$

$$I_6 : 2^3 cba(3a^2 - abc + 3b^2 + 3c^2 - 108)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-2}$$

$$I_9 : (81a^6 - 33a^5bc + 15a^4b^2c^2 + 99a^4b^2 + 99a^4c^2 - 5832a^4 + a^3b^3c^3 + 270a^3b^3c + 270a^3bc^3 + 9936a^3bc + 15a^2b^4c^2 + 99a^2b^4 + 15a^2b^2c^4 + 4590a^2b^2c^2 + 40176a^2b^2 + 99a^2c^4 + 40176a^2c^2 + 104976a^2 - 33ab^5c + 270ab^3c^3 + 9936ab^3c - 33abc^5 + 9936abc^3 + 244944abc + 81b^6 + 99b^4c^2 - 5832b^4 + 99b^2c^4 + 40176b^2c^2 + 104976b^2 + 81c^6 - 5832c^4 + 104976c^2)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-3}$$

$$I_{12} : (9a^6 - 67a^5bc - 5a^4b^2c^2 - 69a^4b^2 - 69a^4c^2 - 648a^4 - a^3b^3c^3 + 90a^3b^3c + 90a^3bc^3 + 2304a^3bc - 5a^2b^4c^2 - 69a^2b^4 - 5a^2b^2c^4 + 990a^2b^2c^2 + 7344a^2b^2 - 69a^2c^4 + 7344a^2c^2 + 11664a^2 - 67ab^5c + 270ab^3c^3 + 2304ab^3c - 67abc^5 + 2304abc^3 + 66096abc + 9b^6 - 69b^4c^2 - 648b^4 - 69b^2c^4 + 7344b^2c^2 + 11664b^2 + 9c^6 - 648c^4 + 11664c^2)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-3}$$

$$I_{15} : (15a^2c + abc^2 + 72ab + 15b^2c - 9c^3 + 324c)(15a^2b + ab^2c + 72ac - 9b^3 + 15bc^2 + 324b)(9a^3 - a^2bc - 15ab^2 - 15ac^2 - 324a - 72bc)2^{-1}(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-4}$$

$$I_{18} : 2(81a^8 - 366a^7bc + 196a^6b^2c^2 - 1044a^6b^2 - 1044a^6c^2 - 4860a^6 - 34a^5b^3c^3 + 774a^5b^3c + 774a^5bc^3 - 11988a^5bc - 5a^4b^4c^4 - 240a^4b^4c^2 + 1206a^4b^4 - 240a^4b^2c^4 + 18864a^4b^2c^2 + 26892a^4b^2 + 1206a^4c^4 + 26892a^4c^2 + 34992a^4 - 34a^3b^5c^3 + 774a^3b^5c - 34a^3b^3c^5 + 144a^3b^3c^3 + 124632a^3b^3c + 774a^3bc^5 + 124632a^3bc^3 + 1384128a^3bc + 196a^2b^6c^2 - 1044a^2b^6 - 240a^2b^4c^4 + 18864a^2b^4c^2 + 26892a^2b^4 + 196a^2b^2c^6 + 18864a^2b^2c^4 + 1288872a^2b^2c^2 + 2589408a^2b^2 - 1044a^2c^6 + 26892a^2c^4 + 2589408a^2c^2 + 1259712a^2 - 366ab^7c + 774ab^5c^3 - 11988ab^5c + 774ab^3c^5 + 124632ab^3c^3 + 1384128ab^3c - 366abc^7 - 11988abc^5 + 1384128abc^3 + 9657792abc + 81b^8 - 1044b^6c^2 - 4860b^6 + 1206b^4c^4 + 26892b^4c^2 + 34992b^4 - 1044b^2c^6 + 26892b^2c^4 + 2589408b^2c^2 + 1259712b^2 + 81c^8 - 4860c^6 + 34992c^4 + 1259712c^2)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-4}$$

$$I_{27} : 2^4(27a^3 - 18a^2bc - ab^2c^2 - 81ab^2 - 81ac^2 - 972a - 3b^3c - 3bc^3 - 540bc)(3a^3c + a^2bc^2 + 81a^2b + 18ab^2c + 3ac^3 + 540ac - 27b^3 + 81bc^2 + 972b)(3a^3b + a^2b^2c + 81a^2c + 3ab^3 + 18abc^2 + 540ab + 81b^2c - 27c^3 + 972c)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-5}$$

$$J_9 : 2^4(3a^3 - 12a^2bc + ab^2c^2 - 9ab^2 - 9ac^2 - 108a + 3b^3c + 3bc^3 - 180bc)(3a^3c + a^2bc^2 - 9a^2b - 12ab^2c + 3ac^3 - 180ac + 3b^3 - 9bc^2 - 108b)(3a^3b + a^2b^2c - 9a^2c + 3ab^3 - 12abc^2 - 180ab - 9b^2c + 3c^3 - 108c)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-5}$$

$$J_{12} : 2^3(7290a^{11}bc - 2079a^{10}b^2c^2 + 115911a^{10}b^2 + 115911a^{10}c^2 - 1296a^9b^3c^3 - 63342a^9b^3c - 63342a^9bc^3 + 1889568a^9bc + 150a^8b^4c^4 - 12150a^8b^4c^2 - 527796a^8b^4 - 12150a^8b^2c^4 - 1471365a^8b^2c^2 - 1889568a^8b^2 - 527796a^8c^4 - 1889568a^8c^2 + 30a^7b^5c^5 + 7704a^7b^5c^3 + 128628a^7b^5c + 7704a^7b^3c^5 + 233604a^7b^3c^3 - 8386416a^7b^3c + 128628a^7bc^5 - 8386416a^7bc^3 - 124711488a^7bc + a^6b^6c^6 + 999a^6b^6c^4 + 90882a^6b^6c^2 + 952074a^6b^6 + 999a^6b^4c^6 + 286686a^6b^4c^4 + 7813422a^6b^4c^2 + 11967264a^6b^4 + 90882a^6b^2c^4 + 7813422a^6b^2c^2 + 32087664a^6b^2c^2 - 289103904a^6b^2 + 952074a^6c^6 + 11967264a^6c^4 - 289103904a^6c^2 + 30a^5b^7c^3 + 7704a^5b^7c^3 + 128628a^5b^7c + 30a^5b^5c^7 + 32508a^5b^5c^5 + 3163860a^5b^5c^3 + 38327904a^5b^5c + 7704a^5b^3c^7 + 3163860a^5b^3c^5 + 140796144a^5b^3c^3 + 799077312a^5b^3c + 128628a^5bc^7 + 38327904a^5bc^5 + 799077312a^5bc^3 + 272097792a^5bc + 150a^4b^8c^4 - 12150a^4b^8c^2 - 527796a^4b^8 + 999a^4b^6c^6 + 286686a^4b^6c^4 + 7813422a^4b^6c^2 + 11967264a^4b^6 + 150a^4b^4c^8 + 286686a^4b^4c^6 + 38750724a^4b^4c^4 + 742250304a^4b^4c^2 + 1522991808a^4b^4 - 12150a^4b^2c^8 + 7813422a^4b^2c^6 + 742250304a^4b^2c^4 + 8600683680a^4b^2c^2 + 6530347008a^4b^2 - 527796a^4c^8 + 11967264a^4c^6 + 1522991808a^4c^4 + 6530347008a^4c^2 - 1296a^3b^9c^3 - 63342a^3b^9c - 7704a^3b^7c^5 + 233604a^3b^7c^3 - 8386416a^3b^7c + 7704a^3b^5c^7 + 3163860a^3b^5c^5 + 140796144a^3b^5c^3 + 799077312a^3b^5c - 1296a^3b^3c^9 + 233604a^3b^3c^7 + 140796144a^3b^3c^5 + 4828476096a^3b^3c^3 + 22810864896a^3b^3c - 63342a^3bc^9 - 8386416a^3bc^7 + 799077312a^3bc^5 + 22810864896a^3bc^3 + 51426482688a^3bc - 2079a^2b^{10}c^2 + 115911a^2b^{10} - 12150a^2b^8c^4 - 1471365a^2b^8c^2 - 1889568a^2b^8 + 90882a^2b^6c^6 + 7813422a^2b^6c^4 + 32087664a^2b^6c^2 - 289103904a^2b^6 - 12150a^2b^4c^8 + 7813422a^2b^4c^6 + 742250304a^2b^4c^4 + 8600683680a^2b^4c^2 + 6530347008a^2b^4 - 2079a^2b^2c^{10} - 1471365a^2b^2c^8 + 32087664a^2b^2c^6 + 8600683680a^2b^2c^4 + 85710804480a^2b^2c^2 + 33059881728a^2b^2 + 115911a^2c^{10} - 1889568a^2c^8 - 289103904a^2c^6 + 6530347008a^2c^4 + 33059881728a^2c^2 + 7290ab^{11}c - 63342ab^9c^3 + 1889568ab^9c + 128628ab^7c^5 - 8386416ab^7c^3 - 124711488ab^7c + 128628ab^5c^7 + 38327904ab^5c^5 + 799077312ab^5c^3 + 272097792ab^5c - 63342ab^3c^9 - 8386416ab^3c^7 + 799077312ab^3c^5 + 22810864896ab^3c^3 + 51426482688ab^3c + 7290abc^{11} + 1889568abc^9 - 124711488abc^7 + 272097792abc^5 + 51426482688abc^3 + 115911b^{10}c^2 - 527796b^8c^4 - 1889568b^8c^2 + 952074b^6c^6 + 11967264b^6c^4 - 289103904b^6c^2 - 527796b^4c^8 + 11967264b^4c^6 + 1522991808b^4c^4 + 6530347008b^4c^2 + 115911b^2c^{10} - 1889568b^2c^8 - 289103904b^2c^6 + 6530347008b^2c^4 + 33059881728b^2c^2)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-6}$$

$$J_{15} : 2^3(7290a^{11}bc - 2079a^{10}b^2c^2 + 115911a^{10}b^2 + 115911a^{10}c^2 - 1296a^9b^3c^3 - 63342a^9b^3c - 63342a^9bc^3 + 1889568a^9bc + 150a^8b^4c^4 - 12150a^8b^4c^2 - 527796a^8b^4 - 12150a^8b^2c^4 - 1471365a^8b^2c^2 - 1889568a^8b^2 - 527796a^8c^4 - 1889568a^8c^2 + 30a^7b^5c^5 + 7704a^7b^5c^3 + 128628a^7b^5c + 7704a^7b^3c^5 + 233604a^7b^3c^3 - 8386416a^7b^3c + 128628a^7bc^5 - 8386416a^7bc^3 - 124711488a^7bc + a^6b^6c^6 + 999a^6b^6c^4 + 90882a^6b^6c^2 + 952074a^6b^6 + 999a^6b^4c^6 + 286686a^6b^4c^4 + 7813422a^6b^4c^2 + 11967264a^6b^4 + 90882a^6b^2c^4 + 7813422a^6b^2c^2 + 32087664a^6b^2c^2 - 289103904a^6b^2 + 952074a^6c^6 + 11967264a^6c^4 - 289103904a^6c^2 + 30a^5b^7c^3 + 7704a^5b^7c^3 + 128628a^5b^7c + 30a^5b^5c^7 + 32508a^5b^5c^5 + 3163860a^5b^5c^3 + 38327904a^5b^5c + 7704a^5b^3c^7 + 3163860a^5b^3c^5 + 140796144a^5b^3c^3 + 799077312a^5b^3c + 128628a^5bc^7 + 38327904a^5bc^5 + 799077312a^5bc^3 + 272097792a^5bc + 150a^4b^8c^4 - 12150a^4b^8c^2 - 527796a^4b^8 + 999a^4b^6c^6 + 286686a^4b^6c^4 + 7813422a^4b^6c^2 + 11967264a^4b^6 + 150a^4b^4c^8 + 286686a^4b^4c^6 + 38750724a^4b^4c^4 + 742250304a^4b^4c^2 + 1522991808a^4b^4 - 12150a^4b^2c^8 + 7813422a^4b^2c^6 + 742250304a^4b^2c^4 + 8600683680a^4b^2c^2 + 6530347008a^4b^2 - 527796a^4c^8 +$$

$$11967264a^4c^6 + 1522991808a^4c^4 + 6530347008a^4c^2 - 1296a^3b^9c^3 - 63342a^3b^9c - 7704a^3b^7c^5 + 233604a^3b^7c^3 - 8386416a^3b^7c + 7704a^3b^5c^7 + 3163860a^3b^5c^5 + 140796144a^3b^5c^3 + 799077312a^3b^5c - 1296a^3b^3c^9 + 233604a^3b^3c^7 + 140796144a^3b^3c^5 + 4828476096a^3b^3c^3 + 22810864896a^3b^3c - 63342a^3b^9c^9 - 8386416a^3b^9c^7 + 799077312a^3b^9c^5 + 22810864896a^3b^9c^3 + 51426482688a^3b^9c - 2079a^2b^{10}c^2 + 115911a^2b^{10} - 12150a^2b^8c^4 - 1471365a^2b^8c^2 - 1889568a^2b^8 + 90882a^2b^6c^6 + 7813422a^2b^6c^4 + 32087664a^2b^6c^2 - 289103904a^2b^6 - 12150a^2b^4c^8 + 7813422a^2b^4c^6 + 742250304a^2b^4c^4 + 8600683680a^2b^4c^2 + 6530347008a^2b^4 - 2079a^2b^2c^{10} - 1471365a^2b^2c^8 + 32087664a^2b^2c^6 + 8600683680a^2b^2c^4 + 85710804480a^2b^2c^2 + 33059881728a^2b^2 + 115911a^2c^{10} - 1889568a^2c^8 - 289103904a^2c^6 + 6530347008a^2c^4 + 33059881728a^2c^2 + 7290ab^11c - 63342ab^9c^3 + 1889568ab^9c + 128628ab^7c^5 - 8386416ab^7c^3 - 124711488ab^7c + 128628ab^5c^7 + 38327904ab^5c^5 + 799077312ab^5c^3 + 272097792ab^5c - 63342ab^3c^9 - 8386416ab^3c^7 + 799077312ab^3c^5 + 22810864896ab^3c^3 + 51426482688ab^3c + 7290abc^11 + 1889568abc^9 - 124711488abc^7 + 272097792abc^5 + 51426482688abc^3 + 115911b^{10}c^2 - 527796b^8c^4 - 1889568b^8c^2 + 952074b^6c^6 + 11967264b^6c^4 - 289103904b^6c^2 - 527796b^4c^8 + 11967264b^4c^6 + 1522991808b^4c^4 + 6530347008b^4c^2 + 115911b^2c^{10} - 1889568b^2c^8 - 289103904b^2c^6 + 6530347008b^2c^4 + 33059881728b^2c^2)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-6}$$

$$J_{18} : 2^2(21a^4c + 6a^3bc^2 + 72a^3b + 5a^2b^2c^3 - 126a^2b^2c - 18a^2c^3 - 1512a^2c + 6ab^3c^2 + 72ab^3 - 30abc^4 - 1440abc^2 - 7776ab + 21b^4c - 18b^2c^3 - 1512b^2c + 9c^5 - 216c^3 - 3888c)(21a^4b + 6a^3b^2c + 72a^3c + 5a^2b^3c^2 - 18a^2b^3 - 126a^2bc^2 - 1512a^2b - 30ab^4c + 6ab^2c^3 - 1440ab^2c + 72ac^3 - 7776ac + 9b^5 - 18b^3c^2 - 216b^3 + 21bc^4 - 1512bc^2 - 3888b)(9a^5 - 30a^4bc + 5a^3b^2c^2 - 18a^3b^2 - 18a^3c^2 - 216a^3 + 6a^2b^3c + 6a^2bc^3 - 1440a^2bc + 21ab^4 - 126ab^2c^2 - 1512ab^2 + 21ac^4 - 1512ac^2 - 3888a + 72b^3c + 72bc^3 - 7776bc)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-7}$$

$$J_{21} : 2^5(2835a^{13}bc - 13440a^{12}b^2c^2 + 3078a^{12}b^2c + 3078a^{12}c^2 + 20955a^{11}b^3c^3 - 14004a^{11}b^3c - 14004a^{11}bc^3 - 266166a^{11}bc - 5160a^{10}b^4c^4 + 30132a^{10}b^4c^2 + 6750a^{10}b^4c + 30132a^{10}b^2c^4 - 76752a^{10}b^2c^2 - 962280a^{10}b^2 + 6750a^{10}c^4 - 962280a^{10}c^2 + 1913a^9b^5c^5 - 60360a^9b^5c^3 - 27963a^9b^5c - 60360a^9b^3c^5 + 328176a^9b^3c^3 + 539730a^9b^3c - 27963a^9bc^5 + 539730a^9bc^3 - 5554008a^9bc + 40a^8b^6c^6 + 4686a^8b^6c^4 - 1572a^8b^6c^2 + 18684a^8b^6 + 4686a^8b^4c^6 - 672240a^8b^4c^4 + 2162106a^8b^4c^2 - 469152a^8b^4 - 1572a^8b^2c^6 + 2162106a^8b^2c^4 + 112772088a^8b^2c^2 + 44929728a^8b^2 + 18684a^8c^6 - 469152a^8c^4 + 44929728a^8c^2 + 25a^7b^7c^7 - 4020a^7b^7c^5 + 72954a^7b^7c^3 - 17640a^7b^7c - 4020a^7b^5c^7 + 41514a^7b^5c^5 - 1454220a^7b^5c^3 + 1208196a^7b^5c + 72954a^7b^3c^7 - 1454220a^7b^3c^5 + 35808696a^7b^3c^3 + 400129632a^7b^3c - 17640a^7bc^7 + 1208196a^7bc^5 + 400129632a^7bc^3 + 1069775424a^7bc + 40a^6b^8c^6 + 4686a^6b^8c^4 - 1572a^6b^8c^2 + 18684a^6b^8 + 40a^6b^6c^8 - 24432a^6b^6c^6 + 1640688a^6b^6c^4 - 5181408a^6b^6c^2 - 9796464a^6b^6 + 4686a^6b^4c^8 + 1640688a^6b^4c^6 + 8609112a^6b^4c^4 - 179072208a^6b^4c^2 + 331117632a^6b^4 - 1572a^6b^2c^8 - 5181408a^6b^2c^6 - 179072208a^6b^2c^4 - 890103168a^6b^2c^2 + 844846848a^6b^2 + 18684a^6c^8 - 9796464a^6c^6 + 331117632a^6c^4 + 844846848a^6c^2 + 1913a^5b^9c^5 - 60360a^5b^9c^3 - 27963a^5b^9c - 4020a^5b^7c^7 + 41514a^5b^7c^5 - 1454220a^5b^7c^3 + 1208196a^5b^7c + 1913a^5b^5c^9 + 41514a^5b^5c^7 + 21843270a^5b^5c^5 - 202553460a^5b^5c^3 - 449464464a^5b^5c - 60360a^5b^3c^9 - 1454220a^5b^3c^7 - 202553460a^5b^3c^5 - 8431944480a^5b^3c^3 - 16179041088a^5b^3c - 27963a^5bc^9 + 1208196a^5bc^7 - 449464464a^5bc^5 - 16179041088a^5bc^3 - 17978609664a^5bc - 5160a^4b^{10}c^4 + 30132a^4b^{10}c^2 + 6750a^4b^{10} + 4686a^4b^8c^6 - 672240a^4b^8c^4 + 2162106a^4b^8c^2 - 469152a^4b^8 + 4686a^4b^6c^8 + 1640688a^4b^6c^6 + 8609112a^4b^6c^4 - 179072208a^4b^6c^2 + 331117632a^4b^6 - 5160a^4b^4c^{10} - 672240a^4b^4c^8 + 8609112a^4b^4c^6 - 3607822944a^4b^4c^4 - 30224036736a^4b^4c^2 - 17955095040a^4b^4 + 30132a^4b^2c^{10} + 2162106a^4b^2c^8 - 179072208a^4b^2c^6 - 30224036736a^4b^2c^4 - 166502013696a^4b^2c^2 - 46951985664a^4b^2 + 6750a^4c^{10} - 469152a^4c^8 + 331117632a^4c^6 - 17955095040a^4c^4 - 46951985664a^4c^2 + 20955a^3b^11c^3 - 14004a^3b^11c - 60360a^3b^9c^5 + 328176a^3b^9c^3 + 539730a^3b^9c + 72954a^3b^7c^7 - 1454220a^3b^7c^5 + 35808696a^3b^7c^3 + 400129632a^3b^7c - 60360a^3b^5c^9 - 1454220a^3b^5c^7 - 202553460a^3b^5c^5 - 8431944480a^3b^5c^3 - 16179041088a^3b^5c + 20955a^3b^3c^11 + 328176a^3b^3c^9 + 35808696a^3b^3c^7 - 8431944480a^3b^3c^5 - 165913308288a^3b^3c^3 - 267512440320a^3b^3c - 14004a^3bc^11 + 539730a^3bc^9 + 400129632a^3bc^7 - 16179041088a^3bc^5 - 267512440320a^3bc^3 - 203619847680a^3bc - 13440a^2b^{12}c^2 + 3078a^2b^{12} + 30132a^2b^{10}c^4 - 76752a^2b^{10}c^2 - 962280a^2b^{10} - 1572a^2b^8c^6 + 2162106a^2b^8c^4 + 112772088a^2b^8c^2 + 44929728a^2b^8 - 1572a^2b^6c^8 - 5181408a^2b^6c^6 - 179072208a^2b^6c^4 - 890103168a^2b^6c^2 + 844846848a^2b^6 + 30132a^2b^4c^{10} + 2162106a^2b^4c^8 - 179072208a^2b^4c^6 - 30224036736a^2b^4c^4 - 166502013696a^2b^4c^2 - 46951985664a^2b^4 - 13440a^2b^2c^{12} - 76752a^2b^2c^{10} + 112772088a^2b^2c^8 - 880103168a^2b^2c^6 - 166502013696a^2b^2c^4 - 645415962624a^2b^2c^2 - 70745425920a^2b^2 + 3078a^2c^{12} - 962280a^2c^{10} + 44929728a^2c^8 + 844846848a^2c^6 - 46951985664a^2c^4 - 70745425920a^2c^2 + 2835ab^{13}c - 14004ab^{13}c^3 - 266166ab^{13}c - 27963ab^9c^5 + 539730ab^9c^3 - 5554008ab^9c - 17640ab^7c^7 + 1208196ab^7c^5 + 400129632ab^7c^3 + 1069775424ab^7c - 27963ab^5c^9 + 1208196ab^5c^7 - 44946464ab^5c^5 - 16179041088ab^5c^3 - 17978609664ab^5c - 14004ab^3c^11 + 539730ab^3c^9 + 400129632ab^3c^7 - 16179041088ab^3c^5 - 267512440320ab^3c^3 - 203619847680ab^3c + 2835abc^{13} - 266166abc^{11} - 5554008abc^9 + 1069775424abc^7 - 17978609664abc^5 - 203619847680abc^3 - 29386561536abc + 3078b^{12}c^2 + 6750b^{10}c^4 - 962280b^{10}c^2 + 18684b^8c^6 - 469152b^8c^4 + 44929728b^8c^2 + 18684b^6c^8 - 9796464b^6c^6 + 331117632b^6c^4 + 844846848b^6c^2 + 6750b^4c^{10} - 469152b^4c^8 + 331117632b^4c^6 - 17955095040b^4c^4 - 46951985664b^4c^2 + 3078b^2c^{12} - 962280b^2c^{10} + 44929728b^2c^8 + 844846848b^2c^6 - 46951985664b^2c^4 - 70745425920b^2c^2)(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-7}$$

$$J_{21} : 2^2(c-2)^2(c+2)^2(b-2)^2(b+2)^2(a-2)^2(a+2)^2(a^2 - abc + b^2 + c^2 - 4)^4(3a^2 + abc + 3b^2 + 3c^2 + 36)^{-9}$$

Caso III

$$J_3 : 0$$

$$J_6 : 0$$

$$J_9 : 3(6a^5b^3 - 9a^5b^2 - 9a^5b + 6a^5 + 77a^4b^4 - 169a^4b^3 + 291a^4b^2 - 169a^4b + 77a^4 + 6a^3b^5 - 169a^3b^4 - 24a^3b^3 - 24a^3b^2 - 169a^3b + 6a^3 - 9a^2b^5 + 291a^2b^4 - 24a^2b^3 + 291a^2b^2 - 9a^2b - 9ab^5 - 169ab^4 - 169ab^3 - 9ab^2 + 6b^5 + 77b^4 + 6b^3)$$

$$J_{12} : (12a^5b^3 - 18a^5b^2 - 18a^5b + 12a^5 + 19a^4b^4 - 68a^4b^3 + 177a^4b^2 - 68a^4b + 19a^4 + 12a^3b^5 - 68a^3b^4 - 48a^3b^3 - 48a^3b^2 - 68a^3b + 12a^3 - 18a^2b^5 + 177a^2b^4 - 48a^2b^3 + 177a^2b^2 - 18a^2b - 18ab^5 - 68ab^4 - 68ab^3 - 18ab^2 + 12b^5 + 19b^4 + 12b^3)$$

$$J_{15} : 0$$

$$J_{18} : 0$$

$$J_{27} : 0$$

$$J_9 : 0$$

$$J_{12} : 3^5(a^2b^2 - a^2b + a^2 - ab^2 - ab + b^2)(9a^4b^2 - 9a^4b + 9a^4 - 2a^3b^3 - 15a^3b^2 - 15a^3b - 2a^3 + 9a^2b^4 - 15a^2b^3 + 69a^2b^2 - 15a^2b + 9a^2 - 9ab^4 - 15ab^3 - 15ab^2 - 9ab + 9b^4 - 2b^3 + 9b^2)(27a^4b^2 - 27a^4b + 27a^4 + 14a^3b^3 - 75a^3b^2 - 75a^3b + 14a^3 + 27a^2b^4 - 75a^2b^3 + 327a^2b^2 - 75a^2b + 27a^2 - 27ab^4 - 75ab^3 - 75ab^2 - 27ab + 27b^4 + 14b^3 + 27b^2)$$

$$J_{15} : 3^2(a^2b^2 - a^2b + a^2 - ab^2 - ab + b^2)(9a^4b^2 - 9a^4b + 9a^4 - 2a^3b^3 - 15a^3b^2 - 15a^3b - 2a^3 + 9a^2b^4 - 15a^2b^3 + 69a^2b^2 - 15a^2b + 9a^2 - 9ab^4 - 15ab^3 - 15ab^2 - 9ab + 9b^4 - 2b^3 + 9b^2)(9a^4b^2 - 9a^4b + 9a^4 + 58a^3b^3 - 105a^3b^2 - 105a^3b + 58a^3 + 9a^2b^4 - 105a^2b^3 + 429a^2b^2 - 105a^2b + 9a^2 - 9ab^4 - 105ab^3 - 105ab^2 - 9ab + 9b^4 + 58b^3 + 9b^2)$$

$$J_{18} : 0$$

$$I_{21} : 0$$

$$J_{21} : b^4(b-1)^4a^4(a-1)^4(a-b)^4$$

Caso IV

$$I_3 : 1$$

$$I_6 : (2a-9)^2(a^2-24b)(2a^2+9a+12b)^{-2}$$

$$I_9 : (14a^6-348a^5+1437a^4b+1674a^4-12366a^3b+972a^3+17232a^2b^2-5022a^2b+432ab^2+10206ab+5184b^3-9720b^2+6561b)(2a^2+9a+12b)^{-3}$$

$$I_{12} : (4a^6+7a^5-313a^4b-306a^4+3114a^3b+567a^3-3568a^2b^2-2727a^2b+6192ab^2-6804ab-576b^3+6480b^2-4374b)(2a^2+9a+12b)^{-3}$$

$$I_{15} : (17a^2-72a+72b-81)(a^3-18a^2+66ab+27b)^2(2a^2+9a+12b)^{-4}$$

$$I_{18} : (7a^8-506a^7+3068a^6b+5085a^6-51834a^5b-5184a^5+124712a^4b^2+78948a^4b-7290a^4-444240a^3b^2+130491a^3b+421248a^2b^3-248832a^2b^2+83106a^2b-525312ab^3+303264ab^2-19683ab+41472b^4-637632b^3+367416b^2)(2a^2+9a+12b)^{-4}$$

$$I_{27} : 2(25a+9)^2(a^2-9a+24b)^2(a^4-18a^3+117a^2b-189ab+216b^2-243b)(2a^2+9a+12b)^{-5}$$

$$J_9 : 2(5a-9)^2(a^2-9a+24b)^2(a^4-3a^3-33a^2b+81ab-24b^2+162b)(2a^2+9a+12b)^{-5}$$

$$J_{12} : 2(25a+9)(a^2-9a+24b)(a^3-18a^2+66ab+27b)(31a^6-726a^5+3498a^4b+2889a^4-25299a^3b+2430a^3+29328a^2b^2-5022a^2b-28728ab^2+43011ab+20736b^3-44712b^2+26244b)(2a^2+9a+12b)^{-6}$$

$$J_{15} : 2(5a-9)(a^2-9a+24b)(a^3-18a^2+66ab+27b)(21a^6-116a^5-802a^4b-171a^4+6651a^3b+810a^3-6352a^2b^2-3132a^2b+13752ab^2-25029ab-2304b^3+20088b^2-17496b)(2a^2+9a+12b)^{-6}$$

$$J_{18} : (4a^4+99a^3-1272a^2b+162a^2+1728ab-729a-576b^2+5832b)(a^5-51a^4+312a^3b+108a^3-891a^2b+1536ab^2-405ab-2376b^2-1458b^3)(2a^2+9a+12b)^{-7}$$

$$J_{21} : 2(72a^{14}-5450a^{13}+25856a^{12}b+109995a^{12}-539760a^{11}b-1884042a^{11}-1016320a^{10}b^2+24580281a^{10}b+11436714a^{10}-135540864a^9b^2-184686291a^9b-28251666a^9+400344000a^8b^3+1327698504a^8b^2+441574497a^8b+28100763a^8-5088744384a^7b^3-3282684732a^7b^2-313244010a^7b-7676370a^7+4770854400a^6b^4+16367997024a^6b^3+732668328a^6b^2+217083807a^6b-33081643008a^5b^4-5468192064a^5b^3+387623880a^5b^2-785292651a^5b+11992092672a^4b^5+52584857856a^4b^4-19131316128a^4b^3+9096852744a^4b^2+518154975a^4b-5881166720a^3b^5+28735057152a^3b^4-32675669568a^3b^3-3790237212a^3b^2+3973349376a^3b^2+58891069440a^2b^5-31232459520a^2b^4+28694979648a^2b^3-880066296a^2b^2-11609505792ab^6+43195244544ab^5-69702384384ab^4+25713241344ab^3-4821232752ab^2+8062156800b^6-52645883904b^5-18230552064b^4+25713241344b^3)(2a^2+9a+12b)^{-7}$$

$$J_{21} : 3^6b(a^4-a^3-8a^2b+36ab+16b^2-27b)^3(2a^2+9a+12b)^{-9}$$

Caso V

$$I_3 : 1$$

$$I_6 : b^2(a-6)(a+6)(24a-b^2)(6a^2+ab^2+72)^{-2}$$

$$I_9 : (5184a^6+17232a^5b^2+1437a^4b^4-373248a^4+14a^3b^6-120960a^3b^2-936a^2b^4+6718464a^2-24ab^6-62208ab^2-3888b^4)2^{-3}(6a^2+ab^2+72)^{-3}$$

$$I_{12} : (576a^6+3568a^5b^2+313a^4b^4-41472a^4-4a^3b^6-63360a^3b^2-264a^2b^4+746496a^2-16ab^6-352512ab^2-9072b^4)2^{-3}(6a^2+ab^2+72)^{-3}$$

$$I_{15} : b^2(66a^2+ab^2+216)^2(72a^3+17a^2b^2-2592a-36b^2)2^{-4}(6a^2+ab^2+72)^{-4}$$

$$I_{18} : (41472a^8+421248a^7b^2+124712a^6b^4-2488320a^6+3068a^5b^6-9248256a^5b^2+7a^4b^8-443232a^4b^4+17915904a^4-59616a^3b^6-16422912a^3b^2-920a^2b^8+5546880a^2b^4+644972544a^2+50112ab^6-197074944ab^2+1008b^8+2612736b^4)2^{-4}(6a^2+ab^2+72)^{-4}$$

$$I_{27} : b^2(5a-6)^2(5a+6)^2(24a+b^2)^2(216a^3+117a^2b^2+ab^4-7776a+108b^2)2^{-4}(6a^2+ab^2+72)^{-5}$$

$$J_9 : b^2(24a+b^2)^2(5a^2-84)^2(24a^3+33a^2b^2-ab^4-864a+252b^2)2^{-4}(6a^2+ab^2+72)^{-5}$$

$$J_{12} : b^2(5a-6)(5a+6)(24a+b^2)(66a^2+ab^2+216)(20736a^6+29328a^5b^2+3498a^4b^4-1492992a^4+31a^3b^6-556416a^3b^2-5904a^2b^4+26873856a^2-60ab^6-62208ab^2-7776b^4)2^{-5}(6a^2+ab^2+72)^{-6}$$

$$J_{15} : b^2(24a+b^2)(5a^2-84)(66a^2+ab^2+216)(2304a^6+6352a^5b^2+802a^4b^4-165888a^4-21a^3b^6-146304a^3b^2+5424a^2b^4+2985984a^2+20ab^6-974592ab^2-18144b^4)2^{-5}(6a^2+ab^2+72)^{-6}$$

$$J_{18} : b^2(1536a^4+312a^3b^2+a^2b^4-27648a^2-2016ab^2-84b^4, 2 >, (144a^5+318a^4b^2-a^3b^4-3456a^3+1872a^2b^2-156ab^4-62208a+18144b^2)2^{-5}(6a^2+ab^2+72)^{-7}$$

$$J_{21} : b^2(496668672a^{13}+1499011584a^{12}b^2+596356800a^{11}b^4-35456237568a^{11}+50043000a^{10}b^6-61052553216a^{10}b^2-127040a^9b^8-13795759872a^9b^4+756990738432a^9+3232a^8b^{10}-884825952a^8b^6+635068366848a^8b^2+9a^7b^{12}-45841344a^7b^8+96849672192a^7b^4-4163369435136a^7+203352a^6b^{10}+12824476416a^6b^6-1341590667264a^6b^2-532a^5b^{12}+284970240a^5b^8-702870773760a^5b^4-7285609857024a^5+9222624a^4b^{10}-6558133248a^4b^6+12150422765568a^4b^2-55056a^3b^{12}-1914762240a^3b^8-2190434254848a^3b^4-138942565318656a^3-23748480a^2b^{10}+68944877568a^2b^6+61762570813440a^2b^2-181440ab^{12}-1957810176ab^8-5769924378624ab^4-87381504b^{10}-123780980736b^6)2^{-3}(6a^2+ab^2+72)^{-7}$$

$$J_{21} : 2^3(a-2)^2(a+2)^2(4a-b^2-8)^4(4a-b^2+8)^4(6a^2+ab^2+72)^{-9}$$

Caso VI

$$I_3 : 0$$

$$I_6 : 0$$

$$I_9 : 3(65a^4+2520a^2+11664)$$

$$I_{12} : (5a^4-1800a^2-3888)$$

$$I_{15} : 0$$

$$I_{18} : 0$$

$$\begin{aligned}
I_{27} &: 0 \\
J_9 &: 0 \\
J_{12} &: 2^5 3^5 a^2 (a^2 + 12)(5a^2 + 108)(5a^2 + 252) \\
J_{15} &: 2^5 3^2 a^2 (a^2 + 12)(5a^2 - 324)(5a^2 + 108) \\
J_{18} &: 0 \\
I_{21} &: 0 \\
J_{21} &: 2^8 (a-2)^4 (a+2)^4
\end{aligned}$$

Caso VII

$$\begin{aligned}
I_3 &: 1 \\
I_6 &: 0 \\
I_9 &: 3a^2 (a-6)^2 (a+6)^2 (a^2 + 12)^{-3} \\
I_{12} &: 3^{-1} a^2 (a-6)^2 (a+6)^2 (a^2 + 12)^{-3} \\
I_{15} &: 0 \\
I_{18} &: 2a^2 (a-6)^2 (a+6)^2 (a^2 + 12)^{-3} \\
I_{27} &: 0 \\
J_9 &: 0 \\
J_{12} &: 0 \\
J_{15} &: 0 \\
J_{18} &: 0 \\
I_{21} &: 0 \\
J_{21} &: 2^{10} 3^{-9} (a-2)^6 (a+2)^6 (a^2 + 12)^{-9}
\end{aligned}$$

Caso VIII

$$\begin{aligned}
I_3 &: 1 \\
I_6 &: a^3 (a-6)^2 (a+3)(a^3 + 9a^2 + 36)^{-2} \\
I_9 &: a^2 (a+3)(a+18)^2 (a^2 + 3a + 18)^2 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-3} \\
I_{12} &: a^2 (a+18)(a^2 - 9a - 6)(a^2 + 3a + 18)^2 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-3} \\
I_{15} &: a^3 (a+18)^3 (a^2 + 3a + 18)^3 2^{-1} (a^3 + 9a^2 + 36)^{-4} \\
I_{18} &: 2a^2 (a+3)(a+18)(a^2 - 9a - 6)(a^2 + 3a + 18)^2 (5a^2 + 12a + 36)(a^3 + 9a^2 + 36)^{-4} \\
I_{27} &: 2^4 a^3 (a+3)^3 (a+18)^3 (a^2 + 3a + 18)^3 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-5} \\
J_9 &: 2^4 a^3 (a^2 - 9a - 6)^3 (a^2 + 3a + 18)^3 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-5} \\
J_{12} &: 2^3 a^4 (a+3)^2 (a+18)^4 (a^2 + 3a + 18)^4 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-6} \\
J_{15} &: 2^3 a^4 (a+18)^2 (a^2 - 9a - 6)^2 (a^2 + 3a + 18)^4 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-6} \\
J_{18} &: 2^2 a^3 (a^2 - 9a - 6)^3 (a^2 + 3a + 18)^3 (5a^2 + 12a + 36)^3 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-7} \\
I_{21} &: 2^3 a^3 (a+18)(a^2 - 9a - 6)^2 (a^2 + 3a + 18)^3 (5a^2 + 12a + 36)^2 (a^3 - 9a^2 - 18a - 6)(a^3 + 9a^2 + 36)^{-7} \\
J_{21} &: 2^2 (a-2)^{14} (a+1)^4 (a+2)^6 (a^3 + 9a^2 + 36)^{-9}
\end{aligned}$$

Caso IX

$$\begin{aligned}
I_3 &: 0 \\
I_6 &: 0 \\
I_9 &: 0 \\
I_{12} &: 0 \\
I_{15} &: 0 \\
I_{18} &: 0 \\
I_{27} &: 0 \\
J_9 &: 0 \\
J_{12} &: 0 \\
J_{15} &: 0 \\
J_{18} &: 0 \\
I_{21} &: 0 \\
J_{21} &: 3^6
\end{aligned}$$

Caso X

$$\begin{aligned}
I_3 &: 0 \\
I_6 &: 0 \\
I_9 &: 2 \cdot 3^7 \\
I_{12} &: -2 \cdot 3^5 \\
I_{15} &: 0 \\
I_{18} &: 0 \\
I_{27} &: 0
\end{aligned}$$

$J_9 : 0$
 $J_{12} : 0$
 $J_{15} : 0$
 $J_{18} : 0$
 $I_{21} : 0$
 $J_{21} : 2^7$

Caso XI

$I_3 : 1$
 $I_6 : 0$
 $I_9 : 0$
 $I_{12} : 0$
 $I_{15} : 0$
 $I_{18} : 0$
 $I_{27} : 0$
 $J_9 : 0$
 $J_{12} : 0$
 $J_{15} : 0$
 $J_{18} : 0$
 $I_{21} : 0$
 $J_{21} : -2^3 3^{-18}$

Caso XII

$I_3 : 1$
 $I_6 : -3^2$
 $I_9 : 0$
 $I_{12} : 0$
 $I_{15} : 0$
 $I_{18} : 0$
 $I_{27} : 0$
 $J_9 : 0$
 $J_{12} : 0$
 $J_{15} : 0$
 $J_{18} : 0$
 $I_{21} : 0$
 $J_{21} : -7^7 3^{-18}$

Bibliografía

A parte de la bibliografía citada en el trabajo, incluimos aquí también algunos textos que por motivos relacionados con la elaboración de la memoria han sido consultados y merecen ser mencionados.

1. [ARBA85] E. Arbarello, M. Corbalba, P. Griffiths y J. Harris, “Geometry of Algebraic Curves”, Vol.1, Springer-Verlag, 1985.
2. [BARS05] F. Bars, “Automorphic groups of genus 3 curves”, notas del Seminario de Teoría Números UB-UAB-UPC 2004/05: Genus 3 curves, cap. 2.
3. [BRUI06] N. Bruin, J. Fernández, J. González, J.C. Lario, “Rational Points on twists of $X_0(63)$ ”, Acta Arith. 126 (2007), 361-385.
4. [CARD99] G. Cardona, J. González, J.C. Lario, A. Río, “On curves of genus 2 with Jacobian of GL_2 -type”, Manuscripta Mathematica 98 (1999), 37–54.
5. [CARD01] G. Cardona, “Models Racionales de Corbes de Gènere 2”, tesis, 2001.
6. [CARD06] G. Cardona, “Representations of G_k -groups and twists of the genus two curve $y^2 = x^5 - x$ ”, Journal of Algebra 303 (2006) 707-721.
7. [COX89] D.A. Cox, “Primes of the form $x^2 + ny^2$ ”, John Wiley & Sons, inc., 1989.
8. [ECHI] echidna-2.0, <http://echidna.maths.usyd.edu.au/kohel/alg/>.
9. [ELKI98] N.D. Elkies, “The Klein Quartic in Number Theory”, The Eightfold Way MSRI Publications, Vol. 35, 1998.
10. [FERN07] J. Fernández, J. González, J.C. Lario, “Plane quartic twists of $X(5,3)$ ”, Canadian Mathematical Bulletin 50 (2007), 196–205.
11. [FITE10] F. Fité, “Efecte Twist”, tesis, en fase de redacción.
12. [FULF69] W. Fulton, “Algebraic Curves, an introduccion to Algebraic Geometry”, Math. Lecture Notes Series, W. A. Benjamin, 1969.
13. [GAMB03] J.M. Gamboa, J.M. Ruíz, “Anillos y cuerpos conmutativos”, UNED, 2003.
14. [GAP08] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12; 2008. (<http://www.gap-system.org>).
15. [GIRA06] M. Girard, D.R. Kohel, “Classification of Genus 3 Curves in Special Strata of the Moduli Space”, capítulo del libro Algorithmic Number Theory, Springer, 2006.
16. [GRIF78] P. Griffiths y J. Harris, “Principles of algebraic geometry”, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978.
17. [HARR98] J. Harris e I. Morrison, “Moduli of Curves”, Springer, 1998.
18. [HART77] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry”, Springer, 1977.
19. [HENN76] P.Henn, “Die Automorphismengruppen der algebraischen Funktionenkorper vom Geschlecht 3”, Inagural-Dissertetion, Heidelberg, 1976.
20. [MAGA02] K. Magaard, T. Shaska, S. Shpectorov y H. Völklein, “The locus of curves with prescribed automorphism group”, RIMS Kyoto TR Ser., Commun. Arith., 2002.
21. [MUMF65] D. Mumford, “Geometric invariant theory”, Springer, 1965.
22. [NART05] E. Nart, “Bitangents and theta characteristics of plane quartics”, notas del Seminario de Teoría Números UB-UAB-UPC 2004/05: Genus 3 curves, cap. 1.
23. [REYS89] E. Reyssat, “Quelques aspects des surfaces de Riemann”, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989.

24. [SAGE] <http://www.sagenb.org>
25. [SIJS07] J. Sijlsing, “Examples of moduli in genus 2 and 3”, Seminar on Moduli Spaces and Modular Forms, Leiden, 2007.
26. [SILV86] J.H. Silverman, “The arithmetic of elliptic curves”, Springer, 1986.
27. [VERM83] A.M. Vermeulen, “Weierstrass Points of weight two on curves of genus three”, tesis, 1983.