UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tesis Doctoral

PROYECTOR DE CALDERON ASOCIADO A UN OPERADOR ELIPTICO CON COEFICIENTES LIPSCHITZ

MARCELA SANMARTINO

1996

Directora: María Amelia Muschietti

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
U.N.L.P.

A mis padres.
A Diego.
A Nico.

Agradecimientos

No hace falta reflexionar mucho para saber, en contacto con la realidad cotidiana, que uno existe para otras personas: en primer lugar para aquellos de cuyas sonrisas y de cuyo bienestar depende totalmente nuestra propia felicidad, y luego, para los muchos, para nosotros desconocidos, a cuyos destinos estamos ligados por lazos de afinidad.
... mi vida interior y mi vida exterior se apoyan en los trabajos de otros hombres, vivos y muertos, y he de esforzarme para dar en la misma medida en que he recibido y aun sigo recibiendo.

Como veo el mundo, A. Einstein

Estas palabras expresan el porqué de mi necesidad de agradecer a aquellas personas que han sido parte de mi vida en estos años, y de una u otra manera están presentes en este trabajo.
En particular quiero agradecer a María Amelia, por su paciente labor y su confianza en mi, y a Philippe Tchamitchian, por entusiasmarme a trabajar en estos temas.

También quiero agradecer a mis compañeros de trabajo, por su estímulo y colaboración, especialmente al "Solo" y a Cristina. Y a mis amigos, a cada uno de ellos, por su afecto, su solidaridad...

Finalmente, quiero dar las gracias a quienes son imprescindibles en mi vida, y "...de cuyas sonrisas depende mi felicidad":

A mis padres, por su amor y por su apoyo incondicional.

A Gabriela, Fernanda, Javier y Mariana, mis hermanos, por estar siempre conmigo a pesar de la distancia.

A Diego, mi compañero en la vida, mi amigo, por su amor, su paciencia, y por comprender y respetar la pasión que siento por mi profesión.

A Nico, mi hijo, por ser mi alegría cotidiana y por enseñarme lo que es realmente importante en la vida.

A Marcela y Oscar, mis compañeros de oficina, de risa y de llanto, por su presencia permanente y por el placer de compartir con ellos no solo el trabajo sino la vida misma.

Indice

1 Introducción

El proyector sobre los datos de Cauchy, llamado habitualmente proyector de Calderón, es una de las herramientas más importante para tratar problemas elípticos de borde. Es un operador pseudodiferencial de orden 0 [1], [10], si los coeficientes del operador elíptico a tratar son C^∞, y el borde de la región en la que está definido es también C^∞. Permite definir problemas elípticos con condiciones de borde más generales que las definidas por las condiciones de Lopatinsky.

Para analizar sus propiedades cuando el borde de las regiones es menos regular (Lipschitz), resultó necesario avanzar en el estudio de la integral de Cauchy en curvas Lipschitz [2], [4]. Los resultados obtenidos permitieron demostrar la continuidad de los operadores involucrados en la definición del proyector de Calderón para el Laplaciano, [7], [20], [6], entre otros.

El objetivo de este trabajo es construir y analizar este proyector para operadores elípticos del tipo $L = -div(A\nabla)$, cuando los coeficientes de la matriz A son Lipschitz, y en este caso se obtienen las mismas propiedades que en el caso del Laplaciano.

En la sección 2, presentaremos el problema, y reseñaremos los resultados clásicos sobre el proyector, cuando los coeficientes de la matriz A, y el borde de la región son regulares.

En la sección 3, analizaremos propiedades de las soluciones fundamentales, especialmente su relación con soluciones fundamentales de operadores tipo divergencia con coeficientes constantes. Estos resultados, nos permitirán analizar los potenciales de capa simple y doble, asociados al operador L, utilizando operadores de Calderón-Zygmund.

En la sección 4 probaremos que un operador singular, cuyo núcleo es de la forma $k(x,y) = \dfrac{\eta(x)-\eta(y)}{|B(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y)|^n}$, donde η, y ϕ son funciones Lipschitz en $\mathbb{R}^{n-1}$, y B una matriz $(n \times n)$, con coeficientes en L^∞ y uniformemente elíptica, es un operador de Calderón-Zygmund.

En las secciones 5, 6 y 7, a fin de llevar a cabo la construcción y el análisis del proyector en el caso que nos interesa, analizaremos los potenciales de capa simple y doble, utilizando los resultados de las secciones anteriores.

En la sección 8 probaremos inversibilidad en L^p del límite no tangencial del potencial de capa doble y del límite no tangencial de la derivada normal del potencial de capa simple, lo cual nos permitirá analizar los problemas de Dirichlet y Neumann para el operador L en una región C^1. Con los resultados obtenidos podremos demostrar algunos teoremas de regularidad, indispensables para la construcción del proyector.

Finalmente, en la sección 9, construiremos el proyector y analizaremos sus propiedades, para el caso en que la región es C^1 y los coeficientes de la matriz A son Lipschitz.

2 Presentación del problema

Consideremos el siguiente operador elíptico: $L = -div(A(x)\nabla)$ en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con Ω C^∞ (es decir, $\partial\Omega$ se puede parametrizar localmente por una función C^∞) con $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$, una matriz $n \times n$, real, simétrica, con coeficientes acotados, en $C^\infty(\Omega)$, y A uniformemente elíptica, es decir, existe $\lambda > 0$, tal que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \lambda^{-1}|\xi|^2 \tag{2.1}$$

para todo $x, \xi \in \Omega$.
Y consideremos el problema de Dirichlet para este operador en Ω, es decir:

$$Lu = 0 \text{ sobre } \Omega, \quad u = f \text{ en } \partial\Omega$$

Si llamamos $K(x,y)$ a una solución fundamental simétrica de L, es decir $L_x K(x,y) = \delta_y$ (obviamente esta igualdad es entendida en el sentido de las distribuciones, o sea: $< K(x,y), Lu(y) >= u(x)$, donde $u \in C_0^\infty(\Omega)$). Entonces si $u \in C^\infty(\partial\Omega)$ es una solución de $Lu = 0$ en Ω, tenemos la siguiente fórmula de representación:

$$u(X) = \int_{\partial\Omega} -\partial\eta_{A(Q)} K(X,Q)u(Q) + K(X,Q)\partial\eta_A u(Q)dQ \tag{2.2}$$

donde $\partial\eta_{A(Q)} = \langle A(Q)\nabla_Q, N_Q\rangle$, y N_Q es el vector normal a $\partial\Omega$ en el punto Q, y en general notaremos con X, Y a los puntos del interior de Ω , y con P, Q a los puntos del borde, y dQ el diferencial de superficie, también, cuando no se preste a confusión notaremos $\partial\eta_A = \partial\eta_{A(Q)}$.

Definamos ahora el potencial de capa simple S, y el de capa doble T, de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}f(X) = \int_{\partial\Omega} K(X,Q)f(Q)dQ, \ X \in \Omega \tag{2.3}$$

$$\mathcal{T}f(X) = \int_{\partial\Omega} \partial\eta_{A(Q)} K(X,Q)f(Q)dQ \tag{2.4}$$

Entonces la fórmula de representación dada en 2.2, puede escribirse como

$$u(X) = -\mathcal{T}u(X) + \mathcal{S}(\partial\eta_A u)(X), \ \ X \in \Omega \tag{2.5}$$

Tomando límite (no-tangencial) para $X \to P \in \partial\Omega$

$$u(P) = \frac{1}{2}u(P) - Tu(P) + S(\partial\eta_A u)(P) \tag{2.6}$$

donde S y T son las trazas de los potenciales de capa simple y doble, res pectivamente. Si ahora consideramos la condición de borde $u = f$ en Ω, la ecuación (2.6) nos da la siguiente igualdad:

$$Sg = (T + \frac{1}{2}I)f \tag{2.7}$$

donde $g = S^{-1}(T+\frac{1}{2}I)f$ es el dato de Neumann desconocido, es decir $g = \partial\eta_A u$

Podrı i amos reformular el problema de otra manera, si definimos el operador

$$\mathcal{D}f(X) = \partial\eta_{A(X)} \int_{\partial\Omega} \partial\eta_{A(Q)} K(X,Q)f(Q)dQ \tag{2.8}$$

Y ahora consideramos la derivada normal en el borde, de la ecuación (2.5), llamando D a la traza de D, y considerando los datos de borde antes mencionados, tenemos que:

$$Df = (T^t - \frac{1}{2}I)g \tag{2.9}$$

donde T^t es el adjunto de la traza del potencial de capa doble T.

Por otro lado, dadas dos funciones f y $g \in C^\infty(\partial\Omega)$,

$$\mathcal{U}(f,g)(X) = -\mathcal{T}f(X) + \mathcal{S}g(X) \tag{2.10}$$

entonces existe

$$\lim_{X \to P \in \partial\Omega} \mathcal{U}(f,g)(X) = (\frac{1}{2}I - T)f(P) + Sg(P) \tag{2.11}$$

(tomando este límite, p.e por conos no tangenciales a $\partial\Omega$ e incluidos en Ω).

también bajo estas hipótesis de regularidad, se puede probar que existe

$$\lim_{X \to P \in \partial\Omega} \partial\eta_A \mathcal{U}(f,g)(X) = -Df(P) + (\frac{1}{2} + T^t)g(P) \tag{2.12}$$

Definamos ahora el siguiente operador matricial

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - T & S \\ & \\ -D & \frac{1}{2}I + T \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Como $\mathcal{U}(f,g)(X)$ es una solución de $Lu = 0$, $ImP \subset \{(u|_{\partial\Omega}, \partial\eta_A u|_{\partial\Omega}) : Lu = 0 \text{ en } \Omega\}$. Además, como vimos antes, si tomamos $(f,g) \in \{(u|_{\partial\Omega}, \partial\eta_A u|_{\partial\Omega}) : Lu = 0 \text{ en } \Omega\}$ entonces $P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Definición 2.1 *Dado un operador elíptico del tipo $L = -div(A(X)\nabla_X)$, en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset C^\infty$ con $A(X) = (a_{i,j}(X))_{i,j=1}^n$, una matriz $n \times n$, real, simétrica, con coeficientes acotados, en $C^\infty(\Omega)$, y A uniformemente elíptica, es decir, existe $\lambda > 0$, tal que*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \lambda^{-1}|\xi|^2$$

para todo $x, \xi \in \Omega$.
Definimos el **proyector de Calderón** *para L en la región Ω, al operador P definido en (2.13). P tiene las siguientes propiedades:*

- $$P : C^\infty(\partial\Omega) \times C^\infty(\partial\Omega) \to C^\infty(\partial\Omega) \times C^\infty(\partial\Omega) \tag{2.14}$$
- $P^2 = P$
- $ImP = \{(u|_{\partial\Omega}, \partial\eta_A u|_{\partial\Omega}) : Lu = 0 \text{ en } \Omega\}$
- *P es un operador pseudodiferencial.*

Una demostración detallada de estos resultados la podemos encontrar en [1].

De la construcción de P, es obvio que analizar este proyector, es analizar los potenciales de capa simple y doble, es por esto que los trabajos de [7],[6], [11], y [20], entre otros, han sido un aporte de gran importancia en el caso del Laplaciano.

Para poder realizar este análisis en el caso qen que la matriz A tiene coeficientes Lipschitz necesitamos demostrar algunas propiedades de las soluciones fundamentales del problema elíptico, y analizar la continuidad L^p de ciertas integrales singulares que intervendrán en el análisis de los operadores involucrados en P.

3 Singularidad de las soluciones fundamentales

Sea $A(X) = (a_{i,j}(X))_{i,j=1}^{n}$, una matriz $n \times n$, real, simétrica, , con coeficientes Lipschitz, y A uniformemente elíptica,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(X)\xi, \xi\rangle \leq \lambda^{-1}|\xi|^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un abierto acotado, y sean

$$W^{2,1}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 + \int_\Omega |\nabla f|^2 < \infty\}, y$$

$$W^{2,1}_{loc}(\Omega) = \{f \in L^2_{loc}(\Omega) : \phi f \in W^{2,1}(\Omega), \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

Consideraremos de ahora en más el operador elíptico $L = -div(A\nabla)$, en un dominio Ω,(por ahora bastará considerar el borde de Ω Lipschitz) y A con las hipótesis antes mencionadas.

Definición 3.1
Diremos que $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ es una solución de $Lu = 0$ en Ω si

$$\int_\Omega a_{i,j}(Y)\nabla u(Y)\nabla\phi(Y)dy = 0, \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Observación 3.2
- *Si $u \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$ es solución de $Lu = 0$, entonces $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ (Por ser A Lipschitz y uniformemete elíptica). Ver por ejemplo, [13].*
- *La definición que hemos utilizado es válida inclusive cuando a la matriz A le pedimos solamete coeficientes acotados, en este caso, como $Lu \in L^2(\Omega)$, tiene sentido*

$$\int_\Omega Lu(Y)\phi(Y)dY = 0, \quad \phi \in C^\infty(\Omega)$$

Definición 3.3
Sea $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R} \cup \infty, G \geq 0$, y sea $\overset{0}{W^{1,1}}](\Omega) = \{f \in W^{1,1}(\Omega) : f \equiv 0$ en $\partial\Omega\}$, entonces, para cada $X \in \Omega$ y cada $r > 0$

- $G(X,.) \in W^{2,1}(\Omega \setminus B_r(X)) \cap \overset{0}{W^{1,1}}(\Omega)$

- $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega G(X,Y)L\phi(Y)dY = \phi(X),$$

es decir $LG(X,.) = \delta_X$
$G(X,Y)$ *así definida es la función de Green asociada al operador elíptico* L

Teorema 3.4
La función de Green antes definida, existe, es única y $\forall\ X, Y \in \Omega$

- $|G(X,Y)| \leq C_1|X-Y|^{2-n}$

- $|\nabla_Y G(X,Y)| \leq C_2|X-Y|^{1-n}$

- $|\nabla_Y \nabla_X G(X,Y)| \leq C_3|X-Y|^{-n}$

donde C_1 *es una constante que solo depende de n, y* λ*,* $C_2 y C_3$ *dependen también del diámetro de* Ω*.*

La demostración de éste teorema y otras propiedades de G (inclusive pidiendo menor regularidad para la matriz A), se pueden encontrar en [9]. Solo mencionamos aquellas propiedades que utilizaremos.

Definición 3.5
Diremos que $K(X,Y) \in W^{2,1}(\Omega \backslash B_r(X), dY)$*, y* $K(X,Y) \in W^{2,1}(\Omega \backslash B_r(Y), dX)$ $\forall\ r > 0$*, es una solución fundamental del operador elíptico* $L = -div(A\nabla)$*, si* $L(K(X,.)) = LK(.,X)) = \delta_X$*, y si llamo* $u(X,Y) = K(X,Y) - G(X,Y)$*, entonces* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *en ambas variables, donde* $G(X,Y)$ *es la función de Green asociada al operador* L *en* Ω*.*
Obviamente $K(X,Y)$ *asídefinida tiene las mismas propiedades de la función de Green mencionadas en el Teorema 3.4.*

Queremos obtener algunas estimaciones mas precisas sobre la singularidad de las soluciones fundamentales, para ello las compararemos con soluciones fundamentales del siguiente operador a coeficientes constantes: $L^X = -div_Y(A(X)\nabla_Y)$, $X \in \Omega$ (fijo), y $K^X(Z,.) \in C^\infty(\Omega \setminus B_r(Z))$ una solución fundamental cualquiera de dicho operador, tal que: para cada $X \in \Omega$,

$$|K^X(Z,Y)| \leq C|Z-Y|^{2-n}$$
$$|\nabla_y K^X(Z,Y)| \leq C|Z-Y|^{1-n}$$

$$|\nabla_z K^X(Z,Y)| \leq C|Z-Y|^{1-n}$$

donde las constantes que intervienen en estas acotaciones no dependen de X, sino de la constantes de elipticidad de L .

En esta sección no necesitaremos saber exactamente como es K^X, sino las propiedades de esta, pero cuando sea necesario , en particular en la sección 4, para analizar el potencial de doble capa asociado a L, consideraremos la siguiente solución fundamental de L^X:

$$K^X(Z,Y) = K^X(Z-Y) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X)||A^{-\frac{1}{2}}(X)(Z-Y)|^{2-n}$$

Proposición 3.6
Sea $L = -div(A\nabla)$ en un dominio Ω, donde la matriz A es real, simétrica, con coeficientes Lipschitz y uniformemente elíptica, y sea $K(X,Y)$ una solución fundamental de L entonces tenemos que:

$$|\nabla_Y K(X,Y) - \nabla_Y K^X(X,Y)| \leq C|X-Y|^{2-n}, \ \forall \ X,Y \in \Omega \ : X \neq Y \quad (3.1)$$

donde $K^X(Z,Y)$ es una solución fundamental del operador L^X, y C una constante que depende de $\Omega, \lambda, n, \delta(X)$ y $\delta(Y)$.

Para demostrar esta proposición utilizaremos el siguiente lema:

Lema 3.7
Bajo las hipótesis de la proposición anterior, sea $u_{Z,X}(Y) = K(Z,Y) - K^X(Z,Y)$, si tomamos $Z = X$, y llamamos $u_X(Y) = u_{X,X}(Y)$, tenemos que:

$$u_X(Y) = -\int_\Omega Lu_X(Z)G(Z,Y)dZ + \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q G(Q,Y), N_Q\rangle \, u_X(Q)dQ \quad (3.2)$$

Demostración.
Observemos que, fijado $X \in \Omega$

$$L_Y(K(Z,Y) - K^X(Z,Y)) \ = \ -div_Y[(A(X) - A(Y))\nabla_Y K^X(Z,Y)]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} (A(Y) - A(X))_{i,j} \partial_{Y_i} \partial_{Y_j} K^X(Z,Y) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{Y_i} A(Y)_{i,j} \partial_{Y_j} K^X(Z,Y) \\
&= f_{X,Z}(Y)
\end{aligned}
$$

Entonces si tomamos $Z = X$, obtenemos que

$$
Lu_X(Y) = f_X(Y) \text{ ; con } |f_X(Y)| \leq C_{n,A'} |X - Y|^{1-n} \tag{3.3}
$$

donde A' es la constante de Lipschitz de la matriz A.

Sean X, Y dos puntos de Ω a una distancia positiva, y sea $\rho \ : \ 0 \leq \rho < \frac{1}{2}|X - Y|$. Si consideramos el siguiente dominio $\Omega' = \Omega \setminus (B_\rho(X) \cup B_\rho(Y))$, tenemos que u_X y $G(.,Y) \in W^{2,2}(\Omega')$, por lo tanto $L_Z G(Z,Y) \in L^2(\Omega')$, y tiene sentido:

$$
\int_{\Omega'} L_Z G(Z,Y) u_X(Z) dZ = 0 \tag{3.4}
$$

Más aún podemos aplicar teorema de la divergencia, y obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega'} f_X(Z) G(Y,Z) dZ &= -\int_{\partial\Omega'} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q) dQ \\
&+ \int_{\partial\Omega'} \partial\eta_A u_X(Q) G(Y,Q) dQ
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Analizaremos que pasa con cada una de estas integrales, cuando $\rho \to 0$, comencemos con $\int_{\partial\Omega'} \partial\eta_A u_X(Q) G(Y,Q) dQ$.

Como $G(X,Y)$ es la función de Green asociada a L en Ω, sabemos que :

$$
\int_{\partial\Omega} \partial\eta_A u_X(Q) G(Y,Q) dQ = 0 \tag{3.6}
$$

Y en $\partial B_{\rho(Y)}$ y $\partial B_{\rho(X)}$ podemos estimar las integrales de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_\rho(Y)} \partial\eta_A u_X(Q) G(Y,Q)\,dQ\right| &\leq C\int_{\partial B_\rho(Y)} |X-Q|^{1-n}|Y-Q|^{2-n}dQ \\
&\leq C||X-Y|-\rho|^{1-n}\rho^{2-n}\rho^{n-1} \qquad (3.7)\\
&\to 0, \text{ cuando } \rho\to 0
\end{aligned}
$$

Para ver la integral en $\partial B_{\rho(X)}$, observemos primero que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial B_\rho(X)} \partial\eta_A u_X(Q) G(Y,Q)\,dQ &= \int_{B_\rho(X)} f_X(Z)G(Y,Z)dZ \\
&+ \int_{B_\rho(X)} A(Z)\nabla u_X(Z)\nabla G(Y,Z)dZ
\end{aligned}
$$

ya que las integrales de la derecha tienen sentido, mas aún, ambas tienden a 0 cuando $\rho \to 0$, pues

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B_\rho(X)} f_X(Z)G(Y,Z)dZ\right| &\leq C\int_{B_\rho(X)} |X-Z|^{1-n}|Y-Z|^{2-n}dZ \\
&\leq C\rho||Y-X|-\rho|^{2-n} \qquad (3.8)\\
&\to 0 \text{ cuando } \rho\to 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B_\rho(X)} A(Z)\nabla u_X(Z)\nabla G(Y,Z)dZ\right| &\leq C\int_{B_\rho(X)} |X-Z|^{1-n}|Y-Z|^{1-n}dZ \\
&\leq C\rho||Y-X|-\rho|^{1-n} \qquad (3.9)\\
&\to 0 \text{ cuando } \rho\to 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\int_{\partial B_\rho(X)} \partial\eta_A u_X(Q)G(Y,Q)dQ \to 0 \text{ cuando } \rho\to 0 \qquad (3.10)
$$

De (3.6), (3.7) y (3.10),concluimos que:

$$\int_{\partial\Omega'} \partial\eta_A u_X(Q) G(Y,Q)dQ \to 0 \text{ cuando } \rho \to 0 \tag{3.11}$$

Para estudiar $\int_{\partial\Omega'} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)dQ$, observemos que, de la misma manera que en (3.7):

$$\int_{\partial B_\rho(X)} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)dQ \to 0 \text{ cuando } \rho \to 0 \tag{3.12}$$

y si tomamos $\phi \in C_0^\infty(\Omega) : \phi \equiv 1$en $\overline{B_\rho(Y)}$, $sop\phi \subset B_{\frac{3}{2}\rho}(Y)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
u_X(Y) &= \int_\Omega A(Z)\nabla_Z G(Z,Y)\nabla_Z(u_X(Z)\phi(Z))dZ \\
&= \int_{B_{3/2\rho}(Y)} A(Z)\nabla_Z G(Z,Y)\nabla_Z(u_X(Z)\phi(Z))dZ \\
&= \int_{B_\rho(Y)} A(Z)\nabla_Z G(Z,Y)\nabla_Z(u_X(Z)\phi(Z))dZ \\
&+ \int_{B_{3/2\rho}(Y)\setminus B_\rho(Y)} A(Z)\nabla_Z G(Z,Y)\nabla_Z(u_X(Z)\phi(Z))dZ \\
&= -\int_{B_{3/2\rho}(Y)\setminus B_\rho(Y)} L_Z G(Z,Y)(u_X(Z)\phi(Z))dZ \\
&+ \int_{\partial(B_{3/2\rho}(Y)\setminus B_\rho(Y))} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)\phi(Q)dQ \\
&+ \int_{B_\rho(Y)} A(Z)\nabla_Z G(Z,Y)\nabla_Z u_X(Z)dZ \\
&= \int_{\partial B_\rho(Y)} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)dQ + \int_{B_\rho(Y)} A(Z)\nabla_Z G(Z,Y)\nabla_Z u_X(Z)dZ
\end{aligned}$$

Y de la misma manera que en (3.8), y (3.9), la segunda integral del último término converge a 0 cuando $\rho \to 0$, y obtenemos que

$$u_X(Y) = \lim_{\rho\to 0} \int_{\partial B_\rho(Y)} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)dQ \tag{3.13}$$

Entonces, de (3.12), (3.13), y (3.8), podemos concluir que:

$$\int_{\partial\Omega'} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)dQ \quad \to \quad \int_{\partial\Omega} \partial\eta_{A(Q)} G(Y,Q) u_X(Q)dQ - u_X(Y) \tag{3.14}$$

si $\rho \to 0$, y que

$$\int_{\Omega'} f_X(Z)G(Y,Z)dZ \to \int_{\Omega} f_X(Z)G(Y,Z)dZ, \text{ cuando } \rho \to 0. \qquad (3.15)$$

Y con esto queda demostrado el Lema, es decir, de (3.11),(3.14) y (3.15), concluimos que:

$$u_X(Y) = -\int_{\Omega} f_X(Z)G(Z,Y)dZ + \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q G(Z,Q), N_Q\rangle\, u_X(Q)dQ$$

$\square$

Demostración de la Proposición 3.6.

Utilizando la fórmula de representación obtenida para $u_X(Y)$ en el Lema anterior, podemos tomar gradiente respecto de la variable Y, y obtenemos que:

$$\partial_{Y_i} u_X(Y) = -\int_{\Omega} f_X(Z)\partial_{Y_i} G(Z,Y)dZ + \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\partial_{Y_i}\nabla_Q G(Q,Y), N_Q\rangle\, u_X(Q)dQ,$$

entonces podemos estimar el gradiente de u de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\nabla_Y u_X(Y)| &\leq C\int_{\Omega} |Z-X|^{1-n}|Z-Y|^{1-n}dZ + C\int_{\partial\Omega} |Q-Y|^{-n}|Q-X|^{2-n}dQ \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\int_{\Omega} |Z-X|^{1-n}|Z-Y|^{1-n}dZ \\ &\leq C\int_{\mathbf{R}^n} |Z-X|^{1-n}|Z-Y|^{1-n}dZ \\ &= CF^{-1}(F(w_{1-n} * w_{1-n}))(Y-X) \end{aligned}$$

donde F es la transformada de Fourier, $w_s(X) = |X|^s$, y

$$F(w_s)(X) = C(n,s)|X|^{-n-s}, si -n < s < 0$$

(Obviamente esta igualdad es formal, pero está perfectamente justificada en el

sentido de las distribuciones(ver [8], por ejemplo)).
Entonces podemos acotar I_1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq CF^{-1}(F(w_{1-n} * w_{1-n}))(X-Y) \\ &= CF^{-1}(F(w_{1-n})^2(X-Y) \\ &= CF^{-1}(|.|^{-1})^2(X-Y) \\ &= CF^{-1}(|.|^{-2})(X-Y) \\ &= C|X-Y|^{2-n} \end{aligned}$$

donde las constantes involucradas dependen solo de $\lambda, n,$ yA', y para I_2 obtenemos que:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_A \int_{\partial\Omega} |Q-Y|^{-n}|Q-X|^{2-n}dQ \\ &\leq C\delta(Y)^{-n}\int_{\partial\Omega}|Q-X|^{2-n}dQ \\ &\leq C\delta(Y)^{-n}(diam(\Omega)-\delta(X)) \\ &\leq C, \text{ donde } C = C(\Omega, A, \delta(X), \delta(Y), n). \end{aligned}$$

Entonces, fijado X, $\forall\, Y \in \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\nabla_Y K(X,Y) - \nabla_Y K^X(X,Y)| &\leq C(\Omega, A)|X-Y|^{2-n} + C(\Omega, A, \delta(X), \delta(Y), n) \\ &\leq C(\Omega, A, \delta(X), \delta(Y), n)|X-Y|^{2-n} \end{aligned}$$

Y con esto queda demostrada la preposición. □

4 Estudio de la continuidad de un operador singular

En esta sección analizaremos la continuidad L^p de un operador singular que necesitaremos para poder estudiar la continuidad de la traza del potencial de doble capa asociado a L.
Más aún, probaremos que dicho operador es de Calderón- Zygmund.

Definición 4.1
Sea $Tf(x) = \int k(x,y)f(y)dy$, diremos que el núcleo $k(x,y)$ satisface "estimaciones standard" si es una función continua sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,y) : x = y\}$, tal que existen constantes C, δ, con

$$|k(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}$$
$$|k(x,y) - k(x',y)| + |k(y,x) - k(y,x')| \leq C|x-x'|^{\delta}|x-y|^{-(n+\delta)},$$

si $|x-x'| \leq \frac{1}{2}|x-y|$. Si $\delta = 1$, esta segunda condición es equivalente a

$$|\nabla_x k(x,y)| + |\nabla_y k(x,y)| \leq C|x-y|^{-1-n}$$

Definición 4.2
Sea $T : D(\mathbb{R}^n) \to D'(\mathbb{R}^n)$ un operador lineal y continuo, diremos que T es un operador de Calderón-Zygmund si se satisfacen las siguientes propiedades

- *existe un núcleo $k(x,y)$ que satisface las estimaciones standard.*
- *$< Tf, g >= \int\int k(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy$, para f y g dos funciones C^∞ con soporte compacto y disjunto.*
- *T es continuo de L^2 en L^2.*

Observación 4.3
Recordemos que entre una de las propiedades clásicas de estos operadores se tiene que son continuos de L^p en L^p, $\forall\ 1 < p < \infty$.

En el análisis de los potenciales para el Laplaciano, los operadores singulares, de los cuales se necesita saber continuidad, tienen núcleo de la forma $k(x,y) = \dfrac{\eta(x)-\eta(y)}{|(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n}$, donde η y ϕ son funciones Lipschitz de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}$. La demostración de que estos operadores son de Calderón-Zygmund, es consecuencia del mismo resultado para operadores con núcleo de la forma $k(x,y) = F\left(\dfrac{\phi(x)-\phi(y)}{(x-y)}\right)\dfrac{1}{x-y}$, donde F es analítica en un disco , cuyo radio depende de la constante de Lipschitz de la función ϕ [5],[17].

Ahora bien en el caso que nos interesa, al comparar las soluciones fundamentales con soluciones fundamentales de operadores con coeficientes constantes (como se hizo en al sección anterior), nos encontraremos con la necesidad de analizar operadores singulares cuyo núcleo es
$k(x,y) = \dfrac{\eta(x)-\eta(y)}{|B(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n}$, donde $B(X)$ es una matriz (n×n) uniformemente elíptica, con coeficientes Lipschitz. A continuación demostraremos el resultado de continuidad antes mencionado que utilizaremos en la próxima sección.

Teorema 4.4
Sean ϕ y η dos funciones Lipschitz en $\mathbb{R}^{n-1}$, $B(X)$ una matriz (n×n) uniformemente elíptica, con coeficientes en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir: existen μ y λ, tal que $\mu|\xi|^2 \leq \langle B(X)\xi,\xi\rangle \leq \lambda|\xi|^2$, uniformemente en $X \in \mathbb{R}^n$. Definamos el operador

$$K_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{\eta(x)-\eta(y)}{|B(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n} f(y)dy$$

Entonces $K^*f(x) = \sup_{\epsilon>0}|K_\epsilon f(x)|$ es un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Mas aún existe $\lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon f(x) = Kf(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y en L^2, por lo tanto K es un operador de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^{n-1}$.

Demostración.

Para la demostración usaremos el método de las rotaciones y teoremas de continuidad de operadores singulares con núcleos que involucran funciones Lipschitz. Basta considerar el caso $\eta(x) = x_j$, ya que si $\eta(x)$ una función Lipschitz cualquiera la demostración se puede deducir del caso $\eta(x) = x_j$ de forma análoga a como se deduce cuando la matriz B es la identidad, [5], [17].

Sea entonces

$$k(x,y) = \frac{x_j - y_j}{|B(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n} \tag{4.1}$$

Podemos escribir al operador K_ϵ como

$$K_\epsilon f(x) = \frac{1}{2}\int_{|y|\geq\epsilon} k(x,x+y)f(x+y) + k(x,x-y)f(x-y)dy$$

y pasando a coordenadas polares, con $\Sigma = \{y : |y| = 1\}$,

$$\begin{aligned} K_\epsilon f(x) &= \frac{1}{2}\int_\Sigma\int_{(\epsilon,\infty)} k(x,x+uy)f(x+uy) + k(x,x-uy)f(x-uy)u^{n-2}dud\sigma_y \\ &= \frac{1}{2}\int_\Sigma K_{\epsilon,y}f(x)d\sigma_y \end{aligned}$$

Cada $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ esta unívocamente representado como $x = w + ty$, donde $t \in \mathbb{R}$,y $w \in Y$ (Y es el hiperplano ortogonal a y que pasa por el origen), con esta notación

$$\begin{aligned} K_{\epsilon,y}f(x) &= K_{\epsilon,y}f(w+ty) = \int_{|u-t|>\epsilon} k(w+ty,w+uy)|t-u|^{n-2}f(w+uy)du \\ &= \int_{|u-t|>\epsilon} N_{w,y}(t,u)f_{w,y}(u)du \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} N_{w,y}(t,u) &= \frac{(w_j+uy_j)-(w_j+ty_j)}{(t-u)^2}\left|B(w+ty,\phi(w+ty))(y,\frac{\phi(w+ty)-\phi(w+uy)}{t-u}\right|^{-n} \\ &= \frac{y_j}{t-u}\left|B(w+ty,\phi(w+ty))(y,\frac{\phi(w+ty)-\phi(w+uy)}{t-u}\right|^{-n} \\ &= \frac{y_j}{t-u}F_{w,t,y}\left(\frac{\phi(w+ty)-\phi(w+uy)}{t-u}\right) \end{aligned}$$

y $F_{w,t,y}(\theta) = |B(w+ty,\phi(w+ty))(y,\theta)|^{-n}$ es una función C^∞ en la variable

θ, además, como solo nos interesa $\theta \in [-\|\nabla\phi\|_\infty, \|\nabla\phi\|_\infty]$, podemos suponer que dado $\epsilon > 0$, $sopF \subset I = [-\epsilon - \|\nabla\phi\|_\infty, \epsilon + \|\nabla\phi\|_\infty]$, y por lo tanto $F \in L^2(I, d\theta)$. (simplemente convolucionando la función F con un *mollifier* apropiado). Entonces, podemos hacer el desarrollo de Fourier de F,

$$F_{w,t,y}(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(w,t,y) e^{ik\frac{\pi}{\epsilon+\|\nabla\phi\|_\infty}\theta}$$

donde $c_k(w,t,y) = \int F_{w,t,y}(\theta)e^{i\epsilon k\theta}d\theta$ es de decrecimiento rápido, como función de k.

Definamos ahora

$$K(t,u) = \frac{1}{t-u}e^{i(\frac{\eta(t)-\eta(u)}{t-u})} \tag{4.3}$$

donde $\eta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz, por Lema 1 en [5], tenemos que $K(t,u)$ define un operador continuo en $L^2(\mathbb{R})$, y podemos acotar su norma por $C(1 + \|\eta'\|_\infty)^9$, con C una constante absoluta.
Ahora bien, $N_{w,y}(t,u) = y_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(w,t,y)K_{k,w,y}(t,u)$, donde $K_{k,w,y}(t,u)$ es un núcleo de la misma forma que (4.3), asociado a la función $\eta_{k,w,y}(t) = \dfrac{\pi k}{\epsilon + \|\nabla\phi\|_\infty}\phi(w+ty)$ que obviamente satisface $\|\eta'_{k,w,y}(t)\|_\infty \leq \dfrac{|\nabla\phi\|_\infty |k|\pi}{\epsilon + \|\nabla\phi\|_\infty} \leq \pi|k|$.

Por lo tanto, existe el operador definido con el núcleo $K_{k,w,y}(t,u)$, y está acotado en L^2 de la siguiente manera:

$$\| \int K_{k,w,y}(t,u)f_{w,y}(u)du\|_{L^2} \leq C(1+|k|)^9\|f_{w,y}\|_{L^2(dt)} \tag{4.4}$$

Como obviamente este es un operador de Calderón-Zygmund, podemos aplicar el siguiente resultado:

Teorema 4.5 (**Lema de Cotlar**)*Sea T un operador de Calderón Zygmund. Entonces para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos la siguiente desigualdad*

$$T^*f(x) \leq C(M(Tf(x)) + M(f(x))$$

donde C depende de n y de las constantes que aparecen en las estimaciones standard del núcleo. M es el operador maximal de Hardy-Littlewood y $T^*f =$ $\sup_{\epsilon>0}|T_\epsilon f|$.

Para la demostración de este resultado ver por ejemplo [16] .
Por lo tanto en nuestro caso, si llamamos $K_{k,w,y}f_{w,y}(t) = \int K_{k,w,y}(t,u)f_{w,y}(u)du$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|K^*_{k,w,y}f\|_2 &\leq C(\|MK_{k,w,y}f\|_2 + \|Mf\|_2) \\
&\leq C(\|K_{k,w,y}f\|_2 + \|f\|_2) \qquad (4.5) \\
&\leq C(1+|k|)^9\|f\|_2
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$K_{\epsilon,y}f_{w,y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(w,t,y)y_j \int_{|u-t|>\epsilon} K_{k,w,y}(t,u)f_{w,y}(u)du$$

Para analizar K^*_y, observemos que si llamamos $b_k^M(w,t,y)$ al k-ésimo coeficiente de Fourier de la derivada M-ésima de $F_{w,t,y}(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k^M(w,t,y)|^2 &= \|d^M F_{w,t,y}\|^2_{L^2(I)} \\
&\leq C(\|\nabla\phi\|_\infty, M, \lambda, \mu) \int_I |B(w+ty, \phi(w+ty))(y,x)|^{C(n,M)}dx \\
&\leq C(\|\phi'\|_\infty, M, \lambda, \mu) \int_I (1+x^2)^{C(n,M)}dx \\
&\leq C(\|\nabla\phi\|_\infty, M, \lambda, \mu, n)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $F \in C^\infty$, esto vale para todo $M \in \mathbb{N}$, en particular si tomamos $M = 2N$, por las propiedades de la transformada de Fourier tenemos que $\forall\ k \in \mathbb{Z}$:

$$|c_k(w,t,y)||k|^{2N} = |b_k^{2N}(w,t,y)| \leq (\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b^2N_k(w,t,y)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C(\|\nabla\phi\|_\infty, M, \lambda, \mu, n)$$

Como la constante no depende de las variables involucradas, en particular tenemos que:

$$\|c_k(w,t,y)\|_{L^\infty(dt)}|k|^N \leq C|k|^{-N},\ \forall\ k \text{ y } N \qquad (4.6)$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\| \sup_{\epsilon>0} |K_{\epsilon,y} f_{w,y}\|_{L^2(dt)} &= \| \sup_{\epsilon>0} | \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(w,t,y) y_j K_\epsilon^k f_{w,y}| \, \|_{L^2(dt)} \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|c_k(w,t,y)y_j\|_{L^\infty(dt)} \| \sup_{\epsilon>0} K_\epsilon^k f_{w,y}(t)\|_{L^2(dt)} \\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|c_k(w,t,y))\|_{L^\infty(dt)} (1+|k|)^N \|f_{w,y}\|_{L^2(dt)} \\
&\leq C\|f_{w,y}\|_{L^2(dt)} \sum_{k=\infty}^{\infty} |k|^{-N} \\
&\leq C\|f_{w,y}\|_{L^2(dt)}
\end{aligned}
$$

usando (4.6) para N adecuado, y las acotaciones obtenidas en (4.5).

Por lo tanto, usando la desigualdad de Minkowsky y teorema de Fubini, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|K^* f\|_2 &= (\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\epsilon>0} |K_\epsilon f(x)|)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\epsilon>0} | \int_\Sigma K_{\epsilon,y} f(w+ty)|dy)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_\Sigma \| \sup_{\epsilon>0} |K_{\epsilon,y} f(w+ty)\|_2 dy \\
&\leq C \int_\Sigma (\int_Y \int_{\mathbb{R}^n} |f(w+ty)|^2 dt dw)^{\frac{1}{2}} dy \\
&\leq C\|f\|_2
\end{aligned}
$$

donde obviamente, la constante C no es siempre la misma.
Ahora bien, como $k(x,y)$ satisface las condiciones standard, y por lo anterior los operadores K_ϵ están uniformemete acotados en ϵ, entonces siguiendo los argumentos clásicos, existe $Kf(x) = vpK_\epsilon f(x)$ $\forall$ $f \in L^2(\mathbb{R})$. Y K resulta un operador de Calderón - Zygmund. $\square$

5 Existencia y continuidad L^p de la traza del potencial de capa doble asociado al operador L

Como en la sección 3, consideremos el operador elíptico $L = -div(A\nabla)$ definido en Ω, con $A(X)$ una matriz a coeficientes Lipschitz y uniformemente elíptica, es decir, existe $\lambda > 0$, tal que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \lambda^{-1}|\xi|^2$$

para todo $x, \xi \in \Omega$, y Ω, una región abierta, conexa, acotada en $\mathbb{R}^n$, tal que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ sea también conexo.

Como vimos en la Introducción para analizar los operadores involucrados en el proyector de Calderón, necesitamos analizar propiedades de los potenciales de capa simple y doble asociados a L. Dada $K(X,Y)$ una solución fundamental de L, el potencial de capa doble de f, en Ω está dado por

$$\mathcal{T}f(X) = \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle\, f(Q)dQ, \;\; X \in \Omega \tag{5.1}$$

donde N_Q es el vector normal a $\partial\Omega$ en el punto Q.
La traza de este operador está definida de la siguiente manera: para $P \in \partial\Omega$ sea

$$T_\epsilon f(P) \;\; = \;\; \int_{\partial\Omega, |P-Q|>\epsilon} \langle A(Q)\nabla_Q K(P,Q), N_Q\rangle\, f(Q)dQ, \tag{5.2}$$

y, cuando tenga sentido,

$$Tf(P) \;\; = vp \textstyle\int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(P,Q), N_Q\rangle\, f(Q)dQ = \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(P). \tag{5.3}$$

Análogamente, el potencial de capa simple de f está dado por

$$\mathcal{S}f(X) = \int_{\partial\Omega} K(X,Q)f(Q)dQ, \;\; X \in \Omega \tag{5.4}$$

y como la singularidad de $K(X,Q)$ (que es del orden de $|X-Q|^{2-n}$) es integrable, aún cuando $X \in \partial\Omega$, luego, la correspondiente traza es

$$Sf(P) = \int_{\partial\Omega} K(P,Q)f(Q)dQ, \; P \in \partial\Omega. \tag{5.5}$$

En esta sección analizaremos la continuidad L^p de la traza del potencial de capa doble. Antes de enunciar el resultado principal de esta sección, daremos la siguiente definición:

Definición 5.1
Diremos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio Lipschitz, si para cada $Q \in \partial\Omega$ existe un sistema de coordenadas rectangular, $(x,s) : x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, un entorno $U \equiv U(Q) \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a Q, y una función $\phi_Q \equiv \phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que

1. $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C_Q|x-y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $C_Q < \infty$;
2. $U \cap \Omega = \{(x,s) : s > \phi(x)\} \cap U$.

El sistema coordenado(x,s) puede ser tomado siempre como una rotación y traslación del sistema coordenado rectangular standard de $\mathbb{R}^n$.

Observación 5.2 .
Por la compacidad de $\partial\Omega$, existen números $M < \infty$, y un número finito de sistemas coordenados $\{(U_j,\phi_j)\}_{j=1}^m$, tal que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_j$, con las propiedades de la Definición 5.1, y $\|\nabla\phi_j\|_\infty \leq M$, $\forall j$. El menor de estos números, entre todas las posibles elecciones de $\{\phi_j\}$, es llamado la constante de Lipschitz de Ω.

Observación 5.3 .
Recordemos que dada una función $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, Lipschitz, con soporte compacto, existe una sucesión de funciones $\{\psi_j\} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que sobre el soporte de ϕ, $\psi_j \to \phi$ uniformemente, y $\nabla\psi_j \to \nabla\phi$ en todo $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, $1 \leq p < \infty$, y $\|\nabla\psi_j\|_\infty$ están uniformemente acotadas.

Observación 5.4
Diremos que el dominio Ω es C^1, si la función ϕ, en la Definición 5.1 es una función C^1. En ese caso podemos elegir la constante M de la Observación 5.2, tan pequeña como sea necesario.

Además existe una sucesión de funciones $\{\phi_j\} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que sobre el soporte de ϕ, $\phi_j \to \phi$ y $\nabla\phi_j \to \nabla\phi$ uniformemente cuando $j \to \infty$. Mas aún, como ϕ tiene soporte compacto, las ϕ_j pueden ser explícitamente construidas como mollifiers de ϕ, y por lo tanto $\|\nabla\phi_j\|_\infty \leq c, \forall j$.

Teorema 5.5
Sea L un operador uniformemente elíptico de la siguiente forma: $L = -div(A\nabla)$, en una región acotada Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ con borde Lipschitz, y $A(X)$ una matriz simétrica con coeficientes acotados, y Lipschitz, tal que $\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(X)\xi, \xi\rangle \leq \lambda^{-1}|\xi|^2$, $\forall X \in \overline{\Omega}$.
Y sea $T_\epsilon f(P)$ la traza del potencial de capa doble truncado, definido por (5.2). Entonces si Ω es un dominio Lipschitz, la aplicación $T^* f(P) = \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(P)|$ es continua de $L^p(\partial\Omega)$ en $L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, y existe $Tf(P) = \lim_{\epsilon\to 0} T_\epsilon f(P)$ para casi todo $P \in \partial\Omega$, y es un operador de Calderón-Zygmund.
Mas aún, si $\partial\Omega \in C^1$, $Tf(P)$ es compacto en $L^p(\partial\Omega)$.

Antes de demostrar el Teorema, necesitaremos hacer algunas consideraciones sobre las soluciones fundamentales y su relacion con las soluciones fundamentales de un operador tipo divergencia a coeficientes constantes. Sea el operador L en un dominio $\Omega' : \Omega \subset \Omega'$, y $d(\Omega, \partial\Omega') = d > 0$, y tomemos una solución fundamental $K(X,Y)$ del operador L en el dominio Ω', y en este mismo dominio consideremos el operador elíptico a coeficientes constantes $L^X = -div_Y(A(X)\nabla_Y)$, y sea $K^X(Z,Y)$ la solución fundamental de este operador considerada en la sección 2, es decir

$$K^X(Z,Y) = K^X(Z-Y) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X)||A^{-\frac{1}{2}}(X)(Z-Y)|^{2-n} \tag{5.6}$$

si la evaluamos en $Z = X$, y derivamos respecto de Y, obtenemos que:

$$\nabla_Y K^X(X,Y) = -\frac{1}{\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X)|\frac{A^{-1}(X)(X-Y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(X)(X-Y)|^n}, \tag{5.7}$$

Entonces, por el Teorema 3.6, tomando esta solución en particular obtenemos que, $\forall\ X, Y \in \overline{\Omega}$:

$$|\nabla_Y K(X,Y) - \nabla_Y K^X(X,Y)| \leq C(\Omega, \Omega', \lambda, A')|X-Y|^{2-n} \tag{5.8}$$

donde A' es la constante de Lipschitz de la matriz A.

Demostración del Teorema 5.5.

Podemos descomponer al operador T_ϵ definido en (5.2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
T_\epsilon f(P) &= \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} \langle A(Q)\nabla_Q K(P,Q), N_Q\rangle\, f(Q)dQ \\
&= \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} \Big\langle A(Q)\nabla_Q(K(P,Q)-K^P(P,Q)), N_Q\Big\rangle\, f(Q)dQ \\
&+ \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} \Big\langle (A(Q)-A(P))\nabla_Q K^P(P,Q), N_Q\Big\rangle\, f(Q)dQ \\
&+ \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} A(P)\nabla_Q K^P(P,Q)N_Q f(Q)dQ \\
&= T_{1,\epsilon}f(P) + T_{2,\epsilon}f(P) + T_{3,\epsilon}f(P)
\end{aligned}$$

Llamemos $k_i(P,Q)$ al núcleo de los operadores $T_{i,\epsilon}$, es decir

$$T_{i,\epsilon}f(P) = \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} k_i(P,Q)f(Q)dQ,$$

entonces obviamente existe $T_i f(P) = \lim_{\epsilon\to 0} T_{i,\epsilon}f(P)$, $i = 1,2$ para casi todo $P \in \partial\Omega$ y en $L^p(\partial\Omega)$, pues ambos operadores tienen núcleos integrables, (por ser A Lipschitz, y por (5.8), ambos están acotados por $C|P-Q|^{2-n}$, donde la constante C depende de $A', \Omega, \Omega', \lambda$ y n, donde A' es la constante de Lipschitz de la matriz A, y si bien tambien depende de P , es una dependencia uniforme, por ser la matriz A acotada y uniformemente elíptica).
Y como los operadores $T_{i,\epsilon}$ son compactos, T_i resulta compacto para $i = 1,2$ en $L^p(\partial\Omega)$ (la demostración de la compacidad es aún mas sencilla a la que daremos mas adelante en el teorema 5.6, por lo tanto aqui la omitiremos).

Para analizar el operador $T_{3,\epsilon}$, consideremos la solución fundamental particular dada por (5.6), entonces:

$$T_{3,\epsilon}f(P) = -\omega_n^{-1}|det A^{-\frac{1}{2}}(P)| \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} \frac{\langle A(P)A^{-1}(P)(P-Q), N_Q\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q)|^n} f(Q)dQ$$

$$= \quad -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(P)| \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} \frac{\langle P-Q, N_Q\rangle}{\left|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q)\right|^n} f(Q)dQ \qquad (5.9)$$

El primer paso en éste análisis es obtener una expresión euclidea del operador, para lo cual hacemos lo siguiente:

Sea $\{U_j\}$ un cubrimiento finito de $\partial\Omega$, con las propiedades de la Observación 5.2 , y sea η_m una partición de la unidad, finita, suave y positiva, subordinada a los $\{U_j\}$. Claramente,

$$T_{3,\epsilon}f(P) = -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(P)| \sum_m \int_{\partial\Omega,|P-Q|>\epsilon} \frac{\langle P-Q, N_Q\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q)|^n} \eta_m(Q) f(Q)dQ$$

y es suficiente considerar cada sumando por separado. Además, agrupando los sumandos que corresponden a cada $\{U_j\}$, podemos suponer que estamos trabajando en un sistema de coordenadas locales fijo (U_j, ϕ_j), que notaremos simplemente (U, ϕ). Si cambiamos en U las variables Q en $(y, \phi(y))$, y P en $(x, \phi(x))$, y definimos $\mathcal{U}_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |x-y|^2 + (\phi(x)-\phi(y))^2 > \epsilon^2\}$, como $N_Q dQ = (-\nabla\phi(y), 1)dy$, cada término en (5.9) es de la forma

$$-\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))| \int_{\mathcal{U}_\epsilon} k(x,y)\eta_{m'}(y,\phi(y)) f(y,\phi(y)dy,$$

donde

$$k(x,y) = \frac{< (x-y, \phi(x)-\phi(y)), (-\nabla\phi(y), 1) >}{\left|A^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))(x-y, \phi(x)-\phi(y))\right|^n}. \qquad (5.10)$$

Obviamente si $\phi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$, $|k(x,y)| \leq |x-y|^{2-n}$, entonces el núcleo es localmente integrable. En ese caso la mayoría de los argumentos que damos cuando ϕ es sólo Lipschitz son innecesarios.
Considerando que $|detA^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))| \in L^\infty$, y haciendo abuso de notación, es claro que las propiedades de continuidad en L^p del operador definido en (5.9) siguen de las propiedades del operador

$$K_\epsilon f(x) = \int_{\mathcal{U}_\epsilon} k(x,y) f(y)dy, \qquad (5.11)$$

Como una primera aproximación para estudiar (5.11) consideremos el siguiente operador:

$$\tilde{K}_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} k(x,y)f(y)dy \tag{5.12}$$

Teorema 5.6
Sea $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, una función Lipschitz tal que, $\|\phi\|_\infty = M < \infty$. Y sea $\tilde{K}_\epsilon f$ el operador definido en (5.12), cuyo núcleo $k(x,y)$ está definido por (5.10).

Entonces, el operador $\tilde{K}^* f(x) = \sup_{\epsilon\geq 0} |\tilde{K}_\epsilon f(x)|$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^{n-1}), 1 < p < \infty$. Mas aún $\lim_{\epsilon\to 0} \tilde{K}_\epsilon f(x) = \tilde{K} f(x)$ existe para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, y es un operador de Calderón Zygmund.
Además si $\phi \in C^1$, entonces $\tilde{K}$ es compacto en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Demostración.

Escribamos

$$\begin{aligned}
k(x,y) &= \frac{< (x-y, \phi(x)-\phi(y)), (-\nabla\phi(y), 1) >}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n} \\
&= \frac{\phi(x)-\phi(y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n} \\
&- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial_j\phi(y)(x_j-y_j)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n} \\
&= k_0(x,y) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j\phi(y) k_j(x,y), \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

y llamemos $\tilde{K}^j_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} k_j(x,y)f(y)dy, 0 \leq j \leq n$. Por lo tanto :

$$\tilde{K}_\epsilon f(x) = \tilde{K}^0_\epsilon f(x) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{K}^j_\epsilon (f\partial_j\phi)(x),$$

tomando los supremos en ϵ, obtenemos que:

$$\tilde{K}^* f(x) \leq \tilde{K}^{0^*} f(x) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{K}^{j^*}(f\partial_j\phi)(x) \tag{5.14}$$

Ahora bien, cada $\tilde{K}^j_\epsilon$ es un operador del mismo tipo que los del Teorema 4.4, aplicados a funciones en L^p (ya que $\partial_j\phi$, pertenecen a L^∞, $\forall\ 1 \leq j \leq n$), por lo tanto los operadores $\tilde{K}^{j^*}$ son acotados en $L^p, 1 < p < \infty$, $\forall j$, es decir, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}^* f\|_p &\leq \|\tilde{K}^{0^*} f(x)\|_p + \sum_{j=1}^n \|\tilde{K}^{j^*}(f\partial_j\phi\|_p \\ &\leq C\|f\|_p \end{aligned}$$

donde la constante C depende de M, n, λ, y p. También por Teorema 4.4, existe $\tilde{K}^j = \lim_{\epsilon\to 0} \tilde{K}^j_\epsilon$ c.t.p., y $\tilde{K}^j$ son operadores de Calderón Zygmund. Obviamente, entonces existe $\tilde{K} = vp\tilde{K}_\epsilon$ c.t.p., y es un operador de Calderón-Zygmund.

Para estudiar la compacidad de $\tilde{K}$ en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ necesitaremos la hipótesis de $\phi \in C^1$, y daremos una sucesión de operadores compactos que converjan a $\tilde{K}$ en norma. Para ello consideremos la sucesión de funciones $\{\phi_j\}$ introducidas en la Observación 5.4. Sea

$$k_j(x,y) = \frac{\phi_j(x) - \phi_j(y) - \nabla\phi_j(y).(x-y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,\phi(x))(x-y,\phi(x)-\phi(y))|^n} \tag{5.15}$$

y consideremos $\tilde{K}_{j,\epsilon} f(y) = \int_{|x-y|>\epsilon} k_j(x,y)f(y)dy$.

Para verificar que cada $\tilde{K}_{j,\epsilon}$ es compacto, por el argumento de partición de la unidad que hemos usado, basta restringirse a $L^p(B)$, B=bola unidad de $\mathbb{R}^{n-1}$, y considerar una sucesion de funciones acotadas $\{f_m\}$ en $L^p(B)$, es decir $\|f_m\|_p \leq M$ y ver que existe una subsucesión $\{f_{m_k}\}$ tal que $\tilde{K}_{j,\epsilon} f_{m_k}$ converge en $L^p(B)$ cuando $m_k \to \infty$.

Ahora bien, existe $f \in L^p$ tal que $\|f\|_p \leq M$ y $f_{m_k} \to f$ debilmente, entonces, como $k_j(x,y)\chi_{|x-y|>\epsilon} \in L^q(B)\ \forall\ 1 \leq q \leq \infty$, obviamente $\tilde{K}_{j,\epsilon} f(x) = \lim_{m_k\to\infty} \tilde{K}_{j,\epsilon} f_{m_k}(x)$. Y como $|\tilde{K}_{j,\epsilon} f_{m_k}(x)|$, $|\tilde{K}_{j,\epsilon} f(x)| \leq C(\epsilon,p)M$, por convergencia mayorada de Lebesgue, obtenemos que $\|\tilde{K}_{j,\epsilon} f - \tilde{K}_{j,\epsilon} f_{m_k}\|_{L^p(B)} \to 0$, si $m_k \to \infty$.

Por lo tanto como $\tilde{K}_j f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \tilde{K}_{j,\epsilon} f(x)$ existe pp y en L^p (es sencillo probar que $\|\tilde{K}_j - \tilde{K}_{j,\epsilon}\|_{p,p} \leq c\epsilon^{\frac{1}{q}}$, donde la constante c, depende solamente de j), entonces $\tilde{K}_j$ resulta también compacto.

Además, como $\|\nabla(\phi - \phi_j)\|_\infty \to 0$, cuando $j \to \infty$, usando el resultado de A.P. Calderón, [2]

$$\|\tilde{K}_j - \tilde{K}\|_{p,p} \to 0, \text{ cuando } j \to \infty,$$

(es decir como operadores en L^p).
Entonces $\tilde{K}$ es compacto y el teorema queda demostrado. □

Volvamos al estudio del operador $T_{3,\epsilon}$ definido en (5.9).

Teorema 5.7
Con las mismas hipótesis que el teorema anterior, sea

$$T_{3,\epsilon} f(P) = -\omega_n^{-1} |det A^{-\frac{1}{2}}(P)| \int_{\partial\Omega, |P-Q|>\epsilon} \frac{\langle P - Q, N_Q \rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P - Q)|^n} f(Q) dQ$$

Y sea $T_3^* f(P) = \sup_{\epsilon>0} |T_{3,\epsilon} f(P)|$. *Entonces* $T_3^* f$ *es continuo de* $L^p(\partial\Omega)$ *en* $L^p(\partial\Omega)$, *mas aún , existe* $T_3 f(P) = \lim_{\epsilon\to 0} T_{3,\epsilon} f(P)$ *para casi todo* $P \in \partial\Omega$, *y* T_3 *es un operador de Calderón-Zygmund.*
Si Ω *es un dominio* C^1, T_3 *resulta compacto en* $L^p(\partial\Omega)$

Demostración.
Observemos que si $\tilde{T}_\epsilon$ es un operador tal que

$$T_{3,\epsilon} f(P) = -\omega_n^{-1} |det A^{-\frac{1}{2}}(P)| \tilde{T}_\epsilon f(P) \tag{5.16}$$

por las propiedades de la matriz A, $-\omega_n^{-1} |det A^{-\frac{1}{2}}(P)| \in L^\infty(\partial\Omega)$, por lo tanto basta probar el teorema para el operador $\tilde{T}_\epsilon$. Por medio de un argumento de partición de la unidad y pasando a coordenadas locales, la acotación L^p de $\tilde{T}^* f(P)$ es consecuencia directa de la acotación L^p del operador $K^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |K_\epsilon f(x)|$, donde K_ϵ es el operador definido en (5.11), es decir:

$$K_\epsilon f(x) = \int_{U_\epsilon} \frac{\langle (x - y, \phi(x) - \phi(y)), (-\nabla\phi(y), 1) \rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(x, \phi(x))(x - y, \phi(x) - \phi(y))|^n} f(y) dy,$$

donde $\mathcal{U}_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |x-y|^2 + (\phi(x) - \phi(y))^2 > \epsilon^2\}$.

Comencemos viendo que :

$$\sup_{\epsilon>0} |K_\epsilon f(x) - \tilde{K}_\epsilon f(x)| \leq CMf(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{5.17}$$

donde $\tilde{K}_\epsilon$ es el operador definido en (5.12), $Mf(x)$ la función maximal de Hardy-Littlewood, y C una constante absoluta que depende de la constante de Lipschitz de ϕ y de la constante de elipticidad λ. Si definimos

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon f(x) &= K_\epsilon f(x) - \tilde{K}_\epsilon f(x) \\ &= \int_{R(\epsilon)} \frac{\langle (x-y, \phi(x) - \phi(y)), (-\nabla\phi(y), 1)\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(x, \phi(x))(x-y, \phi(x) - \phi(y))|^n} f(y)dy \\ &= \int_{R(\epsilon)} k(x,y) f(y) dy \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde $R(\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |x-y| \leq \epsilon, \text{ y } |x-y|^2 + |\phi(x) - \phi(y)|^2 > \epsilon^2\}$.

En particular, tenemos que $|A^{-\frac{1}{2}}(x, \phi(x))(x-y, \phi(x)-\phi(y))|^{-n} \leq c(\lambda)|(x-y, \phi(x)-\phi(y))|^{-n} \leq c(\lambda)\epsilon^{-n}$, y $|(x-y, \phi(x)-\phi(y))| \leq (1+M^2)^{\frac{1}{2}}\epsilon$ si $y \in R(\epsilon)$, por lo tanto $|k(x,y)| \leq C\epsilon^{1-n}$, donde la constante depende de M y de λ, entonces :

$$\sup_{\epsilon>0} |\Delta_\epsilon f(x)| \leq C \sup_{\epsilon>0} \epsilon^{1-n} \int_{|x-y|\leq\epsilon} |f(y)| dy \leq CMf(x) \tag{5.19}$$

Por lo tanto se cumple (6.5), y esto nos dice que $K^*f(x) \leq \tilde{K}^*f(x) + CMf(x)$, y por Teorema 5.6, $\|K^*f(x)\|_p \leq c\|f\|_p, \forall p : 1 < p < \infty$ que es lo que queríamos probar.

Para demostrar la existencia del valor principal de $K_\epsilon f(x)$, veamos que $\lim_{\epsilon\to 0} \Delta_\epsilon f(x) = 0$ para casi todo punto cuando $f \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, para eso basta efectuar esta verificación cuando $f \in S(\mathbb{R}^{n-1})$. Entonces si ponemos $P = (x, \phi(x)), Q = (y, \phi(y)), N_Q = (-\nabla\phi(y), 1)$, $dQ = dy$, todo se reduce a probar que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{R(\epsilon)} \frac{\langle P-Q, N_Q \rangle}{\left| A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q) \right|^n} dQ = 0. \tag{5.20}$$

Como $N_Q = N(y, \phi(y))$ pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, casi todo punto $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ es un punto de Lebesgue para esa función. Es decir $\epsilon^{1-n} \int_{|x-y| \leq \epsilon} |N_Q - N_P| dQ$ tiende a 0 con ϵ. Como $\epsilon \leq |Q-P| \leq (1 + \|\nabla\phi\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \epsilon$ sobre $R(\epsilon)$, podemos reemplazar, para todo punto de Lebesgue de N_Q, N_Q por N_P.
Veamos entonces que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{R(\epsilon)} \frac{P-Q}{|P-Q|^n} dQ = 0. \tag{5.21}$$

en todo punto x donde ϕ es diferenciable (recordemos que ϕ es Lipschitz, o sea que es diferenciable en ctp). Este resultado se debe a que la función $Q|Q|^{-n}$ es impar y que el dominio de integración $R(\epsilon)$ es esencialmente simétrico con respecto a P si ϕ es diferenciable en x (el volumen de la diferencia simétrica entre $R(\epsilon)$ y su simétrico es $o(\epsilon^{n-1})$.
Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \int_{R(\epsilon)} \frac{P-Q}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q)|^n} dQ \right| &\leq c \int_{R(\epsilon)} \frac{1}{|P-Q|^{n-1}} dQ \\ &\to 0, \text{ si } \epsilon \to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $Kf(x)$:

$$\begin{aligned} Kf(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} K_\epsilon f(x) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \tilde{K}_\epsilon f(x) + \lim_{\epsilon \to 0} \Delta_\epsilon f(x) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \tilde{K}_\epsilon f(x) \qquad (5.22) \\ &= \tilde{K} f(x), \text{ pp } x \in \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

Y de esta última igualdad, resulta obvia la compacidad del operador K en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ cuando la función $\phi \in C^1$. □

Y con este Teorema hemos completado la prueba del Teorema 5.5

6 Análisis del potencial de capa doble asociado a L. Límites no tangenciales. Su relación con la traza.

Ahora consideraremos el comportamiento del potencial de capa doble asociado a L, definido en (5.1)

$$\mathcal{T}f(X) = \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, f(Q)dQ, \ X \in \Omega \qquad (6.1)$$

para $X \in \Omega$, y deseamos estudiar el $\lim_{X\to P\in\partial\Omega} \mathcal{T}f(X)$. Como la noción de convergencia no tangencial será la apropiada aqui, comencemos con las siguientes definiciones:

Definición 6.1
Si $P \in \partial\Omega$, con $\Gamma(P)$ denotaremos a un cono doblemete truncado, con dos componentes convexas, no vacías, con vértice en P y una componente en Ω y la otra en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. A la componente interior a Ω la notaremos $\Gamma(P)$, y a la componente exterior a $\overline{\Omega}$ por $\Gamma^e(P)$.

Sea $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con las propiedades dadas en la Definición 5.1, y si llamamos $X = (x,t)$ a los puntos en Ω con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, y $t \in \mathbb{R}$, y $P = (x_0, \phi(x_0))$ a un punto en $\partial\Omega$, podemos suponer que Ω está globalmente definido por $t > \phi(x)$ y que ϕ es globalmente Lipschitz, es decir que $\|\nabla\phi\|_\infty \leq M < \infty$. entonces, fijamos $a > M$, y a cada punto $P \in \partial\Omega$ le asignamos un cono no tangencial, totalmente incluído en Ω

$$\Gamma_a(P) = \{(x,t) : t > \phi(x), t - \phi(x_0) \geq a|x - x_0|\} \cap B(P,\tau) \qquad (6.2)$$

donde τ es una constante que depende solo de a y Ω. Análogamente podemos definir a los conos exteriores como:

$$\Gamma_a(P) = \{(x,t) : t < \phi(x), t - \phi(x_0) \leq -a|x - x_0|\} \cap B(P,\tau) \qquad (6.3)$$

Observación 6.2
La justificación geométrica de estos conos es el hecho que existe una constante $\delta > 0$ tal que la distancia de $X \in \Gamma(P)$ a $\partial\Omega$ no sea inferior a $\delta|X-P|$. Cuando X se acerca a P, manteniendose en $\Gamma(P)$, X está "relativamente lejos" de otros puntos de la frontera.

Definición 6.3
Dado a, $P \in \partial\Omega$ y una función $u(X) en \Omega$, decimos que el límite no tangencial (de orden a) de $u(X)$ cuando X se acerca a P es L, si $\lim_{X \to P, X \in \Gamma_a(P)} u(X) = L$. Y la función maximal no tangencial $N_a u(P)$ es

$$N_a u(P) = \sup_{X \in \Gamma_a(P)} |u(X)|. \tag{6.4}$$

Teorema 6.4
Sea $\mathcal{T}f(X)$ el potencial de capa doble correspondiente a un dominio Ω Lipschitz, definido en (5.1). Entonces si $f \in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, y $0 < a < 1$, existe un número τ, que depende solo de a, y Ω, tal que para esa elección de τ, la función maximal no tangencial de $\mathcal{T}f(X)$ está en $L^p(\partial\Omega)$, y

$$\|N_a(\mathcal{T}f)\|_p \leq c\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty \tag{6.5}$$

donde c depende solo de p, τ, λ. Mas aún para casi todo $P \in \partial\Omega$

$$\lim_{X \in \Gamma_a(P), X \to P} \mathcal{T}f(X) = (T - \frac{1}{2})f(P) \tag{6.6}$$

$$\lim_{X \in \Gamma_a^c(P), X \to P} \mathcal{T}f(X) = (T + \frac{1}{2})f(P) \tag{6.7}$$

donde T es la traza del potencial de capa doble definido en (5.2).

Demostración.

Veamos primero que la maximal no tangencial del potencial de doble capa es un operador continuo en $L^p(\partial\Omega)$. La idea para probar este resultado es igual que en teoremas anteriores, tratar de separar la parte mas singular, utilizando soluciones fundamentales de operadores elípticos a coeficientes constantes.

Sea ϕ la función Lipschitz que parametriza el borde (localmente), y designemos por $X = (x,t)$, con $t > \phi(x)$ a los puntos interiores de Ω, y por $Q = (y, \phi(y))$ o $P = (x_0, \phi(x_0))$ a los puntos de $\partial\Omega$ (cuando no se preste a confusión usaremos cualquiera de las dos formas de designar a un punto), y sean a y M constantes tal que $a > M > \|\nabla\phi\|_\infty$, y $\Gamma(P) = \Gamma_a(P) = \{(x,t) : t - \phi(x_0) \geq a|x - x_0|\}$

Si consideramos el problema a valores constantes $L^X = -div_Y(A(X)\nabla_Y)$, y la solución fundamental definida en (5.6)

$$K^X(Z,Y) = C_n|detA^{-\frac{1}{2}}(X)||A^{-\frac{1}{2}}(X)(Z-Y)|^{2-n},$$

de la misma manera que en el Teorema 5.5 podemos descomponer el operador $\mathcal{T}$ como sigue:

$$\mathcal{T}f(X) = \mathcal{T}_1 f(X) + \mathcal{T}_2 f(X) + \mathcal{T}_3 f(X) \tag{6.8}$$

donde

$$\mathcal{T}_1 f(X) = \int_{\partial\Omega} k_1(X,Q) f(Q)dQ,$$
$$k_1(X,Q) = \langle [A(Q) - A(X)]\nabla_Q K(X,Q), N_Q \rangle$$

$$\mathcal{T}_2 f(X) = \int_{\partial\Omega} k_2(X,Q) f(Q)dQ,$$
$$k_2(X,t,Q) = \left\langle A(X)[\nabla_Q K(X,Q) - \nabla_Q K^X(X,Q)], N_Q \right\rangle$$

$$\mathcal{T}_3 f(X) = \int_{\partial\Omega} k_3(X,Q) f(Q)dQ,$$
$$k_3(X,Q) = \left\langle A(X)\nabla_Q K^X(X,Q), N_Q \right\rangle.$$

Obviamente tenemos que:

$$\| \sup_{(x,t)\in\Gamma(P)} \mathcal{T}_i f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_i \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}, i = 1,2$$

pues $k_i(P,Q) \in L^1(\partial\Omega \times \partial\Omega), i = 1,2$, ya que $k_i(P,Q) \leq |P-Q|^{2-n}$, y por la Observación 6.2, existe $\delta > 0$ tal que si llamamos $\delta(X) = dist(X, \partial\Omega)$, tenemos que $\forall X \in \Gamma(P)$, $\delta(X) \geq \delta|X-P|$ por lo tanto, $\forall\ Q \in \partial\Omega$,

$$|P-Q| \leq |P-X| + |X-Q| \leq |X-Q| + \frac{\delta(X)}{\delta} \leq (1+\frac{1}{\delta})|X-Q|.$$

Para analizar $\mathcal{T}_3 f(X)$ definamos primero el siguiente núcleo:

$$\begin{aligned} k_\epsilon(\phi, x, y) &= k(x,y), \text{ si } |x-y| > \epsilon \\ &= 0, \text{ si } |x-y| \leq \epsilon \end{aligned} \tag{6.9}$$

y $k(x,y)$ definido como en (5.10). Ahora bien,

$$\begin{aligned} k_3(X,Q) &= \left\langle A(X)\nabla_Q K^X(X,Q), N_Q \right\rangle \\ &= \frac{|detA^{-\frac{1}{2}}(x,t)|}{-\omega_n} \left\langle \frac{A(x,t)A^{-1}(x,t)(x-y,t-\phi(y))}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y))|^n}, (-\nabla\phi(y),1) \right\rangle \\ &= \frac{|detA^{-\frac{1}{2}}(x,t)|}{-\omega_n} \left(\frac{t-\phi(y) - \langle (x-y), \nabla\phi(y)\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y))|^n} \right) \end{aligned}$$

Si tomamos $\epsilon = t - \phi(x_0)$, y si $(x,t) \in \Gamma(P)$, entonces

$$\frac{t-\phi(y)-(x-y)\nabla\phi(y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y))|^n} = k_\epsilon(\phi, x_0, y) + R_\epsilon(x_0,x,y) \tag{6.10}$$

donde, para una cierta constante $C = C(M,a,A,A')$, se tiene que

$$|R_\epsilon(x_0,x,y)| \leq C\epsilon^{1-n}, \text{ si } |x_0-y| \leq \epsilon \tag{6.11}$$

y

$$|R_\epsilon(x_0,x,y)| \leq C\epsilon|x_0-y|^{-n}, \text{ si } |x_0-y| \geq \epsilon \tag{6.12}$$

(Para ver la demostración de (6.10), (6.11), (6.12), ver Lema 10.3 en el Apéndice). Por otro lado,

$$\epsilon \int_{|x_0-y|\geq\epsilon} |x_0-y|^{-n}|f(y)|dy \leq C_n Mf(x_0)$$

donde $Mf(x_0)$ es la función maximal de Hardy-Littlewood de f (ver Apéndice , Lema 10.4). Entonces, tenemos que :

$$F^*(P) \leq C_{\lambda,n}(T^*f(P) + Mf(P)) \tag{6.13}$$

donde $F^*(P) = sup_{(x,t)\in\Gamma(P)}|\mathcal{T}_{3,\epsilon}f(x)|$, y $T^*f(P) = sup_{\epsilon>0}|\int k_\epsilon(\phi, x, y)f(y)dy|$, entonces por Teorema 5.6, por las propiedades de la función maximal , y el análisis de $\mathcal{T}_1$, y $\mathcal{T}_2$ tenemos que:

$$\|N_a(\mathcal{T}f)\|_p \leq C_{n,\lambda}\|f\|_p, \quad \forall 1 < p < \infty$$

y con esto queda probado (6.5).

Para ver los límites no tangenciales, tomemos $f \in Lip(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{T}f(X) &= \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle [f(Q) - f(P)]dQ \\ &+ f(P)\int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle\, dQ \\ &= A + B,\end{aligned}$$

Como $|f(Q) - f(P)| \leq C|Q - P|$, el integrando de A tiene una singularidad integrable y el límite existe (convergencia mayorada de Lebesgue), y es igual a $Tf(P) + 1/2f(P)$. La integral en B es constante para todo punto de Ω, más aún $B = -f(P)$ (para la demostración de estos dos límites, ver Apéndice, Lemas 10.1, 10.2).

Por lo tanto tenemos que

$$\lim_{X\in\Gamma(P), X\to P} \mathcal{T}f(X) = (T - \frac{1}{2})f(P)$$

y si tomamos límite por conos exteriores tenemos que:

$$\lim_{X\in\Gamma^e(P), X\to P} \mathcal{T}f(X) = (T + \frac{1}{2})f(P)$$

De la continuidad de la maximal no tangencial podemos extender el resultado a toda $f \in L^p$, y con esto queda demostrado el teorema. $\square$

7 El Potencial de capa simple. Su gradiente.

Si $K(X,Y)$ es una solución fundamental del operador $L = -div(A(Y)\nabla_Y)$, definida en una región Ω, como definimos en (5.4), el potencial de capa simple está dado por

$$\mathcal{S}f(X) = \int_{\partial\Omega} K(X,Q)f(Q)dQ, \quad X \in \Omega. \tag{7.1}$$

Obviamente , como $K(X,Q) \leq |X - Q|^{2-n}$, este operador y su traza son continuos en $L^p(\partial\Omega)$, lo que nos interesa estudiar en esta sección, son los límites no tangenciales de su gradiente cuando X se aproxima al borde.

Para poder hacer este análisis, necesitaremos previamente algunas definiciones y resultados.

Para $P, Q \in \partial\Omega$, sea

$$T^t_\epsilon f(P) = \int_{\partial\Omega, |P-Q|>\epsilon} \langle A(P)\nabla_P K(Q,P), N_P\rangle \, f(Q)dQ, \tag{7.2}$$

y, cuando tenga sentido,

$$T^t f(P) = vp \int_{\partial\Omega} \langle A(P)\nabla_P K(Q,P), N_P\rangle \, f(Q)dQ = \lim_{\epsilon\to 0} T^t_\epsilon f(P). \tag{7.3}$$

Este operador es, por lo menos formalmente, el adjunto de la traza del potencial de capa doble definido en (5.3). Y tenemos para T^t un teorema análogo al Teorema 5.5, con casi idéntica demostración.

Teorema 7.1

En las mismas condiciones del Teorema 5.5 sea $T^t_\epsilon f(P)$ el potencial truncado correspondiente a un dominio Lipschitz definido por (7.2). Entonces la aplicación $(T^t)^* f(P) = \sup_{\epsilon>0} |T^t_\epsilon f(P)|$ es acotada en $L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, existe $T^t f(P) = \lim_{\epsilon\to 0} T^t_\epsilon f(P)$, para casi todo $P \in \partial\Omega$, y T es un operador de Calderón Zygmund.

Además, si $\partial\Omega \in C^1$, $T^t f(P)$ es compacto en $L^p(\partial\Omega)$.

Demostración.

Lo único que debemos probar es la existencia del $\lim_{\epsilon\to 0} T^t_\epsilon f(P)$, pues los demas resultados son una consecuencia directa del Teorema 5.5, y para ello utilizaremos las mismas herramientas que se usaron en dicho teorema, es decir, compararemos la solución fundamental con la solución fundamental definida en (5.6) del operador a valores constantes $L^Y u(X) = -div(A(Y)\nabla u(X))$. Sea $k^t(P,Q) = A(P)\nabla_P K(Q,P)N_P$ el núcleo del operador (7.2), entonces

$$\begin{aligned} k^t(P,Q) &= \langle (A(P)-A(Q))\nabla_P K(Q,P), N_P\rangle \\ &+ \Big\langle A(Q)(\nabla_P K(Q,P) - \nabla_P K^Q(Q,P)), N_P\Big\rangle \qquad (7.4) \\ &+ \Big\langle A(Q)\nabla_P K^Q(Q,P), N_P\Big\rangle \end{aligned}$$

donde

$$K^Q(Q,P) = -\frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{|detA^{-\frac{1}{2}}(Q)}{|A^{-1/2}(Q)(Q-P)|^n}.$$

Solo debemos analizar el último sumando en (7.4), pues los otros dos términos son integrables, por lo tanto existe el valor principal de los operadores definidos con estos núcleos y son continuos en L^p. Observemos que :

$$\begin{aligned} &\Big\langle A(Q)\nabla_P K^Q(Q,P), N_P\Big\rangle = -\omega_n^{-1}|detA^{-1/2}(Q)|\frac{\langle (Q-P), N_P\rangle}{|A^{-1/2}(Q)(Q-P)|^n} \\ &= -\omega_n^{-1}\{(|detA^{-1/2}(Q)| - |detA^{-1/2}(P)|)\frac{\langle (Q-P), N_P\rangle}{|A^{-1/2}(Q)(Q-P)|^n} \\ &+|detA^{-1/2}(P)|(\frac{\langle (Q-P), N_P\rangle}{|A^{-1/2}(Q)(Q-P)|^n} - \frac{\langle (Q-P), N_P\rangle}{|A^{-1/2}(P)(Q-P)|^n}) \\ &+|detA^{-1/2}(P)|\frac{\langle (Q-P), N_P\rangle}{|A^{-1/2}(P)(Q-P)|^n}\} \\ &= k_1(P,Q) + k_2(P,Q) + k_3(P,Q) \end{aligned}$$

Obviamente por ser A una matriz a coeficientes Lipschitz, definida positiva, $|k_i(P,Q)| \leq |P-Q|^{2-n}$, $i = 1,2$ para casi todo punto en $\partial\Omega$ (la acotación para k_1 es directa y la acotación de k_2, se obtiene al aplicar el Teorema del valor medio a la función $f_Z(Q) = |A^{-1/2}(Q)(Z)|^{-n}$ y luego tomar $Z = P - Q$). Y $vp\int k_3(P,Q)f(Q)dQ$ resulta un operador de Calderón-Zygmund, la demostración es idéntica a la realizada en el Teorema 5.7, utilizando los resultados obtenidos en la Sección 3.

□

Observación 7.2
Tanto en los resultados de la sección 4 como en el Teorema anterior, hemos utilizado solamente las propiedades de $K(X,Y)$ como solución fundamental del operador L. Dado que $K(Y,X)$ también lo es (Definición 5.11), podríamos considerar el potencial de capa doble siguiente:

$$\overline{T}f(X) = \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,P), N_Q\rangle f(Q)dQ, \; X \in \Omega \tag{7.5}$$

Por lo tanto, la traza de dicho potencial es

$$\overline{T}f(P) = \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(Q,P), N_Q\rangle f(Q)dQ, \; P \in \partial\Omega \tag{7.6}$$

que está bien definido y es continuo en $L^p(\partial\Omega)$, por los resultados de la sección anterior. Y su adjunto es

$$\overline{T}^t f(P) = \int_{\partial\Omega} A(P)\nabla_P K(Q,X) N_P f(Q)dQ. \tag{7.7}$$

que también es un operador de Calderón-Zygmund, por Teorema 7.1.

Estamos ahora en condiciones de comenzar el análisis del gradeinte del potencial de capa simple, y de demostrar el siguiente resultado:

Teorema 7.3
Sea $Sf(X)$ el potencial de capa simple correspondiente a un dominio Ω Lipschitz, definido en (7.1). Entonces si $f \in L^p(\partial\Omega)$, $1 < p < \infty$, existen constantes a, τ y δ, que dependen de Ω y de la constante de Lipschitz de la parametrización de $\partial\Omega$, elegidas como en la Definición 6.1. Entonces las funciones maximales no tangenciales $N_a(|\nabla Sf|)(P) = \sup_{X\in\Gamma_a(P)} |\nabla Sf(X)|$ y $N_a^e(|\nabla Sf|)(P) = \sup_{X\in\Gamma_a^e(P)} |\nabla Sf(X)|$ están en $L^p(\partial\Omega)$, y además

$$\|N_a(|\nabla Sf|)\|_p, \quad \|N_a^e(|\nabla Sf|)\|_p \le c\|f\|_p, \quad 1 < p < \infty \tag{7.8}$$

donde c depende solo de p, δ, τ, a, y λ. Mas aún, para casi todo $P \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} \lim_{X\in\Gamma_a(P), X\to P} (\partial\eta_{A(P)}) Sf(X) &= \lim_{X\in\Gamma_a(P), X\to P} \langle A(P)\nabla Sf(X), N_P\rangle \\ &= (\overline{T}^t + \frac{1}{2}) f(P) \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{X\in\Gamma_a^e(P), X\to P}(\partial\eta_{A(P)})Sf(X) &= \lim_{X\in\Gamma_a^e(P), X\to P}\langle A(P)\nabla Sf(X), N_P\rangle \\
&= (\overline{T}^t - \frac{1}{2})f(P)
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

donde $\overline{T}^t$ *es el operador definido en (7.7).*

Demostración.

Observemos que

$$\nabla Sf(X) = \int_{\partial\Omega} \nabla_X K(X,Q)f(Q)dQ$$

La prueba de las estimaciones en (7.8), si bien no es idéntica se puede hacer de la misma manera que en el Teorema (6.4). Por lo tanto analizaremos los límites no tangenciales, y para ello es suficiente considerar $f \in Lip(\partial\Omega)$. La demostración de estos límites también es similar a la realizada en el Teorema 6.4, utilizando una familia de soluciones fundamentales de operadores elípticos a coeficientes constantes. Si consideramos el operador $L^{X_0} = div(A(X_0)\nabla)$, y la solución fundamental $K^{X_0}(X,Y)$ definida en (5.6), derivando respecto de X, obtenemos que:

$$\nabla_X K^{X_0}(X,Y) = \frac{1}{\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X_0)|\frac{A^{-1}(X_0)(X-Y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(X_0)(X-Y)|^n}. \tag{7.11}$$

Ahora bien, si definimos el potencial de capa simple asociado a esta solución fundamental y a la función f, en el dominio Ω

$$S^{X_0}f(X) = \int_{\partial\Omega} K^{X_0}(X,Q)f(Q)dQ$$

si notamos $\Gamma(P) = \Gamma_a(P)$, tenemos que:

$$\lim_{X\in\Gamma(P), X\to P}\left\langle A(X_O)\nabla S^{X_0}f(X), N_P\right\rangle = \lim_{X\in\Gamma(P), X\to P}\int_{\partial\Omega} A(X_0)\nabla_X K^{X_0}(X,Q)N_P f(Q)dQ$$

$$= \lim_{X\in\Gamma(P),X\to P} \frac{1}{\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X_0)| \int_{\partial\Omega} \frac{\langle (X-Q), N_P\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(X_0)(X-Q)|^n} f(Q)dQ$$

$$= \frac{1}{\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X_0)|vp \int_{\partial\Omega} \frac{\langle (P-Q), N_P\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(X_0)(P-Q)|^n} f(Q)dQ$$

$$+\frac{1}{2}f(P)$$

Análogamente si analizamos el límite exterior obtenemos que:

$$\lim_{X\in\Gamma^e(P),X\to P} \left\langle A(X_0)\nabla S^{X_0} f(X), N_P\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\omega_n}|detA^{-\frac{1}{2}}(X_0)|vp \int_{\partial\Omega} \frac{\langle (P-Q), N_P\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(X_0)(P-Q)|^n} f(Q)dQ$$

$$-\frac{1}{2}f(P)$$

Claramente estos límites existen para casi todo $P \in \partial\Omega$, y como la matriz A está definida en todo punto de $\overline{\Omega}$, tenemos que:

$$\lim_{X\in\Gamma(P),X\to P} {\omega_n}^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(P)| \int_{\partial\Omega} \frac{\langle (X-Q), N_P\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(X-Q)|^n} f(Q)dQ \tag{7.12}$$

$$= {\omega_n}^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(P)|vp \int_{\partial\Omega} \frac{\langle (P-Q), N_P\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q)|^n} f(Q)dQ$$

$$+\frac{1}{2}f(P)$$

Y lo mismo para el límite por conos exteriores, para casi todo punto $P \in \partial\Omega$.

Luego de esta observación estamos en condiciones de analizar:

$$\begin{aligned} \langle A(P)\nabla Sf(X), N_P\rangle &= \int_{\partial\Omega} \langle A(P)\nabla_X K(X,Q), N_P\rangle f(Q)dQ \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\langle A(P)(\nabla_X K(X,Q) - \nabla_X K^P(X,Q)), N_P\right\rangle f(Q)dQ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_{\partial\Omega} \left\langle A(P)\nabla_X K^P(X,Q), N_P \right\rangle f(Q)dQ \\
&= I_1 + I_2 \qquad (7.13)
\end{aligned}
$$

Por (7.12), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\{X\in\Gamma(P),X\to P\}} I_2 &= \omega_n{}^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(P)|vp\int_{\partial\Omega} \frac{\langle (P-Q), N_P\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(P)(P-Q)|^n} f(Q)dQ \\
&+ \frac{1}{2}f(P). \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

Para analizar I_1, veamos que su núcleo es integrable inclusive cuando $X \to P$

$$
\begin{aligned}
|\nabla_X K(X,Q) - \nabla_X K^P(X,Q)| &\leq |\nabla_X K(X,Q) - \nabla_X K^Q(X,Q)| \\
&+ |\nabla_X K^Q(X,Q) - \frac{|detA^{-\frac{1}{2}}(P)|}{|detA^{-\frac{1}{2}}(Q)|}\nabla_X K^Q(X,Q)| \qquad (7.15) \\
&+ |\nabla_X K^P(X,Q) - \frac{|detA^{-\frac{1}{2}}(P)|}{|detA^{-\frac{1}{2}}(Q)|}\nabla_X K^Q(X,Q)| \\
&\leq C(|X-Q|^{2-n} + |P-Q||X-Q|^{1-n}) \\
&\leq C|P-Q|^{2-n}
\end{aligned}
$$

donde C es una constante (no siempre la misma) que depende de λ, n y $\Gamma_a(P)$. Y la última acotación es válida $\forall Q \in \partial\Omega$, ya que como vimos en (6), $\forall X \in \Gamma_a(P), |P-Q| \leq C(\delta)|X-Q|$.

Por lo tanto, por convergencia mayorada de Lebesgue,

$$
\lim_{X\to P} I_1 = \int_{\partial\Omega} \left\langle A(P)(\nabla_X K(P,Q) - \nabla_X K^P(P,Q)), N_P \right\rangle f(Q)dQ \qquad (7.16)
$$

Entonces de (7.16), y (7.14), tenemos que:

$$\lim_{X \in \Gamma_a(P), X \to P} \langle A(P) \nabla S f(X), N_P \rangle = (\overline{T}^t + \frac{1}{2}) f(P) \tag{7.17}$$

y análogamente

$$\lim_{\{X \in \Gamma_a^c(P), X \to P\}} \langle A(P) \nabla S f(X), N_P \rangle = (\overline{T}^t - \frac{1}{2}) f(P) \tag{7.18}$$

Y con esto queda demostrado el Teorema. $\square$

8 Inversos de los límites no tangenciales para algunas soluciones fundamentales

Como vimos en la Sección 2, dado el operador elíptico $L = -div_Y(A(Y)\nabla_Y)$ en un dominio acotado Ω, para que el proyector de Calderón sea efectivamente una herramienta para resolver problemas de borde, tales como Dirichlet o Newmann, necesitamos tener inversibilidad de los operadores $(T - \frac{1}{2}I)$, y $(T + \frac{1}{2}I)$, donde T es la traza del potencial de capa doble definida en (5.3). Describamos cuales seran las condiciones bajo las cuales podremos obtener la inversibilidad de dichos operadores:
Sea $L = -div_Y(A(Y)\nabla_Y)$ en un dominio Ω', donde $A(X)$ es una matriz $n \times n$ con coeficientes Lipschitz, uniformemente elíptica, es decir, existe $\lambda > 0$ tal que: $\lambda|\xi|^2 \leq \langle A(Y)\xi, \xi\rangle \leq \lambda^{-1}|\xi|^2$ para todo $Y, \xi \in \Omega'$. Y sea Ω un dominio acotado, Lipschitz, tal que $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ Y consideremos $G'(X,Y)$ la función de Green del operador L asociada al dominio Ω', es decir, la solución fundamental simétrica y positiva, que se anula en $\partial\Omega'$, y que tiene las propiedades mencionadas en el Teorema 3.4.
Si llamamos respectivamente $\mathcal{G}, G$ y G^t , al potencial de capa doble, su traza, y el adjunto, definidos en (6.1), (5.3) y (7.3), asociados al dominio Ω, y a la solución fundamental $G'(X,Y)$, tenemos que:

Teorema 8.1
Supongamos que Ω es un dominio C^1, acotado y $R^n \setminus \overline{\Omega}$ es conexo, y sea $Gf(P)$ la traza del potencial de capa doble definido por(5.3), para la solución fundamental $G'(X,Y)$ en Ω. Entonces el operador $G - \frac{1}{2}I$ es invertible sobre $L^p(\partial\Omega)$, para cada $1 < p < \infty$.

Demostración.

En realidad lo que probaremos es que el adjunto de $G - \frac{1}{2}I$, es decir $G^t - \frac{1}{2}I$, donde G^t está definido por (7.3), es inversible. Como por el Teorema 7.1, G^t es compacto en $L^p(\partial\Omega)$, es suficiente probar que $G^t - \frac{1}{2}I$ es inyectivo (por teoría de Fredholm).
Primero observemos que si $f \in L^p(\partial\Omega)$, y $(G^t - \frac{1}{2}I)f = 0$, entonces $f \in L^q(\partial\Omega)$ $\forall\ q : 1 < q < \infty$. (en [7] podemos ver la demostración de este resultado en el caso en que $L = \Delta$, y para el operador $L = -div_Y(A(Y)\nabla_Y)$ la prueba no tiene ninguna diferencia).
Consideremos ahora el potencial de capa simple de f sobre $\partial\Omega$ (asociado a la

función de Green antes definida)

$$Sf(X) = \int_{\partial\Omega} G'(X,Y)f(Y)dY \tag{8.1}$$

y consideremos la integral $I = \int_{\Omega'\setminus\Omega} |\nabla Sf(X)|^2 dX$, entonces, como la matriz $A(X)$ es uniformemente elíptica, y por teorema de Green, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda I &\leq \int_{\Omega'\setminus\Omega} A(X)\nabla Sf(X)\nabla Sf(X)dX \\
&= -\int_{\Omega'\setminus\Omega} div(A(X)\nabla Sf(X))Sf(X)dX \\
&+ \int_{\partial(\Omega'\setminus\partial\Omega)} \langle A(Q)\nabla Sf(Q), N_Q\rangle\, Sf(Q)dQ \\
&= -\int_{\partial\Omega} \partial^e\eta_A Sf(Q)Sf(Q)dQ \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

pues $Sf(X)$ es solución en Ω', y $Sf(P) \equiv 0$ en $\partial\Omega'$, por ser $G'(X,Y)$ la función de Green en Ω'. Y $(\partial^e\eta_A)$ indica la derivada en el sentido de la normal exterior, es decir el límite no tangencial por conos exteriores a Ω de la derivada respecto a $A(P)N_P$.
La aplicación del teorema de Green está justificada, ya que por Teorema 7.3, tenemos que $(\partial^e\eta_A)Sf(Q) \in L^p(\partial\Omega)$, y como $f \in L^q(\partial\Omega)$ $\forall\ 1 < q < \infty$, por teorema de Young $Sf \in L^q(\partial\Omega)$ para esos q, en particular para $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, por lo tanto la última integral en (8.2) es absolutamente convergente.
También por Teorema 7.3, sabemos que:

$$(\partial^e\eta_A)Sf(Q) = -\lim_{X\in\Gamma^e(Q), X\to Q} \langle A(Q)\nabla Sf(X), N_Q\rangle = -(G^t - \frac{1}{2}I)f(Q) = 0$$

para casi todo $Q \in \partial\Omega$, y por lo tanto $I = 0$. Entonces $Sf(X)$ es constante en $\Omega' \setminus \Omega$, y como $Sf = 0$ en $\partial\Omega'$, $Sf(X) \equiv 0$ en $\Omega' \setminus \Omega$.

Ahora bien, como $Sf(X)$ es una solución continua del operador L en Ω', y $Sf = 0$ en $\partial\Omega'$, por principio del máximo tenemos que $Sf \equiv 0$ en Ω'. Entonces, para casi todo $Q \in \partial\Omega$, $\partial\eta_A Sf(Q) = (G^t + \frac{1}{2}I)f(Q) = 0$, y podemos concluir que para esos Q, $f(Q) = (\frac{1}{2}I + G^t)f(Q) - (G^t - \frac{1}{2}I)f(Q) = 0$. Y con esto queda obviamente probada la inyectividad del operador $G^t - \frac{1}{2}I$, y por lo tanto el teorema. □

Teorema 8.2
Supongamos que Ω es un dominio conexo, acotado, y C^1, y sea G^t el operador definido en el Teorema 8.1. Entonces para cada $1 < p < \infty$, $G^t + \frac{1}{2}I$ es inversible en $L_0^p(\partial\Omega)$, donde

$$L_0^p(\partial\Omega) = \{f \in L^p(\partial\Omega) \text{ tal que } \int_{\partial\Omega} f(Q)dQ = 0\}$$

.

Demostración.

Primero observemos que dada cualquier solución fundamental, por Teorema 7.3, $\frac{1}{2}I + K^t$ es continuo de $L^p(\partial\Omega)$ en $L^p(\partial\Omega)$, más aún, como el potencial de capa simple es una solución para $Lu = 0$ en Ω, tenemos que $\int_{\partial\Omega} \partial\eta_{A(P)} Sf(P)dP = \int_{\partial\Omega}(\frac{1}{2}I + K^t)f(P)dP0$, ya que por ser $Sf(X)$ solución, y por las propiedades de Ω y K^t, podemos aplicar el teorema de divergencia de Gauss.

Veamos ahora que si tomamos la solución fundamental $G'(X,Y)$, también obtenemos inversibilidad sobre $L_0^p(\partial\Omega)$. Como en el Teorema anterior, por ser G^t compacto, es suficiente probar que $G^t + \frac{1}{2}I$ es inyectivo, y si elegimos $f \in L^p(\partial\Omega)$ tal que $f = -2G^t f$, y $\int_{\partial\Omega} f(Q)dQ = 0$, tenemos que $f \in L^q(\partial\Omega)$, $\forall\ 1 < q < \infty$.
Sea ahora $Sf(X)$ definido como en (8.1),integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla Sf(X)|^2 dX &\leq \lambda^{-1} \int_\Omega A(X)\nabla Sf(X)\nabla Sf(X)dX \\
&= \lambda^{-1} \int_\Omega LSf(X)Sf(X)dX + \lambda^{-1} \int_{\partial\Omega} \partial\eta_A Sf(Q)Sf(Q)dQ \\
&= \lambda^{-1} \int_{\partial\Omega} (G^t + \frac{1}{2}I)f(Q)Sf(Q)dQ = 0
\end{aligned}$$

por ser $Sf(X)$ solución en Ω,y por Teorema 7.3.
Por lo tanto $Sf(X)$ es constante en $\overline{\Omega}$. En $\Omega' \setminus \Omega$, $Sf(X)$ es L-armónica (es decir solución de $Lu = 0$), y $Sf(Q) \equiv 0$ si $Q \in \partial\Omega'$, y por las hipótesis sobre

f tenemos que $\int_{\partial\Omega}(-\frac{1}{2}I + G^t)f(Q)dQ = -\int_{\partial\Omega} f(Q)dQ = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'\setminus\Omega} |\nabla Sf(X)|^2 dX &\leq \lambda^{-1}\int_{\Omega'\setminus\Omega} A(X)\nabla Sf(X)\nabla Sf(X)dX \\
&= \lambda^{-1}\int_{\Omega'\setminus\Omega} LSf(X)Sf(X)dX \\
&+ \lambda^{-1}\int_{\partial(\Omega'\setminus\partial\Omega)} \partial\eta_A Sf(Q)Sf(Q)dQ \\
&= \lambda^{-1}cte\int_{\partial\Omega}(G^t - \frac{1}{2}I)f(Q)Sf(Q)dQ = 0
\end{aligned}$$

Entonces, por los argumentos explicados en el teorema anterior podemos concluir que $Sf = 0$ en Ω', y que entonces $f = 0$. Por lo tanto el operador $G^t + \frac{1}{2}I$ resulta inyectivo sobre $L^p_0(\partial\Omega)$. □

8.1 Problemas de Dirichlet y Neumann

Una vez obtenidos estos resultados la prueba de existencia y unicidad de los problemas de Dirichlet y Neumann con datos en $L^p(\partial\Omega)$, para el operador $L = -div_Y(A(Y)\nabla_Y)$ (donde $A(Y)$ y Ω tienen las hipótesis mencionadas al comienzo de esta sección), sigue la misma línea de la demostración hecha por Fabes, Jodeit y Riviere en [7], para el Laplaciano. Por lo tanto solo mencionaremos los resultados y diremos como son las soluciones para cada problema, en nuestro caso.

Teorema 8.3
Supongamos que Ω es un dominio acotado, conexo y C^1, y $R^n \setminus \overline{\Omega}$ es conexo. Dada $f \in L^p(\partial\Omega))$, $1 < p < \infty$, existe una única función $u(X)$ definida en Ω tal que:
i) $Lu = 0$,
ii) la función maximal no tangencial (definida en 6.4) de u pertenece a $L^p(\partial\Omega)$, y $\|N_a(u)\|_p \leq c\|f\|_p$ con c independiente de f, más aún, para casi todo $P \in \partial\Omega$

$$\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} u(X) = f(P)$$

Demostración.

Dada $f \in L^p(\partial\Omega)$, sea u(X) el potencial de capa doble

$$\begin{aligned} u(X) &= \mathcal{G}((G-\frac{1}{2}I)^{-1}f)(X) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q G'(X,Q), N_Q\rangle (G-\frac{1}{2}I)^{-1}f(Q)dQ \end{aligned}$$

está bien definido ya que por el Teorema 8.1, el operador $G-\frac{1}{2}I$ tiene inversa continua en $L^p(\partial\Omega), 1<p<\infty$. Además por Teorema 6.4,

$$\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} u(X) = f(P) \text{ c.t.p en } \partial\Omega,$$

y $\|N_a(u)\|_p \le c\|G-\frac{1}{2}If\|_p \le c\|f\|_p$ con c, obviamente independiente de f. □

Teorema 8.4
Supongamos que Ω es un dominio acotado, conexo y C^1, y $R^n \setminus \overline{\Omega}$ es conexo. dada $g \in L^p(\partial\Omega))$, $1<p<\infty$, con $\int_{\partial\Omega} g(Q)dQ = 0$, existe $u(X)$ definida en Ω tal que:

i) $Lu = 0$,
ii) la función maximal no tangencial (definida en 6.4) de ∇u pertenece a $L^p(\partial\Omega)$, y $\|N_a(|\nabla u|)\|_p \le c\|g\|_p$ con c independiente de g, más aún,

$$\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \langle A(P)\nabla u(X), N_P\rangle = g(P)$$

iii) u esta unívocamente determinada salvo constantes.

Demostración.
Por Teorema 8.2, el operador $G^t+\frac{1}{2}I$ tiene inverso continuo en el subespacio de las funciones de $L^p(\partial\Omega)$ que tienen integral nula. Entonces tiene sentido definir el potencial de capa simple de $(G^t+\frac{1}{2}I)^{-1}g(Q)$, es decir

$$u(X) = \int_{\partial\Omega} G'(X,Q)(G^t+\frac{1}{2}I)^{-1}g(Q)dQ.$$

Por Teorema 7.3 $\|N_a(|\nabla u|)\|_p \le c\|(G^t+\frac{1}{2}I)^{-1}g\|_p \le c\|g\|_p$, y además,

$\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \langle A(P)\nabla u(X), N_P\rangle = g(P)$, para casi todo $P \in \partial\Omega$.

Para ver la unicidad, como $G'(X,Y)$ es una solución fundamental de L en $\Omega' \supset\supset \Omega$, si llamamos $\partial\eta_{A(Q)}G'(X,Q) = \langle A(Q)\nabla_Q G(X,Q), N_Q\rangle$, consideremos la siguiente solución fundamental:

$$K(X,Y) = G'(X,Y) - \mathcal{S}F_X(Y) \tag{8.3}$$

donde

$$F_X(Y) = (G^t + \frac{1}{2}I)^{-1}(\partial\eta_{A(Q)}G(X,Q) - |\partial\Omega|^{-1}\int_{\partial\Omega}\partial\eta_{A(Q)}G(X,Q)dQ),$$

y como antes $\mathcal{S}F_X(Y)$ su potencial de capa simple, entonces, obviamente $K(X,Y)$ es una solución fundamental, y además la derivada normal de $K(X,Y)$ es constante, pues si $X \in \Omega$ está fijo, tenemos que:

$$\begin{aligned} \partial\eta_{A(P)}K(X,P) &= \partial\eta_{A(P)}G'(X,P) \\ &-(G^t + \frac{1}{2}I)(G^t + \frac{1}{2}I)^{-1}(\partial\eta_{A(P)}G'(X,P) - |\partial\Omega|^{-1}\int_{\partial\Omega}\partial\eta_{A(Q)}G'(X,Q)dQ) \\ &= |\partial\Omega|^{-1}\int_{\partial\Omega}\partial\eta_{A(Q)}G'(X,Q)dQ = c_n \end{aligned} \tag{8.4}$$

Entonces dada $u\ :\ Lu = 0$ en Ω, y $N_a(|\nabla u|) \in L^p(\partial\Omega)$, integrando por partes tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(Y)\nabla_Y K(X,Y)\nabla_Y u(Y)dY &= \int_\Omega L_Y u(Y)K(X,Y)dY \\ &+ \int_{\partial\Omega}\partial\eta_{A(Q)}u(Q)K(X,Q)dQ \end{aligned} \tag{8.5}$$

y que

$$\int_\Omega A(Y)\nabla_Y K(X,Y)\nabla_Y u(Y)dY = u(X) + \int_{\partial\Omega}\partial\eta_{A(Q)}K(X,Q)u(Q)dQ \tag{8.6}$$

Donde todas las integrales existen por las propiedades de u y de $K(X,Y)$.

Como vimos que $\partial\eta_{A(Q)}K(X,Q)$ es constante en $\partial\Omega$, si tomamos una función u con las propiedades antes mencionadas, y que además

$\lim_{X \to P, X \in \Gamma(P)} \partial\eta A(P)u(X) = 0$, de (8.5), y (8.6), obtenemos que:

$$0 = C \int_{\partial\Omega} u(Q)dQ + u(X),$$

por lo tanto u es constante en Ω. $\square$

Veamos ahora algunos teoremas de regularidad, que nos permitirán completar el análisis del proyector de Calderón.

8.2 Teoremas de Regularidad

Definición 8.5
Diremos que $f \in L_1^p(\partial\Omega), 1 < p < \infty$ si $f \in L^p(\partial\Omega)$, y si $f(x, \phi(x))$ tiene gradiente distribucional en $L^p(R^{n-1})$ (donde obviamente $\phi(x)$ tiene las propiedades de la Definición 5.1). Es fácil verificar que si F es cualquier extensión a R^n de f, entonces $\nabla_x F(x, \phi(x))$ está bien definido y pertenece a $L_1^p(\partial\Omega)$. A este gradiente lo llamamos $\nabla_t f$. Por lo tanto $L_1^p(\partial\Omega)$ puede ser normado por

$$\|f\|_{L_1^p(\partial\Omega)} = \|f\|_p + \|\nabla_t f\|_p$$

Observación 8.6
-$\nabla_t f$ es independiente del sistema coordenado usado en la definición anterior.
-Si f es diferenciable en R^n, y $P \in \partial\Omega$, entonces

$$\nabla f(P) = \nabla_t f(P) + \langle N_P, \nabla f(P)\rangle N_P$$

Teorema 8.7
Si $Sf(P)$ es la traza del potencial de capa simple sobre un dominio Ω Lipschitz, entonces $S : L^p(\partial\Omega) \to L_1^p(\partial\Omega)$ es continuo. Además si Ω es C^1, y consideramos el potencial de capa simple definido mediante la función $G'(X, Y)$ (definida en (8.1)), este tiene inversa continua (sobre los espacios antes mencionados).

Demostración.

La continuidad del operador es consecuencia de la Observación 8.6, y por Teorema 7.3 (de la demostración de ese teorema, también se desprende la existencia del límite no tangencial del gradiente de $\mathcal{S}$, utilizando el Teorema 4.4).

Consideremos ahora $\mathcal{S}f(X) = \int_{\partial\Omega} G'(X,Q)f(Q)dQ$, entonces, si $\mathcal{S}f(P) = 0$, para casi todo $P \in \partial\Omega$, como también $\mathcal{S}f(P) = 0$ en Ω', con los mismos argumentos que usamos en el Teorema 8.2, podemos concluir que $f = 0$ c.t.p. en $\partial\Omega$.

Como $\frac{1}{2} + G^t : L^p(\partial\Omega) \to L^p_0(\partial\Omega)$, y es invertible sobre el último, existe una única función f_0, en el núcleo de dicho operador tal que $\int_{\partial\Omega} f_0(Q)dQ = 1$, y entonces tenemos que Sf_0 es constante en Ω, y esa constante no es nula, pues S es un operador inyectivo (esta afirmación, se deduce trivialmente de la prueba del Teorema 8.2).

Ahora tomemos una función $f \in L^p_1(\partial\Omega)$, y consideremos la extensión armónica en Ω de esta función. Como Ω es C^1, si llamamos $u(X)$ a dicha extensión, tenemos que

$$\|N_a(\nabla u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|f\|_{L^p_1(\partial\Omega)},$$

y como existe para casi todo punto de $\partial\Omega$ el $\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \nabla u(X)$, (para más detalles ver [7]) podemos afirmar que

$$\|\partial\eta_{A(P)}u(P)\|_{L^p(\partial\Omega)} = \| \lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \langle A(P)\nabla u(X), N_P\rangle \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\|f\|_{L^p_1(\partial\Omega)}$$

.

Ahora bien, como por Teorema 7.3

$$\partial\eta_A S(\frac{1}{2}I + G^t)^{-1}\partial\eta_A u(P) = \partial\eta_A u(P),$$

por unicidad del problema de Neumann, $S(\frac{1}{2}I + G^t)^{-1}\partial\eta_A u(X)$ difiere de $u(X)$ en una constante, y como las constantes están en el rango de S, tenemos que $f(P) = S((\frac{1}{2}I + G^t)^{-1}\partial\eta_A u + f_c)(P)$, c.t. p. en $\partial\Omega$. Y con esto queda probado el teorema. □

Teorema 8.8
Si $\partial\Omega$ es C^1, entonces:

$$\frac{1}{2}I - G : L^p_1(\partial\Omega) \to L^p_1(\partial\Omega)$$

es un operador inversible.

Demostración.

Sea $g \in L_1^p(\partial\Omega)$, y sea $v(X) = S(\frac{1}{2}I - G^t)^{-1}S^{-1}g(X)$. Y llamemos $f(P) \in L_1^p(\partial\Omega)$ a los valores de borde no tangenciales de v. También tenemos que

$$\lim_{X\to P, X\in\Gamma^e(P)} \langle A(P)\nabla v(X), N_P\rangle = S^{-1}g(P),$$

Por ser v el potencial de capa simple de una funcion de $L^p(\partial\Omega)$, por Teorema 7.3 la maximal no tangencial de ∇v esta en $L^p(\partial\Omega)$, , además por la definición del operador S, sabemos que v es solución de $Lv = 0$ en $\Omega' \setminus \Omega$, y $v = 0$ en $\partial\Omega'$, podemos extender a está función como 0 fuera de Ω', y obtenemos que:

$$v(X) = \int_{\Omega'} A(Y)\nabla_Y G'(X,Y)\nabla_Y v(Y)dY$$

por lo tanto , si $X \in \Omega' \setminus \Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
v(X) &= \int_{\Omega'\setminus\Omega} A(Y)\nabla_Y G'(X,Y)\nabla_Y v(Y)dY \\
&+ \int_{\Omega} A(Y)\nabla_Y G'(X,Y)\nabla_Y v(Y)dY \\
&= \int_{\partial(\Omega'\setminus\Omega)} \partial\eta_A v(Q)G'(X,Q)dQ \\
&+ \int_{\Omega'\setminus\Omega} G'(X,Y)Lv(Y)dY \\
&+ \int_{\Omega} A(Y)L_Y G'(X,Y)v(Y)dY \\
&+ \int_{\partial\Omega} \partial\eta_A G'(X,Q)v(Q)dQ \\
&= -\int_{\partial\Omega} S^{-1}g(Q)G'(X,Q)dQ + \int_{\partial\Omega} \partial\eta_A G'(X,Q)f(Q)dQ.
\end{aligned}$$

Tomando límite para $X \to P$ por conos exteriores a Ω, nos queda que:

$$f(P) = (\frac{1}{2}I + G)f(P) - g(P)$$

Por lo tanto $(G - \frac{1}{2}I)f(P) = g(P)$, entonces este operador es suryectivo sobre $L_1^p(\partial\Omega)$. Además como cualquier $f \in L_1^p(\partial\Omega)$ puede ser escrita como

$S(G^t - \frac{1}{2}I)^{-1}S^{-1}g$, para alguna $g \in L^p_1(\partial\Omega)$, siguiendo la demostración anterior, podemos ver que $(G - \frac{1}{2}I)f(P) = g(P)$, por lo tanto este operador va de $L^p_1(\partial\Omega)$ en $L^p_1(\partial\Omega)$. También sabemos, por Teorema 8.2 que este operador es inyectivo.

En el curso de esta demostración, hemos obtenido la siguiente fórmula:

$$S(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1} = G - \frac{1}{2}I, \tag{8.7}$$

y con esto queda probado la continuidad e inversibilidad del operador de $L^p_1(\partial\Omega)$ en $L^p_1(\partial\Omega)$. □

Corolario 8.9
Sea $\mathcal{G}$ es el potencial de capa doble, definido con la función de Green G'. Dada $f \in L^p_1(\partial\Omega)$, para casi todo $P \in \partial\Omega$, existe $(\partial\eta_{A(P)}\mathcal{G})f(P)$, es continua de $L^p_1(\partial\Omega)$ en $L^p(\partial\Omega)$, y tenemos que:

$$\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \langle A(P)\nabla\mathcal{G}f(X), N_P\rangle = (G^t + \frac{1}{2}I)(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1}f(P)$$

Demostración.

Sea $u(X) = \mathcal{G}f(X)$, entonces $\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} u(X) = (G - \frac{1}{2}I)f(P) = S(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1}f(P)$, por unicidad del problema de Green, tenemos que:

$$\mathcal{G}f(X) = \mathcal{S}(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1}f(X),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \langle A(P)\nabla\mathcal{G}f(X), N_P\rangle &= \lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \left\langle A(P)\nabla\mathcal{S}(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1}f(X), N_P\right\rangle \\ &= (G^t + \frac{1}{2}I)(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1}f(P).\end{aligned}$$

Y obviamente de esta igualdad se desprende la existencia y la continuidad.
□

9 El proyector de Calderón

Como vimos en la Introducción, las propiedades del proyector de Calderón, son una consecuencia directa del análisis de los potenciales de capa simple y doble, por lo tanto estamos ahora en condiciones de describir dicho proyector en el caso en que el operador elíptico sea $L = -div(A(Y)\nabla_Y)$, definido en un dominio Ω, y la matriz A tenga coeficientes Lipschitz.

Supongamos que podemos extender el operador L a un dominio $\tilde{\Omega}$, y tomemos como solución fundamental a $G'(X,Y)$, la función de Green en Ω', donde $\Omega \subset\subset \Omega' \subset \tilde{\Omega}$.
Recordemos que construimos al proyector P de la siguiente manera:
$P = (P_{i,j})_{i,j=1,2}$, donde, dada f definida sobre $\partial\Omega$ (en algún espacio conveniente que luego precisaremos),

$$\begin{aligned} P_{1,1}f(P) &= -\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \mathcal{G}f(X) \\ P_{1,2}f(P) &= \lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \mathcal{S}f(X) \\ P_{2,1}f(P) &= -\lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \partial\eta_{A(P)}\mathcal{G}f(X) \\ P_{2,2}f(P) &= \lim_{X\to P, X\in\Gamma(P)} \partial\eta_{A(P)}\mathcal{S}f(X) \end{aligned} \tag{9.1}$$

para casi todo $P \in \partial\Omega$, donde $\mathcal{S}$ y $\mathcal{G}$, son los potenciales de capa simple y doble, respectivamente, definidos mediante la función de Green $G'(X,Y)$.

Si bien a lo largo de este trabajo, hemos obtenido algunos resultados cuando $\partial\Omega$ es Lipschitz, como en esta sección nos interesa poder dar las propiedades de todo el proyector, consideraremos que $\partial\Omega$ es C^1.

Teorema 9.1
Si $\partial\Omega$ es C^1, y llamamos S y G a la traza de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{G}$, entonces, el operador P antes definido tiene las siguientes propiedades:

1. $P : L^p_1(\partial\Omega) \times L^p(\partial\Omega) \to L^p_1(\partial\Omega) \times L^p(\partial\Omega)$,

2. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - G & S \\ (G^t + \frac{1}{2}I)(\frac{1}{2} - G^t)S^{-1} & G^t + \frac{1}{2}I \end{pmatrix}$

3. $ImP = \mathcal{U} = \{(u|_{\partial\Omega}, \partial\eta_A u|_{\partial\Omega}) : Lu = 0$ en Ω, $u|_{\partial\Omega} \in L_1^p(\partial\Omega)$, $\partial\eta_A u|_{\partial\Omega} \in L_0^p(\partial\Omega)\}$

4. $P^2 = P$

Demostración.
La demostración es simplemente considerar todos los resultados probados en las secciones anteriores, es decir,

$P_{1,1}f(P) = (\frac{1}{2}I - G)f(P)$ es un operador de Calderón-Zygmund, por Teorema 5.5, y es continuo (e inversible) de $L_1^p(\partial\Omega)$ en si mismo por Teorema 8.8.

$P_{1,2}f(P) = Sf(P)$ es un operador con núcleo integrable, y por Teorema 8.7 es continuo (e inversible) de $L^p(\partial\Omega)$ en $L_1^p(\partial\Omega)$.

$P_{2,1}f(P) = (G^t + \frac{1}{2}I)(\frac{1}{2} - G^t)S^{-1}f(P)$, es un operador singular, y por el Corolario 8.9, es continuo de $L_1^p(\partial\Omega)$ en $L^p(\partial\Omega)$.

$P_{2,2}f(P) = (G^t + \frac{1}{2}I)f(P)$ es un operador de Calderón-Zygmund por Teorema 7.3(y es inversible sobre $L_0^p(\partial\Omega) = \{f \in L^p(\partial\Omega) : \int_{\partial\Omega} f((Q)dQ = 0\}$ por Teorema 8.2).
Obviamente, todas estas igualdades son para casi todo $P \in \partial\Omega$.
Y con esto quedan probados los puntos 1 y 2 del Teorema.

Observación: La imágen de $P_{2,1}$ y $P_{2,2}$ esta contenida en $L_0^p(\partial\Omega)$.

Tomemos ahora $(f, g) \in L_1^p(\partial\Omega) \times L^p(\partial\Omega)$, entonces

$$P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}I - G)f(P) + Sg(P) \\ (G^t + \frac{1}{2}I)(\frac{1}{2} - G^t)S^{-1}f(P) + (G^t + \frac{1}{2}I)g(P) \end{pmatrix}$$

Si definimos ahora $v(X) = -\mathcal{G}f(X) + \mathcal{S}g(X)$, obviamente $Lv = 0$, y tiene los datos de borde dados por $P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, por lo tanto $ImP \subset \mathcal{U} = \{(u|_{\partial\Omega}, \partial\eta_A u|_{\partial\Omega}) :$

$Lu = 0$ *en* Ω $u|_{\partial\Omega}, \in L_1^p(\partial\Omega)$, $\partial\eta_A u|_{\partial\Omega} \in L_0^p(\partial\Omega)\}$.

Probaremos simultáneamente que $\mathcal{U} \subset ImP$, y que $P^2 = P$. Es decir, dadas $(f,g) \in \mathcal{U}$, veremos que $P\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.
Por los teoremas de existencia y unicidad de los problemas de Dirichlet y Neumann, para casi todo $P \in \partial\Omega$ tenemos la siguiente identidad:

$$f(P) = S(G^t + \frac{1}{2}I)^{-1}g(P) \tag{9.2}$$

y queremos probar en primer lugar que $(\frac{1}{2}I - G)f(P) + Sg(P) = f(P)$. Ahora bien, por (8.7) y (9.2), tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}I - G)f(P) + Sg(P) &= -S(G^t - \frac{1}{2}I)S^{-1}f(P) + S(G^t + \frac{1}{2}I)S^{-1}f(P) \\
&= S[(\frac{1}{2}I - G^t) + (G^t + \frac{1}{2}I)]S^{-1}f(P) \qquad (9.3) \\
&= f(P)
\end{aligned}$$

Análogamente, por (8.7), (9.2) y (9.3),

$$(G^t + \frac{1}{2}I)(\frac{1}{2} - G^t)S^{-1}f(P) + (G^t + \frac{1}{2}I)g(P) = g(P)$$

Y con esto quedan probadas las propiedades del proyector P. $\square$

10 Apéndice

Lema 10.1
Sea $A(X)$ una matriz acretiva, con coeficientes Lipschitz, y $K(X,Y)$ una solución fundamental del operador $L = -div(A\nabla)$ en un dominio Ω Lipschitz, entonces $\forall X \in \Omega$, y $\forall r > 0 : B_r(X) \subset \Omega$, tenemos que:

$$\int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, dQ = \int_{\partial B_r(X)} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, dQ = -1 \tag{10.1}$$

Demostración.

Como $K(X,Y)$ es una solución del problema $Lu = 0$ en $\Omega\backslash B_r(X)$, entonces tiene sentido $\int_{\Omega\backslash B_r(X)} L_Y K(X,Y) = 0$, y aplicando teorema de la divergencia, obtenemos también que $\int_{\partial(\Omega\backslash B_r(X))} A(Q)\nabla_Q K(X,Q) N_Q dQ = 0$, por lo tanto:

$$\int_{\partial\Omega} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, dQ = \int_{\partial B_r(X)} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, dQ \tag{10.2}$$

$\forall r : B_r(X) \subset \Omega$. Ahora bien, si tomamos $\phi \in C_o^\infty : sop\phi \subset B_{2r}(X), \phi \equiv 1$, en $\overline{B_r(X)}$, entonces:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{B_{2r}(X)} A(Y)\nabla_Y K(X,Y)\nabla\phi(Y)dY \\
&= \int_{B_r(X)} A(Y)\nabla_Y K(X,Y)\nabla\phi(Y)dY + \int_{B_{2r}(X)\backslash B_r(X)} A(Y)\nabla_Y K(X,Y)\nabla\phi(Y)dY \\
&= \int_{B_{2r}(X)\backslash B_r(X)} L_Y K(X,Y)\phi(Y)dY + \int_{\partial(B_{2r}(X)\backslash B_r(X))} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, \phi(Q)dQ \\
&= -\int_{\partial B_r(X)} \langle A(Q)\nabla_Q K(X,Q), N_Q\rangle \, dQ
\end{aligned}$$

Obviamente estas igualdades son consecuencia de las propiedades de la función ϕ y de la solución fundamental $K(X,Y)$. □

En los próximos resultados usaremos letras minúsculas para designar los puntos, ya que quedará claro por el contexto a donde estamos trabajando.

Lema 10.2
Si $\partial\Omega$ es Lipschitz, y K(x,y) una solución fundamental como en las secciones anteriores, entonces, para $\epsilon > 0$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y-x|=\epsilon, y\in\Omega, x\in\partial\Omega}\langle A(y)\nabla_y K(x,y), N_y\rangle\, d\sigma_y = -\frac{1}{2}\ ctp\ \partial\Omega$$

Demostración.

Como $K(x,y)$ (pensada en la variable y) es solución fundamental de L en un dominio $\Omega' \supset\supset \Omega$, dado $\epsilon > 0$, por el lema anterior tenemos que:

$$I_\epsilon(x) = \int_{\partial B_\epsilon(x)}\langle A(y)\nabla_y K(x,y), N_y\rangle\, d\sigma_y = -1\ \forall\ \epsilon : B_\epsilon(x) \subset \Omega' \qquad (10.3)$$

Ahora bien,si llamamos $S_\epsilon = \partial B_\epsilon(x)$, y consideramos la solución fundamental definida en (5.6) del problema

$$\begin{aligned} I_\epsilon(x) &= \int_{S_\epsilon}\langle (A(y)-A(x))\nabla_y K(x,y), N_y\rangle\, d\sigma_y \\ &+ \int_{S_\epsilon}\langle A(x)(\nabla_y K(x,y) - \nabla_y K^x(x,y)), N_y\rangle\, d\sigma_y \\ &+ \int_{S_\epsilon}\langle A(x)\nabla_y K^x(x,y), N_y\rangle\, d\sigma_y \\ &= I_{1,\epsilon}(x) + I_{2,\epsilon}(x) + I_{3,\epsilon}(x) \end{aligned}$$

Obviamente

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_{i,\epsilon}(x) = 0,\ i = 1,2.$$

$$\begin{aligned} I_{3,\epsilon}(x) &= -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x)|\int_{S_\epsilon}\frac{\langle A(x)A^{-1}(x)(x-y), N_y\rangle}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)(x-y)|^n}d\sigma_y \\ &= -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x)|\int_{S_\epsilon}\frac{\frac{\langle (x-y),(x-y)\rangle}{|x-y|}}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)(x-y)|^n}d\sigma_y \end{aligned}$$

$$= -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x)| \int_{|y|=1} \frac{\epsilon}{\epsilon^n |A^{-\frac{1}{2}}(x)(y)|^n} \epsilon^{n-1} d\sigma_y$$

$$= -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x)| \int_{|y|=1} \frac{d\sigma_y}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)y|^n}$$

Como esta integral no depende de ϵ, y vimos que las otras tendían a 0, podemos concluir que :

$$\int_{S_\epsilon} A(y)\nabla_y K(x,y) N_y dy = -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x)| \int_{|y|=1} \frac{d\sigma_y}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)y|^n} = -1 \quad (10.4)$$

Con el mismo argumento, tenemos que:

$$\int_{S_\epsilon^+} A(y)\nabla_y K(x,y) N_y d\sigma_y = -\omega_n^{-1}|detA^{-\frac{1}{2}}(x)| \int_{S_1^+} \frac{d\sigma_y}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)y|^n}$$

Y como obviamente

$$\int_{S_1^+} \frac{d\sigma_y}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)y|^n} = \int_{S_1^-} \frac{d\sigma_y}{|A^{-\frac{1}{2}}(x)y|^n}$$

Si entendemos por S_1^+ y S_1^-, la mitad superior e inferior respectiva mente de S_1. Entonces queda demostrado que

$$\int_{S_\epsilon^+} A(y)\nabla_y K(x,y) N_y d\sigma_y = -\frac{1}{2} \quad (10.5)$$

A partir de esto la demostración del lema es trivial, pues si $x \in \partial\Omega$ es un punto tal que podemos definir el plano tangente (como $\partial\Omega$ es Lipschitz, el plano tangente existe c.t.p.), y para simplificar las cuentas consideramos $x = 0$, $\phi(0) = |\nabla\phi(0)| = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} &|\int_{|y|=\epsilon, y\in\Omega} \langle A(y)\nabla_y K(0,y), N_y\rangle\, dy - \int_{S_\epsilon^+} \langle A(y)\nabla_y K(0,y), N_y\rangle\, dy| \\ &= \quad |\int_{T_\epsilon} \langle A(y)\nabla_y K(0,y), N_y\rangle\, dy| \end{aligned} \quad (10.6)$$

donde

$T_\epsilon = \{y \in R^{n-1} : |y| = \epsilon$, si $y_{n-1} > 0, y_{n-1} < \phi(y)$, y si $y_{n-1} < 0, y_{n-1} > \phi(y)\}$,
y $|T_\epsilon| < \omega_n \epsilon^{n-2} |\phi(\tilde{y})|$, $|\phi(\tilde{y})| = \max_{|\tilde{y}|=\epsilon} |\phi(y)|$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
|\int_{T_\epsilon} \langle A(y)\nabla_y K(0,y), N_y\rangle\, dy| &\leq C(\lambda,n)\int_{R_\epsilon} |y|^{1-n} dy \\
&\leq C(\lambda,n)\epsilon^{1-n}|R_\epsilon| \\
&\leq C(\lambda,n)\epsilon^{-1}|\phi(\tilde{y})| \\
&\leq C(\lambda,n)|\tilde{y}|^{-1}|\phi(\tilde{y})| \\
&\to 0 \text{ cuando } |\tilde{y}| \to 0
\end{aligned}$$

por ser $\phi(0) = 0$, y ϕ diferenciable en 0.
Por lo tanto queda probado que:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y-x|=\epsilon, y\in\Omega, x\in\partial\Omega} A(y)\nabla_y K(x,y) N_y dy = -\frac{1}{2} \text{ ctp } x \in \partial\Omega.$$

$\square$

Lema 10.3
Sea ϕ una función Lipschitz y A una matriz uniformemente elíptica, con coeficientes Lipschitz ,entonces si tomamos $\epsilon = t - \phi(x_0)$, y si $(x,t) \in \Gamma(x_0)$, entonces

$$\frac{t - \phi(y) - (x-y)\nabla\phi(y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y, t-\phi(y))|^n} = k_\epsilon(x_0, y, \phi) + R_\epsilon(x_0, x, y)$$

donde, para una cierta constante $C = C(M, a, \lambda, A')$, se tiene que

$$|R_\epsilon(x_0, x, y)| \leq C\epsilon^{1-n}, \text{ si } |x_0 - y| \leq \epsilon$$

y

$$|R_\epsilon(x_0, x, y)| \leq C\epsilon |x_0 - y|^{1-n}, \text{ si } |x - y| \geq \epsilon.$$

Demostración.

Si $|x_0 - y| \leq \epsilon$, entonces

$$R_\epsilon(x_0, x, y) = \frac{t - \phi(y) - (x-y)\nabla\phi(y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y, t-\phi(y))|^n}.$$

Ahora bien, si tomamos, $\epsilon = t - \phi(x_0)$, y como $(x,t) \in \Gamma(x_0)$ (es decir $a|x - x_0| \leq t - \phi(x_0)$), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |t - \phi(y)| + |\phi(y) - \phi(x)| + |\phi(x) - \phi(x_0)| \\
&\leq max(1, M)(|t - \phi(y)| + |y - x|) + \frac{M}{a}\epsilon
\end{aligned}$$

Y por ser A una matriz coerciva,

$$\begin{aligned}
|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y, t-\phi(y))| &\geq C_A(|x-y|^2 + (t-\phi(y))^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq C_A(|x-y| + |t - \phi(y)|) \\
&\geq C(M, A, a)\epsilon,
\end{aligned}$$

con $C(M, A, a) = C_A(1 - \frac{M}{a})(max(1, M))^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
|R_\epsilon(x_0, x, y)| &\leq C\epsilon^{-n}(|t - \phi(x_0)| + |\phi(x_0) - \phi(y)| + M|x-y|) \\
&\leq C\epsilon^{-n}(\epsilon + M\epsilon + \frac{M}{a}\epsilon + M\epsilon) \\
&\leq C\epsilon^{1-n}
\end{aligned}$$

donde la constante, depende de $A, a,$ y M. Ahora analicemos cuando $|x_0 - y| \geq \epsilon$. En este caso, considerando la definición de $k_\epsilon(x_0, y, \phi)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
R_\epsilon(x_0, x, y) &= \frac{t - \phi(y) - (x-y)\nabla\phi(y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y, t-\phi(y))|^n} - \frac{\phi(x_0) - \phi(y) - (x_0 - y)\nabla\phi(y)}{|A^{-\frac{1}{2}}(x_0,t)(x_0-y, t-\phi(y))|^n} \\
&= k(x, t, y) - k(x_0, \phi(x_0), \phi(y)) \\
&= k(x, t, y) - k(x_0, t, y) + k(x_0, t, \phi(y)) - k(x_0, \phi(x_0), \phi(y))
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|R_\epsilon(x_0, x, y)| &\leq |k(x,t,y) - k(x_0,t,y)| + |k(x_0,t,\phi(y)) - k(x_0,\phi(x_0),\phi(y))| \\
&\leq |x - x_0||\nabla_x k(\xi_{[x,x_0]}, t, y)| + |t - \phi(x_0)||\partial_t k(x_0, \tilde{t}_{[t,\phi(x_0)]}, y)|
\end{aligned}
$$

Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
\nabla_x k(x,t,y) &= \nabla\phi(y)|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y))|^{-n} \\
&- n|A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y))|^{-2-n}[t-\phi(y)-(x-y)\nabla\phi(y)] \\
&\times \{< A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y)), \partial_{x_i} A^{-\frac{1}{2}}(x,t)(x-y,t-\phi(y)) >_i \\
&\quad + A^{-1}(x,t)(x-y,t-\phi(y))\}
\end{aligned}
$$

Como $\xi = \xi_{[x,x_0]} \in [x, x_0] \Rightarrow |\xi - y| > C_a|y - x_0|$, y $|t - \phi(y)| \leq \epsilon + |\phi(x_0) - \phi(y)| \leq (1 + M)|y - x_0|$, entonces

$$
\begin{aligned}
|\nabla_x k(\xi, t, y)| &\leq C(\lambda, M, n, A')||\xi - y|^{-n}\{1 + |t - \phi(y)| + |t - \phi(y)||\xi - y)|^{-1} + |\xi - y|\} \\
&\leq C(\lambda, A', M, n, a)|y - x_0|^{-n}\{1 + |y - x_0| + c + diam(\Omega)\} \\
&\leq C(\lambda, A', M, n, a, \Omega)|y - x_0|^{-n}
\end{aligned}
$$

donde λ es la constante de elipticidad de A. Por lo tanto

$$
|k(x,t,y) - k(x_0,t,y)| \leq C|x - x_0||y - x_0|^{-n} \leq \epsilon|y - x_0|^{-n}
$$

De forma análoga podemos ver que

$$
|\partial_t k(x_0, \tilde{t}, y)| \leq C(A, A', n, a, \Omega)|x_0 - y|^{-n}
$$

y como $t - \phi(x_0) = \epsilon$ tenemos que :

$$|R_\epsilon(x_0, x, y)| \;\leq\; \epsilon|y - x_0|^{-n}$$

$\square$

Lema 10.4

$$\epsilon \int_{|x_0-y|\geq\epsilon} |x_0 - y|^{-n}|f(y)|dy \leq C_n Mf(x_0)$$

donde $Mf(x_0)$ es la función maximal de Hardy-Littlewood de f.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{|x_0-y|\geq\epsilon} |x_0 - y|^{-n}|f(y)|dy &= \epsilon^{1-n} \int_{|x_0-y|\geq\epsilon} |\frac{x_0 - y}{\epsilon}|^{-n}|f(y)|dy \\
&= \int_{|y|\geq 1} |y|^{-n}|f(\epsilon y - x_0)|dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k<|y|\leq 2^{k+1}} |y|^{-n}|f(\epsilon y - x_0)|dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-nk}\epsilon^{1-n} \int_{|y|\leq\epsilon 2^{k+1}} |f(y - x_0)|dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-nk}2^{(k+1)(n-1)}(\epsilon 2^{k+1})^{1-n} \int_{|y|\leq\epsilon 2^{k+1}} |f(y - x_0)|dy \\
&\leq Mf(x_0)2^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \\
&\leq C_n Mf(x_0)
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] A.P. Calderón, "Lectures Notes on Pseudodifferential Operators and Boundary Value Problems". I.A.M., CONICET, Bs. As., 1971.

[2] A.P. Calderón, "Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators".Proc.Nat, Acad.Sci. U.S.A.(1977), 1324-1327.

[3] A.P. Calderón, C.P. Calderón, E.B. Fabes, M. Jodeit, N.M. Riviere, "Applications of the Cauchy integrals on Lipschitz curves ". Bull. Amer. Math. Soc. 84, 287-290 (1978).

[4] R.R. Coifman, A. MacIintosh, y Y. Meyer, "L'integral de Cauchy sur les courbes lipschitziennes". Ann. of Math. 116, (1982).

[5] R.R. Coifman, G. David, y Y. Meyer, "La solution des Conjectures de Calderón". Advances in Math. 48,144-148 (1983).

[6] M. Costabel,"Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains:Elementary Results", SIAM,J.Math. Anal., Vol 19,N3,1988.

[7] E.Fabes, M.Jodeit and N.M.Riviere,"Potential Techniques for Boundary Value Problems on C^1-Domains", Acta Mathematica, N 141, 1978.

[8] G.B.Folland,"Lectures Notes on Partial Differential Equations"

[9] M. Grüter, K. O. Widman, "The Green function for uniformly elliptic equations", Manus. Math. 37 (1984) 303-342.

[10] L. Hörmander, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators III"', Springer-Verlag, 1985.

[11] D.S. Jerison y C. Kenig, " Boundary value problems on Lipschitz domains", Studies in Partial Differential Equations, Studies in Mathematics, Math. Assoc. Amer., Washington

[12] C. Kenig, "Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems", Regional Confernce Series in Mathematics, N 83(AMS) , 1994.

[13] O. Ladyzehenskaya, N. Ural'tseva,"Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press, 1968.

[14] W. Littman, G. Stampacchia, H. Weimberg, "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients", Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (1963), 45-79.

[15] Y. Meyer, "Opérateurs de Calderón-Zygmund", Ondelettes et Opérateurs II, Hermann 1990.

[16] Y. Meyer, R.R. Coifman,"Opérateurs multilinéaires", Ondelettes et Opérateurs III, Hermann 1991.

[17] T. Murai, "A Real Variable Method for the Cauchy Transform, and Analytic Capacity", Springer-Verlag 1988.

[18] E. Stein "Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals."Princeton University Press 1993.

[19] A. Torchinsky, "Real-Variable Methods in Harmonic Analysis", Pure and Applied Mathematics, Vol.123(Academic Pres,Inc.),1986.

[20] G. Verchota, "Layer Potentials and Regularity for the Dirichlet Problem for Laplace's Equation in Lipschitz Domains", Journal of Functional Analysis 59,572-611 (1984)