

# CONCEPTOS TOPOLÓGICOS APLICADOS AL PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES

*Lic. Pastore, J., Dra. Moler, E. y Dra. Ballarin, V.*

*Laboratorio de Procesos y Medición de Señales, Facultad de Ingeniería,  
Universidad Nacional de Mar del Plata, [vballari@fi.mdp.edu.ar](mailto:vballari@fi.mdp.edu.ar)*

## Resumen

En este trabajo se presenta un método automático para la segmentación de imágenes de Tomografía Axial Computada (T.A.C.) de mediastino con presencia de tumores con la aplicación de Filtros Secuenciales Alternativos (ASFs) de Morfología Matemática y la extracción de componentes conectadas basado en conceptos de Topología continua. A una imagen digital se le puede asociar una estructura de espacio topológico, luego las nociones de topología general pueden ser usadas directamente. El método permite establecer de manera exacta el área, el borde externo de las estructuras segmentadas así como su localización exacta.

Durante los últimos años, el desarrollo tecnológico ha beneficiado en forma importante el diagnóstico por imágenes permitiendo la detección de tumores renales y hepáticos incidentales, generalmente más pequeños, en personas más jóvenes y con un potencial maligno eventualmente menor. Esto ha permitido un gran avance de las técnicas intervencionistas como la criocirugía y la ablación por radiofrecuencia, evitando en algunos casos cirugías mayores, disminuyendo las morbimortalidad, días de hospitalización y costo total de un tratamiento. Sin embargo tanto la criocirugía como la ablación por radiofrecuencia, a través de temperaturas excesivamente bajas o altas respectivamente, matan tanto las células tumorales como las sanas. Es importante por lo tanto identificar los tumores con extraordinaria precisión espacial.

## Palabras Claves

Segmentación - Espacios Topológicos - Componentes Conectadas - T.A.C.

## 1. Introducción

En los últimos años las imágenes médicas se han transformado en una parte vital de la detección temprana, diagnóstico y tratamiento del cáncer. En algunos casos la detección temprana a través de las imágenes médicas hace posible curar o eliminar los tumores. Las nuevas técnicas intervencionistas como la criocirugía y la ablación por radiofrecuencia, evitan en algunos casos cirugías mayores. Sin embargo tanto la criocirugía como la ablación por radiofrecuencia, a través de temperaturas excesivamente bajas o altas respectivamente, matan tanto las células tumorales como las sanas. Es importante por lo tanto identificar los tumores con extraordinaria precisión espacial.

En las imágenes de T.A.C., los diferentes tejidos no exhiben uniformidad y contienen variaciones de intensidad. Los métodos convencionales de segmentación de imágenes están basados en propiedades de los píxeles tratados de manera individual (Jain, 1989; Gonzalez and Woods, 1992; Dougherty, 1992 ) y por lo tanto fracasan en la segmentación.

En este trabajo se aplican, en una primera etapa, Filtros Secuenciales Alternativos (ASFs, Alternating Sequential Filters) de cerradura y apertura por Reconstrucción de Morfología Matemática (Mukhopadhyay and Chanda, 2003). Esta clase de filtros morfológicos secuenciales presenta la ventaja de filtrar los objetos deseados sin alterar la forma original, lo que produce menor distorsión en la imagen (Serra 1988; Serra y Vincent, 1992; Vincent, 1993). Los ASFs por Reconstrucción consisten en una iteración de operaciones de aperturas y cierres por Reconstrucción con elementos estructurantes de tamaño creciente, siendo necesario utilizar un segundo elemento estructurante para la operación Reconstrucción. De esta manera se mantienen las regiones conectadas de la imagen que describen detalles significativos. (Pastore, Moler y Ballarin, 2005).

En una segunda etapa se utiliza un algoritmo utilizando el criterio de componentes conectadas basado en conceptos de topología continua. Una vez obtenidas las componentes conectadas, se obtienen la frontera y el interior de cada una, generando de esta manera la segmentación deseada de la imagen.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección que sigue se describen los fundamentos teóricos; en la sección 3 el método propuesto. En la sección 4 se enuncian los resultados obtenidos con las distintas imágenes utilizadas y finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

## 2. Nociones básicas de espacios Topológicos

En esta sección se introducen algunas definiciones y resultados de topología general que serán utilizados a lo largo del trabajo.

### 2.1. Espacios topológicos

Una topología (o estructura topológica) en un conjunto  $X \neq \emptyset$  es una familia  $\mathfrak{T}$  de subconjuntos de  $X$  que satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $\emptyset$  y  $X$  son miembros de  $\mathfrak{T}$ .
- (2) la intersección finita de miembros de  $\mathfrak{T}$  es miembro de  $\mathfrak{T}$ .
- (3) la unión de los miembros de cualquier subfamilia de  $\mathfrak{T}$  es miembro de  $\mathfrak{T}$ .

El conjunto  $X$  se llama espacio de la topología  $\mathfrak{T}$  y  $\mathfrak{T}$  es una topología para  $X$  (Serra, 1982). El par  $(X, \mathfrak{T})$  es un espacio topológico. Los miembros de la topología se llaman  $\mathfrak{T}$ -abiertos o abiertos con respecto a la topología  $\mathfrak{T}$ . Un conjunto  $F$  es  $\mathfrak{T}$ -cerrado o cerrado si su complemento relativo es abierto, es decir, si  $(X - F) \in \mathfrak{T}$  (cuando no haya motivo de confusión hablaremos de abiertos y cerrados de la topología).

Entre las topologías que se pueden considerar en un conjunto  $X$ , existen dos que representan extremos opuestos. Una es la topología discreta  $\mathfrak{T} = P(X)$ , donde se toman todas las partes de  $X$  como conjuntos abiertos, y la otra es la topología indiscreta o caótica,  $\mathfrak{T}' = \{\emptyset, X\}$ , donde  $\emptyset$  y  $X$  son los únicos abiertos. Evidentemente  $\mathfrak{T}$  y  $\mathfrak{T}'$  son la mayor y menor topología que se pueden definir en un conjunto respectivamente.

Un conjunto  $U$  de un espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$  es un entorno ( $\mathfrak{T}$ -entorno) de un punto  $x$  si y solo si  $U$  contiene un conjunto abierto al cual  $x$  pertenece. Denotaremos por  $U(x)$  al sistema de entornos del punto  $x$ .

### 2.1.1. Topología a partir de sistemas de entornos

Sea  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico y, para cada  $x \in X$ , sea  $U(x)$  el sistema de entornos del punto  $x$ . Entonces:

i) Si  $U \in U(x)$  entonces  $x \in U$

ii) Si  $U$  y  $V$  son miembros de  $U(x)$ , entonces  $U \cap V \in U(x)$ .

iii) Si  $U \in U(x)$  y  $U \subset V$ , entonces  $V \in U(x)$

iv) Si  $U \in U(x)$ , entonces existe un entorno  $V \in U(x)$  tal que  $V \subset U$  y  $V \in U(y)$  para cada  $y$  de  $V$  (es decir,  $V$  es entorno de cada uno de sus puntos).

Si  $\mathfrak{N}$  es una función que a cada  $x \in X$  le asigna una familia no vacía  $U(x)$ , de partes de  $X$  que satisface i), ii), iii), entonces la familia  $\mathfrak{T}$  de aquéllos conjuntos  $U$  tales que  $U \in U(x)$  para cada  $x$  de  $U$ , es una topología de  $X$ . Si también se cumple iv), entonces  $U(x)$  es justamente el sistema de entornos de  $x$  con respecto a la topología  $\mathfrak{T}$  (Kelley, 1975).

### 2.1.2. Topología a partir de una función distancias

Existen muchos espacios topológicos donde la topología se deduce de una noción de distancia. Una distancia, definida en un conjunto  $X$ , es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $x, y, z \in X$  se verifica:

a)  $d(x, y) \geq 0$

b)  $d(x, y) = 0$  sii  $x = y$  (separación)

c)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simetría)

d)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (desigualdad triangular)

Un espacio métrico es un par  $(X, d)$  tal que  $d$  es una métrica para  $X$  (Lima, 1977).

Veamos ahora como, a partir de una distancia, puede generarse una topología. Si definimos una distancia  $d$  podemos definir la bola abierta (cerrada) de centro  $x$  y radio  $r > 0$ :

$$B(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\} \text{ bola abierta de centro } x \text{ y radio } r, \quad (1)$$

$$B[x, r] = \{y \in X; d(x, y) \leq r\} \text{ bola cerrada de centro } x \text{ y radio } r, \quad (2)$$

con éstas podemos generar abiertos: un conjunto  $A \subset X$  es abierto si y solo si para todo  $x \in A$  existe una bola abierta de centro  $x$  y radio  $r$  incluida en  $A$ . Luego la familia formada por todos los abiertos es una topología, llamada *topología asociada a la distancia  $d$*  (Lima, 1977). Dado que la familia infinita de abiertos que se genera, es distinta para cada distancia, hay que pensar en principio que se le puede asociar una topología distancia a cada una.

Si  $(X, \mathfrak{T})$  es un espacio topológico, e  $Y$  es parte de  $X$ , podemos construir una topología  $\mathfrak{T}_Y$  de  $Y$

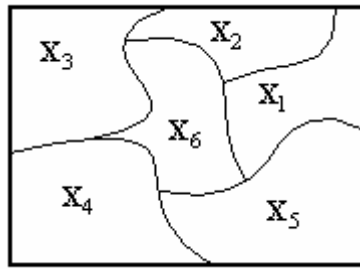


Fig. 1 Ejemplo de partición de un conjunto  $X$ .

que se llama la topología relativa o la relativización de  $\mathfrak{T}$  a  $Y$ . La topología relativa  $\mathfrak{T}_Y$  se define como la familia de todas las intersecciones de miembros de  $\mathfrak{T}$  con  $Y$ . Todo miembro  $U$  de la topología relativa  $\mathfrak{T}_Y$  se dice abierto en  $Y$ . Al espacio topológico  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  se lo llama subespacio del espacio  $(X, \mathfrak{T})$ .

Una partición de un conjunto  $X$  se define como una división del mismo en clases  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  de manera tal que si  $x \in X$  pertenece a una y sólo una de estas clases. Formalmente definimos una partición de  $X$  como una función  $p: X \rightarrow \mathfrak{T}$  tal que  $\forall x \in X, x \in p(x)$  y  $\forall x, y \in X, p(x) = p(y)$  o  $p(x) \cap p(y) = \emptyset$  siendo  $p(x)$  la partición de  $X$  que contiene a  $x$  (Ver figura 1).

Un conjunto  $s \subset X$  se dice conectado si no se puede escribir como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos. Otra manera de expresar la conexión de un conjunto es diciendo que se puede pasar de un punto a otro del conjunto por un movimiento continuo, sin salirse del conjunto. Esto nos lleva a la definición de espacio conectado por caminos, o simplemente, espacio conectado. Un camino en un espacio topológico  $X$  es una función continua  $f: [0, 1] \rightarrow X$ . Los puntos  $a = f(0)$  y  $b = f(1)$  son los extremos del camino  $f$ ; se dice en este caso que el camino liga al punto  $a$  con el punto  $b$ . Cuando  $a = b$  se dice que  $f$  es un camino cerrado. Dados los caminos  $f, g: [0, 1] \rightarrow X$  con  $f(1) = g(0)$ , podemos definir el camino  $f \vee g: [0, 1] \rightarrow X$ , que consiste en seguir primero al camino  $f$  y después al camino  $g$  (Ver figura 2).

Formalmente, un conjunto  $s \subset X$  se dice conectado por caminos cuando dos puntos cualesquiera de  $s$  pueden ser ligados por un camino  $f$  en  $s$ .

Un espacio topológico  $X$  se dice localmente conectado por caminos cuando para todo  $x \in X$  y todo entorno  $U$  de  $x$  existe un entorno conectado por caminos  $V$  tal que  $x \in V \subset U$ .

Definición de interior, frontera de un conjunto, y punto aislado:

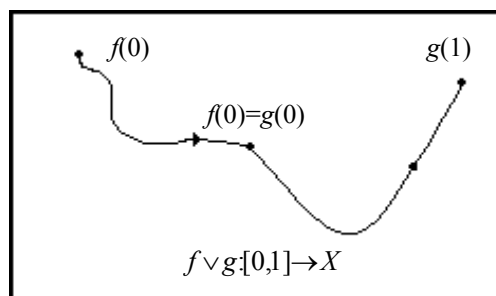


Fig.2 Ejemplo de espacios conectados por caminos.

Un punto  $x \in D \subset X$  de un espacio topológico es un punto interior de  $D$  si y solo si  $D$  es entorno de  $x$ , y el conjunto de todos los puntos interiores de  $D$  es el interior de  $D$ , denotado por:  $\text{int}(D)$ . También se puede definir el interior de un conjunto  $D$  como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en  $D$ , es decir,  $\text{int}(D)$  es el mayor conjunto abierto contenido en  $D$ .

La clausura del conjunto  $D$  se define como el menor conjunto cerrado  $C \subset X$  tal que  $D \subset C$ .

El borde o frontera del conjunto  $D$  es el conjunto:

$$\partial(D) = \text{clausura}(D) - \text{int}(D) \quad (3)$$

Un punto  $x$  de  $D \subset X$  es aislado si existe un entorno  $U \in U(x)$  tal que  $U \setminus \{x\} \cap D = \emptyset$ .

Dado un punto arbitrario  $x \in D \subset X$ , existen tres posibilidades que se excluyen mutuamente: o existe un entorno  $U \in U(x)$  contenido en  $D$ , (esto es  $x \in \text{int}(D)$ ), o existe un entorno  $U \in U(x)$  contenido en  $(X - D)$ , (o sea  $x \in \text{int}(X - D)$ ) o todo entorno de  $x$  contiene puntos de  $D$  y de  $(X - D)$ , (es decir,  $x \in \partial(D)$ ). Luego todo conjunto  $D$  determina una descomposición del espacio en tres subconjuntos disjuntos dos a dos (Simmmons, 1963):

$$X = \text{clausura}(D) \cup \text{int}(D) \cup \text{int}(X - D) \quad (4)$$

## 2.2. Topología en el 2-dimensional plano discreto

Una imagen digital es una función  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow [0, \dots, N-1]$  donde  $N-1$  es un entero positivo perteneciente al intervalo natural  $[1, 256]$ . Considerando  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con las topologías definidas a partir de las métricas  $d'$  y  $d''$  restringidas a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definidas por:

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i| \quad (5)$$

$$d''(x, y) = \max_{1 \leq i \leq 2} |x_i - y_i| \quad (6)$$

podemos definir los siguientes entornos de  $x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  respectivamente (ver figura 3):

$$U_4(x) = \{y \in \mathbb{Z}^2 / |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \leq 1\} = \{y \in \mathbb{Z}^2 / d'(x, y) \leq 1\} \quad (7)$$

$$U_8(x) = \{y \in \mathbb{Z}^2 / \max[|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|] \leq 1\} = \{y \in \mathbb{Z}^2 / d''(x, y) \leq 1\} \quad (8)$$

En general la caracterización de entornos es geoméricamente interpretada como “aproximación”. Pero cuando se trabaja con imágenes en niveles de gris, los entornos van a depender de éstos. Los entornos pueden definirse usando la intensidad:

$$f: G \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, \dots, N-1]$$

$$U_f(v) = f^{-1}(f(v) - c, f(v) + c) \cap U(v), \quad c \in [0, \dots, N-1] \quad (9)$$

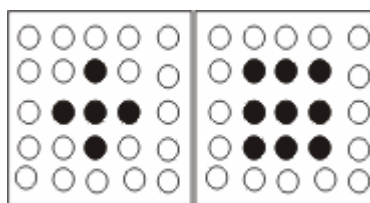


Fig.3 Diferentes entornos de un punto  $x$  dependiendo de la métrica utilizada.

Un camino en el plano discreto es una secuencia de puntos  $a = x_0, \dots, x_k = b$  donde  $x_i$  es adyacente a  $x_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, k-1$  (un punto  $y$  es adyacente a  $x$ , si existe un entono  $U_x$  tal que  $y \in U_x$ ).

Sea  $X \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  una imagen, dos puntos  $x$  e  $y$  se dicen conectados en  $X$  si existe un camino incluido en  $X$ , que une  $x$  con  $y$ .

Si un espacio topológico  $X$  no es conectado, podemos hacernos la siguiente pregunta: Cuantos "partes" tiene  $X$ ? Las partes de un espacio son sus componentes conectadas.

Sea  $X$  un espacio topológico y  $x$  un punto de  $X$ , una componente conectada de  $x \in X$  es la unión  $C_x$  de todos los subconjuntos conectados de  $X$  que contienen a  $x$ .

Existe por lo menos un subconjunto conectado de  $X$  conteniendo a  $x$ :  $\{x\}$ . Luego  $C_x$  no es vacía.  $C_x$  es el mayor subconjunto conectado de  $X$  que contiene a  $x$ .

### 2.2.3. Criterio Agrupacional

Sea  $X$  una imagen en niveles de gris y  $\mathfrak{T}$  una topología asociada a  $X$ ; y sea  $S \subset \mathfrak{T}$  se define  $\varphi: S \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\varphi(A, x) = d(\gamma(A), x) \quad (10)$$

con  $\gamma(A)$  una caracterización de  $A$  y  $d$  una métrica.

Decimos entonces que  $\varphi$  es una función que nos da la relación de semejanza del conjunto  $A \in S$  con  $x \in X$ , a partir de considerar  $\gamma(A)$ . Esta función depende de la aplicación que se esté considerando.

Dados  $\varepsilon$  y  $\delta$  fijos y  $S \subset \mathfrak{T}$ . Sea  $X$  un imagen en niveles de gris y sea  $A \in S$ , se dice que un elemento  $x \in X$  pertenece a  $A$  si se cumple que:

$$B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \varphi(A \setminus \{x\}, x) < \delta \quad (11)$$

en otras palabras,  $S$  es un cubrimiento de  $X$ . Es decir para cada  $x \in X, \exists A \in S / x \in A$ .

Topológicamente esta definición determina que un elemento de la imagen pertenecerá a un elemento  $A \in S$  si existe una bola con centro en él y un radio dado tal que lo intercepte y además que dicho elemento esté relacionado con éste.

## 3. Materiales y métodos

En este trabajo se aplican, en una primera etapa, Filtros Secuenciales Alternativos (ASFs) de cerradura y apertura por reconstrucción. Los AFSs por reconstrucción consisten en una iteración de operaciones de aperturas y cierres morfológicos por Reconstrucción con elementos estructurantes de tamaño creciente, siendo necesario utilizar un segundo elemento estructurante para la operación Reconstrucción. Estos filtros presentan la ventaja de filtrar los objetos deseados sin alterar la forma original, lo que produce menor distorsión en la imagen, y además mantienen las regiones conectadas de la imagen que describen detalles significativos.

En una segunda etapa el algoritmo propuesto utiliza el criterio agrupacional definido en la sección anterior para generar la correcta segmentación de la imagen. El algoritmo se inicia generando un conjunto con un punto de la imagen (el primer pixel que encuentra en el principio

de la imagen o aquel pixel que verifica una determinada condición), suponiendo un orden o una dirección, de ahí parte para crear las componentes conectadas de la imagen siguiendo el criterio agrupacional definido anteriormente en la ecuación 10 para una función  $\varphi$  específica definida para este trabajo.

Algoritmo para extraer las componentes conectadas de una imagen:

En primer lugar debemos definir la función  $\varphi$  que determina el criterio agrupacional, es decir la distancia  $d$  y  $\gamma(A)$ . Sea  $d_G$  la distancia geodésica (Lantuéjoul, 1981; Lantuéjoul, 1984; Serra, 1988) y  $\gamma(A) = \{a_c \in A: a_c \text{ es centro de } A\}$ . Dado  $\varepsilon$  fijo, se crea el primer conjunto  $A_n = \{x\}$  tal que  $x \in X$ , con  $n=1$ .

Paso 1: Mientras  $\exists y \in X$  tal que  $y \notin A_i \forall i = 1 \dots n$  hacer pasos 2 y 3, si no existe  $y \in X$  ir al paso 4.

Paso 2: Para  $i = 1 \dots n$  si  $B(y, \varepsilon) \cap A_i \neq \emptyset$  y  $\varphi(A_i, y) < \infty$ , en  $I = I \cup \{i\}$  (siendo  $I$  un conjunto de índices).

Paso 3: Si  $I \neq \emptyset$  entonces  $A_i = A_i \cup \{y\} \forall i \in I$ ; en caso contrario  $n = n + 1$ ;  $A_n = A_n \cup \{y\}$

Paso 4: Una vez obtenido el cubrimiento  $S = \bigcup_{i \in I} A_i$ , generamos las componentes conectadas  $C_j$

Paso 5: Una vez obtenidas las componentes conectadas  $C_j$ , se obtienen la frontera e interior de cada una.

Paso 6: Cálculo de centro de masa de la componente conectada  $j$ -ésima. (Cuya información de localización es la que interesa a fines prácticos).

Paso 7: Visualización.

Los algoritmos se programaron en Matlab®. Se trabajó con funciones estándar de este lenguaje y con una librería específica denominada SDC Morphology Toolbox (SDC, 2001).

## 4. Resultados y Discusión

En la figura 3 se muestran los resultados obtenidos con el método propuesto en una imagen de T.A.C. de mediastino en la que se observa un tumor en el hígado. Primero se presenta la imagen original, a continuación la imagen b) después de aplicarle los filtros secuenciales alternativos (ASFs) con elementos estructurantes crecientes. Éstos permiten homogeneizar las zonas a detectar sin que éstas sufran deformaciones. En la imagen c) se pueden observar diferentes componentes conectadas marcadas en diferentes colores (la componente conectada que corresponde al fondo no se coloreó con el fin de que resulte más apreciable la segmentación propuesta). En la figura 3 d) se observa finalmente la correcta segmentación del tumor. A partir de ésta se puede calcular el borde exacto del tumor segmentado y su localización.

En la figura 4 se muestran varias imágenes de T.A.C. de mediastino y su correspondientes imágenes segmentadas con el método propuesto. En la primera columna se muestran las imágenes originales. En la segunda columna se presentan las imágenes resultado de la segmentación de los diferentes tumores (pulmón, riñón e hígado respectivamente). En la tercera columna se observan la extracción de los contornos de dichos tumores. Como se puede observar en la figura la segmentación propuesta es muy satisfactoria para todos los casos, habiendo probado con un grupo de imágenes de prueba superior a 50.

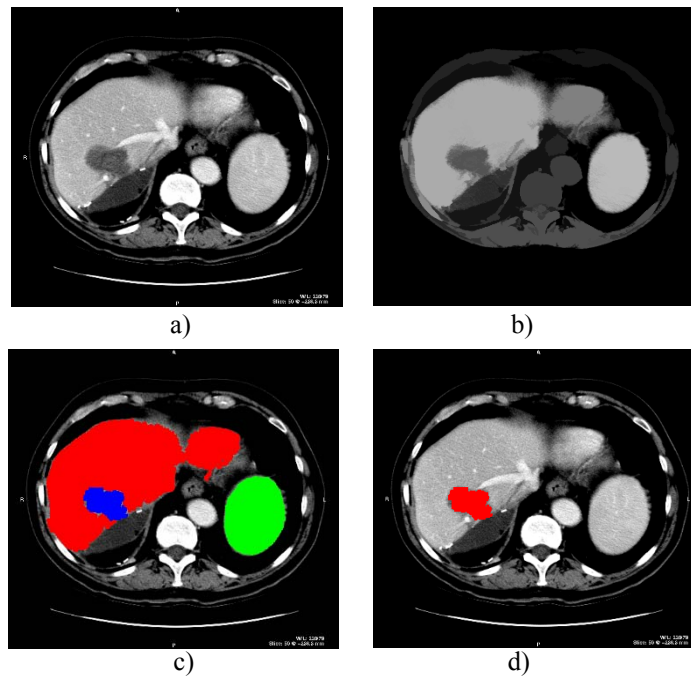


Fig. 3 Imagen de T.A.C de mediastino. a) imagen original, b) imagen resultado de la aplicación de los filtros secuenciales alternativos, c) imagen con las diferentes componentes conectadas y d) imagen resultado de la segmentación del tumor en el hígado.

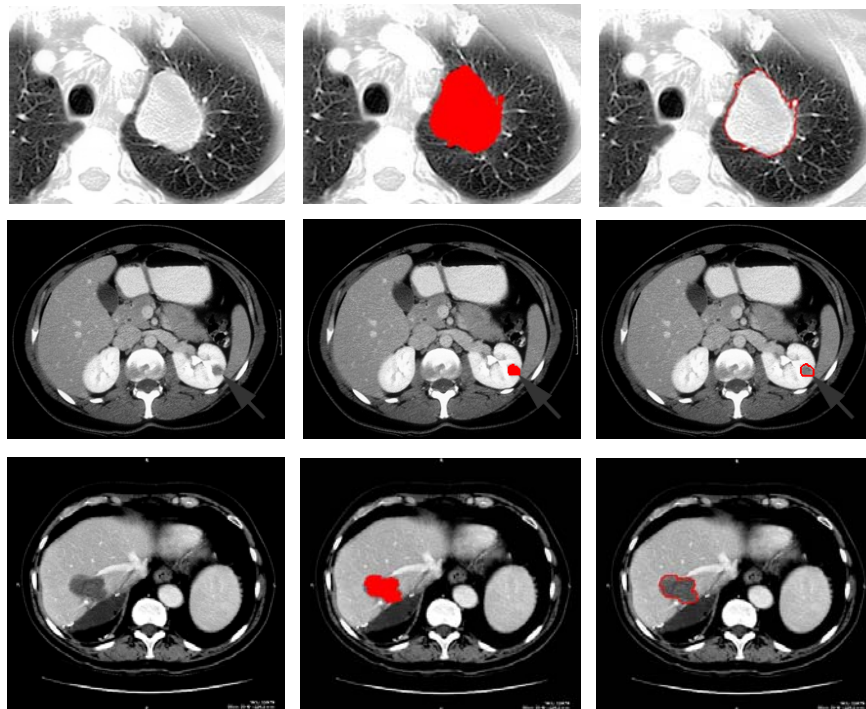


Fig. 4 Diferentes imágenes de T.A.C. . En la primera columna se muestran las imágenes originales. En la segunda columna se presentan las imágenes resultado de la segmentación de los diferentes tumores (pulmón, riñón e hígado respectivamente). En la tercera columna se observan la extracción del perímetro de los tumores previamente segmentados.



## 4. Conclusión

Este trabajo presenta un método automático para la segmentación de imágenes de Tomografía Axial Computada (T.A.C.) de mediastino con presencia de tumores. El método es preciso y eficiente, permitiendo al usuario final conocer el área y la localización del tumor con extraordinaria precisión espacial. Este método de segmentación resulta muy adecuado cuando se trata de la evaluación previa a la criocirugía o la ablación por radiofrecuencia.

La potencialidad de este método reside en la posibilidad de utilizar diferentes distancias y caracterizaciones que resultarán de interés para segmentar otro tipo de imágenes. Por ejemplo cuando  $\phi$  está definida por la distancia euclídea y  $\gamma(A)$  por un nivel de gris el algoritmo agrupacional es el conocido como etiquetamiento de una imagen (*labeling*).

## 5. Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento al Dr. Carlos Capiel hijo perteneciente al Instituto Radiológico de Mar del Plata, por el suministro de las imágenes de T.A.C. que se utilizaron para este trabajo.

## 6. Referencias

- Dougherty, E. (1992): 'An Introduction to Morphological Image Processing,' (SPIE, Washington).
- Gonzalez, R. & Woods, R. (1992): 'Digital Image Processing,' (ed., Adison -Wesley, New York).
- Kelley, J. L., (1975): 'General Topology,' Springer Verlag, New York.
- Lantuéjoul, C. and Beucher, S. (1981): ' On the use of the geodesic metric in image analysis,' J. Microsc., 121, 39-49.
- Jain, (1989): 'Fundamentals of Digital Image Processing,' New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- Lantuéjoul, C. and F. Maisonneuve (1984): 'Geodesic methods in Quantitative Image Analysis,' Pattern Recognition, 2, 177-187.
- Lima, E. L., (1977): 'Espacios Métricos,' Instituto de Matemática Pura y Aplicada. 2da. Edición.
- Mukhopadhyay, S., Chanda, B. (2003): 'Multiscale Morphological Segmentation of Gray-Scale Images,' IEEE Transactions on Image Processing, 12, 533-549.
- Pastore, J.; Moler, E. and Ballarin, V. (2005): 'Segmentation of brain magnetic resonance images through morphological operators and geodesic distance,' Digital Signal Processing 15-2, pp. 153-160.
- SDC (2001): SDC Morphology Toolbox for MATLAB 5. User's Guide. SDC Information Systems.
- Serra, J. (1982): 'Image Analysis and Mathematical Morphology,' Vol. I, (Academic Press, London).
- Serra, J. (1988): 'Image Analysis and Mathematical Morphology,' Vol. II, (Academic Press, London).
- Serra, J. and L. Vincent (1992): 'An Overview of Morphological Filtering,' Circuits, Systems and Signal Processing. 11 (1992) 47-108.
- Simmons, G.F., (1963): 'Introduction to Topology and Modern Analysis,' International Student Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Vincent, L. (1993): 'Morphological Grayscale Reconstruction in Image Analysis: Applications and efficient Algorithms,' IEEE Transactions On Image Processing, 2, 176-201.

