



[www.cibereduca.com](http://www.cibereduca.com)



**V Congreso Internacional Virtual de Educación**

**7-27 de Febrero de 2005**

## **LA UTILIZACIÓN DE LAS NTIC EN LA ENSEÑANZA DE LA MECÁNICA**

Ramón Capdevila · Jordi Pujol

# Las NTIC en la enseñanza de la Mecánica: ejemplo del telar clásico

*Ramon Capdevila, Jordi Pujol*

**Departament d'Enginyeria Mecànica. ETSEIT. UPC**

c/ Colom, 11 08222 Terrassa

ramon.capdevila@upc.es, jordi.pujol-g@upc.es

## 1. Introducción y objetivos.

Es bien sabido (1) que el diseño clásico, por las cadencias usuales de trabajo y por las dificultades de cálculo, solía basarse en un análisis cinemático y, como mucho, estático de las máquinas. Actualmente es posible y, además, necesario hacer un estudio completo.

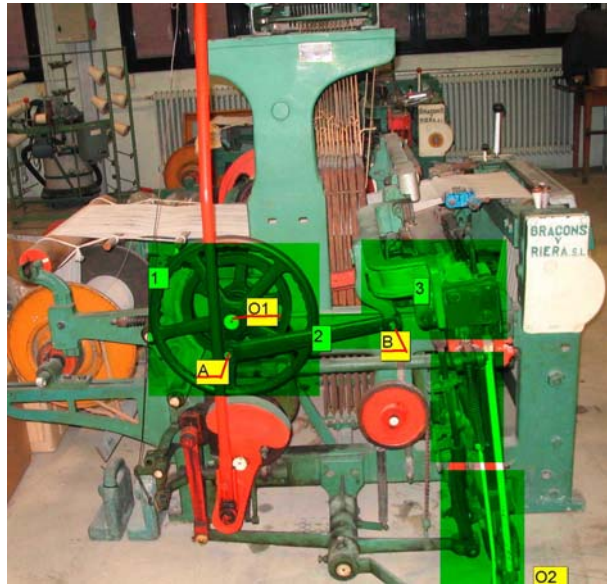
Señalemos ahora que la presente comunicación es una aplicación de la metodología propuesta anteriormente (2). En el caso actual se aplican las NTIC al análisis cinemático de una máquina, como preámbulo a un ulterior estudio dinámico. Digamos, por su relevancia didáctica, que se utilizarán varias cámaras para visualizar los movimientos de un punto dado respecto a observadores distintos; este tema en su presentación tradicional suele presentar dificultades para los alumnos.



## 2. Una máquina paradigmática: el telar clásico.

Las máquinas de tejer constituyen uno de los sistemas mecánicos más antiguos que se conocen. Su funcionamiento incluye la mayor parte de los elementos característicos de las máquinas mecánicas, desde el movimiento de vaivén del batán hasta el movimiento alternativo de los lizos, pasando por el movimiento de traslación de la lanzadera o los efectos de la dinámica percusiva, que es la causa del movimiento de la lanzadera por el canal superior del batán.

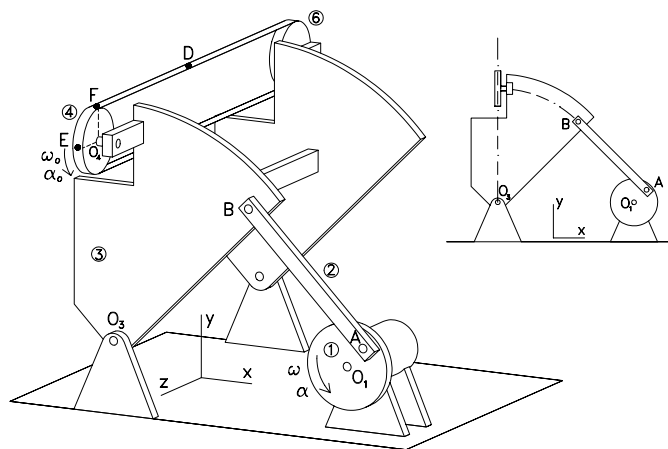
La figura de la página anterior muestra una máquina de tejer para la fabricación de muestras; es un modelo de la empresa Bracons fabricado el año 1965. Su cadencia de trabajo es de 150 pasadas por minuto y tiene una anchura de tejido de 40 cm. Los telares similares de producción alcanzan, como máximo, las 240 pasadas por minuto y pueden llegar a un ancho de 4 m, pero el progresivo aumento de las exigencias de la producción ha motivado la introducción de procedimientos nuevos de tejer que han ido sustituyendo, sucesivamente, los telares de lanzadera convencional por los de proyectil, chorro de agua o chorro de aire que alcanzan las 800 pasadas por minuto.



En la figura adjunta se señala uno de los mecanismos característicos de un telar: el mecanismo del batán. El movimiento de vaivén del sólido 3 se origina en el disco 1, que gira en torno a  $O_1$  con velocidad y aceleración angulares  $\omega$  y  $\alpha$  conocidas. Este movimiento de rotación se transmite por medio de la barra 2 al cuerpo 3, que puede oscilar alrededor de  $O_2$ . (El movimiento del sistema puede verse activando el video correspondiente. [\(Ver video 1\)](#))

### 3. Esquematización y propuesta de estudio.

En la figura de la página siguiente se ha realizado una esquematización del dispositivo que permite estudiar el sistema con mayor simplicidad. En él se ha sustituido el mecanismo de lanzadera por un mecanismo de pinzas, de modo que el cuerpo 3, a su vez, arrastra el disco 4 de radio  $r_0$  que gira alrededor de  $O_4$  con velocidad angular  $\omega_0$ . Esta última velocidad angular mantiene, para



cualquier instante, la relación  $\omega_6 = k \cdot \omega_3$  (por la acción de un dispositivo no mostrado), donde  $k$  es una constante conocida. Por último, el disco 4 mueve el disco 6 mediante una correa que no desliza.

Para estudiar totalmente el dispositivo se van a determinar las magnitudes siguientes:

- 1) La aceleración angular del cuerpo 3.
- 2) La aceleración del punto D de la correa.
- 3) La aceleración del punto E del disco 4.
- 4) La velocidad del punto D de la correa respecto del disco 4.

(Datos:  $\omega$  y  $\alpha$  del cuerpo 1,  $O_1A = r$ ,  $O_3B = R$ ,  $AB = \ell$ ,  $FD = d$ .)

Se sabe que en el instante considerado las líneas  $O_1A$  y  $O_2B$  son paralelas y que  $AB$  es perpendicular a  $O_1A$ .

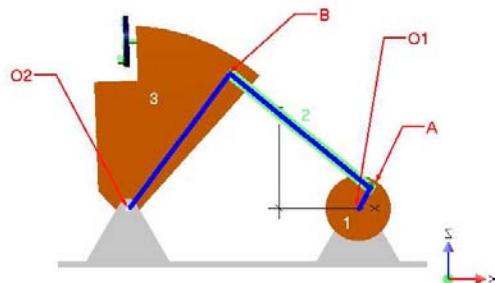
A continuación pasamos al análisis y resolución de los apartados anteriores, cada uno utilizará los conceptos y métodos cinemáticos que se especifican.

## 4. Resolución

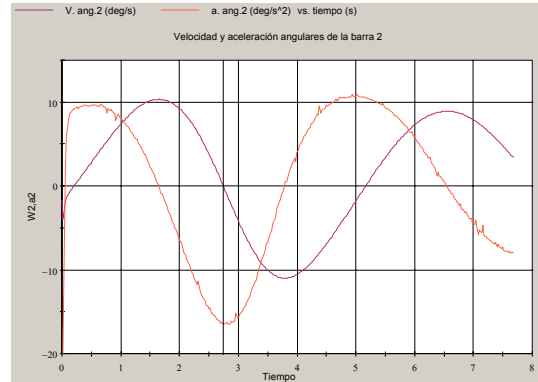
### 4.1. Cinemática plana: aceleración angular del cuerpo 3

En primer lugar, puede verse el movimiento del telar en su proceso de producción. También se ha realizado una animación del esquema simulado que puede observarse en el correspondiente video. [\(Ver video 2\)](#). Como puede deducirse de las animaciones anteriores, la transmisión del movimiento desde el disco 1 hasta el sólido 3 se realiza en el plano  $xy$ , de modo que verifica todas las hipótesis de la cinemática plana, por lo que el movimiento del sólido 3 puede estudiarse a través del análisis de su proyección sobre el plano  $xy$ . [\(Ver video 3\)](#)

El mecanismo formado por los cuerpos 1, 2, 3 y el suelo es en realidad un cuadrilátero articulado (tal como puede verse en la ilustración). Para hallar la aceleración angular del sólido 3 es menester determinar antes las velocidades angulares de 2 y 3.



Durante su movimiento, la barra 2, presenta dos posiciones singulares, son aquellas en las que las rectas  $O_1A$  y  $O_2B$  son paralelas. En dichos instantes el CIR del sólido está en el infinito, en consecuencia la barra 2 presenta en cada uno de estos instantes un movimiento de traslación instantánea, por lo que la velocidad angular  $\omega_2$  es nula, pero no así la aceleración angular  $\alpha_2$ , como puede verse en la grafica correspondiente.



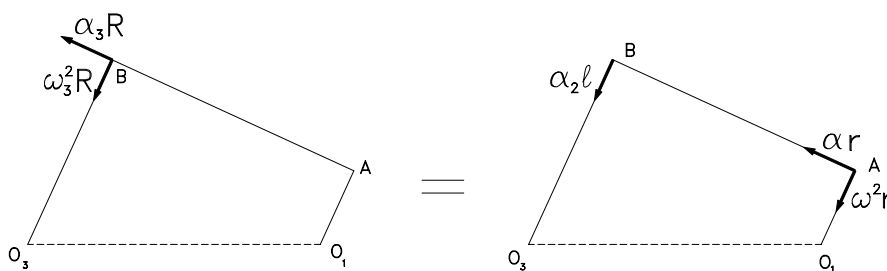
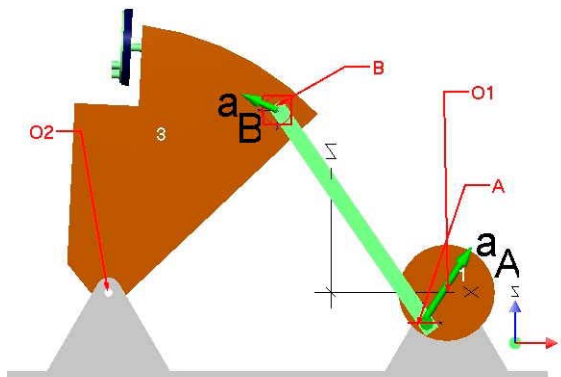
Por tratarse de una traslación instantánea, todos los puntos del sólido presentan la misma velocidad, por lo que  $\vec{v}_A = \vec{v}_B$  y entonces  $\omega_3$  resulta

$$\omega_3 = \frac{\omega r}{R}$$

Para hallar la aceleración angular del sólido 3, se relacionan dos puntos de la barra 2 mediante la expresión de la aceleración de un punto del sólido rígido. Los puntos a relacionar deben ser aquellos de los que se conozca el mayor número de parámetros cinemáticos; en este caso, los puntos A y B.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

Los vectores aceleración de dichos puntos son, en un instante dado, los que se ilustran en la figura. Si se traza el cinema de aceleraciones que relaciona los valores de las aceleraciones de los dos puntos de la citada barra, se advierte que debe existir una componente, en dirección perpendicular a la barra, que es función de la aceleración angular buscada. De modo que resulta:

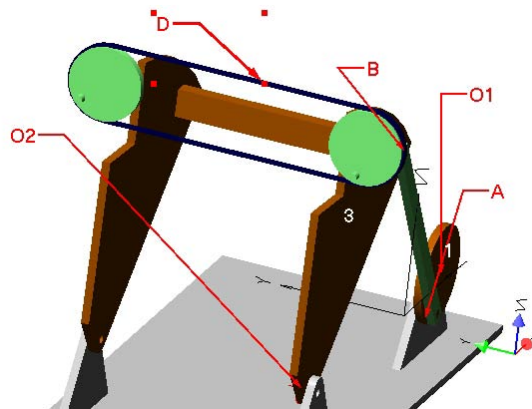


Por lo que, si se realiza la proyección en la dirección de la recta AB, se puede determinar directamente la incógnita deseada  $\alpha_3$

$$\vec{\alpha}_3 = \frac{\alpha r}{R} \vec{k}$$

#### 4.2. Composición de movimientos: aceleración del punto D

En el video puede verse el movimiento general del punto D. (Ver video 4) En este caso, es conveniente observar que el punto D de la correa describe un movimiento rectilíneo respecto al sólido 3, el video ilustra el movimiento del punto D visto desde una cámara solidaria de la bancada, (Ver video 5) por lo que resulta ventajoso plantear el problema como una composición de movimientos, siendo la referencia móvil el cuerpo 3 y la referencia fija el suelo, al ser requerida la aceleración absoluta del punto D.



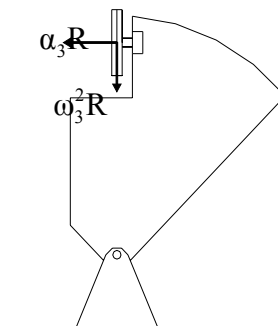
La aceleración del punto D descrita como una composición de movimientos es

$$\vec{a}_D = \vec{a}_a + \vec{a}_c + \vec{a}_r$$

donde la aceleración de arrastre es:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{O_4} + \vec{\omega}_3 \times [\vec{\omega}_3 \times \vec{O_4D}] + \vec{\alpha}_3 \times \vec{O_4D}$$

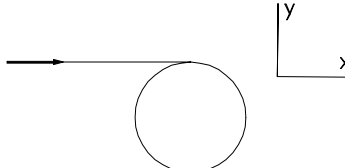
siendo la velocidad angular y aceleración angular las correspondientes a la referencia móvil 3.  $O_4$  es un punto de la referencia móvil 3 de aceleración conocida, ya que describe una trayectoria circular de radio R a velocidad angular  $\omega_3$ , por lo que su aceleración es:



Cualquier otro punto sería válido siempre que perteneciera al cuerpo 3 y pudiera determinarse su distancia con D. En el caso presentado, utilizando la base xyz del enunciado y sustituyendo, se halla:

$$\vec{a}_a = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R \\ -\omega_3^2 R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \\ -d \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 (R + r_0) \\ -\omega_3^2 (R + r_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para hallar los términos de Coriolis y relativo es necesario analizar el movimiento relativo entre el punto D y el cuerpo 3, que, como se ha comentado, es de movimiento rectilíneo. En este caso, la velocidad y aceleración relativa, tal como se deduce de la figura siguiente, son

$$\vec{a}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_0 r_0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 r_0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} v_r = \omega_0 r_0 \\ a_r = \alpha_0 r_0 \end{matrix}$$


Hay que recordar que el módulo de  $\omega_0 = k \cdot \omega_3$  y que, al existir  $\alpha_3$ ,  $\omega_0$  no es constante y  $\alpha_0 = k \cdot \alpha_3$ . La aceleración de Coriolis:

$$\vec{a}_c = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 r_0 \end{bmatrix}$$

donde la velocidad angular es siempre la de la referencia móvil. En este caso, los dos términos son paralelos y la aceleración de Coriolis nula. El resultado final es

$$\vec{a}_D = \begin{bmatrix} \alpha_3 (R + r_0) \\ -\omega_3^2 (R + r_0) \\ k \alpha_3 r_0 \end{bmatrix}$$

### 4.3. Cinemática del sólido: aceleración del punto E

El punto E pertenece al disco 4, su movimiento puede verse en el video, [\(Ver video 6\)](#) así que se puede determinar su aceleración mediante la fórmula de aceleraciones del sólido:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_{O_4} + \vec{\Omega}_4 \times [\vec{\Omega}_4 \times \vec{O}_4 E] + \dot{\vec{\Omega}}_4 \times \vec{O}_4 E \quad (1)$$

en la que es necesario conocer la aceleración de otro punto del mismo sólido. En este caso, es el punto  $O_4$ , que se mueve con el sólido 4 igual que el punto  $O_4$  del sólido 3, por lo que su aceleración es:

$$\vec{a}_{O_4} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R \\ -\omega_3^2 R \\ 0 \end{bmatrix}$$

No vale cualquier punto de aceleración conocida; el punto escogido debe pertenecer al sólido que se esté analizando y, por ejemplo  $O_3$ , de aceleración nula, no pertenece al sólido 4, por lo que su utilización sería errónea en este caso.

El disco se mueve con velocidad angular  $\vec{\omega}_0$  respecto al sólido 3, que a su vez se mueve con velocidad angular  $\vec{\omega}_3$  determinada anteriormente. De esta manera, la velocidad angular absoluta del disco 4 es la suma de las dos citadas

$$\vec{\Omega}_4 = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

y hay que calcular su aceleración angular aplicando el operador derivada en base móvil, ya que la componente  $\vec{\omega}_0$  cambia de dirección debido al arrastre de  $\vec{\omega}_3$ . En estas condiciones:

$$\dot{\vec{\Omega}}_4 = \left. \frac{d\vec{\Omega}_4}{dt} \right|_b + \vec{\Omega}_b \times \vec{\Omega}_4 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \omega_3 \omega_0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión (1)

$$\vec{a}_E = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R \\ -\omega_3^2 R \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \left[ \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{bmatrix} \right] + \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \omega_3 \omega_0 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_0 \end{bmatrix}$$

obteniéndose el resultado:

$$\vec{a}_E = \begin{bmatrix} -\alpha_3 R + 2\omega_3 \omega_0 r_0 \\ -\omega_3^2 R - \alpha_0 r_0 \\ -\omega_0^2 r_0 \end{bmatrix}$$



El problema también se puede resolver mediante composición de movimientos, utilizando como referencia móvil el sólido 3 (el movimiento relativo es fácil de calcular) y como referencia fija el suelo (se pide magnitud absoluta).

#### 4.4. Un movimiento relativo complejo: el del punto D

El movimiento relativo que describe el punto D respecto del disco 4 no es evidente; no es un movimiento rectilíneo, como en el movimiento relativo al chasis 3. En este caso es un movimiento espiral como puede verse en el video que ilustra el movimiento del punto D visto desde una cámara solidaria del disco (Ver video 7). El siguiente video ilustra la trayectoria absoluta del citado punto D. (Ver video 8) Ante esta circunstancia, se hace necesario el cálculo analítico de esta velocidad relativa.

Se debe determinar un movimiento relativo respecto del sólido 4; el planteamiento del problema requiere del uso de composición de movimientos utilizando como referencia móvil el sólido 4

$$\vec{v}_D = \vec{v}_a + \vec{v}_r$$

donde  $\vec{V}_D$  es la velocidad absoluta y  $\vec{V}_r$  es la velocidad de este punto D respecto a la referencia móvil 4. El término de arrastre es:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{O_4} + \vec{\Omega} \times \vec{O_4D} \quad (2)$$

en esta expresión se requiere utilizar un punto, que pertenezca a la referencia móvil, de velocidad absoluta conocida, por ejemplo  $O_4$ , mientras que la velocidad angular es la absoluta de la referencia móvil 4. Sin embargo, se observa que el movimiento relativo entre el punto D y el sólido 4 es absolutamente independiente del movimiento que describa el sólido 3, que arrastra a ambos. Ante este hecho, resulta conveniente para simplificar el problema considerar el chasis 3 como referencia fija y no el suelo, como es habitual, por lo que, por ejemplo, la velocidad absoluta del punto  $O_4$  pasa a ser cero y el mecanismo resultante de disco y correa es en realidad un problema de cinemática plana en el plano yz.

La expresión que se debe resolver sigue siendo (2), donde se sustituyen los valores teniendo en cuenta el sistema de referencias adoptado:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_{O_4} + \vec{\Omega} \times \vec{O_4D} + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_D - \vec{v}_{O_4} - [\vec{\Omega} \times \vec{O_4D}]$$

y el resultado es:

$$\vec{v}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 r_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_0 \\ -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si en lugar de escoger el sólido 3 como referencia fija, se escoge el suelo, el planteamiento es del todo correcto y se debe llegar al mismo resultado, pero si se comprueba, se constatará una mayor dificultad de operaciones al aparecer el movimiento debido a  $\vec{\omega}_3$ .

## 5. Agradecimientos.

Queremos agradecer a nuestro compañero, el Profesor Joan Victori Companys, especialista en Tisaje, su eficaz ayuda bibliográfica y en el laboratorio, así como su inestimable consejo.

## 6. Bibliografía.

- (1) F.C. Moon: *Applied Dynamics*. John Wiley, 1998. (p. 32).
- (2) R. Capdevila, J. Pujol: *L'ensenyament de la Mecànica a l'Enginyeria Industrial*. CIVE, 2004.
- J. Victori: *Tisaje. Aspectos descriptivos y de análisis en el proceso de tejer*. (2 vol.). Upc, 1991 y 1997.