



## TEORÍA DEL DISCO ACTUADOR ROTANTE – FUENTE PUNTUAL PARA TURBINAS EÓLICAS DE EJE HORIZONTAL

**Ricardo A. Prado**

Departamento de Mecánica Aplicada - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Comahue  
calle Buenos Aires N°1400, Q8300BCX Neuquén - Argentina  
Tel. +54 - (0)299 – 449-0338, email: prado@uncoma.edu.ar

**RESUMEN:** Se formula un modelo para la predicción de los parámetros característicos de una turbina eólica de eje horizontal basado en la aplicación de la teoría de la cantidad de movimiento, con la incorporación de la rotación del disco actuador. Se determinan los coeficientes de potencia, tracción y torque, ahora afectados por la rotación del disco que simula a la turbina, determinando las pérdidas de energía en un modelo invíscido en donde se simula la presencia de una estela rotacional corriente abajo del actuador.

**Palabras clave:** modelo invíscido, disco actuador, rotación, turbina eólica, eje horizontal.

### INTRODUCCIÓN

Entre los más simples modelos desarrollados para predecir los coeficientes característicos de las turbinas eólicas de eje horizontal, se encuentra el de Betz, originado por la adaptación de la teoría de la *cantidad de movimiento* de Rankine-Froude, y descrito, entre otros, por Le Gouirières (1982). Este modelo no incluye la rotación del denominado *disco actuador* que simula a la turbina ni pérdidas de energía en el aire que cruza al disco. Entre los modelos que incorporan la rotación del disco se encuentra la adaptación al modelo de Glauert, el cual representa una extensión del mencionado modelo de Betz, con lo cual comparte las falencias de la mencionada representación (Eggleston y Stoddard, 1987).

Tomando como base la propuesta de teoría presentada por Dymont (1989), el modelo descrito inicialmente por Prado (1995) simula al tubo de corriente -el cual encierra al aire que fluye a través del disco actuador que representa a la turbina eólica de eje horizontal-, mediante la superposición potencial de una fuente puntual y una corriente uniforme. Esta representación conduce a una serie de parámetros característicos de la turbina eólica que incluyen la presencia de pérdidas de energía, con lo cual el modelo difiere sustancialmente del de Betz, si bien no se incluyó el efecto de la rotación del aire que fluye detrás del disco actuador.

En un modelo anteriormente propuesto por Prado (1996), el cual consideraba una representación semejante a la presentada en Eggleston y Stoddard (1987), se incorporaba un disco actuador rotante que imprimía dicha rotación solamente a la porción del fluido que se encuentra corriente abajo del mismo, pero se asumía que el aire respondía fundamentalmente a un modelo irrotacional de flujo, con la consecuente distribución de presiones en el tubo de corriente generado aguas abajo de la posición del actuador. Con la finalidad de mejorar a dicho modelo, la presente reformulación incorpora la presencia de un flujo rotacional, el cual simula la presencia de una estela helicoidal de radio no constante a medida que se desarrolla corriente abajo del disco actuador, totalmente contenida dentro del tubo de corriente  $\tau$ , cuyo interior de la porción posterior rota, si bien no lo hace como un cuerpo rígido.

### DEFINICIONES DEL MODELO

En el presente trabajo se considera un disco actuador de radio  $R$ , infinitamente delgado, perfectamente permeable al flujo, ubicado en coincidencia con el origen de coordenadas del eje  $x$ , donde se ubica asimismo la fuente puntual de acuerdo al modelo propuesto por Prado (1995). El disco se encuentra inmerso en el flujo coaxial de un fluido idealmente no viscoso. Adicionalmente, dicho disco rota a velocidad angular uniforme  $\Omega$ , dejando tras de sí un flujo rotacional que simula la presencia de una estela rotacional no viscosa.

El tubo de corriente que envuelve al aire que pasa a través del disco actuador, se identifica mediante  $\tau$ . Por definición de tubo de corriente, no existe flujo alguno a través de sus paredes. Por fuera de dicho tubo de corriente, el flujo resulta potencial (irrotacional y asumido no viscoso) por lo cual no presenta pérdidas y admite la aplicación de la ecuación de Bernoulli. La componente axial del flujo de aire dentro de  $\tau$  es considerada unidimensional, es decir  $V = V(x)$ , asumiéndose entonces la presencia de deslizamiento entre los flujos interno y externo a  $\tau$ . Como fuera indicado, solo el flujo de aire interno a la porción posterior de  $\tau$  es el que rota.

El flujo dentro de  $\tau$  en  $x = -\infty$  está representado por la corriente de aire no perturbada de velocidad  $V_\infty$ . Sobre la posición del disco actuador ( $x = 0$ ), la velocidad axial resulta reducida a  $V_0 = V_\infty (1-a)$ , siendo  $a$  el coeficiente de reducción de velocidad en el disco. Suficientemente lejos corriente abajo, la velocidad axial dentro de  $\tau$  resulta aún más reducida al valor

$V_\infty(1-a)/(1+a)$  (Prado, 1995). La *Figura 1* muestra un segmento del tubo de corriente  $\tau$ , representado alrededor de la posición del disco actuador, para un coeficiente de reducción de velocidad en el disco,  $a$ , igual a 0,3.

Para aplicar la metodología del volumen de control, interesa particularmente determinar de la geometría del tubo de corriente  $\tau$ , los radios infinitamente lejos por delante ( $x = -\infty$ ) y por detrás ( $x = +\infty$ ) de la posición del disco actuador, resultando (Prado, 1995)

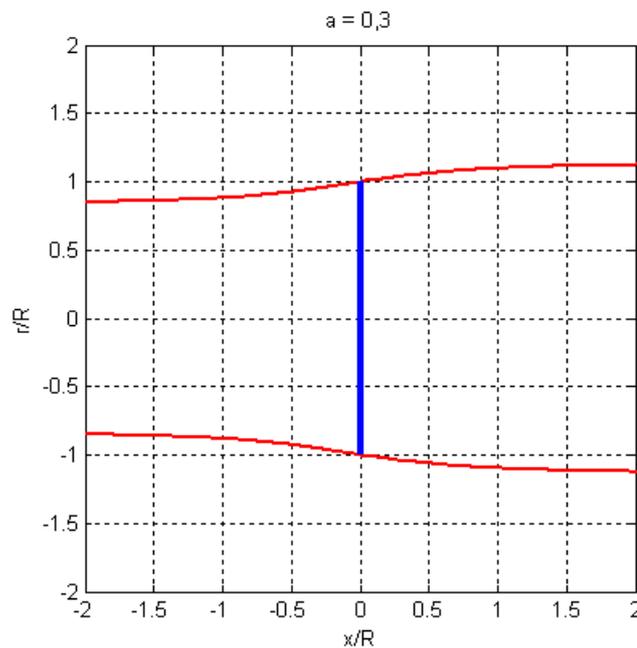
$$R_{-\infty} = R\sqrt{1-a} \quad R_{+\infty} = R\sqrt{1+a} \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (1)$$

La introducción de la rotación del disco actuador conduce a la introducción de una nueva variable adimensional, conocida como *velocidad específica* o *relación de velocidad en el borde del disco*, definida por la razón entre la velocidad tangencial en el borde del disco y la velocidad del viento no perturbada, es decir,

$$\lambda_\infty = \frac{\Omega R}{V_\infty} \quad (2)$$

Dado que la velocidad del viento se reduce hasta el valor  $V_0 = V_\infty(1-a)$  en el disco actuador, resulta en la estación  $x=0$  la siguiente definición de la razón de velocidades *sobre* el disco

$$\lambda_0 = \frac{\Omega R}{V_0} = \frac{\lambda_\infty}{(1-a)} \quad (3)$$



*Figura 1: Sistema coordenado, porción del tubo de corriente  $\tau$  y disco actuador, siendo  $a = 0,3$ .*

## ECUACIONES GENERALES DEL MODELO

### *Ecuaciones integrales del método del volumen de control*

Las ecuaciones de gobierno del movimiento de fluidos (Shames, 1992), escritas bajo la consideración de la metodología del volumen de control, considerando a las mismas bajo condiciones estacionarias, resultan las siguientes ecuaciones, evaluadas sobre la superficie (SC) que envuelve al volumen de control adecuadamente definido:

ecuación de continuidad,

$$\oiint_{SC} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA = 0, \quad (4)$$

ecuación de la cantidad de movimiento (segunda ley de Newton)

$$\sum \vec{F} = \oiint_{SC} \vec{V} \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA, \quad (5)$$

ecuación del momento de la cantidad de movimiento lineal

$$\sum \vec{M}_0 = \oiint_{SC} (\vec{r} \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \quad (6)$$

y la ecuación para la conservación de la energía (primer principio de la termodinámica) despreciando los efectos gravitatorios

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \oint_{SC} \left( \tilde{u} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dA \quad (7)$$

donde,

- $\rho$  densidad del aire,
- $\vec{V}$  vector velocidad local del flujo (incluyendo al viento y a la rotación de la estela), con módulo  $V$ ,
- $\hat{n}$  versor normal a la superficie de control,
- $\vec{F}$  fuerzas actuantes sobre el volumen de control, tanto superficiales como másicas, activas o reactivas, tanto inerciales como las provenientes de posibles efectos no inerciales,
- $\vec{M}_0$  momentos referidos al origen de coordenadas de las fuerzas actuantes sobre el volumen de control,
- $\vec{r}$  vector posición al origen de coordenadas,
- $\dot{Q}$  calor suministrado, por unidad de tiempo,
- $\dot{W}_s$  trabajo cedido por el aire, por unidad de tiempo, como potencia al eje,
- $\tilde{u}$  energía interna por unidad de masa y
- $p$  presión estática absoluta

Asimismo, se ha considerado que los volúmenes de control, y por ende sus superficies, son fijos e indeformable, el flujo es estacionario y el sistema de referencia inercial se encuentra fijo, con origen en la fuente puntual ubicada en el centro del disco. El sistema coordenado utilizado es el cilíndrico, aprovechando la simetría axial del problema., denotando a la coordenada radial mediante  $r$  y a la axial mediante  $x$ .

#### *Efectos de la rotación de la corriente*

Previo al planteo de las ecuaciones integrales de gobierno, se deben plantear las condiciones de contorno del problema, por lo cual debe determinar la distribución de presiones lejos corriente abajo originada por el efecto de rotación de la corriente dentro de  $\tau$ . Según Schlichting (1972), resulta que

$$\frac{\partial p}{\partial r}(x, r) = \rho r [\omega(x)]^2 \quad (8)$$

para compensar el efecto de la aceleración centrípeta presente en el flujo. Entonces,

$$p(x, r) = \frac{1}{2} \rho r^2 [\omega(x)]^2 + C(x) \quad (9)$$

Dado que en  $x = +\infty$  y por fuera de  $\tau$ , la presión estática resulta ser la atmosférica

$$p(+\infty, R\sqrt{1+a}) = p_\infty \quad (10)$$

se determina entonces la constante de integración  $C(\infty)$ , con lo cual

$$p(+\infty, r) - p_\infty = -\frac{1}{2} \rho r [\omega(+\infty)]^2 [R^2(1+a) - r^2] \quad 0 \leq r \leq R\sqrt{1+a} \quad (11)$$

Promediando dicha distribución sobre la sección de  $\tau$  en  $x = +\infty$ , resulta

$$\bar{p}(+\infty)_{man} = \bar{p}'''_{man} = -\frac{1}{2} q_\infty (\lambda_\infty)^2 \frac{1}{(1+a)} \quad (12)$$

donde el subíndice *man* indica que la medición es manométrica y

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho (V_\infty)^2 \quad (13)$$

denota la presión dinámica de la corriente libre.

Siguiendo un proceso semejante al detallado y planteando el equilibrio de fuerzas, incluida la variación de la cantidad de movimiento axial, resultan las presiones a ambos lados del disco actuador

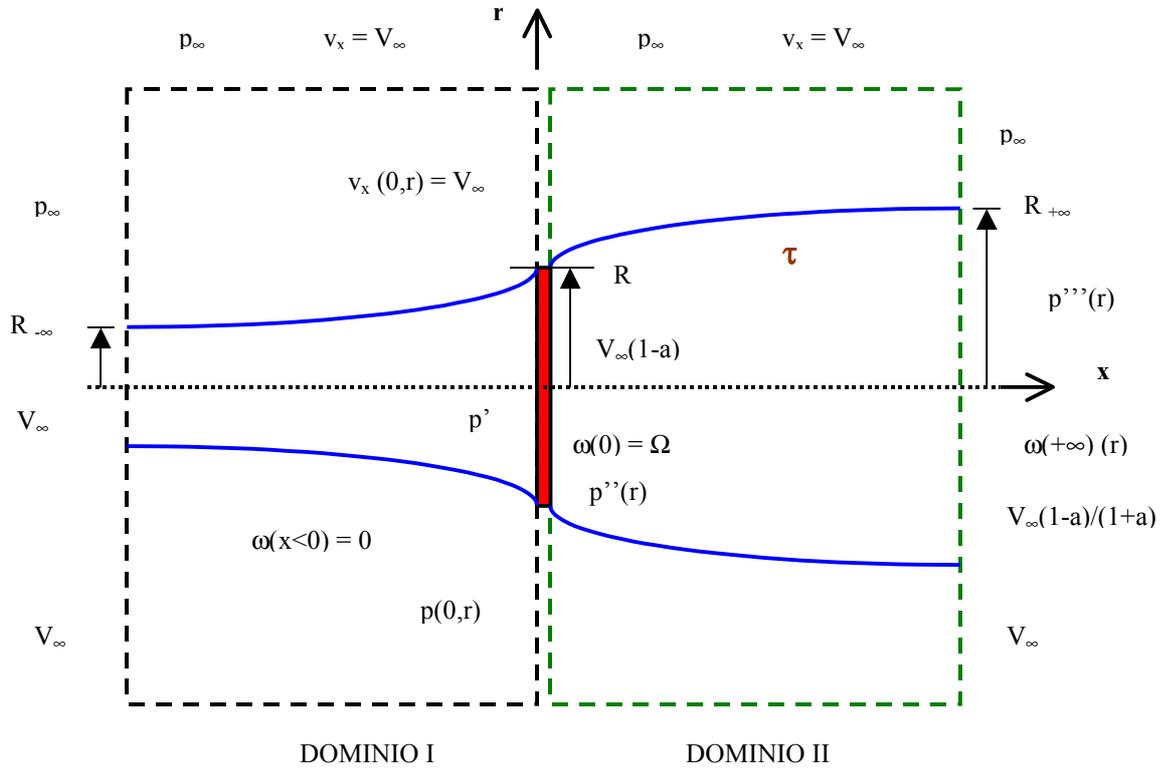
$$\bar{p}(0+)_{man} = \bar{p}''_{man} = q_\infty \left[ \frac{a^2}{4} - 2a \frac{(1-a)^2}{(1+a)} - \frac{(\lambda_\infty)^2}{2} \right] \quad (14)$$

$$p(0-)_{man} = p'_{man} = \frac{1}{4} q_\infty [a(8-7a)]$$

observándose que la reducción de la presión detrás del disco rotante (con respecto a la condición sin rotación,  $\lambda_\infty = 0$ ), trae como consecuencia el incremento de la tracción sobre el rotor.

*Obtención de los coeficientes característicos*

La *Figura 2* muestra, esquemáticamente, los dominios en que subdivide el espacio para el planteo de las ecuaciones integrales de gobierno, con sus correspondientes condiciones de contorno.



*Figura 2: Dominios para la aplicación del método del volumen de control. Condiciones de contorno.*

Del planteo de la ecuación de la cantidad de movimiento axial (5) resulta el coeficiente de tracción

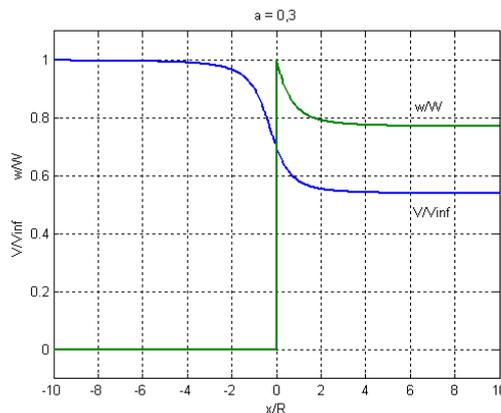
$$C_T = \frac{T}{q_\infty A} = 4a \frac{(1-a)}{(1+a)} + \frac{(\lambda_\infty)^2}{2} \tag{15}$$

donde  $A = \pi R^2$  denota el área del disco. La tracción  $T$  tiene sentido de  $x(+)$ , representando una resistencia a la corriente. Planteando la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento angular (6) tanto en la totalidad el dominio II, como solamente en el interior del tubo de corriente inmerso en dicho dominio, resultan

$$\omega_{+\infty} = \Omega \left( \frac{R}{R_{+\infty}} \right)^2 \equiv \frac{\Omega}{(1+a)} \tag{16}$$

y el coeficiente de torque

$$C_Q = \frac{M_0}{q_\infty AR} = \lambda_\infty (1-a) \tag{17}$$



*Figura 3: variaciones a lo largo del eje del tubo de corriente  $\tau$  de las magnitudes adimensionales  $V(x)/V_\infty$  y  $\omega(x)/\Omega$ .*

La variación axial de la velocidad angular de la estela, la cual se asume iniciarse discontinuamente una vez que el aire atraviesa el disco, es representada en la *Figura 3*, conjuntamente con la variación de la velocidad dentro del tubo de corriente, considerando un coeficiente de reducción de velocidad en el disco  $a = 0,3$ . En general, estas resultan

$$\omega(x) = \Omega \left( \frac{R}{R_\tau(x)} \right)^2 \quad x > 0 \quad V(x) = V_\infty (1-a) \left( \frac{R}{R_\tau(x)} \right)^2 \quad x > -\infty \quad (18)$$

donde  $R_\tau(x)$  es el radio del tubo de corriente  $\tau$  en la estación  $x$ , el cual verifica la representación funcional presentada en (Prado, 1995), y resulta asimismo una función del parámetro  $a$ . En este modelo se asume que no existe deslizamiento entre las velocidades tangenciales del rotor y las del aire en contacto con la cara posterior del disco.

Como lo indican Eggleston y Stoddard (1987), la energía rotacional impartida al aire no resulta económicamente recuperable, por lo cual representa una energía desperdiciada en hacer girar la estela, limitándose así aún más la eficiencia del rotor. Dicha energía es proporcional al producto entre la cupla o torque y la velocidad angular de rotación,  $M_0\Omega$ , definiendo el correspondiente coeficiente de potencia

$$C_{\text{Pot}} = \frac{M_0\Omega}{q_\infty AV_\infty} = (\lambda_\infty)^2 (1-a) \quad (19)$$

Vale aclarar que los únicos efectos no inerciales que aparecen en el presente análisis de deben a la presencia de aceleraciones centrípetas  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  en la estela, en donde aparece la componente tangencial de la velocidad del aire,  $v_\theta = \omega r$ . Por otra parte, la aceleración de Coriolis es nula pues  $\vec{\omega} \parallel \vec{V}$  y no existen aceleraciones lineales o angulares del tubo de corriente.

De la aplicación de la ecuación de la energía (7) en el dominio I, en el dominio II y en la totalidad del espacio, resultan

$$\zeta_I = \frac{\Delta \tilde{u}_I}{(V_\infty)^2 / 2} = \frac{3}{4} a^2 \quad (20)$$

para el coeficiente de pérdida de energía en la porción I de  $\tau$ ,

$$\zeta_{II} = \frac{\Delta \tilde{u}_{II}}{(V_\infty)^2 / 2} = a^2 \left[ \frac{1}{4} - \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} \right] \quad (21)$$

para el coeficiente de pérdida de energía en la porción II de  $\tau$ ,

$$C_\zeta = (1-a)(\zeta_I + \zeta_{II}) = (1-a)a^2 \left[ 1 - \frac{(1-a)^2}{(1+a)^2} \right] \quad (22)$$

para el coeficiente de pérdida de potencia total, y

$$C_{w_s} = \frac{W_s}{q_\infty AV_\infty} = \frac{4a(1-a)^2}{(1+a)} \quad (23)$$

para el coeficiente potencia al eje de la turbina.

Dado que las pérdidas representadas por la ecuación (22) y graficadas en la *Figura 4* no son consideradas por el modelo de Betz, resulta un coeficiente de potencia al eje menor que el propuesto por dicha teoría. En la *Figura 5* se grafica la variación del coeficiente de potencia al eje, ecuación (23), con el factor de reducción de velocidad en el disco. Se observa que el máximo valor del coeficiente apenas supera el valor 0,45 frente al (reconocidamente elevado) 0,60 que predice la teoría de Betz. Por otra parte, el presente modelo admite soluciones para  $a > 0,5$  mientras que el modelo de Betz deja de ser válido en el rango  $0,5 < a \leq 1$ . Por su parte, la teoría de Dymont (1989) subestima el valor del máximo coeficiente de potencia obtenible (resultando éste aproximadamente 0,30). En cuanto a la comparación con resultados experimentales, Heijdra y Hendriks (2001) muestran que los máximos coeficientes de potencia observados en su análisis comparativo se encuentran entre 0,37 y 0,44 (Table 2, p.28).

Por otra parte, para definir el adecuado valor del parámetro  $\lambda_\infty$  del modelo, se considera la relación presentada por Le Gourières (1982) proveniente de un estudio llevado a cabo por Hutter (p.54 *op.cit.*), donde se representa la variación funcional entre la velocidad específica  $\lambda_\infty$  y la solidez del rotor,  $\sigma$ , que es la razón entre la superficie de las palas y el área barrida por las mismas. Dicha relación funcional (ver figura 54, p.55 *op.cit.*) es aproximada como

$$\log_{10}(\sigma[\%]) \approx 2 - 1,523 \log_{10}(\lambda_\infty) \quad (24)$$

En el caso un disco, donde la razón de solidez es unitaria ( $\sigma = 100\%$ ), le corresponde por la relación (24) el valor de velocidad específica  $\lambda_\infty = 1$ . Por lo cual, resulta que  $\Omega = V_\infty/R$  es el valor de rotación más representativo de un disco actuador.

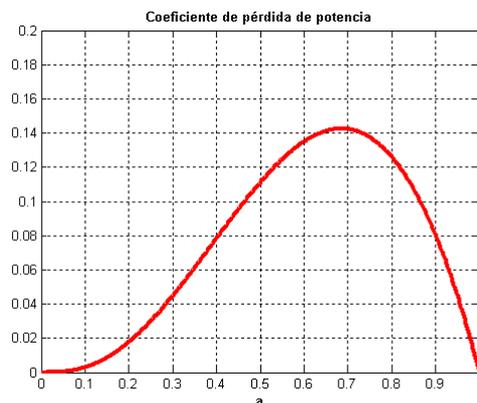


Figura 4: Coeficiente de pérdida de potencia dentro del tubo de corriente  $\tau$ , como función del parámetro  $a$ .

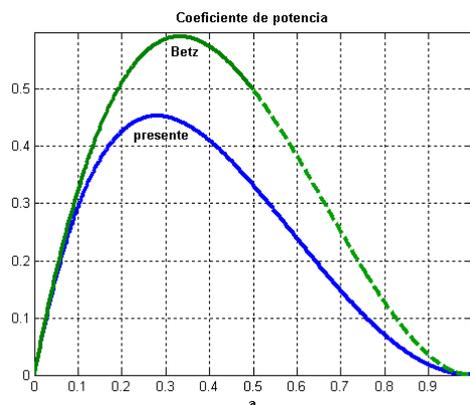


Figura 5: Coeficiente de potencia en función del factor de disminución de velocidad en el disco,  $a$ . Modelo presente y de Betz

## CONCLUSIONES

Se propone un modelo de disco actuador rotante que complementa a la representación del tubo de corriente que envuelve al aire que fluye a través del rotor de una turbina eólica de eje horizontal mediante la superposición potencial de una corriente uniforme de dirección del eje del disco y de una fuente puntual ubicada en coincidencia con el centro del disco.

Se desarrollan las expresiones de los coeficientes característicos de un rotor eólico considerando el modelo descrito. Si bien el presente modelo es todavía muy simplificado, representa un avance frente al modelo de Betz y a aquellos modelos que, incorporando la rotación del disco, mantienen las hipótesis de la teoría de Betz en su desarrollo.

## REFERENCIAS

- Eggleston D.M. and Stoddard F.S. (1987) *Wind Turbine Engineering Design*. Van Nostrand Reinhold Co. Inc., New York.
- Dyment A. (1989) A modified form of the Betz' wind turbine theory including losses. *J. Fluids Engineering* **111**, 356-358.
- Heijdra J.J. and Hendriks H.B. (ed.) (2001) DOWEC Concept Study – Task 11: Selection of feasible concepts. ECN Windenergie, ECN-C--01-079.
- Le Gourières D. (1982) *Energie éolienne*. Deuxième édition, Eyrolles, Paris.
- Prado R.A. (1994) Reformulación de la teoría de la cantidad de movimiento aplicada a turbinas eólicas. *Anales del VI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Santiago de Chile, pp.723-728.
- Prado R.A. (1995) Reformulation of the momentum theory applied to wind turbines. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **58**, 277-292.
- Prado R.A. (1996) Modelo de disco actuador rotante para la simulación de una turbina eólica de eje horizontal. *ASADES'96*, Mar del Plata.
- Schlichting H. (1972) *Teoría de la capa límite*, Ediciones URMO, Bilbao, España.
- Shames I.H. (1992) *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, Colombia.

**ABSTRACT:** A simplified model has been developed to predict the characteristic coefficients of horizontal-axis wind turbines. The model is based on the momentum theory and the inclusion of a rotating actuator disc. The power, axial force and torque coefficients are evaluated under the condition of disc rotation, in order to determine the energy losses in a model where a rotational inviscid wake is developed downstream of the rotating actuator disc that simulates the wind turbine.

**Keywords:** inviscid model, actuator disc, rotation, horizontal-axis wind turbine.