Una herramienta para el cálculo y la visualización de Sumas de Minkowski

Gustavo Kavka (1)
María Teresa Taranilla (1)
Edilma Olinda Gagliardi (2)

(1) Departamento de Informática
(2) LIDIC♦

Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
{oli, tarani, gkavka}@unsl.edu.ar
Fax: 54-2652-430224

Gregorio Hernández Peñalver

Departamento de Matemática Aplicada

Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es
Fax: 34-91-3367426

Resumen:

La Geometría Computacional es una disciplina que brinda un marco teórico y formal para dar soluciones a problemas de tipo geométrico. En este sentido, las operaciones entre polígonos brindan soluciones a una gama de aplicaciones del mundo real. Una de estas operaciones de gran utilidad es la denominada *Sumas de Minkowski*.

Esta operación está definida del siguiente modo: *Dados dos conjuntos P y Q* $\subset R^2$*, la suma de Minkowski de P y Q, denotada por* $P \oplus Q$ *se define como* $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$.

En este trabajo se presenta una herramienta de apoyo educativo para el cálculo y la visualización de sumas de Minkowski entre polígonos. Mostramos todas las características de la misma, destacando sus principales componentes y utilidades.

Palabras claves: Sumas de Minkowski. Operaciones entre Polígonos. Geometría Computacional.

♦ Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Computacional. Director: Dr. Raúl H. Gallard.

* Este artículo es parcialmente subvencionado por Proyecto de la UPM AL2002-1010-2.43 Geometría Computacional, de la Universidad Politécnica de Madrid, España.

1. Introducción

La Geometría Computacional es una disciplina que estudia los problemas desde un punto de vista geométrico, dedicándose al diseño de algoritmos y estructuras de datos adecuadas para su resolución [Abe00],[BKOS97], [Tou85], [Tou92].

Una de las operaciones que se pueden realizar entre polígonos es la denominada Suma de Minkowski. Esta operación resulta de gran utilidad en aplicaciones tales como tales como planificación de movimientos de robots, procesamiento de imágenes, sistemas de información geográfica, marcado y corte de moldes, entre otras [BS01], [AFH01].

Nuestro propósito fue el desarrollo de una herramienta de aplicación que implementa la Suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos, para ser utilizada como una herramienta educativa en cursos de Geometría Computacional [KT02].

Con respecto a las herramientas con fines educativos relacionadas a la Geometría Computacional, hay bastante trabajo realizado. Pero en el caso particular de las Sumas de Minkowski no hay herramientas con las características requeridas implementadas.

En este sentido, esta herramienta forma parte de una colección de trabajos que desde 1988 se vienen realizando en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. Como resultado de estos trabajos se han obtenido una colección de aplicaciones que implementan algoritmos sobre distintos problemas dentro del campo de la Geometría Computacional y que son usados como apoyo en la enseñanza de la disciplina.

Para definir las Sumas de Minkowski, se dice que dados dos conjuntos P y $Q \subset \mathbf{R}^2$, la suma de Minkowski de P y Q, denotada por $P \oplus Q$ es $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P , q \in Q \}$, donde p + q es un vector que representa la suma de los vectores p y q. Es decir que dados los puntos $p = (p_x, p_y)$ y $q = (q_x, q_y)$, tenemos que $p + q = (p_x + q_x, p_y + q_y)$.

Las áreas de aplicación de las sumas de Minkowski se han remitido principalmente a la robótica, específicamente en planificación de movimientos [Lat91], [BKOS97]. Si tenemos un robot de traslación *R* en un ambiente donde los obstáculos son polígonos disjuntos, el espacio de obstáculos es el conjunto de puntos en los cuales el robot colisiona con un obstáculo *P*. Se puede expresar el espacio de obstáculos que corresponde a un obstáculo *P* como la suma de Minkowski del obstáculo con el robot *R*. Luego, el espacio prohibido para el robot *R* puede ser descripto como la unión de las sumas de Minkowski de cada uno de los obstáculos *P* con el robot *R*.

Otra aplicación es en el área de procesamiento de imágenes donde se expresa a la dilatación de un conjunto A con un supuesto elemento estructurado B es la suma de Minkowski de A y B. [Ser82], [Ser88]

En los Sistemas de Información Geográfica (GIS), el término *buffer* es comúnmente usado para denotar las Sumas de Minkowski de un conjunto de objetos geométricos dado con un disco. [HCC98]

Las sumas de Minkowski son herramientas poderosas de preprocesamiento para resolver problemas de intersección e inclusión de polígonos. [Li94]

2. Herramienta para el cálculo y visualización de Sumas de Minkowski.

Hemos desarrollado una herramienta que implementa la suma de Minkowski entre polígonos, tanto entre polígonos convexos y no convexos. La idea es que dicha herramienta pueda ser utilizada como herramienta de trabajo, de simulación y especialmente de apoyo en la enseñanza de la Geometría Computacional.

La herramienta es simple, fácil de entender, usar y que permite mostrar en detalle el funcionamiento de los algoritmos usados para el cálculo de la suma de Minkowski, de modo que tanto el problema propuesto como la solución obtenida puedan apreciarse claramente.

La interacción del usuario con la herramienta es sencilla y rápida. Todas las operaciones, tales como inserción de polígonos, elección del tipo de algoritmo a aplicar para el cálculo de la suma, manejo de las operaciones que se realizan durante la ejecución con demora etc. se pueden realizar fácilmente con el mouse.

Para el desarrollo de la herramienta implementada en nuestro trabajo elegimos el lenguaje **Java**. La elección del lenguaje de programación quedó determinada, en gran parte, por el objetivo de la herramienta, por el uso que se pretende hacer de ella y para aprovechar las ventajas que ofrece en la actualidad el acceso generalizado a Internet. Es decir, el código del programa podría estar localizado en un servidor pero podría utilizarse desde cualquier lugar, sin necesidad de más ayuda que la del navegador Web que se utilice habitualmente y en forma independiente de la plataforma que el usuario esté utilizando.

Uno de los objetivos es que nuestra herramienta se ejecute en forma independiente de la plataforma y sin que sea necesaria una instalación previa. Para ello, en lugar de implementar una aplicación standard Java decidimos implementar lo que se denomina applet en Java.

Una aplicación es un programa escrito en Java al que no le falta nada, es independiente y puede ejecutarse emitiendo una orden desde la interfaz de usuario del sistema operativo subyacente. Para ejecutar una aplicación Java es necesario tener instalado en el sistema una máquina virtual Java y haber instalado previamente la aplicación.

Para poder ejecutar un applet es necesario sólo poseer un navegador Web con capacidades Java. Un applet debe ejecutarse dentro de un navegador Web y no puede ser ejecutado en forma independiente. Cuando un navegador Web carga una página Web que contiene un applet, el navegador descarga el código del applet desde el servidor Web y lo ejecuta en el sistema local. Las ventajas principales del applet son que no necesita instalación en el sistema local y que la interfaz de usuario está dada por el navegador web.

2.1 Entorno de ejecución de la herramienta

El entorno de ejecución es un conjunto de páginas web que acompañan a la herramienta .

A continuación se describe brevemente el contenido de cada una de las páginas que componen el entorno de nuestra herramienta:

Inicio: Esta página contiene la presentación, título, autores.

Aspectos teóricos: Contiene información teórica sobre este proyecto.

Herramienta: Muestra el programa que implementa la suma de Minkowski entre polígonos.

Ayuda: Explica el funcionamiento de la herramienta (indica sus componentes y cómo utilizarlos). Se abre en una ventana aparte para poder consultarla mientras se utiliza la herramienta.

Enlaces de interés: Desde aquí es posible acceder a enlaces de interés relacionadas con la Geometría Computacional y a las referencias bibliográficas.

2.2 Distribución de los elementos en el ambiente de la herramienta

En el ambiente de nuestra herramienta se distinguen tres zonas:

Zona media o zona gráfica

Zona inferior

Zona superior

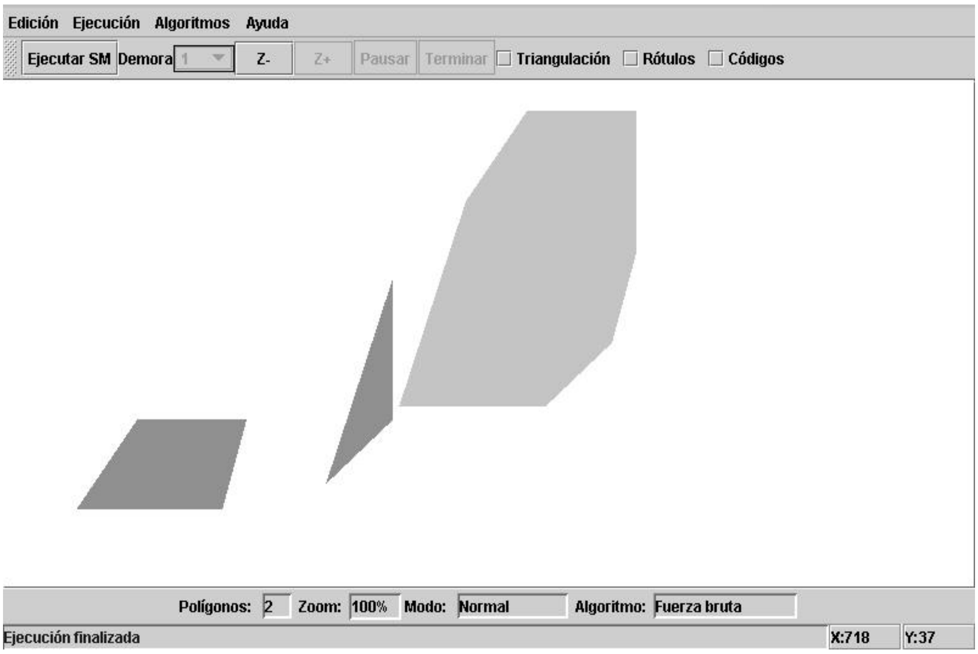

Figura 1: Pantalla del Ambiente

La *zona media o zona gráfica* es el área donde se dibujan los polígonos y se muestran los resultados de la suma de Minkowski. Puede elegirse el color de fondo de esta zona; las opciones son fondo blanco o fondo negro.

La *zona inferior* contiene una barra de estado y de información, mostrando en ellas datos tales como la ubicación del cursor del mouse sobre el plano *xy*, el algoritmo utilizado, información de *zoom* y, además contiene una Barra de Mensajes donde se muestra información referida al contenido de la zona gráfica y de la ejecución en sí.

En la *zona superior* del ambiente se encuentran la barra de menúes desplegables y la barra de herramientas, las cuales describimos a continuación.

Barra de menúes

La barra de menúes contiene las siguientes opciones con submenúes desplegables.

Menú Edición

Desde este menú se manejan todas las funciones referentes a la Edición.

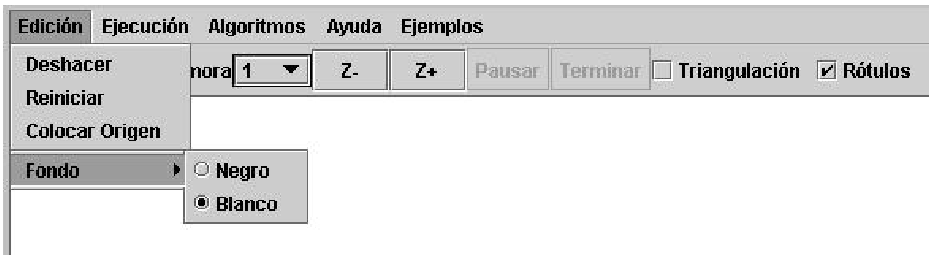

Figura 2 : Menú edición

Deshacer: esta opción permite eliminar el último polígono ingresado.

Reiniciar: esta opción borra todo el contenido de la zona gráfica preparando la herramienta para iniciar la resolución de un nuevo problema.

Colocar origen: esta opción permite ubicar el origen de las coordenadas en cualquier posición de la zona gráfica.

Fondo: esta opción permite cambiar el color de fondo de la zona gráfica, pudiendo elegir entre los dos colores disponibles, blanco o negro.

Menú Ejecutar

Desde este menú se selecciona el modo de ejecución con el que se calculará la suma de Minkowski. Se permite al usuario dos modos de ejecución, continuo o con demora**.**

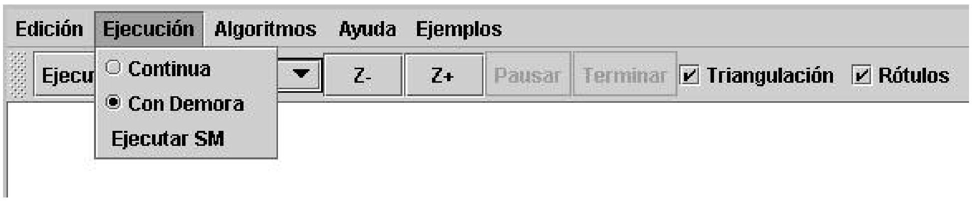

Figura 3: Menú Ejecución

Menú Algoritmo

Desde este menú es posible elegir el algoritmo que se usará para el cálculo de la suma de Minkowski. En esta herramienta se han implementado dos algoritmos: el algoritmo de Fuerza Bruta y el algoritmo Mejorado.

Figura 4: Menú Algoritmos

Menú Ayuda

Desde este menú se accede a la ayuda disponible y a la información acerca de los autores.

Figura 5: Menú Ayuda

Menú Ejemplos

Desde este menú es posible elegir diferentes ejemplos de problemas que calculan la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos.

Barra de Herramientas

La Barra de Herramientas ubicada en la zona superior del ambiente contiene:

Botones de acciones

- **Botón de ejecución**: este botón denominado **Ejecutar SM** permite iniciar la ejecución del cálculo de la suma de Minkowski.
- **Botones de zoom**: Los botones **Z+** y **Z-** se utilizan para "acercar" o para "alejar" la vista del contenido de la zona gráfica y ver un porcentaje mayor del contenido a tamaño reducido.
- **Botón Pausar/Continuar**: si la opción elegida para la ejecución es con demora, este botón permite manejar la ejecución haciendo pausas cuando el usuario así lo desee y luego continuar la ejecución.
- **Botón Terminar**: este botón permite finalizar una ejecución con demora desde cualquier punto en que ésta se encuentre, obviando la demora.

Opciones

- **Demora**: permite elegir el tiempo de demora (en segundos) entre cada paso para el modo de ejecución con demora.
- **Triangulación**: permite activar y desactivar la opción de mostrar la triangulación realizada en los polígonos no convexos.
- **Rótulos**: permite activar y desactivar la opción de mostrar las coordenadas de los vértices de los polígonos ingresados en la zona gráfica.
- **Códigos:** permite activar y desactivar las opción de mostrar en una ventana auxiliar el código del algoritmo que se esta ejecutando, cuando el tipo de ejecución elegida es con demora.

2.3 Consideraciones generales de la herramienta

La herramienta permite fácilmente dibujar polígonos simples tanto convexos como no convexos y calcular la suma de Minkowski entre ellos. A medida que se ingresan los polígonos se realizan controles para que no sea posible el ingreso de polígonos que no sean simples. Además en el caso que el polígono ingresado sea no convexo inmediatamente después de que se termina de dibujar es triangulado, mostrándose la triangulación obtenida en pantalla si el usuario así lo desea.

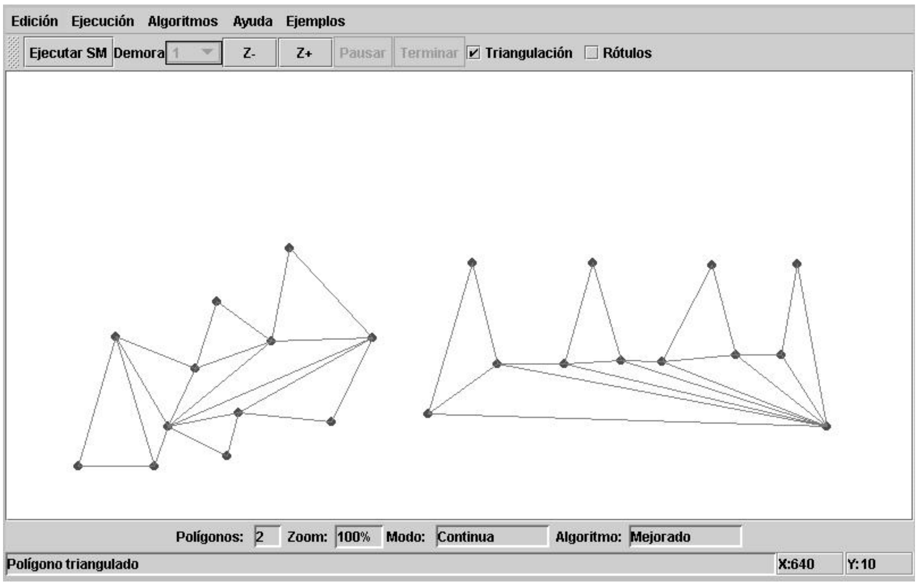

Figura 6: Polígonos no convexos triangulados

Se permite dibujar polígonos en cualquier cuadrante del plano *xy*, creando los ejes de coordenadas y permitiendo al usuario ubicarlos y moverlos a cualquier punto de la herramienta.

Para calcular la suma de Minkowski deben ingresarse dos polígonos. En el caso de ingresar más de dos polígonos, el resultado será la suma de Minkowski de cada uno de los polígonos con el primer polígono ingresado.

Asumiendo que el primer polígono ingresado representa un robot y los demás polígonos ingresados posteriormente representan obstáculos, podemos calcular el espacio de obstáculo del robot con cada uno de los obstáculos. Primero colocamos el origen de coordenadas en cualquier lugar de la zona gráfica; luego ubicamos el polígono que representa el robot centrado en el origen de las coordenadas y dibujamos el resto de los polígonos que representan los obstáculos. La herramienta calcula la suma de Minkowski del robot con cada uno de los polígonos que representan un obstáculo, obteniendo así el espacio de obstáculos de cada obstáculo con el robot. La unión de las sumas de Minkowski de cada uno de los obstáculos con el robot R describe el espacio prohibido para el robot R , es decir los puntos del espacio donde no puede ubicarse el robot cuando se planifican sus movimientos. Este ejemplo se ilustra en la figura 7.

Una vez ingresados dos o más polígonos, la herramienta permite realizar la suma de Minkowski, teniendo como opciones dos tipos de ejecución: **ejecución continua** o **ejecución con demora**. El modo de ejecución puede elegirse en el menú ejecución de la barra de menúes.

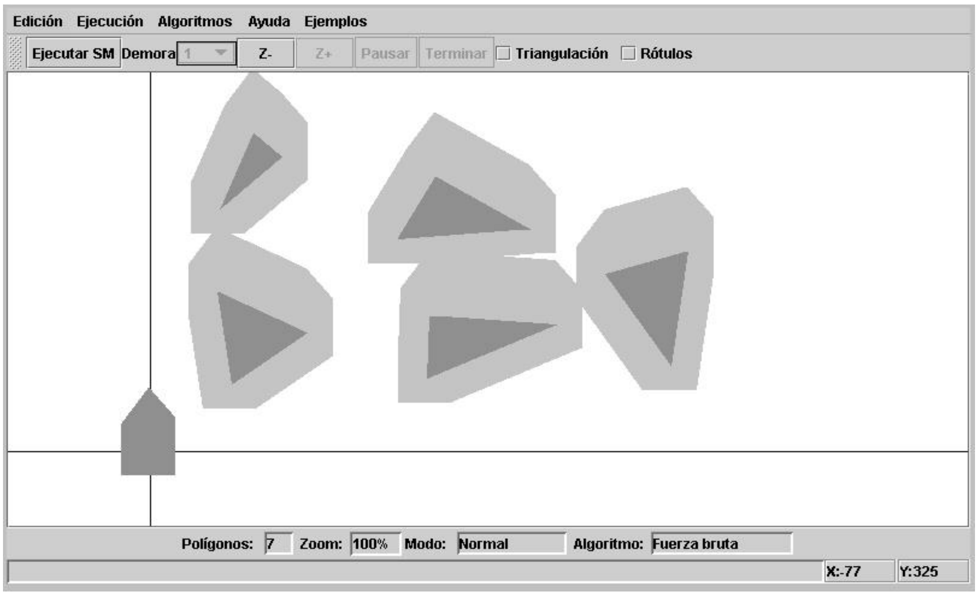

Figura 7 : Ejemplo robot y obstáculos.

La ejecución continua muestra directamente la solución final al problema planteado, en cambio la ejecución con demora permite observar los pasos de la resolución del problema con la demora elegida por el usuario.

La demora se determina desde la lista desplegable a la derecha del rótulo **Demora** ubicado en la barra de herramientas. La demora por defecto es de un segundo. Es posible cambiar el tiempo de la demora durante la ejecución, eligiendo de dicha lista otra opción de demora.

Cuando la opción de ejecución elegida es con demora es posible detener la ejecución en cualquiera de los pasos que se encuentre y luego continuar con la ejecución desde el punto en que se detuvo. También, es posible finalizar la ejecución con demora, desde cualquier punto en que ésta se encuentre, obviando la demora.

Una opción interesante que puede elegir el usuario en una ejecución con demora es ver el pseudocódigo del algoritmo en ejecución y seguir junto con la ejecución visual las líneas de código que se esta ejecutando en ese momento, permitiendo de esta manera un entendimiento más profundo aún de los algoritmos que se utilizan.

Otra característica interesante de la herramienta es que, como el resultado de la suma de Minkowski entre dos polígonos puede estar fuera del alcance visual de la herramienta, se provee la opción de alejar y/o acercar la visión del plano. Esta operación denominada *zoom* está disponible en la barra de herramientas.

Es válido aclarar que durante la ejecución con demora es posible cambiar el tiempo de demora, cambiar el porcentaje de zoom, mover los ejes de coordenadas y otras opciones sin ningún inconveniente.

Antes de iniciar el cálculo de la suma de Minkowski, es posible elegir el algoritmo que se desea usar en la resolución del problema. Para esta herramienta se implementaron dos algoritmos que calculan la suma de Minkowski de polígonos convexos, el algoritmo que denominamos de *algoritmo de fuerza bruta*, que tiene una complejidad de ejecución de orden cuadrático y el algoritmo que llamamos *algoritmo mejorado,* con una complejidad de ejecución de orden lineal.

La idea de implementar los dos algoritmos es que el usuario pueda comparar la ejecución de los algoritmos; esto se hace así principalmente por los fines educativos que persigue la herramienta. De esta forma, el usuario puede apreciar los distintos costos de ejecución que tienen los algoritmos, y observar con detenimiento cómo por diversas estrategias, se arriba a la solución de un problema.

Para llevar a cabo la implementación de los algoritmos que calculan la Suma de Minkowski usamos otros algoritmos propios de la Geometría Computacional.

En el algoritmo de fuerza bruta para el cálculo de la suma de Minkowski usamos el conocido Scan de Graham, que permite calcular el cierre convexo de una nube de puntos con $O(n \log n)$ [Gra72].

En el algoritmo mejorado, usamos una variación especial del método de rotación de calibres para calcular los puntos extremos de los polígonos. [Tou83] .

Otro algoritmo auxiliar que utilizamos es el de triangulación de polígonos, aplicado a los polígonos no convexos. En este caso implementamos el algoritmo de Kong, que es una variación del algoritmo de "corte de orejas" [KET90] .

3. Conclusiones y visión de futuro

Uno de nuestros objetivos al comenzar nuestro trabajo, fue introducirnos en el estudio e investigación de temas relacionados con la Geometría Computacional y el desarrollo de una herramienta, principalmente con fines educativos que permitiera realizar la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos y que pudiera utilizarse como herramienta de trabajo, de simulación y de apoyo en la enseñanza de la Geometría Computacional.

Entendemos que implementaciones de este tipo de herramientas que permiten la ejecución de distintos algoritmos que realizan la misma tarea, en forma pausada, continua o con demora, son extremadamente útiles para mejorar el entendimiento de diversos algoritmos de cualquier temática.

Como alcance y visión de futuro, se espera que esta herramienta sea una etapa previa al desarrollo de una herramienta mayor, la cual pueda realizar otro tipo de operaciones algebraicas entre diferentes tipos de polígonos. También se plantea el desarrollo de otras herramientas que implementen sumas de Minkowski entre conjuntos de polígonos y sumas de Minkowski en tres dimensiones.

La herramienta se encontrará disponible en la siguiente dirección:

http://www.dma.fi.upm.es/docencia/trabajosfindecarrera/programas/geometriacomputacional/

Para mayores datos o consultas, se puede contactar con los autores en las direcciones de correo mencionadas en el encabezado.

Referencias Bibliográficas

[Abe00] Abellanas Oar, M. *Descubriendo la Geometría Algorítmica*, 2000.
http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/divulgación/GeometriaAlgoritmica.html

[AFH01] Agarwal, P.K.; Flato, E.; Halperin, D., *Polygon Descomposition for efficient contruction of Minkowski sums*, Computational Geometry: Theory and applications Nº 21, (39-61), 2001.

[BKOS97] de Berg, M; Kreveld, Overmars, M; Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*, Springer Verlag, BH 1997

[BS01] de Berg, M; Van der Stappen, *On the fatness of Minkowski sums,* Information Processing letters, Nº 81, (259-264), 2001

[Gra72] Graham, R.L. *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*, Information Process Letters, 1:132-133, 1972

[HCC98] Heywood I., Cornelius S., Carver S., *Geographical Information Systems*, Addison-Wesley Longman, New York, 1998.

[KET90] Kong, Xianshu; Everett, H.; Toussaint, G. T., *The Graham scan triangulates simple polygons*, Pattern Recognition Letters, vol. 11, November 1990, pp. 713-716.

[KT02] Kavka, G.; Taranilla, M.T, *Implementación de una herramienta para el cálculo y visualización de sumas de Minkowski*. UNSL, 2002.

[Lat91] J.C.Latombe, *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.

[Li94] Li, Zhenyu *Compation Algorithms for Non-Convex Polygons and their Applications*, tesis doctoral, Universidad de Harvard, 1994

[Ser82] Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New York, 1982.

[Ser88] Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol II: Theorical Advances,* Academic Press, New York, 1988.

[Tou83] Toussaint, G.T. *Solving geometric problems with Rotating Calipers*, Proceedings of IEEE MELECON'83, Athens, Greece, May 1983, pp. A10.02/1-4.

[Tou85] Toussaint, G.T. *Computational Geometry*, Edited by North-Holland, Amsterdam, 1985 .

[Tou92] Toussaint, G.T. *What is computational geometry?* Proc. IEEE, vol. 80, No. 9,. (1347-1363),1992.