

Experiencias con el uso de tecnología en un curso de Cálculo Diferencial

E. Güichal*; G. Guala*; A. Malet**; V. Oscherov**

Universidad Nacional del Sur

eguichal@criba.edu.ar gguala@criba.edu.ar amalet@criba.edu.ar oscherov@criba.edu.ar

Resumen

En el marco del Proyecto de Investigación: *La Enseñanza del Cálculo. Articulación entre el Nivel Polimodal y el Nivel Universitario*¹, hemos desarrollado algunas experiencias en las que el uso de nuevas tecnologías basadas en programas de computación “amigables” nos ha permitido implementar actividades relacionadas con resolución de problemas

Palabras claves: Visualización, Resolución de Problemas, La computadora como herramienta didáctica.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje están en crisis en todos los niveles educativos, y en particular en lo referido a la disciplina Matemática. Esto se da en cuanto a la elección y organización de contenidos, pero también respecto a los enfoques y utilización de nuevas tecnologías, las cuales generaron cambios profundos en lo socio cultural y en consecuencia también impactaron en la educación. Como lo señala Malet (Malet, 2004) *“El reconocimiento de una universidad que toma conciencia del rol social que le compete frente a la sociedad del conocimiento, una universidad que valora la invención y el uso de la nuevas tecnologías, reconociendo sus problemas, un docente universitario que no sólo plantea información sino que estimula para el conocimiento, permite concluir que se estaría considerando a la educación universitaria como una educación que busca paliar desigualdades y no profundizarlas.”*

En el mundo actual, cada vez más complejo y precedido por una tecnología en cuya base la matemática juega un papel fundamental, aprender a trabajar con modernas tecnologías implica, como dice Litwin (2000, p. 21), *aprender en condiciones de variación constante por el vertiginoso proceso de mejoramiento de las tecnologías. Utilizarlas como herramienta (para la construcción del conocimiento) significa aprender a variar, pero reconociendo que su uso también va modificando la manera de percibir algunos problemas, y fundamentalmente, la forma de plantearlos.*

El proyecto implementado

El Proyecto que estamos desarrollando tiene por objetivos, entre otros, los siguientes:

* * Departamento de Matemática, ** Departamento de Humanidades, U.N.S.

¹ Proyecto de Grupo de Investigación (PGI) subsidiado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la UNS, que se lleva a cabo en el Departamento de Matemática, UNS.

- * Diseñar y validar herramientas didácticas que actúen para modificar la relación de los alumnos con las nociones puestas en juego para promover representaciones del cálculo más abarcativas y completas.
- * Diseñar, organizar e implementar propuestas de actividades relacionadas con la enseñanza de los temas de Cálculo, con docentes y alumnos, utilizando dichas herramientas

y usa como metodología de investigación una Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995; Brousseau, 1997) tanto para guiar las experiencias en clase como para estudiar los resultados de enseñanza.

En ese marco y en distintas situaciones didácticas implementamos el uso de tecnología como herramienta didáctica útil para resolver problemas ligados a un *dominio de conocimiento* (Cerrotta, 1997, p. 88), en este caso el Cálculo, que le permiten al alumno la posibilidad de plantear reconstrucciones, construcciones nuevas y ampliaciones en el conocimiento. Al mismo tiempo esto permite el uso de más de un registro de representación semiótica (Duval, 1998) y la posibilidad de movilizar y articular los distintos registros en una situación dada como aporte para la conceptualización.

Trabajamos en un curso de Análisis Matemático, a lo largo de tres cuatrimestres, con alumnos ingresantes a la carrera de Ingeniería Civil en la Universidad Nacional del Sur. Debemos mencionar que la institución dicta un Curso de Nivelación durante el mes previo a la iniciación de las clases, optativo, con un examen obligatorio al concluir el mismo, que nuestros alumnos han cumplimentado.

Aunque en este trabajo nos referiremos particularmente a cuestiones relacionadas con problemas de visualización en matemática comentando experiencias del uso de dos programas de computación: uno de geometría dinámica y otro que permite el cálculo y manejo simbólico de expresiones, con posibilidades de realizar gráficos en dos y tres dimensiones, debemos señalar que desde el inicio del curso se promueve el uso de búsqueda de información relacionada con los temas que se estudian.

Podemos citar entre los ejemplos que hemos utilizado:

- 1) Búsqueda de información relacionada con la construcción de un monumento conmemorativo en forma de arco a orillas del río St. Louis, en Estados Unidos, que es hoy un símbolo de la ciudad. Además de encontrar detalles de la propia construcción, de interés para futuros ingenieros Civiles, sirvió para iniciar una discusión sobre la forma particular elegida, para introducir conceptos elementales de estabilidad y comparar la situación con la forma de una cadena colgada de sus extremos y las propiedades geométricas del gráfico de la función coseno hiperbólico.
- 2) La información existente en distintos sitios de Internet sobre el desastre ocurrido con la destrucción del puente sobre el río próximo a la ciudad de Tacoma, con películas tomadas en 1941, nos permitieron introducir nociones sobre fenómenos de resonancia, que se comenzaron a estudiar luego de ese momento, y la necesidad de estudiar las funciones circulares como modelos matemáticos para problemas de vibraciones continuas.

Otro aspecto que hemos alentado y que ha sido motivo de otra comunicación (Guala et al, 2005), en el que usamos tecnología como herramienta didáctica, se refiere a experiencias en el uso de una Planilla de Cálculo². El propósito de este trabajo fue el de ilustrar la aplicación de dos conocidos

² El trabajo referido a esta experiencia fue presentado en la XXVIII Reunión de Educación Matemática (REM).Salta. Setiembre 2005

métodos para encontrar aproximaciones numéricas a los valores de los ceros de una ecuación: el método de bisección y el método de Newton, que muchas veces queda planteado solamente en un marco teórico, postergando su estudio detallado en cursos de Cálculo Numérico. La propuesta que implementamos, consiste en la utilización de una Planilla de Cálculo, que permite simplificar las operaciones y obtener en forma automática los resultados, agrupados en forma de tabla numérica, además de mostrar cómo con un programa disponible para la mayoría de los alumnos³, es posible investigar en forma sencilla la aplicación de algunos teoremas. Es claro que el análisis de la validez del algoritmo de Newton requiere un estudio posterior que lo justifique, pero el uso de una planilla permitió a los alumnos una primera aproximación al tema y experimentar con distintas funciones y valores de partida.

En este reporte, queremos referirnos a un tercer tipo de experiencias implementadas en los cursos, con la creación de un espacio de resolución de problemas vinculados al Cálculo, en el que los alumnos desarrollan sus actividades en grupos. Tales actividades concluyen en una reunión de reflexión conjunta en la que se incorpora, como herramienta, el uso de programas amigables como Geometer's Sketchpad y Derive, lo que nos permitió la visualización de la situación planteada, la simulación y la interacción como complemento de la discusión grupal surgida en la resolución de cada problema.

Como señalan Barbo y Villareal en el Capítulo 5 de su libro, (Barbo, Villarreal, 2005) *“la visualización parece ser el medio principal de retroalimentación provisto por las computadoras desde que los monitores transformaron su naturaleza. Sin embargo, la discusión acerca de la visualización en la comunidad de la educación matemática, es mucho más amplia que esto y muchas veces no está siquiera asociada a las computadoras”*. Analizan luego distintas definiciones asociadas al concepto de “visualización” y a las encontradas posiciones dentro de la comunidad matemática acerca del tema.

Creemos que, tal como lo señala Miguel de Guzmán, (Guzmán, 1994) *los programas de cálculo simbólico actuales admiten papeles muy variados en las interacciones entre los tres elementos fundamentales [alumnos] [profesor] [instrumentos didácticos] que constituyen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Por supuesto, el programa es un potente, rápido y versátil auxiliar en las tareas de cálculo, tanto numérico como simbólico, así como en la representación y exploración gráfica de funciones que tanto facilita el análisis de situaciones matemáticas complejas. Esta facilidad nos permite descargar en el ordenador muchas de las tareas de cálculo que aparecen incluso en una auténtica demostración matemática.*

Para ilustrar el trabajo realizado, presentaremos los enunciados de dos de los problemas planteados a los alumnos, y comentaremos los resultados obtenidos con el uso de tecnología como herramienta didáctica.

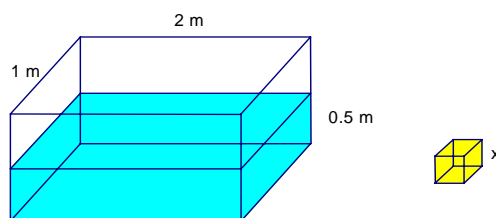
El problema del tanque

En un tanque de 1 metro de ancho y 2 metros de largo se vuelca agua hasta completar una altura de 0,50 metros. Se introduce luego un cubo de oro con sus lados paralelos a las caras

³ Si bien hemos trabajado con una PC con un ambiente windows, una Planilla de Cálculo es actualmente una herramienta que integra cualquier otro sistema.

laterales del tanque y se observa que el nivel que alcanza el agua es exactamente igual a la altura del cubo.

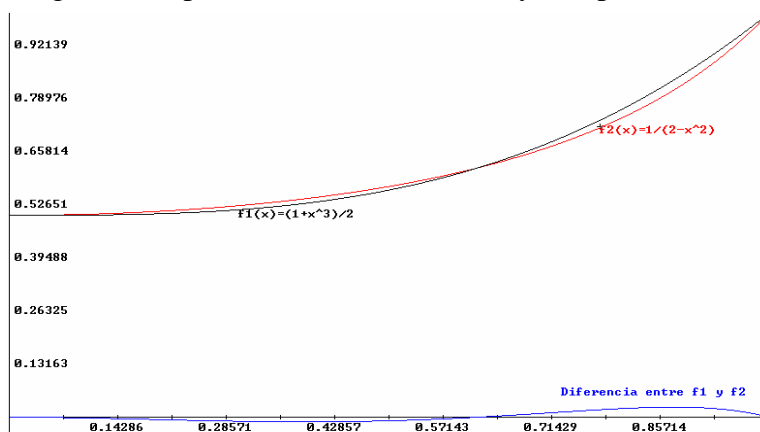
¿Cuánto mide el lado del cubo?



Situación inicial

Este problema lleva a la construcción de una ecuación como modelo de la situación planteada. Sus raíces dan las posibles soluciones. La novedad consiste en que la ecuación es una expresión polinómica de grado tres. Al analizar la ecuación, se pudo detectar una solución trivial, que se aceptaba fácilmente como una solución admisible para el problema. Este enfoque, que con distintas variantes fue el que utilizaron todas las Comisiones del curso, surgía al imaginar un cubo que cumplía las condiciones requeridas en el enunciado, en una situación fija, cristalizada por esas condiciones.

En la discusión conjunta de las respuestas obtenidas se utilizó un programa de geometría dinámica (Geometer's Sketchpad) para simular el crecimiento de un cubo sumergido inicialmente en el agua, para determinar los momentos en que el nivel del agua coincidía con la altura del cubo. Esto permitió “ver” por qué existían solamente dos soluciones y originó nuevas preguntas que enriquecieron la situación. Por ejemplo, ¿cuál era el nivel del agua en cada instante, comparado con la altura del cubo que crecía? Apareció así naturalmente una función definida por dos expresiones distintas para distintos intervalos de la variable independiente. Se utilizó también un programa (Derive) que permitió graficar rápidamente esas funciones y compararlas.

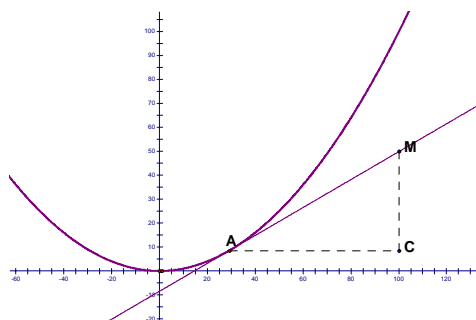


El problema del automóvil

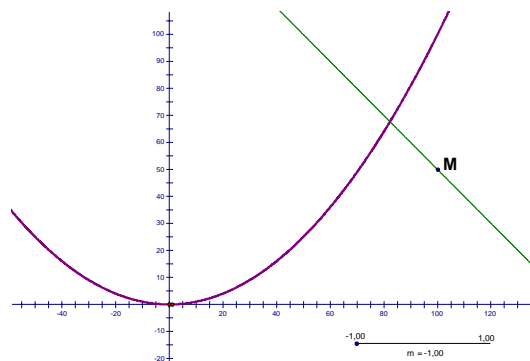
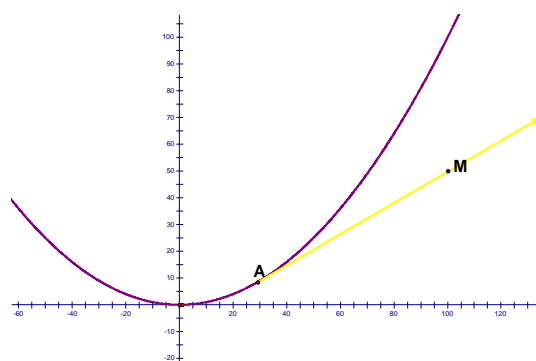
Un automóvil se desplaza por una carretera cuya forma puede ser identificada con la de una parábola con vértice en el origen. El automóvil inicia el viaje en un punto situado a 100 m al oeste y 100 m al norte del origen y viaja en dirección este. Hay un monumento situado 100 m al este y 50

m al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera estará el automóvil cuando ilumine el monumento con sus faros? (Stewart, 2001)

El problema podía resolverse en forma directa observando un dibujo que ilustrara la situación planteada, es decir, dibujar la parábola que imaginariamente representaba la ruta, luego de determinar su ecuación y calcular las coordenadas del punto de tangencia, que darán la posición del automóvil.



Nuevamente la discusión posterior, con una ilustración dinámica del enunciado del problema, permitió enriquecer la comprensión del enunciado y determinar otras estrategias para su resolución, dos de las cuales están ilustradas en los gráficos siguientes.



Conclusiones

La posibilidad de utilizar una representación gráfica nos permite el abordaje de diversos conceptos del Cálculo y de su uso en distintas contextualizaciones, utilizando las potencialidades de la PC, más allá del ámbito generado por el tratamiento predominantemente algebraico más o menos habitual.

El interés del uso de la PC se debe a la necesidad de aprovechar el poder de la visualización como una herramienta útil en la interpretación y resolución de determinados problemas, lo que de alguna manera nos permite aproximarnos a un enfoque de procesos y a una interpretación de resultados. Así mismo, el uso de una herramienta potente para la realización de cálculos matemáticos (numéricos, simbólicos, gráficos) también nos permite dedicar mayores esfuerzos a la búsqueda de modelizaciones para tales problemas, basadas, en nuestro caso, en el uso de funciones reales de una variable real.

Como señala Godino (Godino, 2005), *los recursos didácticos, sean manipulativos o virtuales, pueden ser el soporte para el planteamiento de problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y reflexión matemática. Tales recursos tienen potencialidades que pueden ser actualizadas por el profesor y no es un proceso inmediato. Por este motivo no es suficiente con el enunciado de las tareas sino que es necesario identificar e implementar conocimientos matemáticos y la trayectoria de estudio correspondiente. Es ingenuo pensar, como se supone en ciertas posiciones constructivistas sobre el aprendizaje, que el alumno aprende interactuando con los recursos y resolviendo problemas, sin considerar el papel de las mediaciones tanto de las interacciones entre los estudiantes como con el profesor.*

Los conocimientos matemáticos que se generan a partir de la resolución de problemas, no se reducen a técnicas de solución; el proceso matemático, tanto individual como colectivo, tiene lugar cuando se logran generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995): *Ingeniería Didáctica en* Artigue, M; Douady, R.; Moreno, L.; Gomez, P(editor): *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá.

Borba, M. Villareal, M. (2005) : *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer Science+Bussines Media, Inc. Mathematics Education Library, Vol 39.

Brousseau, G. (1997): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.

Cerrotta, C.(1997): Las nuevas tecnologías en el aula: perspectivas teóricas y experiencias. En Litwin, E. (comp.): *Enseñanza e innovaciones en las aulas para el nuevo siglo*. Paidós. Buenos Aires.

Duval, R. (1998): *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav – IPN. México.

Godino, J. et al. (2005) *Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas*. Comunicación presentada en el IX Simposio de la SEIEM, Córdoba, España. Proyecto de Investigación “Edumat-Maestros” Univ. de Granada.

Guala, G.; Güichal, E.; Oscherov, V.(2005): *Comunicación: Uso de la planilla de Cálculo para la implementación de dos algoritmos que permitan aproximar los valores de los ceros de una ecuación*. Expuesto en la XXVIII Reunión de Educación Matemática (REM).Salta. Setiembre 2005

Guzmán, Miguel de, (1994) *Programas de ordenador en la educación matemática. ¿ficción o realidad?* VELA MAYOR, *Revista de Anaya Educación*, 3 pp. 33-40.

Litwin, E. (2000): De las tradiciones a la virtualidad. En Litwin, E. (comp.): *La educación a distancia; temas para el debate en una nueva agenda educativa*. Amorrortu Editores. Buenos Aires.

Malet, A. (2004): Tesis de Maestría en Educación Superior: Las Enseñanza en la Universidad y las Nuevas Tecnologías de la información y la comunicación. Universidad Nacional del Comahue

Stewart, J. (2001): *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. Thomson Learning. Bogotá.