

Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Física

Tesis Doctoral

Decaimientos Beta Doble Exóticos

César Alberto Barbero

La Plata, 26 de Abril de 1999

Lugar de Trabajo: Departamento de Física de la UNLP

Director: Francisco Krmpotić

A Andrea y Rocío

con todo mi amor

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer profundamente al Dr. Francisco Krmpotić, mi director, por su tiempo, dedicación y disponibilidad para trabajar y discutir problemas de física en cualquier momento que lo necesitara. Durante estos años a su lado he aprendido a desarrollar una tarea de investigación.

También agradezco a mi compañero de trabajo, el Dr. Alejandro Mariano, por su amistad, compañerismo, y por la ayuda permanente que me dió para resolver problemas puntuales de la física nuclear. Asimismo le agradezco por ayudarme a crecer como persona. Quiero extender mi agradecimiento a todos los que de una u otra manera colaboraron conmigo en estos años, en especial al Dr. Dubravko Tadić y al Lic. Arturo Samana.

Quiero agradecerle a mi esposa Andrea por el amor que me brinda, por apoyarme constantemente en mis estudios, y por compartir conmigo todo lo bueno y todo lo malo que implica dedicarse a la investigación y la docencia en nuestro país. También le agradezco a mi hija Rocío por haber estado a mi lado todo el tiempo mientras escribía esta tesis. Finalmente, le agradezco a mis padres por su apoyo incondicional.

Le agradezco a Dios que me halla traído hasta donde estoy y que me guíe constantemente con su Palabra.

Resumen

Analizamos los decaimientos beta doble exóticos sin emisión de neutrinos, con $(\beta\beta_M)$ y sin emisión de majorón $(\beta\beta_{0\nu})$, que son las potenciales ventanas hacia la nueva física más allá del modelo estándar de las interacciones electrobébiles. A saber:

(i) Presentamos una derivación de la probabilidad de decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$, especialmente adaptada para los cálculos de estructura nuclear. Mostramos que la expansión de Fourier-Bessel de las corrientes hadrónicas, junto con el reacoplamiento de impulsos angulares, lleva a expresiones finales muy simples para los factores de forma nucleares. El formalismo desarrollado es aplicado a los núcleos ^{48}Ca , ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{128}Te y ^{130}Te , dentro del modelo de fases al azar para cuasipartículas. Obtenemos las expresiones analíticas explícitas en el modelo de un solo nivel para el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ de ^{48}Ca . Estas son útiles tanto para verificar los cálculos numéricos como para estudiar analíticamente la consistencia con otros formalismos. Deducimos límites sobre los términos que violan el número leptónico en el Hamiltoniano débil.

(ii) Examinamos en detalle las predicciones del modelo de "majoron cargado" introducido por Burgess y Cline. Las probabilidades de transición calculadas son mucho más pequeñas que los límites experimentales superiores sobre posibles emisiones de majorón, excepto en una pequeña región del espacio de parámetros del modelo.

(iii) Estudiamos la posible competencia de los procesos exóticos con el decaimiento beta doble estándar con dos-neutrinos $(\beta\beta_{2\nu})$. Discutimos la contribución de términos de orden superior en el Hamiltoniano débil. Concluimos que es muy poco probable que sus efectos dificulten la detección de los decaimientos exóticos.

Indice

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Indice	iii
Indice de Figuras	v
Indice de Tablas	vi
1. Introducción	1
2. Decaimiento Beta Doble con Emisión de Dos Neutrinos ..	11
2.1 Amplitud, probabilidad de transición y vida-media.	11
2.2 Transiciones permitidas y primeras prohibidas dentro de la aproximación ξ . .	13
2.3 Correcciones de segundo orden a las transiciones de Gamow-Teller.	16
3. Decaimiento Beta Doble sin Emisión de Neutrinos	19
3.1 Amplitud, probabilidad de transición y vida-media.	19
3.2 Expansión multipolar y reemplazamiento de impulsos angulares.	23
3.3 Cálculos de estructura nuclear.	25
3.4 Correlaciones nucleares de corto alcance y tamaño finito del nucleón.	29
3.5 Decaimiento $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ dentro del modelo de un solo nivel.	30
4. Decaimiento Beta Doble con Emisión del Majorón	33
4.1 Modelo de majorón cargado.	33
4.2 Amplitud, probabilidad de transición y vida-media.	35
4.3 Expansión multipolar y reemplazamiento de impulsos angulares.	38
5. Resultados Numéricos	41
5.1 Decaimiento beta doble sin emisión de neutrinos	42
5.2 Decaimiento beta doble con emisión del majorón	48
5.3 Competencia entre decaimientos beta doble exóticos y estándar	53

6. Conclusiones	61
6.1 Decaimiento beta doble sin emisión de neutrinos	61
6.2 Decaimiento beta doble con emisión del majorón	63
6.3 Competencia entre decaimientos beta doble exóticos y estándar	64
Apéndice A: Funciones de Onda	67
Apéndice B: Momentos Nucleares y Factores Leptónicos para el Decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$	71
B.1 Elementos de matriz $M_x(\mathbf{q}, \mathcal{N})$	71
B.2 Factores leptónicos.	71
B.3 Derivación de las fórmulas finales para los momentos nucleares.	72
B.4 Factores de forma radiales para las funciones de onda del oscilador armónico.	73
Apéndice C: Aproximación de Fases al Azar para Cuasipartículas (QRPA)	74
C.1 El Hamiltoniano nuclear.	74
C.2 Ecuaciones de QRPA.	76
C.3 Interacción residual.	77
C.4 Matriz densidad dentro de la QRPA.	78
Apéndice D: Matriz de Mezcla y Matriz-S para el Modelo de Majorón Cargado	79
D.1 Diagonalización de la matriz de masa.	79
D.2 Relación entre estados de masa y sabor.	80
D.3 Evaluación de la matriz-S.	81
Referencias	84

Indice de Figuras

Figura 1.	3
Figura 2.	4
Figura 3.	4
Figura 4.	5
Figura 5.	6
Figura 6.	49
Figura 7.	57
Figura 8.	59

Indice de Tablas

Tabla 1.	15
Tabla 2.	17
Tabla 3.	31
Tabla 4.	32
Tabla 5.	43
Tabla 6.	44
Tabla 7.	46
Tabla 8.	47
Tabla 9.	48
Tabla 10.	50
Tabla 11.	51
Tabla 12.	51
Tabla 13.	52
Tabla 14.	53
Tabla 15.	55
Tabla 16.	56
Tabla 17.	58
Tabla 18.	58
Tabla 19.	60
Tabla 20.	60

1 Introducción

Los núcleos atómicos son sistemas cuánticos con estados de energía bien definidos cuyos anchos son comparativamente despreciables. Sin embargo, en 1914 Chadwick observó que las partículas del decaimiento $n \rightarrow p + e^-$ tenían una distribución continua de energía. Más aún, se halló que la energía promedio por desintegración era solamente un tercio de la energía máxima del espectro. También surgían dificultades con la conservación del impulso angular y lineal. Por ejemplo, en la desintegración del neutrón $n \rightarrow p + e^-$ el impulso angular inicial es $1/2\hbar$, mientras que el final es 0 ó $1\hbar$. Pauli propuso en 1927, como una *solución desesperada*, remover todas estas dificultades asumiendo que una partícula adicional, actualmente llamada neutrino, era emitida en ese proceso, dando lugar al decaimiento β simple. Desde entonces el neutrino ha permanecido como una de las más interesantes partículas elementales y en las dos últimas décadas la Física de Neutrinos ha llamado la atención de muchos investigadores. El descubrimiento de que los neutrinos asociados con el muón y el tau son diferentes del neutrino emitido con el electrón abrió aspectos completamente nuevos para la Física de Neutrinos.

En 1957 Wu y sus colaboradores [1] realizaron un experimento basado en el trabajo teórico de Yang y Lee [2], revelando que en el decaimiento β simple los antineutrinos emergen siempre con helicidad $h = +1$, es decir, son siempre derechos. De esta manera comprobaron que en las interacciones débiles no se conserva la paridad.

Todas las propiedades de los neutrinos y sus interacciones están incluidas en la teoría de gauge de las interacciones electrodébiles de Glashow, Salam y Weinberg [3, 4, 5], en la cual se unifican las interacciones electromagnética y débil. Esta teoría, conocida como Modelo Estándar de las Interacciones Electrodébiles (ME), es uno de los grandes logros de la Física de Partículas en el siglo XX. Las principales suposiciones de este modelo se pueden resumir de la siguiente manera:

1. El grupo de gauge es $SU_L(2) \times U_Y(1)$, que sólo incluye la interacción $V - A$ (izquierda).
2. Hay dobletes fermiónicos izquierdos y singuletes fermiónicos derechos para las tres generaciones de leptones en $SU_L(2)$.
3. No hay neutrinos derechos, es decir, no hay un término de masa del tipo de Dirac.
4. Se asume un solo doblete bosónico de Higgs, el cual produce masas para los fermiones cargados y los bosones de gauge, pero no da un término de masa del tipo de Majorana para los neutrinos.

Todas las predicciones del ME han sido confirmadas por numerosos experimentos. Sin embargo, en esta teoría muchos parámetros fundamentales arbitrarios (masas de los leptones, ángulos de mezcla, etc.) aún tienen que ser explicados. Los mayores esfuerzos hasta el momento están dirigidos a la búsqueda de una teoría que pueda generalizar el ME y resolver los problemas mencionados. En muchos experimentos se buscan posibles efectos de física más allá del ME. En aquellos que usan aceleradores de partículas a grandes energías, uno de los principales objetivos es detectar algún comportamiento inesperado del bosón de Higgs estándar. Entre los experimentos sin tales aceleradores, los más populares son las búsquedas de masas para los neutrinos a través de las oscilaciones de neutrinos y los decaimientos beta doble exóticos.

El decaimiento beta doble ($\beta\beta$) resulta posible sólo cuando la transición β simple está prohibida en energía o fuertemente suprimida debido a un cambio de espín muy grande. La fuerza de apareamiento hace que los núcleos par-par estén mucho más ligados que los impar-impar vecinos. Como un ejemplo la Fig. 1 muestra la estructura de niveles de energía para el decaimiento $\beta\beta$ del ^{76}Ge .

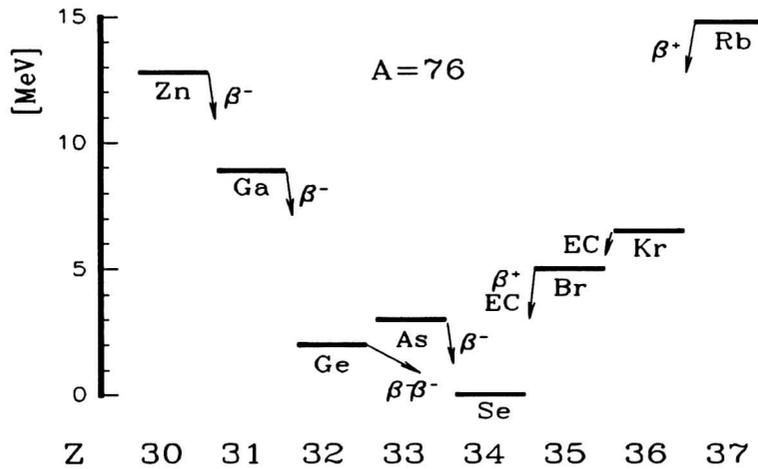


Figura 1: Estructura de niveles para el decaimiento $\beta\beta$ de ^{76}Ge .

Los procesos $\beta\beta$ pueden ocurrir a través de tres modos diferentes de decaimiento:

- Decaimiento beta doble con emisión de dos neutrinos.

Este decaimiento desde el núcleo inicial (N, Z) al núcleo final $(N - 2, Z + 2)$ fue sugerido por primera vez por Mayer en 1935 [6]

$$(N, Z) \rightarrow (N - 2, Z + 2) + 2e^- + 2\bar{\nu},$$

y puede ser considerado un proceso en dos etapas, tal como se muestra en la Fig. 2 ¹. Se describe como una perturbación a segundo orden en el Hamiltoniano débil $V - A$ dentro del ME, independientemente de si los neutrinos son partículas de Dirac ($\nu \neq \bar{\nu}$) o de Majorana ($\nu = \bar{\nu}$), con o sin masa. Cuando los neutrinos son partículas de Dirac, la emisión de los electrones debe ir acompañada de dos antineutrinos. Este modo de decaimiento estándar, que designaremos por $\beta\beta_{2\nu}$, es el único proceso $\beta\beta$ observado experimentalmente, y como tal es útil para adquirir confianza en los complejos modelos nucleares que luego serán empleados para describir los decaimientos exóticos.

¹Es interesante notar que el análogo electromagnético del decaimiento beta doble con emisión de dos neutrinos es el decaimiento nuclear gamma doble [7].

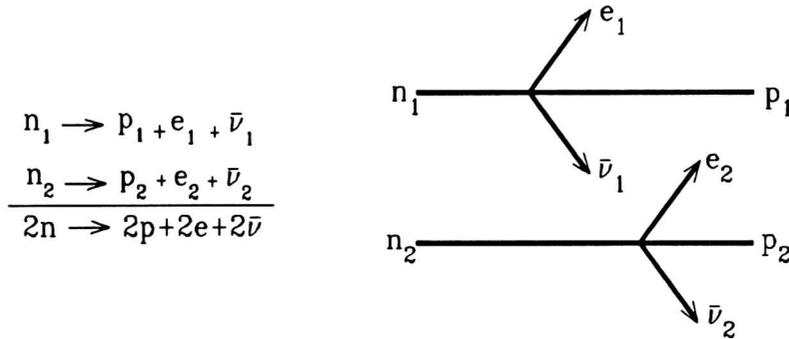


Figura 2: Diagrama para el modo de decaimiento $\beta\beta_{2\nu}$.

- Decaimiento beta doble sin emisión de neutrinos.

Tal como fue sugerido por Furry en 1939 [8], el decaimiento $\beta\beta$ desde el núcleo inicial (N, Z) al final $(N - 2, Z + 2)$ puede ocurrir de acuerdo con el siguiente modo,

$$(N, Z) \rightarrow (N - 2, Z + 2) + 2e^-,$$

según el esquema mostrado en la Fig. 3. Este modo de decaimiento será designado por $\beta\beta_{0\nu}$.

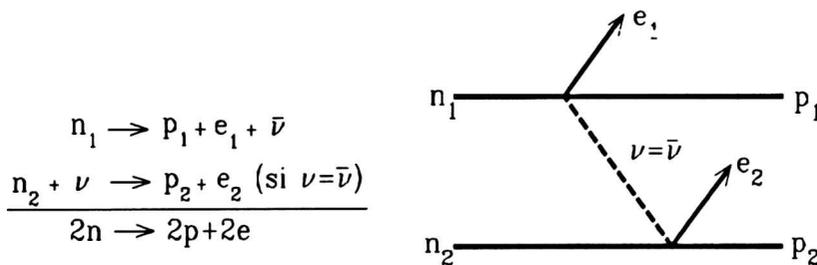


Figura 3: Diagrama para el modo de decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$.

Aquí se asume que un neutrino virtual fue emitido en la primera etapa y absorbido en la segunda. El resultado neto es que sólo se emiten dos electrones y de esta forma no se conserva el número leptónico. Debe enfatizarse que si nos restringimos al ME, es decir cuando los neutrinos son no masivos y la corriente leptónica débil es del tipo

$V - A$, los operadores de proyección de helicidad

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5),$$

nos aseguran que el antineutrino emitido y el neutrino absorbido son, respectivamente, derecho e izquierdo. Por lo tanto, aún cuando el neutrino es una partícula de Majorana ($\nu = \bar{\nu}$), el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ no ocurre a menos que se satisfagan alguna de las siguientes condiciones [9]:

- (a) los neutrinos son masivos ($m_\nu \neq 0$), y/o
- (b) la corriente derecha $V + A$ coexiste con la izquierda $V - A$.

El diagrama en la Fig. 4 ilustra estos dos posibles mecanismos para el decaimiento exótico $\beta\beta_{0\nu}$.

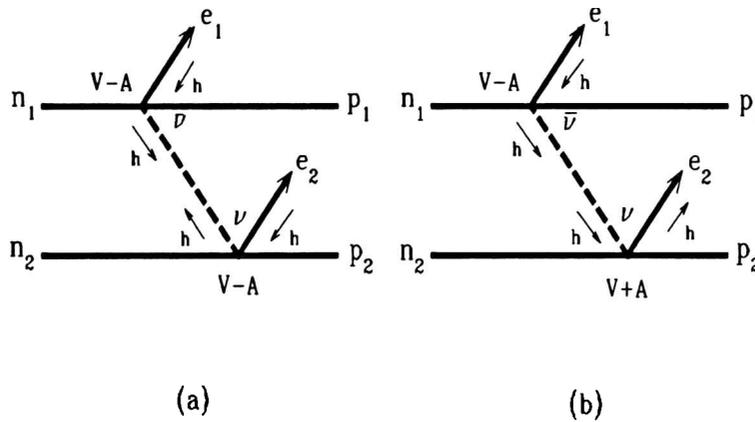


Figura 4: Diagrama del modo de decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$. Las flechas indican la helicidad h del neutrino emitido o absorbido en cada vértice.

- Decaimiento beta doble con emisión del majorón.

En este modo de decaimiento los dos electrones finales son acompañados por un bosón de Nambu-Goldstone no masivo, llamado majorón. Este proceso, que será designado por $\beta\beta_M$, se representa esquemáticamente en la Fig. 5.

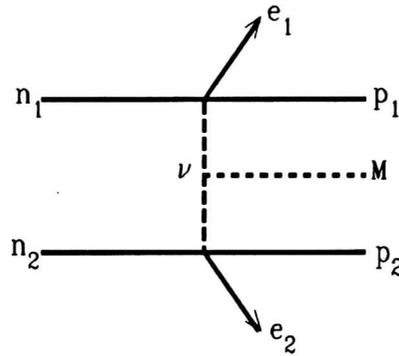


Figura 5: Diagrama para el modo de decaimiento con emisión de majorón $\beta\beta_M$.

La primer clase de majorón fue introducida por Chikashige, Mohapatra y Peccei [10]. En este modelo se introducía un campo de Higgs singulete de $SU_L(2)$ con motivo de generar un término de masa de Majorana para los neutrinos derechos, a través del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría global del número leptónico. El bosón de Goldstone resultante se acoplaba muy débilmente con los neutrinos. Posteriormente Gelmini y Roncadelli [11] propusieron un modelo muy simple y elegante en el cual el número leptónico era espontáneamente roto por un campo de Higgs triplete electrodébil. Este modelo estimuló muchas búsquedas experimentales, pero luego se halló que era incompatible con las medidas del LEP sobre el ancho invisible del bosón Z [12, 13].

Entonces, para explicar un exceso anómalo de eventos $\beta\beta$ en la parte más energética del espectro de varios núcleos [14, 15, 16], Burgess y Cline [17, 18] proponen una nueva clase de *majorón cargado*, llamado así porque en este modelo la simetría del número leptónico permanece sin romperse. Designaremos por $\beta\beta_{MC}$ al decaimiento exótico con emisión de majorón cargado.

Debido a que la fuerza de apareamiento hace que el estado fundamental de los núcleos par-par tenga espín y paridad $J^\pi = 0^+$, nosotros consideraremos únicamente transiciones del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$. En esta tesis serán estudiados esencialmente los siguientes tópicos:

- Decaimiento beta doble sin emisión de neutrinos.

El decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ es una prueba sensible de los términos que violan el número leptónico en el Hamiltoniano débil, tales como la masa de Majorana de los neutrinos livianos o los acoplamientos débiles derechos. Los límites medidos sobre la probabilidad de transición, que mejoran constantemente [19], pueden traducirse en cotas más estrictas sobre esos parámetros.

La obtención de estos límites a partir de los datos experimentales sólo es posible cuando sabemos como tratar con la estructura nuclear involucrada en el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$. Esto no es una tarea fácil, ya que:

- (i) el Hamiltoniano nuclear es sólo conocido aproximadamente, de manera que la elección de la parametrización apropiada es un arte;
 - (ii) en general hay una gran cantidad de estados nucleares involucrados en el cálculo;
- y
- (iii) las fórmulas para la vida media del decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ son complejas y difíciles de implementar en cálculos de estructura nuclear.

En esta tesis derivamos expresiones simples para los elementos de matriz nucleares del modo $\beta\beta_{0\nu}$, especialmente adaptadas para los cálculos de estructura nuclear. La base física de nuestro desarrollo es la misma que en otros trabajos previos sobre el mismo problema, es decir, se usa el mismo Hamiltoniano débil. Por lo tanto, uno no puede esperar obtener resultados muy diferentes para los observables. Para completar nuestro estudio sobre los elementos de matriz $\beta\beta_{0\nu}$, realizamos los cálculos para varios núcleos que decaen por emisión $\beta\beta$ y comparamos con otros estudios similares.

Como la mayoría de los estudios previos se han realizado en el marco del modelo de fases al azar para cuasipartículas (QRPA) [20, 21, 22, 23, 24], que se ha mostrado que da buenas estimaciones para la probabilidad de transición estándar $\beta\beta_{2\nu}$, usaremos aquí la misma aproximación. Solamente el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ de ^{48}Ca será discutido dentro de un modelo de capas simple para un solo nivel, con propósitos de comparación.

- Decaimiento beta doble con emisión del majorón.

Desde el punto de vista de la física nuclear, el modelo de majorón cargado de Burgess y Cline es interesante porque la vida media predicha para el decaimiento $\beta\beta_{MC}$ depende de elementos de matriz diferentes a los considerados previamente en otros modelos. En las Refs. [17, 18] se estiman los elementos de matriz nucleares necesarios para que la emisión del majorón cargado pueda explicar los eventos anómalos observados en los núcleos ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo y ^{150}Nd . En esta tesis evaluamos detalladamente la amplitud de transición para el modelo de Burgess y Cline dado en la Ref. [18], simplificando sus expresiones analíticas y calculando los correspondientes elementos de matriz nucleares dentro de la aproximación de QRPA para varios núcleos de interés experimental. El formalismo desarrollado para el modo $\beta\beta_{0\nu}$ es adaptado para evaluar de una forma más simple los elementos de matriz del majorón cargado. Finalmente, comparamos las probabilidades de transición con los datos experimentales actuales.

- Competencia entre los decaimientos beta doble exóticos y estándar.

La cantidad que se emplea para distinguir experimentalmente entre el decaimiento estándar con dos neutrinos $\beta\beta_{2\nu}$ y los eventos exóticos sin neutrinos $\beta\beta_{0\nu}$ y $\beta\beta_M$, es el espectro de energía $d\Gamma/d\epsilon$ de la probabilidad de transición Γ , como una función de la suma $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ de las energías de los dos electrones emitidos. El decaimiento $\beta\beta_{2\nu}$ muestra un espectro continuo en el intervalo $2m_e \leq \epsilon \leq Q$, donde m_e es la masa del electrón y Q es la energía disponible para la transición, mientras que el espectro $\beta\beta_{0\nu}$ es un pico en la energía $\epsilon = Q$. El espectro para el modo $\beta\beta_M$ también es continuo, pero su forma es claramente diferenciable de la del modo $\beta\beta_{2\nu}$ debido a que la energía es repartida entre menos partículas finales.

Notemos que la sensibilidad de los experimentos sobre decaimientos $\beta\beta$ está incrementando constantemente. Por ejemplo, mientras la medida pionera de laboratorio del decaimiento $\beta\beta_{2\nu}$ en ^{82}Se confiaba en sólo 40 eventos [25], los experimentos más recientes con ^{76}Ge [26] fueron hechos con muy buena estadística (~ 20000 eventos). Otro ejemplo es la evolución del límite de la vida media del decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ en ^{76}Ge .

Desde la primera medida en 1952, $T_{0\nu} > 2 \cdot 10^{16}$ años [27], ha variado a $T_{0\nu} > 2.2 \cdot 10^{22}$ años en 1983 [28], mientras que el valor más reciente es $T_{0\nu} > 1.2 \cdot 10^{25}$ años [26]. Comparando este último resultado, como también el límite medido para la vida media del decaimiento $\beta\beta_M$: $T_M > 1.7 \cdot 10^{22}$ años [29], con la correspondiente vida media para $\beta\beta_{2\nu}$: $T_{2\nu} \cong 1.77 \cdot 10^{22}$ años [26, 30], se puede decir que actualmente están siendo observados efectos del orden de 10^{-4} a $\epsilon \sim Q$ y de orden 10^{-1} a $\epsilon \sim Q/2$. Hay varios experimentos planeados que se supone que permitirán medir efectos aún menores. El más prometedor parece ser el proyecto GENIUS [26], que se supone que examinará la vida media $\beta\beta_{0\nu}$ de ${}^{76}\text{Ge}$ hasta el límite $T_{0\nu} > 5.7 \cdot 10^{28}$ años. Uno podría esperar que la sensibilidad de los experimentos para investigar el decaimiento $\beta\beta_M$ mejorara de la misma manera.

Al confrontar los datos experimentales con la teoría, usualmente se asume la validez de la aproximación permitida (AP) para el decaimiento estándar $\beta\beta_{2\nu}$. Esto implica considerar solamente estados virtuales con espín y paridad $J^\pi = 0^+$ y 1^+ , que contribuyen a través de los operadores nucleares de Fermi ($g_V\tau^+$) y Gamow-Teller ($g_A\tau^+\sigma$), respectivamente. Los términos de orden superior, provenientes de estados virtuales prohibidos en paridad con $J^\pi = 0^-, 1^-, 2^-$, han sido ignorados por completo por todos los que trabajan en este campo de la física, simplemente porque ellos esperan que su efecto sea pequeño. Sin embargo, al planear experimentos futuros y buscar decaimientos exóticos, sería importante saber que tan pequeños son estos efectos, y si ellos podrían eventualmente llevar a consecuencias experimentales similares a las de los anteriores. En particular, sería interesante comparar los resultados del modelo de majorón cargado con los provenientes de las transiciones prohibidas en paridad en el decaimiento $\beta\beta$ estándar.

Finalmente completamos la discusión de la competencia entre los decaimientos $\beta\beta$ exóticos y estándar, analizando los efectos de los elementos de matriz nucleares que han sido intensamente estudiados en relación con las desviaciones del espectro β simple de la forma permitida [31, 32, 33, 34]. Estos términos de orden superior son habitual-

mente conocidos como correcciones segundas prohibidas, y la más importante de ellas proviene del término del magnetismo débil, que obedece las mismas reglas de selección que el operador de Gamow-Teller.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

En la Sección 2 desarrollamos las expresiones para la vida media del decaimiento estándar $\beta\beta_{2\nu}$ incluyendo, además de las transiciones permitidas tipo Fermi y Gamow-Teller, las contribuciones de estados intermedios $J^\pi = 0^-, 1^-, 2^-$ [35, 36], y correcciones de orden superior a estados $J^\pi = 1^+$, en especial la debida al magnetismo-débil [37]. También analizamos la contribución de cada uno de estos términos al espectro de energía de dos electrones.

En la Sección 3 discutimos el mecanismo básico para el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$, presentando el Hamiltoniano efectivo y la amplitud de transición en una forma conveniente para la expansión multipolar [38]. Damos las fórmulas detalladas para los elementos de matriz nucleares y discutimos los cálculos de estructura nuclear involucrados en el problema [38]. Estudiamos el decaimiento de ^{48}Ca dentro del modelo de un solo nivel y derivamos las expresiones analíticas para los momentos nucleares [39].

En la Sección 4 examinamos en detalle las predicciones del modelo de majorón cargado de Burgess y Cline [40]. Adaptamos el formalismo, desarrollado previamente para el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$, para evaluar los elementos de matriz del decaimiento $\beta\beta_{MC}$ en forma exacta [41].

En la Sección 5 presentamos los resultados numéricos obtenidos para los elementos de matriz y factores cinemáticos que intervienen en cada uno de los decaimientos estudiados. A partir de esos resultados analizamos la contribución de cada término a la vida media y el espectro de energías, y la posible competencia entre los decaimientos exóticos y estándar.

Las conclusiones se presentan en la Sección 6.

2 Decaimiento Beta Doble con Emisión de Dos Neutrinos

2.1 Amplitud, probabilidad de transición y vida-media.

La vida-media del decaimiento estándar $\beta\beta_{2\nu}$ para una transición del estado inicial $|I\rangle$ en el núcleo (N, Z) al estado final $|F\rangle$ en el núcleo $(N - 2, Z + 2)$ (con energías E_I y E_F y espines y paridad $J^\pi = 0^+$), se define como

$$[T_{2\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = \frac{\Gamma_{2\nu}}{\ln 2}. \quad (2.1.1)$$

La probabilidad de transición diferencial para el intervalo de impulsos $d\mathbf{p}_1$ y $d\mathbf{p}_2$ de los electrones y $d\mathbf{q}_1$ y $d\mathbf{q}_2$ de los antineutrinos está dada por [36, 37, 42]

$$d\Gamma_{2\nu} = 2\pi \int \! \int |R_{2\nu}|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + q_1 + q_2 - Q) \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{q}_2}{(2\pi)^3}, \quad (2.1.2)$$

donde el símbolo $\int \! \int$ representa tanto la suma sobre las proyecciones de espín de los leptones como la integración sobre los impulsos de los neutrinos y las direcciones de los electrones. Aquí ϵ_i y $q_i \equiv |\mathbf{q}_i|$ son, respectivamente, las energías de los electrones y neutrinos no masivos, y $Q = E_I - E_F$ es la energía disponible para la transición $\beta\beta$. La amplitud de transición se evalúa a través de la Regla de Oro de Fermi a segundo orden:

$$R_{2\nu} = \frac{1}{2} \sum_N \frac{\langle F; e_1 e_2 \nu_1 \nu_2 | H_w | N; e_1 \nu_1 \rangle \langle N; e_1 \nu_1 | H_w | I \rangle}{E_N - E_I + \epsilon_1 + q_1}, \quad (2.1.3)$$

donde $e_i \equiv (\epsilon_i, \mathbf{p}_i, s_{e_i})$, $\nu_i \equiv (q_i, \mathbf{q}_i, s_{\nu_i})$ y $|N\rangle$ representa los estados intermedios (con energía E_N) en el núcleo $(N - 1, Z + 1)$. El Hamiltoniano efectivo débil está dado por [42, 43, 44]

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{x} j_L^\mu(\mathbf{x}) J_{L\mu}^\dagger(\mathbf{x}) + h.c., \quad (2.1.4)$$

donde $G = (2.996 \pm 0.002) \times 10^{-12}$ es la constante de acoplamiento débil en unidades naturales ² [34],

$$j_{L\mu}(\mathbf{x}) = 2\bar{\Psi}_e(\mathbf{x})\gamma_\mu P_L \mathbf{N}(\mathbf{x}), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (2.1.5)$$

²En este trabajo usaremos el sistema de unidades naturales: $m_e = \hbar = c = 1$. Asimismo se empleará la representación de Dirac para las matrices de Dirac [45], la métrica $g^{00} = 1$, $g^{ii} = -1$ y las definiciones usuales $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ y $\psi^C = i\gamma_2 \psi^*$.

es la corriente leptónica izquierda construída a partir de los operadores de campo del electrón Ψ_e y del neutrino N sin masa, y

$$J_{L\mu}^\dagger(\mathbf{x}) = \bar{\Psi}_n(\mathbf{x})\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma_5 + g_W\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu)\Psi_n(\mathbf{x}), \quad (2.1.6)$$

es la corriente hadrónica $V - A$ construída con los operadores de campo del nucleón Ψ_n , y las constantes de acoplamiento ³

$$g_A = g_V = 1, \quad g_W/g_V = -(\mu_p - \mu_n)/(2M_N) \simeq -3.7/(2M_N), \quad (2.1.7)$$

donde M_N es la masa del nucleón. Especificando la corriente hadrónica para el proceso de decaimiento $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ a través de la acción de los operadores de campo, y adoptando la aproximación de impulso no relativista para la función de onda de los nucleones (ver Apéndice A), tenemos [38, 42, 48]

$$J_{L\mu}^\dagger(\mathbf{x}) = \left(\rho_V(\mathbf{x}) - \rho_A(\mathbf{x}), \mathbf{j}_V(\mathbf{x}) - \mathbf{j}_A(\mathbf{x}) \right), \quad (2.1.8)$$

donde ⁴

$$\begin{aligned} \rho_V(\mathbf{x}) &= g_V \sum_n \tau_n^+ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n), \\ \rho_A(\mathbf{x}) &= \frac{g_A}{2M_N} \sum_n \tau_n^+ [\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n) \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{p}_n], \\ \mathbf{j}_V(\mathbf{x}) &= \frac{g_V}{2M_N} \sum_n \tau_n^+ [\mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n) \mathbf{p}_n + f_W \nabla \times \boldsymbol{\sigma}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n)], \\ \mathbf{j}_A(\mathbf{x}) &= g_A \sum_n \tau_n^+ \boldsymbol{\sigma}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n), \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

son las densidades y corrientes de un-cuerpo vectorial (V) y axial (A),

$$f_W = 1 - 2M_N(g_W/g_V) \simeq 4.7, \quad (2.1.10)$$

es la constante de acoplamiento efectiva del magnetismo-débil, y \mathbf{r}_n y \mathbf{p}_n son, respectivamente, la coordenada e impulso del nucleón.

³ Adoptaremos aquí el valor efectivo para la constante de acoplamiento axial-vectorial g_A [46, 47].

⁴ Ver Ec. (3D-18) en Ref. [33]. La correspondencia entre las aproximaciones no-relativista usadas aquí y aquellas usadas previamente en los estudios del decaimiento $\beta\beta$ [42, 43, 44, 49, 50], puede hallarse en la p. 516 del libro de Walecka [51].

Introduciendo (2.1.4) en (2.1.3) obtenemos

$$R_{2\nu} = G^2 \sum_N \int dx dy \frac{\langle F | J_L^{\rho\dagger}(\mathbf{x}) | N \rangle \langle N | J_L^{\sigma\dagger}(\mathbf{y}) | I \rangle}{E_N - E_I + Q/2} [1 - P(e_1 e_2)] [1 - P(\nu_1 \nu_2)] \\ \times \bar{\psi}(\epsilon_1, \mathbf{x}) \gamma_\rho P_L \phi^\sigma(q_1, \mathbf{x}) \bar{\psi}(\epsilon_2, \mathbf{y}) \gamma_\sigma P_L \phi^\sigma(q_2, \mathbf{y}), \quad (2.1.11)$$

donde $\psi(\epsilon_i, \mathbf{x})$ ($\phi^\sigma(q_i, \mathbf{x})$) son las funciones de onda de los electrones (neutrinos) emitidos (ver Apéndice A), y $P(l_1 l_2)$ intercambia las partículas l_1 y l_2 . Para llegar a esta expresión hemos usado además una aproximación que se hace en los procesos $\beta\beta$ que consiste en despreciar las distinciones entre las energías de los leptones en los denominadores de energía, ya que el espectro debe ser simétrico en los pares electrón-neutrino. Para el modo $\beta\beta_{2\nu}$ eso implica que el valor medio de $\epsilon_i + q_j$ debe ser $Q/2$, independiente de los índices i y j [42, 52].

2.2 Transiciones permitidas y primeras prohibidas dentro de la aproximación- ξ .

En esta discusión del decaimiento $\beta\beta_{2\nu}$ ignoramos el término del magnetismo-débil y la acción de los términos dependientes de la velocidad (ver Ec. (2.1.9)) sobre la corriente leptónica. Estos términos contribuyen en las correcciones segundas prohibidas a las transiciones de Gamow-Teller, que serán discutidas en la próxima Sección. Asumimos que la energía coulombiana del electrón en la superficie del núcleo es mayor que su energía total. Esto lleva a la aproximación- ξ [34, 35], que ha sido muy usada en el estudio de las transiciones β simple primeras prohibidas (PP). Como se hace generalmente [52], clasificamos las transiciones de la siguiente manera:

- *Permitidas (P)*: Son las transiciones a estados intermedios 0^+ y 1^+ , que se obtienen reteniendo los operadores de Fermi y Gamow-Teller en la corriente hadrónica, y tomando sólo las ondas- S para los leptones [35].
- *Primeras prohibidas no-únicas (NU)*: Son las transiciones a estados intermedios 0^- y 1^- , que se obtienen reteniendo los términos dependientes de la velocidad en la corriente hadrónica (2.1.8), y tomando sólo la onda- S para los neutrinos y las ondas S y $P_{1/2}$ para los electrones en la parte leptónica [35].

- *Primeras prohibidas únicas (U)*: Son las transiciones a estados intermedios 2^- , que se obtienen reteniendo el operador de Gamow-Teller en la corriente hadrónica, y tomando las ondas- S y $P_{3/2}$ para los electrones y neutrinos [36].

Entonces, para el análisis de las transiciones P y PP, la función de onda de los antineutrinos está dada explícitamente por (ver Apéndice A)

$$\phi^C(q, \mathbf{x}) = \frac{sg(s_\nu)}{\sqrt{2}} \left[1 - i\frac{q}{3}(3\mathbf{q} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{x} \right] \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_{-s_\nu}, \quad (2.2.1)$$

mientras que la de los electrones está dada por

$$\psi(\epsilon, \mathbf{x}) = \sqrt{(\epsilon + 1)/2\epsilon} \sqrt{F_0(Z, \epsilon)} \left[1 + i\xi\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} + i\frac{\bar{p}}{3}(3\mathbf{p} - \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{x} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\epsilon + 1} \end{pmatrix} \chi_{s_e}, \quad (2.2.2)$$

donde ya adoptamos la aproximación- ξ y despreciamos la masa del electrón frente a su energía. Definimos

$$\xi = \alpha Z/2R \simeq 1.18ZA^{-1/3}, \quad (2.2.3)$$

siendo $\alpha \simeq 1/137$ la constante de estructura fina y $R = 1.2 \text{ fm}$ el radio nuclear, y $\bar{p} = p[F_1(Z, \epsilon)/F_0(Z, \epsilon)]^{1/2}$.

Utilizando estas expresiones y reteniendo los términos indicados previamente para cada una de la contribuciones P, NU y U, y después de un poco de álgebra, el Hamiltoniano (2.1.4) puede escribirse de una forma bastante novedosa

$$H_w(e\nu) = -\frac{G}{2} \sum_{\pi J} W_J^\pi \cdot L_J(e\nu). \quad (2.2.4)$$

Aquí W_J^+ y W_J^- son, respectivamente, los operadores nucleares permitidos y primeros prohibidos, y

$$L_J(e\nu) = sg(s_\nu) \sqrt{\frac{\epsilon + 1}{2\epsilon} F_0(Z, \epsilon)} \chi_{s_e}^\dagger \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\epsilon + 1} \right) \ell_J (1 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}) \chi_{-s_\nu}, \quad (2.2.5)$$

son los elementos de matriz leptónicos. Los operadores ℓ_J se presentan en la Tabla 1, junto con W_J^π .

Tabla 1: Operadores ℓ_J y W_J^π para diferentes multipolos J ; $\bar{p} = p[F_1(Z, \epsilon)/F_0(Z, \epsilon)]^{1/2}$, $\mathbf{v}_n = \mathbf{p}_n/M_N$ y $\xi = \alpha Z/2R$.

J	ℓ_J	W_J^+	W_J^-
0	1	$g_V \sum_n \tau_n^+$	$-g_A \sum_n \tau_n^+ (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}_n + \xi i \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{r}_n)$
1	$\boldsymbol{\sigma}$	$g_A \sum_n \tau_n^+ \boldsymbol{\sigma}_n$	$-\sum_n \tau_n^+ \{g_V \mathbf{v}_n + \xi [g_V i \mathbf{r}_n - g_A \boldsymbol{\sigma}_n \times \mathbf{r}_n]\}$
2	$\sqrt{5} [\boldsymbol{\sigma} \otimes (\mathbf{q} + \bar{\mathbf{p}})]_2$	-	$i g_A \sum_n \tau_n^+ (\boldsymbol{\sigma}_n \otimes \mathbf{r}_n)_2 / \sqrt{5}$

En el próximo paso evaluamos la amplitud de transición y obtenemos ⁵

$$R_{2\nu} = \frac{G^2}{4} [1 - P(\nu_1 \nu_2)] \left[L_0(e_1 \nu_1) \cdot L_0(e_2 \nu_2) (\mathcal{M}_{2\nu}^P + \mathcal{M}_{2\nu}^{NU}) - \frac{1}{5} L_2(e_1 \nu_1) \cdot L_2(e_2 \nu_2) \mathcal{M}_{2\nu}^U \right], \quad (2.2.6)$$

donde

$$\mathcal{M}_{2\nu}^P = \mathcal{M}_{2\nu}(0^+) + \mathcal{M}_{2\nu}(1^+), \quad (2.2.7)$$

$$\mathcal{M}_{2\nu}^{NU} = \mathcal{M}_{2\nu}(0^-) + \mathcal{M}_{2\nu}(1^-), \quad (2.2.8)$$

$$\mathcal{M}_{2\nu}^U = \mathcal{M}_{2\nu}(2^-), \quad (2.2.9)$$

son, respectivamente, los elementos de matriz para las transiciones P, NU y U, con

$$\mathcal{M}_{2\nu}(J^\pi) = \sum_N (-1)^{J+1} \frac{\langle F | W_J^\pi | N \rangle \cdot \langle N | W_J^\pi | I \rangle}{E_N - E_I + Q/2}. \quad (2.2.10)$$

Después de introducir (2.2.6) en (2.1.2) y realizar las sumas sobre espín e integraciones angulares, la contribución de los elementos de matriz leptónicos $L_2(e_1 \nu_1) \cdot L_2(e_2 \nu_2) L_0^*(e_1 \nu_i) \cdot L_0^*(e_2 \nu_j)$ resulta ser idénticamente nula para $i, j = 1, 2$ or $2, 1$. Entonces, *no hay término de interferencia entre los elementos de matriz P y U*, mientras que sí la hay entre $\mathcal{M}_{2\nu}^P$ y $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$. Una vez realizada la integración en q_1 y q_2 obtenemos

$$d\Gamma_{2\nu} \equiv d\Gamma_{2\nu}^{P+NU} + d\Gamma_{2\nu}^U = \frac{4G^4}{15\pi^5} \left[|\mathcal{M}_{2\nu}^P + \mathcal{M}_{2\nu}^{NU}|^2 d\Omega_{2\nu}^P + |\mathcal{M}_{2\nu}^U|^2 d\Omega_{2\nu}^U \right], \quad (2.2.11)$$

donde

$$d\Omega_{2\nu}^P = \frac{1}{2^6 \pi^2} (Q - \epsilon_1 - \epsilon_2)^5 \prod_{k=1}^2 p_k \epsilon_k F_0(Z, \epsilon_k) d\epsilon_k, \quad (2.2.12)$$

⁵Para transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$ valen las relaciones (ver Ec. (1A-25) en Ref. [33])

$$W_J^\pi \cdot L_J(e_1 \nu_1) W_J^\pi \cdot L_J(e_2 \nu_2) = (2J+1)^{-1} W_J^\pi \cdot W_J^\pi L_J(e_1 \nu_1) \cdot L_J(e_2 \nu_2), \quad L_1(e_1 \nu_1) \cdot L_1(e_2 \nu_2) = 3L_0(e_1 \nu_1) \cdot L_0(e_2 \nu_2).$$

es el factor de fase usual para el decaimiento $\beta\beta_{2\nu}$ en la aproximación P, y

$$d\Omega_{2\nu}^U = \frac{5^2}{2^9 3^2 \pi^2} \sum_{i=0}^2 a_i(\epsilon_1 \epsilon_2) (Q - \epsilon_1 - \epsilon_2)^{5+2i} \prod_{k=1}^2 p_k \epsilon_k F_0(Z, \epsilon_k) d\epsilon_k, \quad (2.2.13)$$

con $a_0(\epsilon_1 \epsilon_2) = \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2$, $a_1(\epsilon_1 \epsilon_2) = 16 \bar{p}_1^2 / 35$ y $a_2(\epsilon_1 \epsilon_2) = 1/21$.

A partir de esta ecuación derivamos la expresión para el espectro de energía $d\Gamma_{2\nu}/d\epsilon$, donde $\epsilon \equiv \epsilon_1 + \epsilon_2$ es la suma de las energías de los electrones. Obtenemos

$$\frac{d\Gamma_{2\nu}}{d\epsilon} \equiv \frac{d\Gamma_{2\nu}^{P+NU}}{d\epsilon} + \frac{d\Gamma_{2\nu}^U}{d\epsilon} = \frac{G^4}{240\pi^7} \left[\mathcal{F}_{2\nu}^P(\epsilon) |\mathcal{M}_{2\nu}^P + \mathcal{M}_{2\nu}^{NU}|^2 + \mathcal{F}_{2\nu}^U(\epsilon) |\mathcal{M}_{2\nu}^U|^2 \right], \quad (2.2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2\nu}^P(\epsilon) &= (Q - \epsilon)^5 \int_1^{\epsilon-1} d\epsilon_1 p_1 \epsilon_1 p_2 \epsilon_2 F_0(Z, \epsilon_1) F_0(Z, \epsilon_2), \\ \mathcal{F}_{2\nu}^U(\epsilon) &= \frac{5^2}{2^3 3^2} \sum_{i=0}^2 (Q - \epsilon)^{5+2i} \int_1^{\epsilon-1} d\epsilon_1 a_i(\epsilon_1 \epsilon_2) p_1 \epsilon_1 p_2 \epsilon_2 F_0(Z, \epsilon_1) F_0(Z, \epsilon_2). \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

La correspondiente vida-media es

$$[T_{2\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = \mathcal{G}_{2\nu}^P |\mathcal{M}_{2\nu}^P + \mathcal{M}_{2\nu}^{NU}|^2 + \mathcal{G}_{2\nu}^U |\mathcal{M}_{2\nu}^U|^2, \quad (2.2.16)$$

donde

$$\mathcal{G}_{2\nu}^{P,U} = \frac{G^4}{240\pi^7 \ln 2} \int_2^Q d\epsilon \mathcal{F}_{2\nu}^{P,U}(\epsilon), \quad (2.2.17)$$

son los factores cinemáticos.

2.3 Correcciones de segundo orden a las transiciones de Gamow-Teller.

En esta Sección analizamos las correcciones de segundo orden a las transiciones de Gamow-Teller, provenientes del término del magnetismo-débil en la Ec. (2.1.9) y de la acción de los términos dependientes de la velocidad sobre la corriente leptónica [37]. Debido a que estos involucran derivadas de la corriente leptónica, las correcciones de más bajo orden a las transiciones permitidas de Gamow-Teller se obtienen reteniendo las ondas- S y $P_{1/2}$ para los pares electrón-neutrino. Entonces, para el análisis de las correcciones segundas prohibidas (CSP), las funciones de onda de los electrones y antineutrinos están dadas explícitamente

por (ver Apéndice A)

$$\psi(\epsilon, \mathbf{x}) = \sqrt{(\epsilon + 1)/2\epsilon} \sqrt{F_0(Z, \epsilon)} \left[1 + \frac{i}{3}(3\xi + \epsilon)\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} \right] \left(\frac{1}{\epsilon + 1} \right) \chi_{s_e}, \quad (2.3.1)$$

$$\phi^C(q, \mathbf{x}) = \frac{sg(s_\nu)}{\sqrt{2}} \left[1 - i\frac{q}{3}\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} \right] \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}} \\ 1 \end{array} \right) \chi_{-s_\nu}, \quad (2.3.2)$$

donde se despreció la masa del electrón frente a su energía, pero no se adoptó la aproximación- ξ , debido a que estamos buscando alguna posible variación en la forma del espectro de energía de los electrones. Reteniendo solamente los términos necesarios para la evaluación de las CSP en el Hamiltoniano (2.1.4) obtenemos

$$H_w(e\nu) = -\frac{G}{2} \sum_{i=0}^3 g_i(\epsilon, q) W^{(i)} \cdot L_1(e\nu), \quad (2.3.3)$$

con $L_1(e\nu)$ definido en Eq. (2.2.5). Las funciones leptónicas $g_i(\epsilon, q)$ y los operadores nucleares $W^{(i)}$ que contribuyen a las CSP se muestran en la Tabla 2. Al escribir la ecuación (2.3.3) hemos introducido ciertos factores en las definiciones por razones de conveniencia.

Tabla 2: Funciones leptónicas $g_i(\epsilon, q)$ y operadores nucleares $W^{(i)}$.

i	$g_i(\epsilon, q)$	$W^{(i)}$
0	1	$g_A \sum_n \tau_n^+ \sigma_n$
1	$\frac{3\xi + \epsilon - q}{2(6\xi - Q)}$	$\frac{2g_V}{3M} (6\xi - Q) \sum_n \tau_n^+ (f_w \sigma_n + \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n)$
2	$\frac{q}{2Q}$	$\frac{2g_A}{9} \xi Q \sum_n \tau_n^+ r_n^2 [\sigma_n + 2\sqrt{8\pi}(\sigma_n \otimes Y_2(\hat{\mathbf{r}}_n))]_1$
3	$\frac{3\xi + \epsilon + q}{2(6\xi + Q)}$	$\frac{g_A}{3M} (6\xi + Q) \sum_n \tau_n^+ [\sigma_n + 2i(\sigma_n \cdot \mathbf{p}_n)\mathbf{r}_n]$

Conservando sólo los términos de interferencia entre $W^{(0)}$ y $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ y $W^{(3)}$, y las contribuciones lineales en las energías de los leptones, de (2.3.3) y (2.1.3) resulta

$$R_{2\nu} = \frac{G^2}{4} \left[f_0(\epsilon_1 \epsilon_2) \mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 f_i(\epsilon_1 \epsilon_2) \mathcal{M}_{2\nu}^{(i)} \right] [1 - P(\nu_1 \nu_2)] L_0(e_2 \nu_2) \cdot L_0(e_1 \nu_1), \quad (2.3.4)$$

donde

$$f_0(\epsilon_1 \epsilon_2) = 1, \quad f_1(\epsilon_1 \epsilon_2) = 1 + 2\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{6\xi - Q}, \quad f_2(\epsilon_1 \epsilon_2) = 1 - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{Q}, \quad f_3(\epsilon_1 \epsilon_2) = 1, \quad (2.3.5)$$

y

$$\mathcal{M}_{2\nu}^{(i)} = \sum_N \frac{\langle F | W^{(0)} | N \rangle \cdot \langle N | W^{(i)} | I \rangle}{E_N - E_I + Q/2}. \quad (2.3.6)$$

El elemento de matriz $\mathcal{M}_{2\nu}^{(0)}$ corresponde a la parte de Gamow-Teller del elemento de matriz P de la Ec. (2.2.7), es decir $\mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} \equiv \mathcal{M}_{2\nu}(1^+)$. Es interesante notar que, mientras las transiciones NU interfieren con el operador de Gamow-Teller a nivel de la probabilidad de transición, las CSP lo hacen a nivel de la amplitud de transición.

Al mismo orden de aproximación la probabilidad de transición diferencial está dada por

$$d\Gamma_{2\nu} = d\Gamma_{2\nu}^{P+CSP} = \frac{4G^4}{15\pi^5} d\Omega_{2\nu}^P \mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} \sum_{i=0}^3 f_i(\epsilon_1 \epsilon_2) \mathcal{M}_{2\nu}^{(i)}, \quad (2.3.7)$$

con $d\Omega_{2\nu}^P$ dado en Ec. (2.2.12). Finalmente derivamos las expresiones para el espectro de energía

$$\frac{d\Gamma_{2\nu}}{d\epsilon} \equiv \frac{d\Gamma_{2\nu}^{P+CSP}}{d\epsilon} = \frac{G^4}{240\pi^7} \mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} \sum_{i=0}^3 \mathcal{F}_{2\nu}^{(i)}(\epsilon) \mathcal{M}_{2\nu}^{(i)}, \quad (2.3.8)$$

donde

$$\mathcal{F}_{2\nu}^{(i)}(\epsilon) = (Q - \epsilon)^5 f_i(\epsilon) \int_1^{\epsilon-1} d\epsilon_1 p_1 \epsilon_1 p_2 \epsilon_2 F_0(Z, \epsilon_1) F_0(Z, \epsilon_2). \quad (2.3.9)$$

Notemos que $\mathcal{F}_{2\nu}^0(\epsilon)$ es el espectro permitido de la Ec. (2.2.15). Para la vida-media obtenemos

$$[T_{2\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = \mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} \sum_{i=0}^3 \mathcal{G}_{2\nu}^{(i)} \mathcal{M}_{2\nu}^{(i)}, \quad (2.3.10)$$

con los factores cinemáticos

$$\mathcal{G}_{2\nu}^{(i)} = \frac{G^4}{240\pi^7 \ln 2} \int_2^Q d\epsilon \mathcal{F}_{2\nu}^{(i)}(\epsilon). \quad (2.3.11)$$

3 Decaimiento Beta Doble sin Emisión de Neutrinos

3.1 Amplitud, probabilidad de transición y vida-media.

La vida-media del decaimiento exótico sin neutrinos $\beta\beta_{0\nu}$

$$[T_{0\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = \frac{\Gamma_{0\nu}}{\ln 2}, \quad (3.1.1)$$

para una transición del estado inicial $|i\rangle$ en el núcleo (N, Z) al estado final $|f\rangle$ en el núcleo $(N-2, Z+2)$ (con energías E_i y E_f y espines y paridad $J^\pi = 0^+$), se evalúa a través de la Regla de Oro de Fermi a segundo orden. La probabilidad de transición diferencial para los intervalos de impulsos $d\mathbf{p}_1$ y $d\mathbf{p}_2$ de los electrones está dada por [42, 43]

$$d\Gamma_{0\nu} = 2\pi \mathfrak{f} |R_{0\nu}|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}, \quad (3.1.2)$$

donde el símbolo \mathfrak{f} representa la suma sobre las proyecciones de espín de los electrones y la integración sobre sus direcciones. La amplitud de transición está dada por

$$R_{0\nu} = \sum_N \sum_{s_\nu} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\langle F; e_1 e_2 | H_w | N; e_1 \nu \rangle \langle N; e_1 \nu | H_w | i \rangle}{E_N - E_i + \epsilon_1 + \omega}, \quad (3.1.3)$$

donde $e_i \equiv (\epsilon_i, \mathbf{p}_i, s_{e_i})$ ($\nu \equiv (\omega, \mathbf{q}, s_\nu)$) representa la energía, impulso y espín del electrón (neutrino), y $|N\rangle$ describe los estados intermedios (con energía E_N) en el núcleo $(N-1, Z+1)$. El Hamiltoniano efectivo débil que incluye los nuevos términos que violan el número leptónico, está dado por [38, 42, 43, 44]

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\ell=1}^{2n} \int d\mathbf{x} [j_{L\ell}^\mu(\mathbf{x}) \bar{J}_{L\ell\mu}^\dagger(\mathbf{x}) + j_{R\ell}^\mu(\mathbf{x}) \bar{J}_{R\ell\mu}^\dagger(\mathbf{x})] + h.c., \quad (3.1.4)$$

donde la suma se efectúa sobre el número de generaciones de leptones,

$$j_{L,R\ell\mu}(\mathbf{x}) = 2\bar{\Psi}_e(\mathbf{x}) \gamma_\mu P_{L,R} N_\ell(\mathbf{x}), \quad P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5), \quad (3.1.5)$$

son las corrientes leptónicas construídas a partir de los operadores de campo del electrón Ψ_e y del neutrino N_ℓ de masa m_ℓ , y ⁶

$$\bar{J}_{L\ell\mu}^\dagger(\mathbf{x}) = U_{e\ell} J_{L\mu}^\dagger(\mathbf{x}), \quad \bar{J}_{R\ell\mu}^\dagger(\mathbf{x}) = V_{e\ell} [\lambda J_{R\mu}^\dagger(\mathbf{x}) + \eta J_{L\mu}^\dagger(\mathbf{x})], \quad (3.1.6)$$

⁶No consideramos la mezcla de la corriente hadrónica $V+A$ en $\bar{J}_{L\ell\mu}$ y la corriente leptónica $j_{L\ell}^\mu$, porque su contribución a la amplitud del decaimiento $\beta\beta$ es despreciable [43].

contienen a la corriente hadrónica $V - A$ dadas por (2.1.6), y la nueva parte $V + A$ dada por [42]

$$J_{R\mu}^\dagger(\mathbf{x}) = \bar{\Psi}_n(\mathbf{x})\gamma_\mu(g_V + g_A\gamma_5 + g_W\sigma_{\mu\nu}\partial^\nu)\Psi_n(\mathbf{x}). \quad (3.1.7)$$

$U_{e\ell}$ y $V_{e\ell}$ son las matrices de mezcla de neutrinos para el sector izquierdo y derecho, respectivamente (ver Apéndice A), y λ y η son las intensidades de mezcla de la corriente $V + A$. Especificando la corriente hadrónica $V + A$ para el proceso de decaimiento $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ a través de la acción de los operadores de campo, dentro de la aproximación de impulso no relativista (ver Apéndice A) tenemos [38, 42, 48]

$$J_{R\mu}^\dagger(\mathbf{x}) = \left(\rho_V(\mathbf{x}) + \rho_A(\mathbf{x}), \mathbf{j}_V(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_A(\mathbf{x}) \right), \quad (3.1.8)$$

con las densidades y corrientes de un-cuerpo vectorial (V) y axial-vectorial (A) dadas en (2.1.9). La correspondiente ecuación para la parte $V - A$ fue dada en Ec. (2.1.8).

Introduciendo (3.1.4) en (3.1.3) y realizando la suma sobre s_ν , obtenemos

$$\begin{aligned} R_{0\nu} &= \frac{G^2}{\sqrt{2}} \sum_N \sum_{\ell=1}^{2n} \sum_{\alpha,\beta=L,R} \int dx dy \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \langle F | \tilde{J}_{\alpha\ell}^\dagger(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} | N \rangle \langle N | \tilde{J}_{\beta\ell}^\dagger(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} | I \rangle \\ &\times [1 - P(e_1 e_2)] \frac{\bar{\psi}(\epsilon_1, \mathbf{x}) \gamma_\mu P_\alpha (\omega \gamma_0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m_\ell) P_\beta \gamma_\nu \psi^C(\epsilon_2, \mathbf{y})}{\omega(E_N - E_I + Q/2 + \omega)}, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

con la misma notación que en (2.1.11). Para llegar a esta ecuación hemos usado la aproximación $\epsilon_i \simeq Q/2$ en el denominador de energías, basándonos en la simetría del espectro respecto a los dos electrones finales [42, 52].

La estructura de esta ecuación sugiere que sería conveniente introducir las transformadas de Fourier de las cantidades definidas en (2.1.9), es decir

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{q}) &= \int dx \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \\ \mathbf{j}(\mathbf{q}) &= \int dx \mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Entonces, siguiendo el procedimiento usual [42, 43, 44], evaluamos las contribuciones de las funciones de onda $S_{1/2}$ y $P_{1/2}$ del electrón a la amplitud $R_{0\nu}$ (su forma explícita se da en las Ecs. (A.1.4) y (A.1.5)). Las primeras llevan a los siguientes momentos nucleares

dependientes de \mathbf{q} y N

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_F(\mathbf{q}, N) &= \langle F | \rho_V(-\mathbf{q}) | N \rangle \langle N | \rho_V(\mathbf{q}) | I \rangle, \\ \mathbf{M}_{GT}(\mathbf{q}, N) &= \langle F | \mathbf{j}_A(-\mathbf{q}) | N \rangle \cdot \langle N | \mathbf{j}_A(\mathbf{q}) | I \rangle, \\ \mathbf{M}_R(\mathbf{q}, N) &= -iR\mathbf{q} \cdot \langle F | \mathbf{j}_A(-\mathbf{q}) | N \rangle \times \langle N | \mathbf{j}_V(\mathbf{q}) | I \rangle, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

y las segundas a

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{F'}(\mathbf{q}, N) &= 2\sqrt{3}i \langle F | \rho_V^{(0)}(-\mathbf{q}) | N \rangle \langle N | \rho_V(\mathbf{q}) | I \rangle, \\ \mathbf{M}_{GT'}(\mathbf{q}, N) &= 6i \langle F | j_A^{(01)}(-\mathbf{q}) | N \rangle \cdot \langle N | \mathbf{j}_A(\mathbf{q}) | I \rangle, \\ \mathbf{M}_T(\mathbf{q}, N) &= 2i \langle F | j_A^{(21)}(-\mathbf{q}) | N \rangle \cdot \langle N | \mathbf{j}_A(\mathbf{q}) | I \rangle, \\ \mathbf{M}_P(\mathbf{q}, N) &= -\sqrt{2}i [\langle F | j_A^{(10)}(-\mathbf{q}) | N \rangle \langle N | \rho_V(\mathbf{q}) | I \rangle - \langle F | \mathbf{j}_A(-\mathbf{q}) | N \rangle \cdot \langle N | \rho_V^{(1)}(\mathbf{q}) | I \rangle], \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

donde hemos introducido los operadores tensoriales

$$\begin{aligned} \rho^{(J)}(\mathbf{q}) &= \int d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{q} \otimes \mathbf{x})^{(J)} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \\ j^{(LJ)}(\mathbf{q}) &= \hat{L} \hat{J}^{-1} \int d\mathbf{x} [\mathbf{j}(\mathbf{x}) \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{x})^{(L)}]^{(J)} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

con $\hat{L} = \sqrt{2L+1}$. La forma explícita de los elementos de matriz definidos en (3.1.11) y (3.1.12) se muestra en el Apéndice B.1. Ahora definimos los elementos de matriz nucleares

$$M_X = \frac{R}{4\pi g_A^2} \sum_N \int dq v(q, \omega_N) \mathbf{M}_X(\mathbf{q}, N) \quad \text{for } X = F, GT, F', GT', P, R, T, \quad (3.1.14)$$

y

$$M_{X\omega} = \frac{R}{4\pi g_A^2} \sum_N \int dq v_\omega(q, \omega_N) \mathbf{M}_X(\mathbf{q}, N) \quad \text{for } X = F, GT, \quad (3.1.15)$$

con

$$v(q, \omega_N) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{q(q + \omega_N)}, \quad v_\omega(q, \omega_N) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(q + \omega_N)^2}, \quad (3.1.16)$$

y

$$\omega_N = E_N - \frac{1}{2} (E_I + E_F). \quad (3.1.17)$$

Al derivar la expresión (3.1.16) hemos despreciado la masa del neutrino en comparación con q en los denominadores de energía, es decir, hemos tomado $\omega \cong q$.

Para la amplitud de transición obtenemos [38]

$$R_{0\nu} = \frac{g_\lambda^2 G^2}{4\pi R\sqrt{2}} \sum_{k=1}^5 Z_k L_k(\epsilon_1, \epsilon_2), \quad (3.1.18)$$

donde

$$\begin{aligned} Z_1 &= \langle m_\nu \rangle (M_F - M_{GT}), \\ Z_2 &= \langle \eta \rangle (M_{GT\omega} + M_{F\omega}) + \langle \lambda \rangle (M_{F\omega} - M_{GT\omega}), \\ Z_3 &= 4 \langle \eta \rangle M_R, \\ Z_4 &= \frac{2}{3} i [\langle \lambda \rangle (M'_{GT} - 6M_T + 3M'_F) - \langle \eta \rangle (M'_{GT} - 6M_T - 3M'_F)], \\ Z_5 &= 4i \langle \eta \rangle M_P, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

contiene tanto los elementos de matriz hadrónicos, como los parámetros

$$\begin{aligned} \langle m_\nu \rangle &= \sum'_l m_l U_{el}^2, \\ \langle \lambda \rangle &= \lambda \sum'_l U_{el} V_{el}, \\ \langle \eta \rangle &= \eta \sum'_l U_{el} V_{el}, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

donde la suma \sum'_l se extiende solamente sobre neutrinos livianos ($m_l \leq 10$ MeV). Los elementos de matriz leptónicos $L_1(\epsilon_1, \epsilon_2)$ se presentan en el Apéndice B.2.

Finalmente, realizando las integraciones y sumas sobre los estados de los electrones, como se indica en (3.1.2), obtenemos la expresión usual para la vida-media $\beta\beta_{0\nu}$ [38, 42, 43]

$$\begin{aligned} [T_{0\nu}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} &= \langle m_\nu \rangle^2 C_{mm} + \langle \lambda \rangle^2 C_{\lambda\lambda} + \langle \eta \rangle^2 C_{\eta\eta} \\ &+ \langle m_\nu \rangle \langle \lambda \rangle C_{m\lambda} + \langle m_\nu \rangle \langle \eta \rangle C_{m\eta} + \langle \lambda \rangle \langle \eta \rangle C_{\lambda\eta}, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_{mm} &= (M_F - M_{GT})^2 \mathcal{G}_1, \\
C_{\lambda\lambda} &= M_{2-}^2 \mathcal{G}_2 + \frac{1}{9} M_{1+}^2 \mathcal{G}_4 - \frac{2}{9} M_{2-} M_{1+} \mathcal{G}_3, \\
C_{\eta\eta} &= M_{2+}^2 \mathcal{G}_2 + \frac{1}{9} M_{1-}^2 \mathcal{G}_4 - \frac{2}{9} M_{2+} M_{1-} \mathcal{G}_3 + M_R^2 \mathcal{G}_9 + M_R M_P \mathcal{G}_7 + M_P^2 \mathcal{G}_8, \\
C_{m\lambda} &= (M_F - M_{GT}) [M_{2-} \mathcal{G}_3 - M_{1+} \mathcal{G}_4], \\
C_{m\eta} &= -(M_F - M_{GT}) [M_{2+} \mathcal{G}_3 - M_{1-} \mathcal{G}_4 + M_R \mathcal{G}_6 + M_P \mathcal{G}_5], \\
C_{\lambda\eta} &= -2M_{2-} M_{2+} \mathcal{G}_2 + \frac{2}{9} [M_{2-} M_{1-} + M_{2+} M_{1+}] \mathcal{G}_3 - \frac{2}{9} M_{1-} M_{1+} \mathcal{G}_4,
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

contiene las combinaciones usuales de elementos de matriz

$$\begin{aligned}
M_{1\pm} &= M'_{GT} - 6M_T \pm 3M'_F, \\
M_{2\pm} &= M_{GT\omega} \pm M_{F\omega} - \frac{1}{9} M_{1\mp},
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

y los factores cinemáticos

$$\mathcal{G}_k = \frac{g_A^4 G^4}{32R^2 \pi^5 \ln 2} \int b_k(\epsilon_1, \epsilon_2) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - Q) \prod_{k=1}^2 p_k F_0(Z, \epsilon_k) d\epsilon_k. \tag{3.1.24}$$

Los factores $b_k(\epsilon_1, \epsilon_2)$ se muestran en el Apéndice B.2.

Es importante recalcar que, dentro del procedimiento seguido aquí para derivar el resultado (3.1.18), no hemos necesitado referirnos a la llamada aproximación de clausura (AC). (Recordar que la AC implica: (i) reemplazar las energías E_N por un valor promedio $\langle E_N \rangle$, y ii) usar la relación de clausura $\sum_N |N\rangle\langle N| = 1$ para los estados intermedios.) Cuando trabajamos en la AC, los momentos (3.1.14) y (3.1.15) son directamente comparables con los que aparecen en las Refs. [42, 43, 44, 49, 50].

3.2 Expansión multipolar y reacoplamiento de impulsos angulares.

El punto de partida para la expansión multipolar de los elementos de matriz es usar la relación de Fourier-Bessel [38]

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_L i^L j_L(qr) (Y_L(\hat{\mathbf{q}}) \cdot Y_L(\hat{\mathbf{r}})) \equiv 4\pi \sum_L i^L (-1)^L \hat{L} j_L(qr) [Y_L(\hat{\mathbf{q}}) \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}})]_0, \tag{3.2.1}$$

en las ecuaciones mostradas en el Apéndice B.1. Luego realizamos el reacoplamiento de impulsos angulares, y reescribimos los momentos nucleares (3.1.11) y (3.1.12) en término de los operadores tensoriales de un-cuerpo

$$\begin{aligned} Y_{\lambda JM}^{\kappa}(q) &= \sum_{\mathbf{n}} \tau_{\mathbf{n}}^+ r_{\mathbf{n}}^{\kappa} j_{\lambda}(qr_{\mathbf{n}}) Y_{JM}(\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}}), \\ S_{\lambda LJM}^{\kappa}(q) &= \sum_{\mathbf{n}} \tau_{\mathbf{n}}^+ r_{\mathbf{n}}^{\kappa} j_{\lambda}(qr_{\mathbf{n}}) [\sigma_{\mathbf{n}} \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}})]_{JM}, \\ P_{LJM}(q) &= \sum_{\mathbf{n}} \tau_{\mathbf{n}}^+ j_L(qr_{\mathbf{n}}) [\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{n}})]_{JM}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Finalmente, realizamos la integración angular en $d\Omega_{\mathbf{q}}$. El procedimiento se ejemplifica en el Apéndice B.3, donde se deriva una parte de la fórmula final para el elemento de matriz $M_{\mathbf{R}}$.

Procediendo en forma similar con los restantes elementos de matriz, obtenemos [38]:

$$M_{\mathbf{F}} = 4\pi R \left(\frac{g_{\mathbf{V}}}{g_{\mathbf{A}}} \right)^2 \sum_{JN} \int v(q, \omega_N) q^2 dq \langle F | Y_{JJ}^0(q) | N \rangle \cdot \langle N | Y_{JJ}^0(q) | I \rangle, \quad (3.2.3)$$

$$M_{\mathbf{GT}} = 4\pi R \sum_{LJN} (-1)^{1+L+J} \int v(q, \omega_N) q^2 dq \langle F | S_{LLJ}^0(q) | N \rangle \cdot \langle N | S_{LLJ}^0(q) | I \rangle, \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{F}'} &= -8\pi R \left(\frac{g_{\mathbf{V}}}{g_{\mathbf{A}}} \right)^2 \sum_{LJN} i^{L-J+1} (J1|L)(J1|L) \\ &\times \int v(q, \omega_N) q^3 dq \langle F | Y_{LJ}^1(q) | N \rangle \cdot \langle N | Y_{JJ}^0(q) | I \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{GT}'} &= 8\pi R \sum_{LL'JN} i^{L-L'+1} (-1)^{L'+J} (L'1|L)(L'1|L) \\ &\times \int v(q, \omega_N) q^3 dq \langle F | S_{LL'J}^1(q) | N \rangle \cdot \langle N | S_{L'L'J}^0(q) | F \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{R}} &= \frac{2\pi R^2 g_{\mathbf{V}}}{M_N g_{\mathbf{A}}} \sum_{LL'JN} i^{L+L'} (-1)^J \int v(q, \omega_N) q^3 dq \langle F | S_{LLJ}^0(q) | N \rangle \cdot \\ &\left\{ f_{\mathbf{w}q} \left[\delta_{LL'} - (J1|L)(J1|L') \right] \langle N | S_{L'L'J}^0(q) | I \rangle \right. \\ &\left. - 2\sqrt{6} (-1)^{L+J} \hat{L} \begin{Bmatrix} L & J & 1 \\ 1 & 1 & L' \end{Bmatrix} (L1|L') \langle N | P_{L'J}(q) | I \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{T}} &= 40\pi R \sum_{LL'J'JN} i^{L+L'+1} \hat{L}^2 (1L|J')(1L|L') \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ J' & L & L' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ J & J & L' \end{Bmatrix} \\ &\times \int v(q, \omega_N) q^3 dq \langle F | S_{L'J'J}^1(q) | N \rangle \cdot \langle N | S_{L'L'J}^0(q) | I \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{P}} &= 8\pi\sqrt{6} R \frac{g_{\mathbf{A}}}{g_{\mathbf{V}}} \sum_{LJN} i^{L+J+1} \hat{J} (J1|L)(J1|L) \begin{Bmatrix} J & L & 1 \\ 1 & 1 & J \end{Bmatrix} \\ &\times \int v(q, \omega_N) q^3 dq \langle F | S_{LJJ}^1(q) | N \rangle \cdot \langle N | Y_{JJ}^0(q) | I \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

donde $(L1|J)$ es una notación corta para el coeficiente de Clebsh-Gordon $(L010|J0)$. Las fórmulas para los elementos de matriz $M_{F\omega}$ y $M_{GT\omega}$ se obtienen a partir de las de M_F y M_{GT} con el reemplazo $v(q, \omega_N) \rightarrow v_\omega(q, \omega_N)$ (ver Ecs. (3.1.14) y (3.1.15)).

La evaluación de los elementos de matriz $\beta\beta_{0\nu}$ requiere:

i) el cálculo del producto escalar

$$\langle F|W_J(q)|N\rangle \cdot \langle N|W_J(q)|I\rangle, \quad (3.2.10)$$

donde $W_J(q)$ representa cualquiera de los operadores de un-cuerpo presentados en (3.2.2),

y

ii) la integración sobre el impulso del neutrino q .

Más detalles sobre estos dos pasos serán dados en la próxima Sección.

3.3 Cálculos de estructura nuclear.

Para evaluar los elementos de matriz (3.2.10) es conveniente reescribir los operadores (3.2.2) del espacio de Hilbert al espacio de Fock [33], es decir

$$W_{JM}(q) = \hat{J}^{-1} \sum_{pn} \langle p||W_J(q)||n\rangle (a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{JM}. \quad (3.3.1)$$

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_M \langle F|W_J(q)|N\rangle \cdot \langle N|W_J(q)|I\rangle &\equiv \sum_{\alpha\pi M} \langle 0_f^+|W_J(q)|J_\alpha^\pi M\rangle \cdot \langle J_\alpha^\pi M|W_J(q)|0_i^+\rangle \\ &= (-)^J \sum_{\alpha\pi p n p' n'} \langle p||W_J(q)||n\rangle \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi) \langle p' ||W_J(q)||n'\rangle, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

donde

$$\rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi) = \hat{J}^{-2} \langle 0_f^+ ||(a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{J^\pi} ||J_\alpha^\pi \rangle \langle J_\alpha^\pi ||(a_{p'}^\dagger a_{\bar{n}'})_{J^\pi} ||0_i^+\rangle, \quad (3.3.3)$$

es la matriz densidad de partícula-agujero (ph) de dos-cuerpos dependiente del estado, y el índice α indica diferentes estados intermedios con el mismo espín J y paridad π .

Dentro de la AC podemos sumar sobre α , y llegar a la matriz densidad ph independiente del estado

$$\rho_\alpha^{ph}(p n p' n'; J^\pi) = \sum_\alpha \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi) \equiv \hat{J}^{-1} \langle 0_f^+ | [(a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{J^\pi} (a_{p'}^\dagger a_{\bar{n}'})_{J^\pi}]_0 | 0_i^+\rangle, \quad (3.3.4)$$

que está relacionada con la matriz densidad partícula-partícula (pp)

$$\rho^{pp}(pp'n n'; J^\pi) = \hat{J}^{-1} \langle 0_f^+ | [(a_p^\dagger a_{p'}^\dagger)_{J^\pi} (a_{\bar{n}} a_{\bar{n}'})]_{J^\pi} | 0_i^+ \rangle, \quad (3.3.5)$$

por una relación del tipo de Pandya

$$\rho_{cl}^{ph}(p n p' n'; J^\pi) = \sum_{I^\pi} (-)^{j_n + j_{p'} + J + I} \hat{I}^2 \left\{ \begin{matrix} j_p & j_n & J \\ j_{n'} & j_{p'} & I \end{matrix} \right\} \rho^{pp}(pp'n n'; I^\pi). \quad (3.3.6)$$

Los factores de forma reducidos entre estados de partícula independiente de protón y neutrón, para los operadores de un-cuerpo definidos en (3.2.2), son [53, 54]

$$\begin{aligned} \langle p || Y_{\lambda J}^\kappa(q) || n \rangle &= (4\pi)^{-\frac{1}{2}} W_{J0J}(pn) R_\lambda^\kappa(pn; q), \\ \langle p || S_{\lambda LJ}^\kappa(q) || n \rangle &= (4\pi)^{-\frac{1}{2}} W_{L1J}(pn) R_\lambda^\kappa(pn; q), \\ \langle p || P_{LJ}(q) || n \rangle &= (4\pi)^{-\frac{1}{2}} [W_{LJ}^{(-)}(pn) R_L^{(-)}(pn; q) + W_{LJ}^{(+)}(pn) R_L^{(+)}(pn; q)], \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

con las partes angulares⁷

$$\begin{aligned} W_{LSJ}(pn) &= \sqrt{2} \hat{S} \hat{J} \hat{L} \hat{l}_n \hat{j}_n \hat{j}_p (l_n L | l_p) \left\{ \begin{matrix} l_p & \frac{1}{2} & j_p \\ L & S & J \\ l_n & \frac{1}{2} & j_n \end{matrix} \right\}, \\ W_{LJ}^{(\pm)}(pn) &= \mp i (-1)^{l_p + j_n + J + \frac{1}{2}} \hat{J} \hat{L} \hat{l}_p \hat{j}_p \hat{j}_n (l_n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (l_p L | l_n \mp 1) \\ &\times \left\{ \begin{matrix} l_p & j_p & \frac{1}{2} \\ j_n & l_n & J \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L & J & 1 \\ l_n & l_n \mp 1 & l_p \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

y las partes radiales

$$\begin{aligned} R_L^\kappa(pn; q) &\equiv R_L^\kappa(l_p, n_p, l_n, n_n; q) = \int_0^\infty u_{n_p, l_p}(r) u_{n_n, l_n}(r) j_L(qr) r^{2+\kappa} dr, \\ R_L^{(\pm)}(pn; q) &= \int_0^\infty u_{n_p, l_p}(r) \left(\frac{d}{dr} \pm \frac{2l_n + 1 \pm 1}{2r} \right) u_{n_n, l_n}(r) j_L(qr) r^2 dr. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Para realizar el cálculo numérico usando las Ecs. (3.2.3) - (3.2.9) es conveniente agrupar por separado las partes angulares y radiales. De esta manera los elementos de matriz nucleares pueden ser escritos en la forma [39]:

⁷Nosotros usamos aquí el acoplamiento de impulsos angulares $|(l, l)j\rangle$.

$$M_F = \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 \sum_{J_\alpha^\pi p n p' n'} (-1)^J W_{J0J}(p n) W_{J0J}(p' n') \mathcal{R}_{JJ}^{00}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi), \quad (3.3.10)$$

$$M_{GT} = - \sum_{L J_\alpha^\pi p n p' n'} (-1)^L W_{L1J}(p n) W_{L1J}(p' n') \mathcal{R}_{LL}^{00}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi), \quad (3.3.11)$$

$$M_{F'} = -2 \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 \sum_{L J_\alpha^\pi p n p' n'} i^{L+J+1} (J1|L)(J1|L) W_{J0J}(p n) W_{J0J}(p' n') \\ \times \mathcal{R}_{JL}^{11}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi), \quad (3.3.12)$$

$$M_{GT'} = 2 \sum_{LL' J_\alpha^\pi p n p' n'} i^{L+L'+1} (L'1|L)(L'1|L) W_{L'1J}(p n) W_{L'1J}(p' n') \\ \times \mathcal{R}_{L'L}^{11}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi), \quad (3.3.13)$$

$$M_R = \frac{R}{2M_N} \frac{g_V}{g_A} \sum_{LL' J_\alpha^\pi p n p' n'} i^{L+L'} W_{L1J}(p n) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi) \\ \times \left\{ -f_w \left[\delta_{LL'} - (J1|L)(J1|L') \right] W_{L'1J}(p' n') \mathcal{R}_{LL'}^{20}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \right. \\ \left. - 2\sqrt{6}(-1)^{L+J} \hat{L} \begin{Bmatrix} L & J & 1 \\ 1 & 1 & L' \end{Bmatrix} (L1|L') \sum_{\kappa=\pm} W_{L'J}^{(\kappa)}(p' n') \mathcal{R}_{LL'}^{1\kappa}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \right\}, \quad (3.3.14)$$

$$M_T = 10 \sum_{LL' J_\alpha^\pi p n p' n'} i^{L+L'+1} (-1)^{L+J} \hat{L}^2 (1L|J')(1L|L') \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ J' & L & L' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ J' & J & L' \end{Bmatrix} \\ \times W_{L'1J}(p n) W_{J'1J}(p' n') \mathcal{R}_{L'L}^{11}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi), \quad (3.3.15)$$

$$M_P = 2\sqrt{6} \frac{g_V}{g_A} \sum_{L J_\alpha^\pi p n p' n'} i^{1+L+J} \hat{J} (J1|L)(J1|L) \begin{Bmatrix} J & L & 1 \\ 1 & 1 & J \end{Bmatrix} \\ \times W_{J0J}(p n) W_{J1J}(p' n') \mathcal{R}_{JL}^{11}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) \rho^{ph}(p n p' n'; J_\alpha^\pi). \quad (3.3.16)$$

donde las integrales radiales de dos-cuerpos se definen como

$$\mathcal{R}_{LL'}^{\kappa\kappa'}(p n p' n'; \omega_{J_\alpha^\pi}) = R \int dq q^{2+\kappa} v(q; \omega_{J_\alpha^\pi}) R_L^0(p n; q) R_{L'}^{\kappa'}(p' n'; q), \quad \kappa' = 0, 1, \pm. \quad (3.3.17)$$

La integración sobre el impulso del neutrino q se simplifica cuando se emplean las funciones de onda radiales del oscilador armónico. En ese caso son válidas las siguientes relaciones entre las funciones de onda radiales de un-cuerpo:

$$\begin{aligned}
 R_L^1(pn; q) &= (2\nu)^{-\frac{1}{2}} \left\{ (2l_n + 2n_n + 3)^{\frac{1}{2}} R_L^0(l_p, n_p, l_n + 1, n_n; q) \right. \\
 &\quad \left. - (2n_n)^{\frac{1}{2}} R_L^0(l_p, n_p, l_n + 1, n_n - 1; q) \right\}, \\
 R_L^{(\pm)}(pn; q) &= \pm \left(\frac{\nu}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ (2l_n + 2n_n + 2 \mp 1)^{\frac{1}{2}} R_L^0(l_p, n_p, l_n \mp 1, n_n; q) \right. \\
 &\quad \left. + (2n_n + 1 \pm 1)^{\frac{1}{2}} R_L^0(l_p, n_p, l_n \mp 1, n_n \pm 1; q) \right\}, \quad (3.3.18)
 \end{aligned}$$

donde $\nu = M_N \omega_{osc}$, con $\omega_{osc} \simeq 80A^{-1/3}$, es el parámetro del oscilador, y la integración en q en los elementos de matriz (3.2.3) - (3.2.9) sólo involucra las integrales radiales (3.3.17) con $\kappa' = 0$. La forma explícita de las integrales en este caso se muestra en el Apéndice B.4.

Las densidades $\rho^{ph}(pnp'n'; J_\alpha^\pi)$ y $\rho_{cl}^{ph}(pnp'n'; J^\pi)$ se obtienen a partir de los cálculos de estructura nuclear. Como un ejemplo, discutiremos luego el decaimiento $\beta\beta$ dentro de dos modelos nucleares diferentes: (i) el modelo de capas [38, 39], y (ii) la aproximación de fases al azar para cuasipartículas (QRPA) [46, 55, 56, 57]. Esta última se describe detalladamente en el Apéndice C.

En el primer caso consideramos el núcleo intermedio $(N - 1, Z + 1)$ y el núcleo final $(N - 2, Z + 2)$ descriptos, respectivamente, como excitaciones de una-partícula un-agujero y dos-partículas dos-agujeros sobre el núcleo inicial (N, Z) , es decir,

$$\begin{aligned}
 |J_\alpha^\pi M\rangle &= \sum_{pn} \langle pn | J_\alpha^\pi \rangle (a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{J^\pi M} |0_i^+\rangle, \\
 |0_f^+\rangle &= \sum_{p \geq p', n \geq n', I^\pi} N(pp') N(nn') \langle pp' nn'; I^\pi | 0_f^+\rangle \left[(a_p^\dagger a_{p'}^\dagger)_{I^\pi} (a_{\bar{n}} a_{\bar{n}'})_{I^\pi} \right]_0 |0_i^+\rangle, \quad (3.3.19)
 \end{aligned}$$

con $N(pp') = (1 + \delta_{pp'})^{-\frac{1}{2}}$. Uno obtiene de (3.3.3)

$$\begin{aligned}
 \rho^{ph}(p_1 n_1 p_2 n_2; J_\alpha^\pi) &= \langle J_\alpha^\pi | p_2 n_2 \rangle \sum_{p \geq p', n \geq n'} \sum_{p_3 n_3 I^\pi} \hat{I} \langle p_3 n_3 | J_\alpha^\pi \rangle \langle 0_f^+ | pp' nn'; I^\pi \rangle (-)^{n_1 + p_3 + J + I} \\
 &\quad \times \left\{ \begin{matrix} p_1 & n_1 & J \\ n_3 & p_3 & I \end{matrix} \right\} \hat{P}_I(pp') \hat{P}_I(nn') \delta_{pp_1} \delta_{nn_1} \delta_{p'p_3} \delta_{n'n_3}, \quad (3.3.20)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \rho_{cl}^{ph}(p_1 n_1 p_2 n_2; J^\pi) &= \sum_{p \geq p', n \geq n', I^\pi} \hat{I} \langle 0_f^+ | pp' nn'; I^\pi \rangle (-)^{n_1 + p_2 + J + I} \\
 &\quad \times \left\{ \begin{matrix} p_1 & n_1 & J \\ n_2 & p_2 & I \end{matrix} \right\} \hat{P}_I(pp') \hat{P}_I(nn') \delta_{pp_1} \delta_{nn_1} \delta_{p'p_2} \delta_{n'n_2}, \quad (3.3.21)
 \end{aligned}$$

donde

$$\hat{P}_J(pp') = N(pp') \left[1 - (-)^{J+p+p'} (p \leftrightarrow p') \right]. \quad (3.3.22)$$

Dentro de la AC podemos usar la relación de clausura

$$\sum_{\alpha} \langle p_3 n_3 | J_{\alpha}^{\pi} \rangle \langle J_{\alpha}^{\pi} | p_2 n_2 \rangle = \delta_{p_2 p_3} \delta_{n_2 n_3}, \quad (3.3.23)$$

que nos lleva de (3.3.20) a (3.3.21).

Por otro lado, dentro de la formulación de QRPA, y después de resolver las ecuaciones de BCS para el núcleo intermedio $(N - 1, Z + 1)$ [58], la matriz densidad de dos-cuerpos resulta ser [38] (ver Apéndice C.4)

$$\rho^{ph}(pnp'n'; J_{\alpha}^{\pi}) = \left[u_p v_n X_{J_{\alpha}^{\pi}}(pn) + u_n v_p Y_{J_{\alpha}^{\pi}}(pn) \right] \left[u_{p'} v_{n'} X_{J_{\alpha}^{\pi}}(p'n') + u_{p'} v_{n'} Y_{J_{\alpha}^{\pi}}(p'n') \right], \quad (3.3.24)$$

donde toda la notación tiene el significado usual (ver Apéndice C) [55, 58]. Uno debería tener en mente que cuando se usa la QRPA, las energías $\omega_{J_{\alpha}^{\pi}}$ que aparecen en las integrales radiales son las soluciones del problema de RPA y *no* las energías de excitación del núcleo intermedio relativas al núcleo inicial.

3.4 Correlaciones nucleares de corto alcance y tamaño finito del nucleón.

En esta Sección vamos a describir las formas en que se pueden incluir los efectos de las correlaciones nucleares en nuestro formalismo. Las correlaciones de corto alcance (CCA) entre los dos nucleones se toman en cuenta vía la función de correlación [39]

$$f_{cca}(r) = 1 - j_0(q_c r), \quad (3.4.1)$$

donde $q_c = 3.93 \text{ fm}^{-1}$ es aproximadamente la longitud de onda de Compton del mesón- ω . Los efectos de las correlaciones de tamaño finito del nucleón (TFN) se introducen en la forma usual, es decir, a través de los factores de forma dipolares en el espacio de momentos [39, 43]

$$(g_{\nu, \lambda})_{tfn} = g_{\nu, \lambda} \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right)^2, \quad (3.4.2)$$

con $\Lambda = 850$ MeV. Las correspondientes modificaciones en los potenciales de neutrino son [57]

$$\begin{aligned} v_{tfn}(q; \omega_N) &= v(q; \omega_N) \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2} \right)^4, \\ v_{cca}(q; \omega_N) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Omega(\mathbf{q} - \mathbf{k}) v(k; \omega_N), \\ v_{tfn+cca}(q; \omega_N) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Omega(\mathbf{q} - \mathbf{k}) v_{tfn}(q; \omega_N), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

donde

$$\Omega(\mathbf{q}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q}) - \frac{2\pi^2}{q_c^2} \delta(q - q_c), \quad (3.4.4)$$

es la función de correlación en el espacio de los impulsos.

3.5 Decaimiento $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$ dentro del modelo de un solo nivel.

En el modelo de un solo nivel (MSN) [57] hay un solo estado intermedio para cada J^π . Esta parece ser una razonable aproximación de primer orden para el decaimiento $\beta\beta$ de los núcleos ^{48}Ca y ^{100}Mo [59, 60]. Para el decaimiento $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$, los estados virtuales intermedios en el núcleo ^{48}Sc son: $[0f_{7/2}(p)0f_{7/2}(n)]_{J^+}$, donde $J^+ = 0^+ \dots 7^+$. Dentro del MSN, la expresión para la matriz densidad de dos-cuerpos $\rho^{ph}(J^+) \equiv \rho^{ph}(pnpn; J^+)$ es simple. En efecto, dentro del modelo de capas, la Ec. (3.3.20) se reduce a

$$\rho^{ph}(J^+) = -2 \sum_I \hat{I} \langle 0_f^+ | pnpn; I^+ \rangle (-)^J \begin{Bmatrix} 7/2 & 7/2 & J \\ 7/2 & 7/2 & I \end{Bmatrix}, \quad (3.5.1)$$

y en la aproximación de QRPA, la Ec. (3.3.24) nos da [38, 59]

$$\rho^{ph}(J^+) = u_p v_n u_n v_p \left(\frac{\omega^0}{\omega_{J^\pi}} \right) \left(1 + \frac{G(J^\pi)}{\omega_0} \right), \quad (3.5.2)$$

donde $G(J^\pi) = G(pnpn; J^\pi)$, $\omega^0 = -[G(pppp; 0^+) + G(nnnn; 0^+)]/4$, y $\omega_{J^\pi} = G(jj'jj'; J^\pi)$ son los elementos de matriz de partícula-partícula definidos en el Apéndice C.2. Los valores de los cocientes $G(J^+)/\omega_0$ para la interacción δ pueden ser hallados en la Tabla 1 de Ref. [59].

Con motivo de recalcar la simplicidad de nuestro formalismo presentaremos ahora las expresiones analíticas explícitas que se obtienen en el MSN para el decaimiento $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$.

En efecto, cuando usamos las funciones de onda radiales del oscilador armónico y tomamos la energía de excitación $\omega_{J\pi}$ idénticamente nula, podemos avanzar en los cálculos analíticos. Eso nos permitirá posteriormente verificar la consistencia con otros formalismos.

Tabla 3: Integrales radiales $\mathcal{R}_{LJ}^{\kappa\kappa'}(pnpn; \omega_{J\pi})$ para el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ de ^{48}Ca . La energía de excitación $\omega_{J\pi}$ se toma idénticamente nula, y empleamos las funciones de onda radiales del oscilador armónico con el parámetro del oscilador $\nu = M_N\omega_{osc}$. Usamos la notación $C = \frac{33600\sqrt{2\pi}}{R\nu\sqrt{\nu}}$.

L	J	$C\nu R_{LJ}^{00}$	$C\nu R_{JL}^{11}$	CR_{LJ}^{20}	CR_{JL}^{1+}	CR_{JL}^{1-}
0	0	37230		12870		
1	0		18615		9805	-18615
2	0			-690		
0	2			-690		
1	2		11835		16585	-11835
2	2	4734		12870		
3	2		11835		7065	-11835
4	2			6030		
2	4			6030		
3	4		8415		10485	-8415
4	4	1870		12870		
5	4		8415		5445	-8415
6	4			8910		
4	6			8910		
5	6		6435		7425	-6435
6	6	990		12870		
7	6		6435			-6435

Los resultados para las integrales radiales $\mathcal{R}_{L'L'}^{\kappa\kappa'}(pnpn; \omega_{J\pi})$ se muestran en la Tabla 3. Después de realizar las sumas sobre L, L' y J' , como se indica en las Ecs. (3.3.10)-(3.3.16), obtenemos [39]:

$$\begin{aligned}
M_F &= M_{F'} = M_{F\omega} = R\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \left(\frac{g_V}{g_A}\right)^2 \sum_{J^+} A_F(J^+) \rho^{ph}(J^+), \\
M_{GT} &= M_{GT'} = M_{GT\omega} = R\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \sum_{J^+} A_{GT}(J^+) \rho^{ph}(J^+), \\
M_R &= \frac{R^2}{2M_N} \sqrt{\frac{\nu^3}{2\pi}} \frac{g_V}{g_A} \sum_{J^+} [f_w A_{1R}(J^+) + A_{2R}(J^+)] \rho^{ph}(J^+), \\
M_T &= R\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \sum_{J^+} A_T(J^+) \rho^{ph}(J^+), \quad M_P = 0.
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Los coeficientes $A_x(J^+)$ están dados en la Tabla 4. Se debe notar que: i) en el MSN el elemento de matriz M_P es siempre nulo, independientemente del valor de la energía de excitación ω_{J^+} , y ii) mientras los elementos de matriz de Fermi provienen sólo de multipolos pares, todos los otros tienen origen exclusivamente en multipolos impares.

Tabla 4: Coeficientes $A_x(J^+)$ para los elementos de matriz dados por Ec. (3.5.3).

J^+	$980A_F(J^+)$	$63700A_{GT}(J^+)$	$245A_{1R}(J^+)$	$245A_{2R}(J^+)$	$47775A_T(J^+)$
0^+	8687	0	0	0	0
1^+	0	-746499	-738	-1218	54327
2^+	1315	0	0	0	0
3^+	0	-117247	-552	-720	36751
4^+	459	0	0	0	0
5^+	0	-72575	-870	-510	21275
6^+	175	0	0	0	0
7^+	0	-91875	-2450	0	18375

4 Decaimiento Beta Doble con Emisión del Majorón

4.1 Modelo de majorón cargado.

En el decaimiento beta doble con emisión de majorón (ver Fig. 5) los dos electrones finales son acompañados por un bosón de Nambu-Goldstone. Este proceso fue predicho [61, 62] por el modelo introducido por Gelmini y Roncadelli [11]. Mientras este modelo simple y elegante estimuló muchas búsquedas experimentales, se halló posteriormente que era incompatible con las medidas del LEP sobre el ancho invisible del bosón Z [12, 13]. Para explicar el exceso anómalo de eventos $\beta\beta$ en la parte de mayor energía del espectro, del cual muchos grupos tenían evidencia experimental [14, 15, 16], Burgess y Cline proponen una nueva clase de modelo de "majorón cargado" (MMC) [17, 18]. Este nombre se debe a que el majorón lleva una carga de número leptónico $U_L(1)$ sin romper, y es el bosón de Nambu-Goldstone no masivo asociado con la ruptura espontánea de una simetría distinta del número leptónico. El decaimiento $\beta\beta$ será permitido dentro de este modelo siempre que el majorón lleve una carga leptónica $L = -2$, para compensar las dos unidades provenientes de los electrones finales.

En el MMC, el grupo de simetría de gauge del modelo estándar $SU_L(2) \times U_Y(1)$ es aumentado por un grupo de simetría global de sabor no abeliano, $SU_F(2) \times U_{L'}(1)$, que será roto espontáneamente para dar un majorón que lleva una carga de número leptónico ordinario $U_L(1)$ (ver también Refs.[63, 64]). Para implementar este patrón de ruptura de simetría, se introduce un campo escalar Φ doblete bajo la nueva simetría $SU_F(2)$ y singulete bajo el grupo de gauge electrodébil, que dará un valor de expectación de vacío. El modelo también incluye los siguientes neutrinos singuletes electrodébiles no-estándar: (i) un doblete $SU_F(2)$ de neutrinos derechos N_+, N_- , y (ii) dos neutrinos s_\pm singuletes $SU_F(2)$, que llevan solamente el nuevo número cuántico $U_{L'}(1)$. Explícitamente, las propiedades de transformación $(2T^F + 1, L')$ de los nuevos campos bajo $SU_F(2) \times U_{L'}(1)$ son [18]

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \phi_{--} \\ \phi_0 \end{pmatrix} \sim (2, -1), & \Phi^c &= \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi_{++} \end{pmatrix} \sim (2, +1), \\ P_R N &\equiv \begin{pmatrix} N_- \\ N_+ \end{pmatrix} \sim (2, 0), & \text{y} & P_R s_\pm \sim (1, \pm 1). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Los subíndices denotan las correspondientes cargas del número leptónico sin romper

$$L = -2T_3^F + L'. \quad (4.1.2)$$

La densidad Lagrangiana renormalizable más general que se puede construir con esos nuevos campos respetando todas las simetrías es [18]

$$\mathcal{L} = -\lambda \bar{L} H^C P_R s_- - M \bar{s}_+ P_R s_- - g_+ (\bar{N} P_L s_+) \Phi - g_- (\bar{N} P_L s_-) \Phi^C + h.c., \quad (4.1.3)$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_+ \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad H^C = \begin{pmatrix} H_0^* \\ -H_- \end{pmatrix}, \quad (4.1.4)$$

denotan, respectivamente, los usuales dobletes leptónico y de Higgs del modelo estándar.

La ruptura espontánea de simetría se realiza a través de los valores de expectación de vacío

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.1.5)$$

con $u \sim 100$ MeV y $v = 174$ GeV [55], lo que nos permite escribir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -\bar{L} \mathcal{M} L, \quad (4.1.6)$$

donde $\bar{L} = (\bar{\nu}_e, \bar{s}_-, \bar{P}_L s_+, \bar{N}_+, \bar{N}_-)$ y la matriz de masa está dada por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda v & 0 & 0 & 0 \\ \lambda v & 0 & M & 0 & g_- u \\ 0 & M & 0 & g_+ u & 0 \\ 0 & 0 & g_+ u & 0 & 0 \\ 0 & g_- u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.7)$$

Diagonalizando esta matriz de masa (ver Apéndice D.1) se obtiene un neutrino sin masa ν'_e , dos neutrinos de Dirac ψ_\pm con número leptónico $L = 1$ y masas [18]

$$M_\pm = \left\{ \frac{1}{2} \left[\bar{M}^2 \pm \sqrt{\bar{M}^4 - 4g_+^2 u^2 (\lambda^2 v^2 + g_-^2 u^2)} \right] \right\}^{1/2}, \quad \bar{M}^2 = M^2 + \lambda^2 v^2 + (g_-^2 + g_+^2) u^2, \quad (4.1.8)$$

y dos neutrinos ψ'_\pm con número leptónico $L = -1$ y masas M_\pm (ver Apéndice D.2). La conservación del número leptónico permite solamente el acoplamiento entre neutrinos con $L = 1$, para compensar el $L = -2$ debido al majorón. Entonces, los resultados pueden

expresarse en términos de (ν'_e, ψ_-, ψ_+) , que se relacionan con los estados $(\nu_e, N_+, P_L s_+)$ a través de una matriz unitaria general del tipo de Kobayashi-Maskawa [48] (ver Apéndice D.2)

$$\begin{aligned}\nu_e &= c_\theta \nu'_e + s_\theta c_\alpha \psi_- + s_\theta s_\alpha \psi_+, \\ N_+ &= -s_\theta \nu'_e + c_\theta c_\alpha \psi_- + c_\theta s_\alpha \psi_+, \\ P_L s_+ &= s_\alpha \psi_- - c_\alpha \psi_+, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

donde $s_\theta = \text{sen}\theta$, $c_\theta = \text{cos}\theta$, etc., denotan los ángulos de mezcla con [18]

$$\tan \theta = \frac{\lambda v}{g_- u}; \quad \tan 2\alpha = \frac{2M\sqrt{\lambda^2 v^2 + g_-^2 u^2}}{M^2 - \lambda^2 v^2 + (g_+^2 - g_-^2)u^2}. \quad (4.1.10)$$

Introduciendo (4.1.9) en (4.1.6), vemos que el acoplamiento neutrinos-majorón dentro del MMC puede describirse mediante una interacción de la forma [18]

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{i}{2} \sum_{\ell\ell'=1}^3 b_{\ell\ell'} \bar{N}_\ell P_R N_{\ell'} \Phi_M + h.c., \quad (4.1.11)$$

con la matriz

$$b_{\ell\ell'} = \frac{ig_+}{2} \begin{pmatrix} 0 & s_\theta s_\alpha & -s_\theta c_\alpha \\ s_\theta s_\alpha & -c_\theta s_{2\alpha} & c_\theta c_{2\alpha} \\ -s_\theta c_\alpha & c_\theta c_{2\alpha} & c_\theta s_{2\alpha} \end{pmatrix}. \quad (4.1.12)$$

Para simplificar la notación hemos designado con N_1 , N_2 y N_3 los operadores de campo de los autoestados de masa ν'_e , ψ_- y ψ_+ , respectivamente, y con Φ_M el del majorón.

Notemos finalmente que, por comparación de las Ecs. (4.1.9) y (A.1.19), obtenemos los siguientes elementos de la matriz de mezcla dentro del MMC

$$U_{e1} = c_\theta, \quad U_{e2} = s_\theta c_\alpha, \quad U_{e3} = s_\theta s_\alpha. \quad (4.1.13)$$

4.2 Amplitud, probabilidad de transición y vida-media.

La vida-media del decaimiento exótico con emisión de majorón cargado $\beta\beta_{MC}$ está dada por

$$[T_{MC}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = \frac{\Gamma_{MC}}{\ln 2}. \quad (4.2.1)$$

La probabilidad de transición diferencial para el intervalo de impulsos dp_1 y dp_2 de los electrones y dk del majorón está dada por

$$d\Gamma_{MC} = 2\pi \int |R_{MC}|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + k - Q) \frac{dp_1}{(2\pi)^3} \frac{dp_2}{(2\pi)^3} \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (4.2.2)$$

donde el símbolo \mathcal{f} representa tanto la suma sobre las proyecciones de espín como la integración sobre el impulso del majorón y las direcciones de los electrones. La restante notación es la usual. La amplitud de transición R_{MC} se evalúa a través de la matriz-S para el proceso de la Fig. 5, derivada de la interacción (4.1.11) [42, 61]:

$$\begin{aligned}
S_{MC} &= -i \frac{G^2}{2} \sum_N \sum_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} b_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} U_{e\ell} U_{e\ell'} \int d^4x d^4y d^4z \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \langle F | T [J_L^{\rho\dagger}(x) J_L^{\sigma\dagger}(y)] | I \rangle \\
&\times \frac{e^{-iq_1(x-z)} e^{ikz} e^{-iq_2(z-y)}}{q_1^2 - m_\ell^2 + i\epsilon \sqrt{2k_0} q_2^2 - m_\ell^2 + i\epsilon} \\
&\times e^{i(\epsilon_1 x_0 + \epsilon_2 y_0)} \bar{\psi}(\epsilon_1, \mathbf{x}) \gamma_\rho P_L (\not{q}_1 + m_\ell) P_R (\not{q}_2 + m_\ell) P_L \gamma_\sigma \psi^c(\epsilon_2, \mathbf{y}), \quad (4.2.3)
\end{aligned}$$

donde T es el ordenador temporal, $x \equiv (x_0, \mathbf{x})$, y la corriente $J_{L\rho}^\dagger(x)$ es tal que

$$\langle F | J_{L\rho}^\dagger(x) | N \rangle = e^{i(E_F - E_N)x_0} \langle F | J_{L\rho}^\dagger(\mathbf{x}) | N \rangle, \quad (4.2.4)$$

para dos estados arbitrarios cualesquiera $|F\rangle$ y $|N\rangle$. Hemos empleado la Ec. (A.1.17) para la función de onda del majorón. Realizando las integraciones en x_0 , y_0 y luego z y q_2 , después de introducir un conjunto completo de estados intermedios $|N\rangle$ a través de la relación de clausura $\sum_N |N\rangle \langle N| = 1$, obtenemos la siguiente expresión para la amplitud de transición (ver Apéndice D.3)

$$R_{MC} = ig_+ \frac{G^2}{2\sqrt{2}} s_\theta s_{2\theta} s_{2\alpha} \sqrt{k} h_\alpha \bar{\psi}(\epsilon_1, 0) P_R \psi^c(\epsilon_2, 0), \quad (4.2.5)$$

donde sólo hemos retenido la contribución más importante proveniente de la onda $S_{1/2}$ ($\psi(\epsilon, \mathbf{x}) \simeq \psi^{(S)}(\epsilon, \mathbf{x}) \equiv \psi(\epsilon, 0)$), y hemos definido

$$h_\alpha = i\mu \sum_N \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{M_R(\mathbf{q}, N)}{(q_0^2 - \mu^2 + i\epsilon)} (P_- - P_+) (P_0 - s_\alpha^2 P_+ - c_\alpha^2 P_-), \quad (4.2.6)$$

con $P_i = (q^2 - M_i^2 + i\epsilon)^{-1}$, $M_0 \equiv 0$. Aquí

$$\begin{aligned}
M_R(\mathbf{q}, N) &= -2\mathbf{q} \cdot \left[\langle F | \mathbf{j}_A(-\mathbf{q}) | N \rangle \langle N | \rho_A(\mathbf{q}) | I \rangle + i \langle F | \mathbf{j}_A(-\mathbf{q}) | N \rangle \times \langle N | \mathbf{j}_V(\mathbf{q}) | I \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle F | \mathbf{j}_V(-\mathbf{q}) | N \rangle \langle N | \rho_V(\mathbf{q}) | I \rangle \right], \quad (4.2.7)
\end{aligned}$$

son los momentos nucleares dependientes de \mathbf{q} y N definidos a partir de las transformadas de Fourier (3.1.10), y $\mu \equiv \langle \omega_N \rangle$ es un valor promedio para la energía de excitación (3.1.17) del núcleo intermedio.

De la Ec. (4.2.5) es claro que la amplitud es máxima si $s_{2\alpha} = 1$, por lo cual asumiremos ese valor. Más aún, el ángulo de mezcla θ típicamente está restringido a ser pequeño [17], de manera que tomaremos $s_\theta \simeq \theta$. Utilizando la propiedad

$$\int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{i\mu}{(q_0^2 - \mu^2 + i\epsilon)} P_i P_j = \frac{\omega_i + \omega_j + \mu}{2\omega_i \omega_j (\omega_i + \omega_j) (\omega_i + \mu) (\omega_j + \mu)}, \quad (4.2.8)$$

con $\omega_i = \sqrt{q^2 + M_i^2}$, resulta

$$R_{MC} = ig_{MC} \frac{G^2}{8\pi\sqrt{2}} \sqrt{k} \mathcal{M}_{MC} \bar{\psi}(\epsilon_1, 0) P_R \psi^c(\epsilon_2, 0), \quad (4.2.9)$$

donde [40, 41]

$$g_{MC} = g_+ \theta^2 / 2, \quad (4.2.10)$$

y

$$\mathcal{M}_{MC} = \mathcal{M}_{MC}^+ - \mathcal{M}_{MC}^-, \quad \mathcal{M}_{MC}^\pm = \frac{1}{4\pi} \sum_N \int d\mathbf{q} v(q; M_\pm) \mathcal{M}_R(\mathbf{q}, N), \quad (4.2.11)$$

son los elementos de matriz nucleares para la emisión del majorón cargado correspondientes al intercambio de dos neutrinos con masas M_\pm . Aquí [41]

$$v(q; M_\pm) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{M_\pm^2} \left[\frac{1}{\omega_\pm(\omega_\pm + \mu)} - \frac{1}{q(q + \mu)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial M_\pm^2} \frac{1}{\omega_\pm(\omega_\pm + \mu)} \right\}. \quad (4.2.12)$$

Realizando las sumas e integraciones indicadas en (4.2.2), y usando la onda-S de la Ec. (A.1.4), obtenemos

$$d\Gamma_{MC} = \frac{g_{MC}^2 G^4}{128\pi^7} |\mathcal{M}_{MC}|^2 d\Omega_{MC}, \quad (4.2.13)$$

donde el factor de fase está dado por

$$d\Omega_{MC} = (Q - \epsilon_1 - \epsilon_2)^3 \prod_{k=1}^2 p_k \epsilon_k F_0(Z, \epsilon_k) d\epsilon_k. \quad (4.2.14)$$

Finalmente derivamos las expresiones para el espectro de energía

$$\frac{d\Gamma_{MC}}{d\epsilon} = \frac{g_{MC}^2 G^4}{240\pi^7} \mathcal{F}_{MC}(\epsilon) |\mathcal{M}_{MC}|^2, \quad (4.2.15)$$

donde

$$\mathcal{F}_{MC}(\epsilon) = \frac{15}{8} (Q - \epsilon)^3 \int_1^{\epsilon-1} d\epsilon_1 p_1 \epsilon_1 p_2 \epsilon_2 F_0(Z, \epsilon_1) F_0(Z, \epsilon_2). \quad (4.2.16)$$

Para la vida-media obtenemos [40, 41]

$$[T_{MC}(0^+ \rightarrow 0^+)]^{-1} = g_{MC}^2 \mathcal{G}_{MC} |\mathcal{M}_{MC}|^2, \quad (4.2.17)$$

donde

$$\mathcal{G}_{MC} = \frac{G^4}{240\pi^7 \ln 2} \int d\epsilon \mathcal{F}_{MC}(\epsilon), \quad (4.2.18)$$

es el factor cinemático en unidades naturales.

4.3 Expansión multipolar y reacoplamiento de impulsos angulares.

La forma explícita del factor de forma definido en (4.2.7), una vez que se realizan las integraciones en dx y dy , es:

$$\mathbf{M}_R(\mathbf{q}, N) = \mathbf{M}_R^{AA}(\mathbf{q}, N) + \mathbf{M}_R^{AV}(\mathbf{q}, N) + \mathbf{M}_R^{VV}(\mathbf{q}, N), \quad (4.3.1)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R^{AA}(\mathbf{q}, N) &= \frac{g_A^2}{M_N} \left[\langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{q} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{q} | I \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{q} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{p}_m | I \rangle \right], \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R^{AV}(\mathbf{q}, N) &= -\frac{g_A g_V}{M_N} \left\{ 2i\mathbf{q} \cdot \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \boldsymbol{\sigma}_n | N \rangle \times \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \mathbf{p}_m | I \rangle \right. \\ &\quad + f_w \left[\langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{q} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \boldsymbol{\sigma}_m \cdot \mathbf{q} | I \rangle \right. \\ &\quad \left. \left. - q^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \boldsymbol{\sigma}_n | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \boldsymbol{\sigma}_m | I \rangle \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R^{VV}(\mathbf{q}, N) &= -\frac{g_V^2}{M_N} \left[2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \mathbf{p}_n | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \mathbf{q} | I \rangle \right. \\ &\quad \left. + q^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Es importante recalcar aquí que podríamos adoptar la siguiente aproximación [40, 41]

$$\mathbf{M}_R(\mathbf{q}, N) \cong g_A \frac{q^2}{3M_N} (2g_V f_w + g_A) \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \boldsymbol{\sigma}_n | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \boldsymbol{\sigma}_m | I \rangle, \quad (4.3.5)$$

que fue hecha en otro contexto por Doi *et al.*, [61] y usada también en Ref. [65]. Para ese procedimiento, que básicamente significa despreciar en Ec. (4.3.1) todos los términos que contienen el impulso del nucleón, el término $g_V^2 q^2$, y usar la relación [41]

$$\sigma_n \cdot \mathbf{q} \sigma_m \cdot \mathbf{q} \cong \frac{1}{3} q^2 \sigma_n \cdot \sigma_m, \quad (4.3.6)$$

se dieron diferentes justificaciones. Sin embargo, los impulsos de los nucleones son necesariamente del mismo orden que el impulso transferido q , y desde este punto de vista la validez de la estimación (4.3.5) es cuestionable y debería ser verificada numéricamente. Para esto aplicaremos el formalismo desarrollado en la Sección 3.2 al factor de forma $M_R(\mathbf{q}, N)$.

Como fue descrito en la Sección 3.2 para el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$, el punto de partida para la expansión multipolar es usar la relación de Fourier-Bessel (3.2.1) en las Ecs. (4.3.2) - (4.3.4), realizar el reacoplamiento de impulsos angulares, y reescribir los momentos nucleares en término de los operadores tensoriales de un-cuerpo (3.2.2) y el nuevo operador

$$\mathbb{T}_{JM}(q) = \sum_n \tau_n^+ j_J(qr_n) Y_{JM}(\hat{\mathbf{r}}_n) \sigma_n \cdot \mathbf{p}_n. \quad (4.3.7)$$

Finalmente, se realiza la integración angular en $d\Omega_q$. De esa manera obtenemos [41] (para más detalles, ver el ejemplo mostrado en el Apéndice B.3)

$$\mathcal{M}_{MC}^\pm = \mathcal{M}_{MC}^{AA\pm} + \mathcal{M}_{MC}^{AV\pm} + \mathcal{M}_{MC}^{VV\pm}, \quad (4.3.8)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{MC}^{AA\pm} &= -\frac{4\pi g_A^2}{M_N} \sum_{LL'JN} i^{L+L'} \int v(q; M_\pm) q^3 dq \langle F | S_{LLJ}^0(q) | N \rangle \cdot \\ &\quad \left[q(-1)^J (J1|L)(J1|L') \langle N | S_{L'L'J}^0(q) | I \rangle + 2\delta_{LL'} i^{L+J} (J1|L) \langle N | \mathbb{T}_J(q) | I \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{MC}^{AV\pm} &= \frac{4\pi g_A g_V}{M_N} \sum_{LL'JN} i^{L+L'} (-1)^J \int v(q; M_\pm) q^3 dq \langle F | S_{LLJ}^0(q) | N \rangle \cdot \\ &\quad \times \left\{ -f_w q \left[\delta_{LL'} - (J1|L)(J1|L') \right] \langle N | S_{L'L'J}^0(q) | I \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{6} (-1)^{L+J} \hat{L} \left\{ \begin{matrix} L & J & 1 \\ 1 & 1 & L' \end{matrix} \right\} (L1|L') \langle N | P_{L'J}(q) | I \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{MC}^{VV\pm} &= -\frac{4\pi g_V^2}{M_N} \sum_{LJN} \int v(q; M_\pm) q^3 dq \langle F | Y_{JJ}^0(q) | N \rangle \cdot \\ &\quad \times \left[k\delta_{LJ} \langle N | Y_{JJ}^0(q) | I \rangle + 2i^{L+J} (-1)^L (J1|L) \langle N | P_{LJ}(q) | I \rangle \right], \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

donde la notación es la misma que en las Ecs. (3.2.3) - (3.2.9). Dentro de la aproximación (4.3.5) el elemento de matriz total se simplifica de la siguiente manera [40]

$$\mathcal{M}_{MC}^{\pm} \cong \frac{4\pi g_A(2g_V f_W + g_A)}{3M_N} \sum_{LJN} (-1)^{1+L+J} \int v(q; M_{\pm}) q^4 dq \langle F | S_{LLJ}^0(q) | N \rangle \cdot \langle N | S_{LLJ}^0(q) | I \rangle. \quad (4.3.12)$$

En la Sección 5.2 evaluaremos el elemento de matriz exacto (4.3.8) - (4.3.11) y el aproximado (4.3.12) para comparar ambos resultados.

Los resultados derivados hasta ahora son válidos independientemente del modelo nuclear usado. La evaluación de estos elementos de matriz requiere, como en el caso $\beta\beta_{0\nu}$, el cálculo del producto escalar (3.2.10) y la integración sobre el impulso del neutrino q . Por este motivo los cálculos de estructura nuclear pueden ser realizados aplicado el procedimiento descrito en la Sección 3.3, y utilizando el siguiente factor de forma reducido de partícula independiente entre estados de protón y neutrón para el nuevo operador de un-cuerpo definido en (4.3.7) [41, 53, 54]:

$$\langle p || T_J(q) || n \rangle = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[V_J^{(-)}(pn) R_J^{(-)}(pn; q) + V_J^{(+)}(pn) R_J^{(+)}(pn; q) \right], \quad (4.3.13)$$

con las partes angulares

$$\begin{aligned} V_J^{(\pm)}(pn) &= \mp i (-1)^{l_n + j_n + J + \frac{1}{2}} \sqrt{6} \hat{j}_p \hat{j}_n (l_n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} (l_p J | l_n \mp 1) \\ &\times \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ j_n & l_n & l_n \mp 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} l_n \mp 1 & j_n & \frac{1}{2} \\ j_p & l_p & J \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

y las partes radiales $R_J^{(\pm)}(pn; q)$ definidas en Ec. (3.3.9).

5 Resultados Numéricos

En esta Sección presentamos los resultados numéricos para los factores cinemáticos y elementos de matriz que intervienen en los decaimientos beta doble exóticos $\beta\beta_{0\nu}$ y $\beta\beta_{MC}$ y estándar $\beta\beta_{2\nu}$, para los siguientes núcleos de interés experimental: ^{48}Ca , ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{128}Te y ^{130}Te . Discutimos también la contribución de los diferentes términos al espectro de energías de dos electrones y la vida-media.

Los elementos de matriz se evalúan dentro de la QRPA siguiendo el procedimiento descrito en el Apéndice C, es decir, usando una interacción residual tipo- δ con diferentes constantes v_s y v_t para los canales partícula-agujero (ph), partícula-partícula (pp) y apareamiento (pair). Para la discusión que sigue más adelante necesitaremos los parámetros s y t , definidos como los cocientes entre las constantes de acoplamiento $T = 1, S = 0$ y $T = 0, S = 1$ en los canales pp y las constantes de la fuerza de apareamiento, es decir

$$s = 2v_s^{pp}/[v_s^{pair}(p) + v_s^{pair}(n)], \quad t = 2v_t^{pp}/[v_s^{pair}(p) + v_s^{pair}(n)].$$

Para los valores $s \cong 1$ y $t \cong t_{sym}$ se obtiene la máxima restauración de las simetrías de isoespín y SU(4), respectivamente, dentro de la QRPA [55, 56, 66]. Las constantes de interacción protón-neutrón $T = 1$ y $T = 0$ en el canal pp fueron fijadas siguiendo el procedimiento introducido en Ref. [56]. Nosotros usamos $s = 1$ y $t = 1.35, 1.25, 1.30, 1.50, 1.40$ y 1.40 para ^{48}Ca , ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{128}Te y ^{130}Te , respectivamente. En los núcleos ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{128}Te y ^{130}Te usamos un espacio de once niveles, incluyendo todos los orbitales de partícula independiente de las capas del oscilador $3\hbar\omega$ y $4\hbar\omega$, más los orbitales $0h_{9/2}$ y $0h_{11/2}$ de la capa $5\hbar\omega$. En el caso de ^{48}Ca trabajamos en un espacio de dimensión siete incluyendo todos los orbitales de las capas $2\hbar\omega$ y $3\hbar\omega$. Empleamos las energías de partícula independiente experimentales para los orbitales $1p_{1/2}$, $0f_{5/2}$, $1p_{3/2}$, $0f_{7/2}$, $1s_{1/2}$ y $0d_{3/2}$, mientras que para los restantes orbitales hemos asumido un espaciamiento de energía de partícula independiente de $\hbar\omega = 41 A^{-1/3}$ MeV.

5.1 Decaimiento beta doble sin emisión de neutrinos.

En esta Sección exponemos los resultados numéricos para dos cálculos diferentes:

- Cálculo con el modelo de un solo nivel (MSN).

Presentamos los cálculos en el modelo de capas para el decaimiento de ^{48}Ca dentro del MSN discutido en la Sección 3.5, y comparamos nuestros resultados con la evaluación realizada por Pantis y Vergados [67], donde emplean el formalismo desarrollado por Vergados en la Ref. [68]. Discutimos también la competencia entre los efectos de las correlaciones de corto alcance (CCA) y el tamaño finito del nucleón (TFN) sobre los momentos nucleares.

- Cálculo de QRPA.

Presentamos los cálculos de QRPA en espacios de configuración realistas para los núcleos ^{48}Ca , ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{128}Te y ^{130}Te . Dichos resultados son comparados con dos evaluaciones previas de QRPA: 1) los resultados obtenidos por Muto, Bender y Klapdor (MBK) [22], donde se usó el formalismo de Doi, Kotani y Takasugi [42], y 2) los cálculos realizados por Pantis, Šimkovic, Vergados y Faessler (PSVF) [23] en el marco del formalismo desarrollado por Vergados [68].

En la mayoría de los estudios previos se ha usado la constante de acoplamiento axial desnuda $g_A = 1.254$ [20, 21, 22, 23, 24]. Con propósitos de comparación, en esta Sección adoptaremos ese valor, a pesar de que la constante efectiva $g_A = 1$ es preferible en física nuclear [47, 69].

Cálculo con el MSN

Para acercarnos tanto como sea posible a los resultados de Pantis y Vergados [67], usamos la misma función de onda que han empleado ellos en su trabajo para el estado final $|0_f^+\rangle$. Esta función de onda se presenta en la Tabla 5 junto con los valores resultantes para la densidad $\rho^{ph}(J^+)$ dada en la Ec. (3.5.1). Notemos que $\rho^{ph}(0^+)$ y $\rho^{ph}(1^+)$ son relativamente pequeñas debido a la restauración de las simetrías de isospín y SU(4), respectivamente. Sus

valores de partícula independiente (Hartree-Fock), obtenidos con $\langle 0_f^+ | 0^+ \rangle = 1$, son mucho más grandes que los valores mostrados en la Tabla 5 ($\rho^{ph}(0^+) = -\rho^{ph}(1^+) = -0.25$). Por otro lado, ellos son idénticamente nulos cuando las simetrías son restauradas totalmente.

Tabla 5: Amplitudes $\langle 0_f^+ | J^+ \rangle$ para la función de onda del estado fundamental en ^{48}Ti y los correspondientes coeficientes $\rho^{ph}(J^+)$ dados en la Ec. (3.5.1).

J^+	$\langle 0_f^+ J^+ \rangle$	$\rho^{ph}(J^+)$
0^+	0.9433	-0.0005
1^+	—	0.0426
2^+	-0.3126	0.1159
3^+	—	0.2098
4^+	-0.1092	0.3072
5^+	—	0.3533
6^+	0.0231	0.3017
7^+	—	0.1186

Las CCA y los efectos de TFN se introducen en la forma discutida en la Sección 3.4. Los resultados para los elementos de matriz nucleares de la Ec. (3.5.3) se comparan con los obtenidos por Pantis y Vergados [67] en la Tabla 6, donde se presentan cuatro cálculos diferentes: 1) (*DESNUDO*) sin correlaciones y sin factor de forma nuclear, 2) (*TFN*) sin correlaciones pero con factor de forma nuclear, 3) (*CCA*) correlaciones de corto alcance pero sin factor de forma nuclear, y 4) (*TFN+CCA*) con correlaciones y con factor de forma nuclear. En la Ref. [67] se usó una aproximación diferente para las CCA y entonces es posible que nuestros elementos de matriz no sean exactamente iguales a los suyos en el segundo y cuarto caso. En los otros dos casos ellos deberían ser idénticos, pero no lo son! La diferencia es particularmente pronunciada para los elementos de matriz de retroceso M_R . La razón de las discrepancias podrían ser los valores usados para el parámetro del oscilador armónico $\nu = M_N \omega_{osc}$, con $\omega_{osc} \simeq 80A^{-1/3}$, y el radio nuclear R ; nosotros utilizamos $\nu = 0.916A^{-1/3} \text{ fm}^{-2}$ y $R = 1.2A^{1/3} \text{ fm}$.⁸

⁸Nuestras definiciones para los elementos de matriz $M_F, M_{F'}, M_{F\omega}$ y M_R concuerdan con las de Pantis y Vergados [67] sólo para $g_A = g_V$. Como hemos usado aquí $g_A = 1.254$, los resultados presentados en su Tabla 1 han sido renormalizados de manera acorde.

Tabla 6: Elementos de matriz nucleares de la Ec. (3.5.3) para el decaimiento $^{48}\text{Ca} \rightarrow ^{48}\text{Ti}$, calculados dentro del modelo de capas en un solo nivel. Hemos usado $\omega_{J_{\pi}} = 0$ y presentamos cuatro resultados diferentes: 1) (*DESNUDO*) sin correlaciones y sin factor de forma nuclear, 2) (*TFN*) sin correlaciones pero con factor de forma nuclear, 3) (*CCA*) correlaciones de corto alcance pero sin factor de forma nuclear, y 4) (*TFN+CCA*) con correlaciones y con factor de forma nuclear.

	M_{GT}	M_F	$M_{GT\omega}$	$M_{F\omega}$	$M_{GT'}$	$M_{F'}$	M_R	M_T
Resultados Presentes								
DESNUDO	-1.168	0.177	-1.168	0.177	-1.168	0.177	-1.435	0.330
CCA	-1.080	0.159	-1.080	0.159	-0.657	0.073	-0.105	0.284
TFN	-0.960	0.134	-0.960	0.134	-0.644	0.066	-0.929	0.312
TFN+CCA	-0.947	0.130	-0.947	0.130	-0.574	0.052	-0.796	0.309
Pantis & Vergados [67]								
DESNUDO	-1.216	0.185	-1.216	0.185	-1.216	0.185	-2.178	0.344
CCA	-0.859	0.108	-0.856	0.108	-0.841	0.105	-0.115	0.346
TFN	-0.986	0.134	-0.986	0.136	-0.635	0.063	-1.344	0.322
TFN+CCA	-0.731	0.117	-0.731	0.098	-0.532	0.055	-0.324	0.330

Es interesante notar que en ambos cálculos los efectos de TFN y CCA actúan coherentemente sobre los momentos de Fermi (F) y Gamow-Teller (GT), en el sentido de que sus efectos combinados siempre los disminuyen más que cuando actúan individualmente. Sin embargo, esto no ocurre con M_R , en cuyo caso los valores TFN+CCA son significativamente mayores que los de CCA. La explicación de este comportamiento curioso del elemento de matriz de retroceso fue dada por Tomoda *et al* [43], y es la siguiente. La contribución del magnetismo-débil en (3.3.14) puede descomponerse en una parte central y una tensorial. La parte central es la dominante y, dentro de la aproximación de clausura y para $\omega_{J_{\pi}} = 0$, puede ser reescrita en la forma: ⁹

$$M_{RC}(DESNUDO) = -\frac{4\pi R^2}{3M_N} \frac{f_w g_v}{g_A} \langle F | \sum_{mn} \tau_m^+ \tau_n^+ \sigma_m \cdot \sigma_n \delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n) | I \rangle, \quad (5.1.1)$$

⁹Hemos usado la siguiente relación:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{2}{\pi} \sum_{lm} Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}') \int k^2 dk j_l(kr) j_l(kr').$$

Este elemento de matriz es totalmente eliminado por las CCA (3.4.1) ya que

$$M_{RC}(CCA) = -\frac{4\pi R^2}{3M_N} \frac{f_w g_V}{g_A} \langle F | \sum_{mn} \tau_m^+ \tau_n^+ \sigma_m \cdot \sigma_n \delta(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n) f_{cca}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n) | I \rangle \equiv 0. \quad (5.1.2)$$

La dependencia en q^2 de los factores de forma (3.4.2) distribuye la función- δ sobre una región finita [43, 70], esto es

$$\delta(\mathbf{r}) \xrightarrow{TFN} \frac{\Lambda^3}{64\pi} e^{-\Lambda r} \left[1 - \Lambda r + \frac{1}{3}(\Lambda r)^2 \right]. \quad (5.1.3)$$

Por lo tanto el elemento de matriz (5.1.2) decrece ($M_{RC}(TFN) \leq M_{RC}(DESNUDC)$) y $M_{RC}(TFN + CCA) \neq 0$.

Cálculo de QRPA

Los resultados para los elementos de matriz nucleares calculados a partir de las Ecs. (3.3.10) - (3.3.16) dentro de la aproximación de QRPA se comparan en la Tabla 7 con los obtenidos por MBK y PSVF. En ambos trabajos se emplearon espacios de configuración similares a los nuestros, y el efecto de TFN fue incluido de la misma manera (ver Ec. (3.4.2)). Sin embargo, hay dos diferencias que en principio podrían ser importantes: i) en vez de la interacción- δ , ellos usan la matriz-G (derivada del potencial nucleón-nucleón) como interacción residual, y ii) su función de correlación no está dada por la Ec. (3.4.1). A pesar de estas diferencias nuestros resultados concuerdan sorprendentemente bien con los obtenidos por MBK, excepto para M_T y M_P .¹⁰ La mayor diferencia se halla en ^{100}Mo , pero sabemos que este es en núcleo "difícil" desde el punto de vista de la estructura nuclear¹¹. El acuerdo con el cálculo de PSVF es bueno solamente en el caso de momentos de Gamow-Teller. Nótese que lo mismo se puede decir de la concordancia entre los resultados de MBK y PSVF.

¹⁰Excepto por el momento tensorial M_T , los elementos de matriz MBK concuerdan muy bien con los obtenidos por Tomoda y Faessler [21]. Estos autores no han evaluado M_T , ya que previamente habían obtenido un valor despreciable para él [43] en una aproximación de campo-medio proyectado.

¹¹Desde el punto de vista teórico los elementos de matriz nucleares en ^{100}Mo son en algún sentido peculiares, debido al gran predominio de la configuración $[0g_{7/2}(n)0g_{9/2}(p)]_{J^{\pi}=1+}$ [59, 71].

Tabla 7: Elementos de matriz nucleares calculados a partir de las Ecs. (3.3.10) - (3.3.16) dentro de la aproximación de QRPA. Los resultados incluyen ambos efectos de TFN y CCA. Hemos usado una energía de excitación promedio $\langle \omega_{J\alpha} \rangle$ de 5.0 MeV.

Núcleo	M_{GT}	M_F	$M_{GT\omega}$	$M_{F\omega}$	$M_{GT'}$	$M_{F'}$	M_R	M_T	M_P	
^{48}Ca	Presente	-0.953	0.376	-1.010	0.361	-0.022	0.203	-1.888	-0.033	0.075
	Ref. [23]	-0.785	0.367	-0.830	0.343	-0.765	0.395	-1.522	0.166	-0.131
^{76}Ge	Presente	-2.845	0.749	-2.864	0.723	-0.837	0.371	-4.863	-0.065	-0.889
	Ref. [22]	-3.014	1.173	-2.912	1.025	-1.945	1.058	-3.594	0.612	0.530
	Ref. [23]	-2.929	0.111	-2.683	0.111	-3.154	0.102	-7.423	0.714	-3.360
^{82}Se	Presente	-2.717	0.800	-2.769	0.771	-0.603	0.398	-5.147	-0.061	-0.754
	Ref. [22]	-2.847	1.071	-2.744	0.939	-1.886	0.966	-3.343	0.789	0.500
	Ref. [23]	-2.212	0.018	-2.124	0.029	-2.323	0.009	-3.700	-0.175	0.108
^{100}Mo	Presente	-2.155	0.972	-2.363	0.935	0.354	0.493	-6.150	-0.233	1.265
	Ref. [22]	-0.763	1.356	-1.330	1.218	1.145	1.161	-4.528	0.823	-1.182
	Ref. [23]	-0.615	0.471	-0.420	0.436	-0.722	0.512	-0.930	0.293	2.393
^{128}Te	Presente	-3.417	1.019	-3.476	0.980	-0.835	0.451	-6.354	-0.136	-0.560
	Ref. [22]	-3.103	1.184	-3.011	1.047	-1.999	1.054	-4.371	0.583	0.483
	Ref. [23]	-2.437	0.044	-2.179	0.029	-2.673	0.054	-1.522	0.748	-3.412
^{130}Te	Presente	-3.225	0.978	-3.271	0.938	-0.819	0.448	-5.934	-0.118	-0.560
	Ref. [22]	-2.493	0.977	-2.442	0.867	-1.526	0.860	-3.736	0.574	0.387
	Ref. [23]	-2.327	0.009	-2.083	-0.002	-2.553	0.016	-5.445	0.656	-3.376

Los coeficientes C_{ij} , definidos en la Ec. (3.1.22) y evaluados con los elementos de matriz de la Tabla 7, se comparan en la Tabla 8. En nuestros cálculos hemos usado los factores cinemáticos de Ref. [42]. Obviamente todas las diferencias mencionadas previamente entre los elementos de matriz se reflejan sobre los valores calculados C_{ij} . Sin embargo, las discrepancias entre los valores en la misma columna de la Tabla 8 es menor que entre aquellos de la Tabla 7. Esto es porque el efecto de los elementos de matriz M_T y M_P es comparativamente pequeño.

Tabla 8: Coeficientes C_{ij} definidos en la Ec. (3.1.22) (en unidades de años⁻¹), evaluados con los elementos de matriz de la Tabla 7. Hemos usado los factores cinemáticos de Ref. [42].

Núcleo		C_{mm}	$C_{\lambda\lambda}$	$C_{\eta\eta}$	$C_{m\lambda}$	$C_{m\eta}$	$C_{\lambda\eta}$
⁴⁸ Ca	Presente	1.13 10 ⁻¹³	7.42 10 ⁻¹³	1.47 10 ⁻⁸	-9.94 10 ⁻¹⁴	2.56 10 ⁻¹¹	-8.10 10 ⁻¹³
	Ref. [23]	1.07 10 ⁻¹³	3.68 10 ⁻¹³	6.63 10 ⁻¹⁰	-4.75 10 ⁻¹⁴	-5.20 10 ⁻¹²	-3.43 10 ⁻¹³
	Presente	8.27 10 ⁻¹⁴	1.26 10 ⁻¹³	8.20 10 ⁻⁹	-4.61 10 ⁻¹⁴	2.56 10 ⁻¹¹	-1.57 10 ⁻¹³
⁷⁶ Ge	Ref. [22]	1.12 10 ⁻¹³	1.36 10 ⁻¹³	4.44 10 ⁻⁹	-4.11 10 ⁻¹⁴	2.19 10 ⁻¹¹	-4.99 10 ⁻¹⁴
	Ref. [23]	7.33 10 ⁻¹⁴	1.12 10 ⁻¹³	3.22 10 ⁻⁹	-4.49 10 ⁻¹⁴	-1.54 10 ⁻¹¹	-2.11 10 ⁻¹³
	Presente	3.48 10 ⁻¹³	1.14 10 ⁻¹²	3.65 10 ⁻⁸	-2.47 10 ⁻¹³	8.83 10 ⁻¹¹	-1.39 10 ⁻¹²
⁸² Se	Ref. [22]	4.33 10 ⁻¹³	1.01 10 ⁻¹²	1.54 10 ⁻⁸	-1.60 10 ⁻¹³	6.37 10 ⁻¹¹	-3.84 10 ⁻¹³
	Ref. [23]	1.75 10 ⁻¹³	4.78 10 ⁻¹³	1.53 10 ⁻⁹	-8.77 10 ⁻¹⁴	-1.31 10 ⁻¹¹	-9.32 10 ⁻¹³
	Presente	4.47 10 ⁻¹³	1.93 10 ⁻¹²	6.58 10 ⁻⁸	-4.22 10 ⁻¹³	1.32 10 ⁻¹⁰	-2.03 10 ⁻¹²
¹⁰⁰ Mo	Ref. [22]	2.05 10 ⁻¹³	1.05 10 ⁻¹²	3.50 10 ⁻⁸	-1.61 10 ⁻¹³	6.48 10 ⁻¹¹	7.03 10 ⁻¹³
	Ref. [23]	6.77 10 ⁻¹⁴	3.28 10 ⁻¹⁴	2.91 10 ⁻⁹	-5.64 10 ⁻¹⁵	-1.11 10 ⁻¹¹	2.45 10 ⁻¹⁴
	Presente	3.60 10 ⁻¹⁴	1.12 10 ⁻¹⁴	3.14 10 ⁻⁹	-1.10 10 ⁻¹⁴	1.42 10 ⁻¹¹	-1.25 10 ⁻¹⁴
¹²⁸ Te	Ref. [22]	3.36 10 ⁻¹⁴	7.39 10 ⁻¹⁵	1.50 10 ⁻⁹	-4.86 10 ⁻¹⁵	9.46 10 ⁻¹²	-1.87 10 ⁻¹⁵
	Ref. [23]	1.36 10 ⁻¹⁴	4.32 10 ⁻¹⁵	8.17 10 ⁻¹⁰	-5.24 10 ⁻¹⁵	-4.73 10 ⁻¹²	-8.51 10 ⁻¹⁵
	Presente	7.83 10 ⁻¹³	1.97 10 ⁻¹²	5.66 10 ⁻⁸	-5.19 10 ⁻¹³	1.75 10 ⁻¹⁰	-2.34 10 ⁻¹²
¹³⁰ Te	Ref. [22]	5.34 10 ⁻¹³	1.05 10 ⁻¹²	2.25 10 ⁻⁸	-2.17 10 ⁻¹³	9.10 10 ⁻¹¹	-4.13 10 ⁻¹³
	Ref. [23]	3.02 10 ⁻¹³	7.44 10 ⁻¹³	1.61 10 ⁻⁸	-2.28 10 ⁻¹³	-6.24 10 ⁻¹¹	-1.49 10 ⁻¹²

Finalmente, en la Tabla 9 mostramos los límites sobre la masa de los neutrinos de Majorana $\langle m_\nu \rangle$ y las constantes de acoplamiento derechas $\langle \lambda \rangle$ y $\langle \eta \rangle$, deducidas a partir de los límites experimentales más recientes para las vidas-medias $\beta\beta_{0\nu}$, y nuestra evaluación de los elementos de matriz nucleares (ver Ec. (3.1.21)). Es importante recalcar que al calcular estos valores hemos usado el valor desnudo $g_A = 1.254$ para la constante de acoplamiento axial, y que los límites superiores para los términos que violan el número leptónico mostrados en la Tabla 9 no se renormalizan simplemente como g_A^4 .

Tabla 9: Vidas-medias experimentales para el decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$ y límites superiores sobre la masa del neutrinos de Majorana $\langle m_\nu \rangle$, y las constantes de acoplamiento derechas $\langle \lambda \rangle$ y $\langle \eta \rangle$.

Núcleo	$T_{0\nu}(exp)$ [años]	$ \langle m_\nu \rangle $ [eV]	$ \langle \lambda \rangle $	$ \langle \eta \rangle $
^{48}Ca	$> 1.1 \cdot 10^{22}$ a)	< 15	$< 1.1 \cdot 10^{-5}$	$< 7.9 \cdot 10^{-8}$
^{76}Ge	$> 1.2 \cdot 10^{25}$ b)	< 0.51	$< 8.1 \cdot 10^{-7}$	$< 3.2 \cdot 10^{-9}$
^{82}Se	$> 2.7 \cdot 10^{22}$ a,b)	< 5.3	$< 5.7 \cdot 10^{-6}$	$< 3.2 \cdot 10^{-8}$
^{100}Mo	$> 5.2 \cdot 10^{22}$ a,b,c)	< 3.4	$< 3.2 \cdot 10^{-6}$	$< 1.7 \cdot 10^{-8}$
^{128}Te	$> 7.7 \cdot 10^{24}$ d)	< 0.97	$< 3.4 \cdot 10^{-6}$	$< 6.4 \cdot 10^{-9}$
^{130}Te	$> 8.2 \cdot 10^{21}$ e)	< 6.4	$< 7.9 \cdot 10^{-6}$	$< 4.6 \cdot 10^{-8}$

a) (dato de laboratorio) Ref. [72]

b) (dato de laboratorio) Ref. [26]

c) (dato de laboratorio) Ref. [60]

d) (dato geoquímico) Ref. [73]

e) (dato de laboratorio) Ref. [74]

5.2 Decaimiento beta doble con emisión del majorón.

Los elementos de matriz del majorón cargado \mathcal{M}_{MC}^+ y \mathcal{M}_{MC}^- , definidos en la Ec. (4.2.11), se evalúan dentro de la QRPA usando las Ecs. (4.3.8) - (4.3.11). La dependencia del momento nuclear \mathcal{M}_{MC}^+ (\mathcal{M}_{MC}^-) con la masa del neutrino pesado M_+ (M_-), definida en la Ec. (4.1.8), se ilustra en Fig. 6 para el decaimiento $^{76}Ge \rightarrow ^{76}Se$. Como uno podría esperar, el elemento de matriz \mathcal{M}_{MC}^+ (\mathcal{M}_{MC}^-) es insensible a la masa M_+ (M_-) hasta que ésta comienza a exceder el valor del momento de Fermi de los nucleones, del orden de 100 MeV, dando después una supresión del tipo $1/M_+^2$ ($1/M_-^2$). Debido a que el elemento de matriz total \mathcal{M}_{MC} es la diferencia entre \mathcal{M}_{MC}^+ y \mathcal{M}_{MC}^- , a partir de la Fig. 6 uno puede obtener fácilmente el resultado para un par de masas M_+ y M_- arbitrarias tomando la diferencia entre los dos elementos de matriz correspondientes.

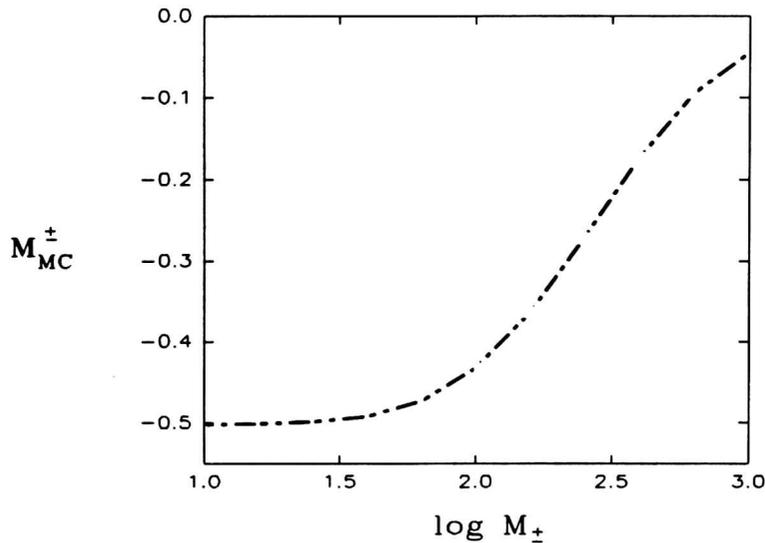


Figura 6: Elemento de matriz del majorón cargado \mathcal{M}_{MC}^+ (\mathcal{M}_{MC}^-) (en unidades naturales) para el decaimiento $^{76}\text{Ge} \rightarrow ^{76}\text{Se}$, como una función de la masa del neutrino pesado M_+ (M_-) (en unidades de MeV).

En particular, discutiremos dos casos para las masas de los neutrinos:

(i) $M_+ \simeq M_-$.

En este caso el elemento de matriz total \mathcal{M}_{MC} es fuertemente reducido debido a la interferencia destructiva entre los elementos de matriz \mathcal{M}_{MC}^+ y \mathcal{M}_{MC}^- . Esto ocurre, por ejemplo, eligiendo los parámetros λ , M , g_+ y g_- del modelo de majorón cargado (ver Ec. (4.1.3)) de la siguiente manera:

$$M = \lambda v, \quad \text{y} \quad g_+ = g_- = g,$$

en cuyo caso la Ec. (4.1.8) nos da

$$M_{\pm} = gu\sqrt{1 \pm \theta}.$$

El ángulo de mezcla θ está restringido experimentalmente a ser del orden de 0.1 ¹².

(ii) $M_+ \rightarrow \infty$ y $M_- \simeq 100$ MeV.

La Fig. 6 muestra que la situación más favorable para la emisión del majorón ocurre en el límite en que el neutrino pesado con masa M_+ se hace infinitamente masivo, $M_+ \rightarrow \infty$,

¹²Para una discusión de las restricciones experimentales ver Ref. [17].

no dando contribución al elemento de matriz \mathcal{M}_{MC}^+ . Para M_- usaremos 100 MeV, porque éste es el valor más grande que puede dar un elemento de matriz \mathcal{M}_{MC}^- no suprimido [40].

Tabla 10: Contribución de cada término de las Ecs. (4.3.2) - (4.3.4) al elemento de matriz total \mathcal{M}_{MC} del decaimiento $\beta\beta_{MC}$ en ${}^{76}\text{Ge}$, en el caso $M_+ \rightarrow \infty$ y $M_- = 100$ MeV.

Operador	BCS	QRPA-ph	QRPA-completa
$q^2 \sigma_n \cdot \sigma_m / M_N$	0.200	0.165	0.112
$\sigma_n \cdot \mathbf{q} \sigma_m \cdot \mathbf{q} / M_N$	0.067	0.055	0.037
$-q^2 / M_N$	0.067	0.049	0.035
$-2(\sigma_n \cdot \mathbf{q})(\sigma_m \cdot \mathbf{p}_m) / M_N$	-0.026	-0.014	0.007
$-2i\mathbf{q} \cdot \sigma_n \times \mathbf{p}_m / M_N$	0.016	0.014	-0.004
$-2\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{q} / M_N$	0.006	0.006	0.006

En la Tabla 10 mostramos la contribución de cada término de las Ecs. (4.3.2) - (4.3.4) al elemento de matriz total \mathcal{M}_{MC} del decaimiento $\beta\beta_{MC}$ en ${}^{76}\text{Ge}$, en el caso previamente discutido $M_+ \rightarrow \infty$ y $M_- = 100$ MeV. Mostramos tres resultados diferentes: i) los valores no perturbados o BCS (segunda columna), ii) los cálculos de QRPA cuando solamente se considera la interacción ph, es decir, con $s = t = 0$ (tercera columna) y iii) los cálculos de QRPA completos con $s = 1$ y $t = t_{sym} = 1.25$ (cuarta columna). A partir de los resultados para los operadores tipo Gamow-Teller

$$q^2 \sigma_n \cdot \sigma_m / M_N \quad \text{y} \quad \sigma_n \cdot \mathbf{q} \sigma_m \cdot \mathbf{q} / M_N$$

vemos que la aproximación (4.3.6) es buena. Es interesante notar que los operadores

$$-2\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{q} / M_N \quad \text{y} \quad -q^2 / M_N,$$

dan contribución para estados intermedios de paridad natural ($\pi = (-)^J$) en la Ec. (4.3.11), mientras que los operadores

$$q^2 \sigma_n \cdot \sigma_m / M_N, \quad \sigma_n \cdot \mathbf{q} \sigma_m \cdot \mathbf{q} / M_N, \quad -2(\sigma_n \cdot \mathbf{q})(\sigma_m \cdot \mathbf{p}_m) / M_N \quad \text{y} \quad -2i\mathbf{q} \cdot \sigma_n \times \mathbf{p}_m / M_N,$$

lo hacen para estados intermedios de paridad no-natural ($\pi = (-)^{J+1}$) en las Ecs. (4.3.9) y (4.3.10). Por último, en la Tabla 11 presentamos los resultados para las combinaciones

de los elementos de matriz $\mathcal{M}_{MC}^{AA\pm}$, $\mathcal{M}_{MC}^{AV\pm}$ y $\mathcal{M}_{MC}^{VV\pm}$, como también los cálculos exactos y aproximados, obtenidos a partir de las Ecs. (4.3.8) y (4.3.12), respectivamente. Las últimas dos filas muestran que la aproximación (4.3.12) es también buena [41]. Esto se debe a que las contribuciones provenientes de los operadores dependientes de la velocidad, como también del operador tipo Fermi q^2/M_N , son relativamente pequeñas.

Tabla 11: Combinaciones de los elementos de matriz para el decaimiento $\beta\beta_{MC}$ en ${}^{76}\text{Ge}$, evaluadas a partir de las Ecs. (4.3.9) - (4.3.11), en el caso $M_+ \rightarrow \infty$ y $M_- = 100$ MeV. Por completitud mostramos los resultados para los elementos de matriz exactos y aproximados, dados por las Ecs. (4.3.8) y (4.3.12), respectivamente.

Contribución	BCS	QRPA-ph	QRPA-completa
$\mathcal{M}_{MC}^{AA+} - \mathcal{M}_{MC}^{AA-}$	0.041	0.041	0.044
$\mathcal{M}_{MC}^{AV+} - \mathcal{M}_{MC}^{AV-}$	0.640	0.530	0.348
$\mathcal{M}_{MC}^{VV+} - \mathcal{M}_{MC}^{VV-}$	0.073	0.054	0.041
$\mathcal{M}_{MC}(\text{exacto})$	0.754	0.624	0.433
$\mathcal{M}_{MC}(\text{aprox})$	0.694	0.571	0.387

La Tabla 12 muestra la comparación de los resultados obtenidos dentro de la QRPA para los elementos de matriz exactos y aproximados, dados por las Ecs. (4.3.8) y (4.3.12) respectivamente, para varios núcleos que decaen por emisión beta doble. En todos los casos la magnitud de los elementos de matriz exactos es mayor que la de los aproximados por $\leq 15\%$ [41]. Por completitud, la tabla también muestra los factores cinemáticos \mathcal{G}_{MC} .

Tabla 12: Resultados para los elementos de matriz exactos y aproximados, dados por las Ecs. (4.3.8) y (4.3.12), respectivamente, en el caso $M_+ \rightarrow \infty$ y $M_- = 100$ MeV. Ambos canales ph y pp fueron considerados en los cálculos de QRPA. Por completitud, damos los resultados para los factores cinemáticos \mathcal{G}_{MC} (en unidades de años $^{-1}$).

Núcleo	$\mathcal{M}_{MC}(\text{exacto})$	$\mathcal{M}_{MC}(\text{aprox})$	\mathcal{G}_{MC}
${}^{76}\text{Ge}$	0.433	0.387	$2.10 \cdot 10^{-20}$
${}^{82}\text{Se}$	0.437	0.388	$3.55 \cdot 10^{-19}$
${}^{100}\text{Mo}$	0.444	0.380	$7.33 \cdot 10^{-19}$
${}^{128}\text{Te}$	0.412	0.359	$5.24 \cdot 10^{-22}$
${}^{130}\text{Te}$	0.301	0.262	$4.99 \cdot 10^{-19}$

Tabla 13: Límites experimentales $T_{MC}(exp)$ para la vida-media de posibles decaimientos con emisión del majorón (en unidades de años). Con motivos de comparación presentamos los resultados numéricos para dos valores de las masas de los neutrinos de Dirac: (i) $M_+ \rightarrow \infty$, $M_- = 100$ MeV, y (ii) $M_+ \simeq M_-$, $M_{\pm} = gu\sqrt{1 \pm \theta}$, con $gu = 100$ MeV.

Núcleo	$T_{MC}(exp)$	$T_{MC}(M_+ \rightarrow \infty)$	$T_{MC}(M_+ \simeq M_-)$
^{76}Ge	$> 1.7 \cdot 10^{22}$ ^{a)}	$1.0 \cdot 10^{25}$	$1.3 \cdot 10^{29}$
^{82}Se	$> 1.6 \cdot 10^{21}$ ^{b)}	$5.9 \cdot 10^{23}$	$9.5 \cdot 10^{27}$
^{100}Mo	$> 3.3 \cdot 10^{20}$ ^{c)}	$2.8 \cdot 10^{23}$	$4.1 \cdot 10^{27}$
^{128}Te	$> 7.7 \cdot 10^{24}$ ^{d)}	$8.4 \cdot 10^{26}$	$3.9 \cdot 10^{30}$
^{130}Te	$> 2.7 \cdot 10^{21}$ ^{d)}	$5.5 \cdot 10^{23}$	$4.7 \cdot 10^{27}$

^{a)} (dato de laboratorio) Ref. [29]

^{b)} (dato de laboratorio) Ref. [25]

^{c)} (dato de laboratorio) Ref. [75]

^{d)} (dato geoquímico) Ref. [73]

En la Tabla 13 se presentan los límites experimentales para la vida-media T_{MC} del posible decaimiento con emisión del majorón en los núcleos ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{100}Mo , ^{128}Te . También mostramos los resultados numéricos, para las dos elecciones posibles de masas de neutrinos discutidos previamente: (i) $M_+ \rightarrow \infty$, $M_- = 100$ MeV, y (ii) $M_+ \simeq M_-$, $M_{\pm} = gu\sqrt{1 \pm \theta}$, con $gu = 100$ MeV. Hemos asumido los valores $g_{\pm} = 1$, sugeridos por Burgess y Cline en Ref. [18], y $\theta = 0.1$ para el ángulo de mezcla de la Ec. (4.1.10). Las vidas-medias calculadas son tres a siete órdenes de magnitud mayores que los correspondientes límites experimentales [36], debido al factor θ^2 en la Ec. (4.2.10), y están fuertemente condicionadas por los parámetros del modelo.

En la Tabla 14 comparamos la teoría con los datos experimentales presentados en la Tabla 13, mostrando cuanto debería valer la constante de acoplamiento efectiva g_{MC} de la Ec. (4.2.10) en el caso más favorable, $M_+ \rightarrow \infty$, $M_- = 100$ MeV, de manera que la vida-media del modelo de majorón cargado sea igual al límite experimental sobre el modo de decaimiento $\beta\beta_M$. Para todos los elementos, g_{MC} debe ser 0.05 – 0.15 para ser observable. Dado las restricciones experimentales antes mencionadas sobre θ , vemos que eso requiere un fuerte acoplamiento en el sector de neutrinos estériles [40].

Tabla 14: Magnitud de la constante de acoplamiento efectiva g_{MC} necesaria para que la vida-media T_{MC} del decaimiento con emisión de majorón cargado sea igual al límite experimental sobre ese proceso.

Núcleo	g_{MC} necesaria
^{76}Ge	< 0.12
^{82}Se	< 0.10
^{100}Mo	< 0.14
^{128}Te	< 0.038
^{130}Te	< 0.091

5.3 Competencia entre los decaimientos exóticos y estándar.

Con la finalidad de ser más claros en la exposición, presentaremos por separado los resultados para las transiciones permitidas (P) y primeras prohibidas únicas (U), no-únicas (NU), y las correcciones segundas prohibidas (CSP) a las transiciones de Gamow-Teller.

Transiciones permitidas y primeras prohibidas no-únicas

La Ec. (2.2.8) nos muestra que los operadores que participan en las transiciones primeras prohibidas NU a estados intermedios $J^\pi = 0^-$ y 1^- son

$$\begin{aligned} W_0^- &= -g_A \sum_n \tau_n^+ (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v}_n + \xi i \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{r}_n), \\ W_1^- &= -\sum_n \tau_n^+ \{g_V \mathbf{v}_n + \xi [g_V i \mathbf{r}_n - g_A \boldsymbol{\sigma}_n \times \mathbf{r}_n]\}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Antes de presentar los resultados numéricos mostraremos que las contribuciones de los operadores nucleares NU

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad i \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r},$$

como también la de

$$\mathbf{v}, \quad i \xi \mathbf{r} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r},$$

son del mismo orden de magnitud. En efecto, en el modelo de partícula independiente tenemos [35]

$$\frac{\langle f | \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r} | i \rangle}{\langle f | i \mathbf{r} | i \rangle} = j_f(j_f + 1) - l_f(l_f + 1) - j_i(j_i + 1) + l_i(l_i + 1). \quad (5.3.2)$$

Por otro lado, los elementos de matriz de los operadores dependientes de la velocidad se relacionan de una manera muy simple con los de los operadores de posición cuando se usan las funciones de onda radiales del oscilador armónico. En tal caso uno obtiene [34, 76, 77]:

$$\frac{\langle f | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} | i \rangle}{\langle f | i \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r} | i \rangle} = \frac{\langle f | \mathbf{v} | i \rangle}{\langle f | i \xi \mathbf{r} | i \rangle} = (N_f - N_i) \frac{\omega_{osc}}{\xi}, \quad (5.3.3)$$

donde N y $\omega_{osc} \cong 80A^{-1/3}$ son el número cuántico principal y la frecuencia del oscilador armónico, respectivamente. Las transiciones más relevantes de partícula independiente, en cualquier cálculo de estructura nuclear, son aquellas con $N_i = N_f + 1$ (ver, por ejemplo, Tabla 2 en Ref. [76]). De esta discusión y de la Ec. (5.3.1) vemos que las contribuciones de los operadores $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$ y \mathbf{v} se suman destructivamente a las provenientes de los operadores $i \xi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}$ y $i \xi \mathbf{r}$, respectivamente. Además, observando que $\xi \cong 1.18ZA^{-1/3}$, el cociente entre los correspondientes elementos de matriz es $-\omega_{osc}/\xi \approx -68/Z$, es decir, de orden de la unidad para núcleos que nos interesan.

También podemos usar la corriente vectorial conservada (CVC) para obtener una expresión alternativa para el elemento de matriz $\langle f | \mathbf{v} | i \rangle$ [78]

$$\langle f | \mathbf{v} | i \rangle = -(2.4\xi + E_0) \langle f | i \mathbf{r} | i \rangle, \quad (5.3.4)$$

donde E_0 es la diferencia de energía entre los estados inicial y final (en principio esta relación es exacta pues incluye los efectos de intercambio, interacciones inducidas, etc. [34]). Las contribuciones de la corriente de intercambio de un pion en el medio nuclear [79] aumentan el efecto del operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$ [80]. Este se puede tener en cuenta renormalizando el correspondiente elemento de matriz por el factor $\cong 1.7g_A$ (ver también Ref. [77]).

Como las componentes singletes de espín predominan en el estado fundamental de los núcleos par-par, los dos términos en $\mathcal{M}_{2\nu}^P$ y $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$, dados en las Ecs. (2.2.7) y (2.2.8) respectivamente, tienden a sumarse coherentemente. Por otra parte, es evidente de las relaciones (5.3.1) que, independientemente del modelo nuclear empleado para evaluar el momento NU, el rol desempeñado por los estados virtuales con $J^\pi = 0^-$ y $J^\pi = 1^-$ depende críticamente de la forma en la cual se combinan los elementos de matriz individuales. Las combinaciones coherentes aumentarían considerablemente el efecto de $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$. Sin embargo, de la discusión

previa hemos aprendido que los momentos $\langle f|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}|i\rangle$ y $\langle f|i\xi\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}|i\rangle$, como también $\langle f|\mathbf{v}|i\rangle$ y $\langle f|i\xi\mathbf{r}|i\rangle$, siempre tienden a actuar destructivamente. Entonces, la magnitud de $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$ depende crucialmente del elemento de matriz $\langle f|\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}|i\rangle$.

Tabla 15: Resultados numéricos para los elementos de matriz permitidos y prohibidos no-únicos (en unidades naturales), evaluados dentro del formalismo de QRPA con una carga axial efectiva $g_A = 1$. Los valores entre paréntesis indican las contribuciones de los estados virtuales con $J^\pi = 0^-$ a los momentos totales no-únicos. Presentamos también los factores cinemáticos $\mathcal{G}_{2\nu}^P$ de la Ec. (2.2.17) (en unidades de años⁻¹).

Núcleo	$\mathcal{M}_{2\nu}^P$	$\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$	$\mathcal{G}_{2\nu}^P$
⁷⁶ Ge	0.050	-0.008 (-0.004)	5.39 10 ⁻²⁰
⁸² Se	0.060	-0.009 (-0.004)	1.80 10 ⁻¹⁸
¹⁰⁰ Mo	0.051	-0.014 (-0.006)	3.91 10 ⁻¹⁸
¹²⁸ Te	0.059	-0.012 (-0.003)	3.54 10 ⁻²²
¹³⁰ Te	0.048	-0.012 (-0.002)	2.00 10 ⁻¹⁸

Los resultados numéricos para el factor cinemático de la Ec. (2.2.17) y los elementos de matriz permitidos y prohibidos no-únicos se presentan en la Tabla 15. Para evaluar $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$, estimamos la contribución del operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}$ usando la relación (5.3.3), apropiadamente renormalizada por la corriente de intercambio de un pion, y usamos la relación (5.3.4) para evaluar la contribución del operador \mathbf{v} . Para todos los núcleos, las contribuciones de los estados virtuales con $J^\pi = 0^-$, mostradas entre paréntesis en la Tabla 15, son más pequeñas que la de los estados con $J^\pi = 1^-$. Hay dos razones para ello: (i) los elementos de matriz individuales de partícula independiente del operador W_1^- son más grandes que los del operador W_0^- . Esto se debe principalmente a la interferencia destructiva entre los elementos de matriz individuales antes mencionados; y (ii) para ambos tipos de transiciones las contribuciones parciales muestran una coherencia pronunciada, pero el espacio de configuración para 1^- es más grande. Notemos también que el cálculo hecho por Williams y Haxton [81] en el modelo de apareamiento de Nilsson, da contribuciones considerablemente más grandes que nuestra evaluación para los estados $J^\pi = 0^-$. Por ejemplo, para las transiciones $^{82}\text{Se} \rightarrow ^{82}\text{Kr}$ y $^{130}\text{Te} \rightarrow ^{130}\text{Xe}$ ellos tienen $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}(0^-) \cong -0.010$. La discrepancia con nuestros resultados podría atribuirse, sólo parcialmente, al efecto del operador $i\xi\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}$, que no fue considerado

por ellos. Despreciando este último obtenemos $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}(0^-) \cong -0.006$ para ambos núcleos. La restante discrepancia puede adjudicarse a la diferencia en los modelos nucleares empleados en Ref. [81] y aquí.

A partir de los resultados mostrados en la Tabla 15 es claro que en la QRPA los elementos de matriz $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$ son importantes cuando son comparados con los momentos $\mathcal{M}_{2\nu}^F$. Pero su relevancia real proviene de la comparación con los datos experimentales, que se presentan en la Tabla 16. En efecto, vemos que los momentos $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$ son comparables al valor $|\mathcal{M}_{2\nu}|(exp)$ necesario para explicar las vidas-medias de los núcleos ^{128}Te y ^{130}Te . Para los tres núcleos restantes mostrados en las tablas, los momentos $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$ son relativamente pequeños comparados con las amplitudes medidas. Sin embargo, aún en este caso esos momentos podrían ser importantes en las evaluaciones teóricas de las vidas-medias del modo $\beta\beta_{2\nu}$ porque ellos tienden a cancelar el efecto de los elementos de matriz permitidos [35].

Tabla 16: Vidas-medias experimentales $T_{2\nu}(exp)$ y valores deducidos para los elementos de matriz $|\mathcal{M}_{2\nu}|(exp)$ (en unidades naturales).

Núcleo	$T_{2\nu}(exp)$ [años 10^{20}]	$ \mathcal{M}_{2\nu} (exp)$
^{76}Ge	$17.7 \pm 0.1^{+1.3}_{-1.1}$ ^{a)}	$0.102 \pm 0.001^{+0.003}_{-0.004}$
^{82}Se	$1.08^{+0.26}_{-0.06}$ ^{b)}	$0.071^{+0.002}_{-0.007}$
^{100}Mo	$0.068^{+0.004}_{-0.005} \pm 0.007$ ^{c)}	$0.194^{+0.007}_{-0.006} \pm 0.010$
^{128}Te	$(7.7 \pm 0.4) 10^4$ ^{d)}	0.019 ± 0.001
^{130}Te	27 ± 1 ^{d)}	0.014 ± 0.01

^{a)} (dato de laboratorio) Ref. [30]

^{b)} (dato de laboratorio) Ref. [82]

^{c)} (dato de laboratorio) Ref. [83]

^{d)} (dato geoquímico) Ref. [73]

Finalmente, notemos que la contribución de las transiciones primeras prohibidas no-únicas no modifica la forma del espectro de electrones que se obtiene dentro de la aproximación permitida, como se ve de la Ec. (2.2.14).

Transiciones primeras prohibidas únicas

Los espectros permitido $d\Gamma_{2\nu}^{p+NU}/d\epsilon$ y único $d\Gamma_{2\nu}^u/d\epsilon$, definidos en la Ec. (2.2.14), se

comparan en la Fig. 7 para ^{76}Ge . A diferencia de lo que ocurre con la emisión β simple [31, 32, 33, 34], el espectro para el proceso beta doble U se desvía de la forma permitida en la región de menor energía, pero no para $\epsilon \cong Q$ [36]. Por lo tanto, independientemente de la magnitud de $\Gamma_{2\nu}^U$, los estados virtuales $J^\pi = 2^-$ nunca interferirán con la detección de los eventos $\beta\beta_{0\nu}$. Sin embargo, su espectro puede superponerse con los producidos por los decaimientos $\beta\beta_M$. Este se ilustra en la misma figura para el caso del modelo de majorón cargado de Burgess y Cline (ver Ec. (4.2.15)).

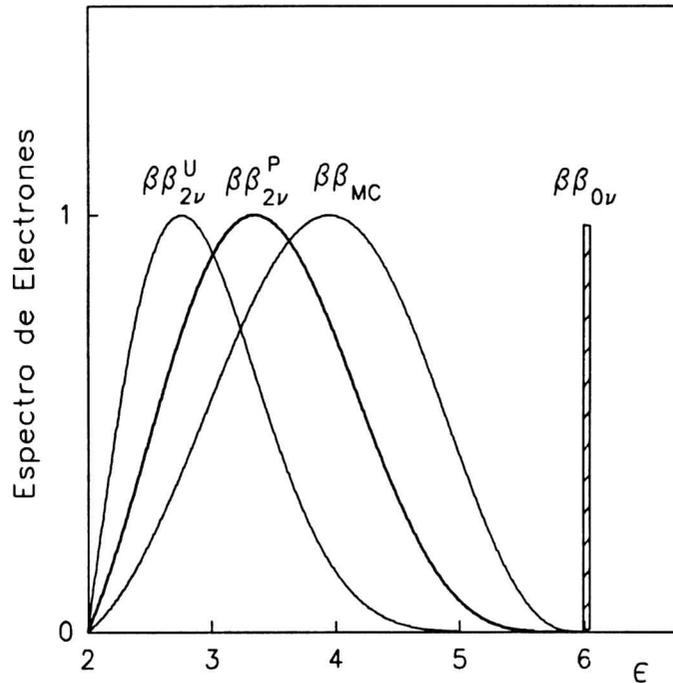


Figura 7: Espectro de energía de electrones para el núcleo ^{76}Ge , como una función de la suma de energías de los dos electrones emitidos, para: las transiciones estándar permitidas ($\beta\beta_{2\nu}^P$) y prohibidas únicas ($\beta\beta_{2\nu}^U$), y los decaimientos sin neutrino exóticos, con ($\beta\beta_{MC}$) y sin emisión del majorón ($\beta\beta_{0\nu}$). Hemos asignado el mismo valor máximo arbitrario a todas las curvas con propósitos de comparación.

Los resultados numéricos para los factores cinemáticos y los elementos de matriz nucleares que intervienen en las transiciones U, dados en las Ecs. (2.2.17) y (2.2.9) respectivamente, se muestran en la Tabla 17. Los momentos fueron evaluados dentro del modelo de QRPA. De las Tablas 15 y 17 vemos claramente que

$$|\mathcal{M}_{2\nu}^U| \cong R^2 |\mathcal{M}_{2\nu}^P + \mathcal{M}_{2\nu}^{N\nu}|; \quad \mathcal{G}_{2\nu}^U \cong (Q/4)^4 \mathcal{G}_{2\nu}^P. \quad (5.3.5)$$

Por lo tanto, podemos decir que la estimación simple

$$T_{2\nu}^U/T_{2\nu}^{P+NU} \cong (RQ/4)^{-4} \sim 10^6, \quad (5.3.6)$$

es apropiada para las transiciones U.

Tabla 17: Factores cinemáticos $\mathcal{G}_{2\nu}^U$ (en unidades de años⁻¹) y elementos de matriz $\mathcal{M}_{2\nu}^U$ (en unidades naturales), evaluados dentro del formalismo QRPA.

Núcleo	$\mathcal{G}_{2\nu}^U$	$\mathcal{M}_{2\nu}^U$
⁷⁶ Ge	2.10 10 ⁻¹⁹	1.0 10 ⁻⁵
⁸² Se	2.54 10 ⁻¹⁷	9.8 10 ⁻⁶
¹⁰⁰ Mo	5.50 10 ⁻¹⁷	1.1 10 ⁻⁵
¹²⁸ Te	8.77 10 ⁻²³	1.5 10 ⁻⁵
¹³⁰ Te	1.41 10 ⁻¹⁷	1.3 10 ⁻⁵

En la Tabla 18 presentamos los resultados para las vidas-medias de las transiciones $P+NU$ y U . Estos pueden ser comparados con los del decaimiento $\beta\beta_{MC}$, presentados en la Tabla 13 para dos elecciones posibles de las masas M_{\pm} de los neutrinos de Dirac. Se puede ver que

$$T_M(M_+ \rightarrow \infty)/T_{2\nu}^{P+NU} \sim 10^3; \quad T_M(M_+ \cong M_-)/T_{2\nu}^{P+NU} \sim 10^7.$$

Por este motivo, la probabilidad de emisión para los modelos de majorón recientemente descubiertos está fuertemente condicionada por los parámetros del modelo, y podría ser tan pequeña como la proveniente de las transiciones prohibidas únicas [36].

Tabla 18: Vidas-medias calculadas (en unidades de años) para las transiciones $P+NU$ y U .

Núcleo	$T_{2\nu}^{P+NU}$	$T_{2\nu}^U$
⁷⁶ Ge	1.1 10 ²²	4.7 10 ²⁸
⁸² Se	2.1 10 ²⁰	4.1 10 ²⁶
¹⁰⁰ Mo	1.9 10 ²⁰	1.4 10 ²⁶
¹²⁸ Te	1.3 10 ²⁴	5.1 10 ³¹
¹³⁰ Te	3.9 10 ²⁰	4.2 10 ²⁶

Correcciones segundas prohibidas a las transiciones de Gamow-Teller

Como se ve de la Ec. (2.3.8), la forma del espectro debido a las CSP depende principalmente de los factores $\mathcal{F}_{2\nu}^{(i)}(\epsilon)$. Ellos se presentan para ${}^{76}\text{Ge}$ en el panel superior de la Fig. 8 como una función de la energía ϵ . $\mathcal{F}_{2\nu}^{(0)}(\epsilon)$ y $\mathcal{F}_{2\nu}^{(3)}(\epsilon)$ exhiben la misma dependencia en energía, mientras que $\mathcal{F}_{2\nu}^{(1)}(\epsilon)$ mueve el espectro permitido levemente hacia la derecha y $\mathcal{F}_{2\nu}^{(2)}(\epsilon)$ hacia la izquierda.

La forma de los espectros con y sin la inclusión de las CSP se comparan en el panel inferior de la Fig. 8. Se puede observar que son muy similares. El mismo comportamiento se halló para otros núcleos de interés experimental, tales como ${}^{82}\text{Se}$, ${}^{100}\text{Mo}$, ${}^{128}\text{Te}$ y ${}^{130}\text{Te}$.

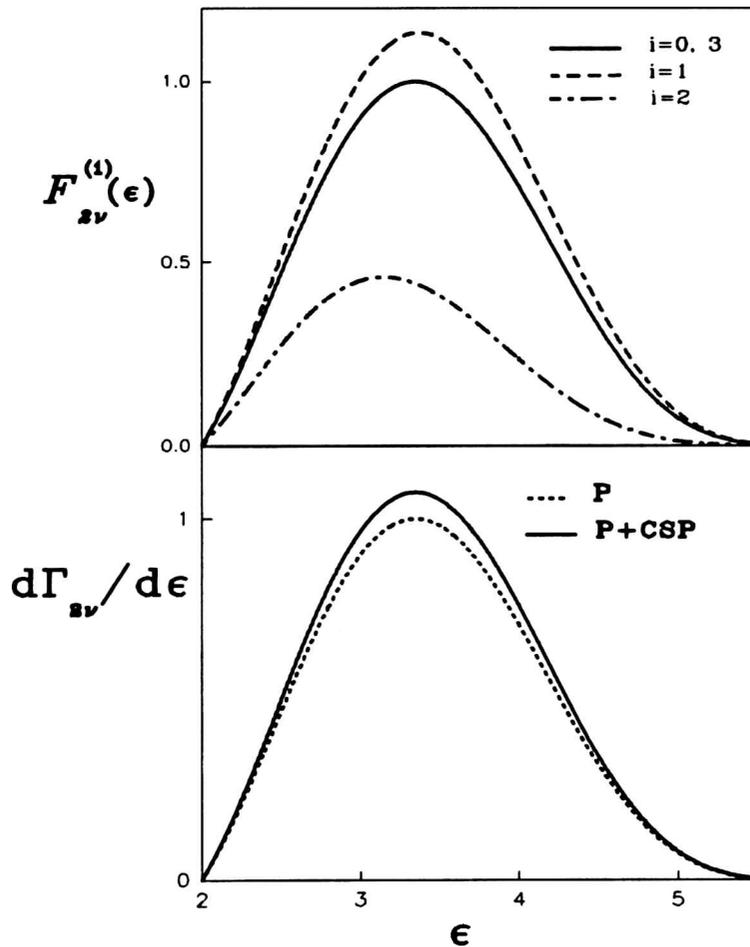


Figura 8: Factores $\mathcal{F}_{2\nu}^{(i)}(\epsilon)$ (panel superior) y espectro de energías $d\Gamma_{2\nu}/d\epsilon$ (panel inferior) para ${}^{76}\text{Ge}$. Todas las cantidades están normalizadas al valor máximo del espectro permitido.

Los elementos de matriz $\mathcal{M}_{2\nu}^{(i)}$, definidos en la Ec. (2.3.6), fueron evaluados dentro del modelo de QRPA. Los resultados se presentan en la Tabla 19, junto con los factores cinemáticos $\mathcal{G}_{2\nu}^{(i)}$ dados en (2.3.11). Además del término del magnetismo-débil, los elementos de matriz dependientes de la velocidad $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y $2i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}$ son también importantes, y particularmente en el caso de ^{100}Mo . El momento $\mathcal{M}_{2\nu}^{(2)}$ es siempre relativamente pequeño.

Tabla 19: Resultados numéricos para los factores cinemáticos $\mathcal{G}_{2\nu}^{(i)}$ (en unidades de años $^{-1}$) y los elementos de matriz $\mathcal{M}_{2\nu}^{(i)}$ (en unidades naturales), evaluados dentro del formalismo de QRPA con una carga axial efectiva $g_A = 1$.

Núcleo	$\mathcal{G}_{2\nu}^{(0)} = \mathcal{G}_{2\nu}^{(3)}$	$\mathcal{G}_{2\nu}^{(1)}$	$\mathcal{G}_{2\nu}^{(2)}$	$\mathcal{M}_{2\nu}^{(0)}$	$\mathcal{M}_{2\nu}^{(1)}$	$\mathcal{M}_{2\nu}^{(2)}$	$\mathcal{M}_{2\nu}^{(3)}$
^{76}Ge	$5.39 \cdot 10^{-20}$	$6.24 \cdot 10^{-20}$	$2.33 \cdot 10^{-20}$	0.050	0.0044	0.0002	-0.0017
^{82}Se	$1.80 \cdot 10^{-18}$	$2.14 \cdot 10^{-18}$	$0.83 \cdot 10^{-18}$	0.060	0.0041	0.0003	-0.0018
^{100}Mo	$3.91 \cdot 10^{-18}$	$4.54 \cdot 10^{-18}$	$1.83 \cdot 10^{-18}$	0.051	0.0141	0.0015	0.0072
^{128}Te	$3.54 \cdot 10^{-22}$	$3.79 \cdot 10^{-22}$	$1.13 \cdot 10^{-22}$	0.059	0.0048	0.0003	-0.0016
^{130}Te	$2.00 \cdot 10^{-18}$	$2.23 \cdot 10^{-18}$	$0.91 \cdot 10^{-18}$	0.048	0.0039	0.0005	-0.0014

Los resultados numéricos para la contribución de las CSP a la vida-media del modo $\beta\beta_{2\nu}$ se presentan en la Tabla 20. Contrariamente a lo que ocurre en el caso de las transiciones prohibidas NU, las CSP disminuyen las vidas-medias. El rango de reducción va desde 6% en ^{128}Te hasta $\sim 32\%$ en ^{100}Mo [37].

Tabla 20: Vidas-medias calculadas dentro de la aproximación permitida ($T_{2\nu}^P$) y con las correcciones segundas prohibidas incluidas $T_{2\nu}^{P+CSP}$ (en unidades de años).

Núcleo	$T_{2\nu}^P$	$T_{2\nu}^{CSP}$
^{76}Ge	$7.3 \cdot 10^{21}$	$6.8 \cdot 10^{21}$
^{82}Se	$1.5 \cdot 10^{20}$	$1.4 \cdot 10^{20}$
^{100}Mo	$9.7 \cdot 10^{19}$	$6.6 \cdot 10^{19}$
^{128}Te	$8.1 \cdot 10^{23}$	$7.6 \cdot 10^{23}$
^{130}Te	$2.2 \cdot 10^{20}$	$2.0 \cdot 10^{20}$

6 Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado los decaimientos beta doble exóticos sin emisión de neutrinos y con emisión del majorón, y su posible competencia con efectos de orden superior en el decaimiento estándar con dos neutrinos. Presentaremos las conclusiones para cada uno de estos tres tópicos por separado.

6.1 Decaimiento beta doble sin emisión de neutrinos.

Realizamos una derivación directa de la probabilidad de decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$, basada en la expansión de Fourier-Bessel de la amplitud de transición y en la posterior aplicación del álgebra de Racah, sin invocar la aproximación de clausura. Si es necesario, esta aproximación puede ser implementada en cualquier paso del cálculo. Esta fue usada para derivar las fórmulas $\beta\beta_{0\nu}$ en las Refs. [42, 43, 49], pero no en las Refs. [23, 67, 68, 84, 85, 86].

Para evaluar los elementos de matriz mostrados en las Ecs. (3.2.3) - (3.2.9) solamente necesitamos realizar las sumas sobre los impulsos angulares y los estados virtuales intermedios. Los términos sucesivos decrecen rápidamente, debido a que las integrales radiales (3.3.17) disminuyen en magnitud cuando aumentan los multipolos L y L' [55, 57]. Las fórmulas se hacen particularmente simples cuando se usa la base del oscilador armónico. En ese caso se puede explotar el método de Horie-Sasaki [87] para evaluar los factores de forma radiales (3.3.17), y se pueden emplear las ecuaciones mostradas en el Apéndice B.4.

El formalismo desarrollado es especialmente conveniente para los cálculos de estructura nuclear en los cuales la suma sobre los estados intermedios es inevitable, tales como en QRPA. La aproximación de clausura en tal caso sólo connota que la variación de los denominadores de energía con la excitación nuclear no debe ser considerada. Evidentemente esto no lleva a una mayor simplificación en el cálculo numérico. Por ejemplo, para $\rho^{ph}(pn p' n'; J_\alpha^\pi)$ dada por (3.3.24), las sumas en (3.3.10) - (3.3.16) sobre diferentes estados α con el mismo J^π persisten, aunque hagamos el reemplazo $\omega_{J_\alpha^\pi} \rightarrow \langle \omega_{J_\alpha^\pi} \rangle = \omega_{J^\pi}$.

Contrariamente, el uso de la aproximación de clausura es obligatorio, y puede ser implementado fácilmente como hemos descrito en la Sección 3.3, cuando hacemos el análisis en

el marco de un modelo de capas, es decir, cuando uno posee solamente información sobre ρ_{α}^{ph} , o equivalentemente sobre las funciones de onda nucleares 0^+ para los estados inicial y final.

La principal diferencia entre el formalismo desarrollado aquí y aquellos publicados antes [23, 42, 43, 49, 61, 67, 68, 84, 85, 86] es su simplicidad. Por eso es más conveniente para los cálculos numéricos. Vamos a subrayar unos pocos puntos en este aspecto:

1) Mientras en los formalismos con potenciales de neutrino [42, 43, 49, 61] uno trata con elementos de matriz de dos-cuerpos, que llevan a expresiones analíticas más complicadas para los momentos $\beta\beta_{0\nu}$, nosotros solamente tenemos que manipular los operadores de un-cuerpo bien conocidos (3.2.2). Sería ilustrativo comparar nuestro resultado (3.2.7) para el elemento de matriz M_R con las Ecs. (3.65) a (3.68) en el trabajo de Tomoda [43].

2) A diferencia con el formalismo desarrollado por Vergados *et al* [68], los resultados mostrados aquí no están limitados al empleo de las funciones de onda del oscilador armónico. Además, nosotros evitamos totalmente el uso de los coeficientes de transformación de Brody-Moshinsky, que hacen los resultados muy engorrosos.

3) Hay varias diferencias sustanciales con los trabajos de Suhonen *et al* [86], donde también se usó la expansión de Fourier-Bessel. Primero, ellos obtienen resultados diferentes y más complicados para \mathcal{M}_F and \mathcal{M}_{GT} . Segundo, no muestran la estructura explícita de los restantes elementos de matriz, dados aquí por las Ecs. (3.2.5) - (3.2.9), sino que sólo esbozan las líneas generales del cálculo. Sin embargo, eso no puede ser utilizado para propósitos prácticos. Tercero, en lugar de trabajar con el modelo de capas nuclear, operan en un modelo relativista de confinamiento de quark. Cuarto, su formulación está limitada a la aproximación de QRPA y a la base del oscilador armónico.

Los momentos nucleares para el decaimiento beta doble sin neutrinos se evaluaron numéricamente para varios núcleos. También presentamos expresiones analíticas simples para el decaimiento $\beta\beta$ de ^{48}Ca , en el modelo de un solo nivel que sigue de nuestro formalismo. Los resultados mostrados en la Tabla 4 son útiles no sólo para verificar los cálculos numéricos completos, sino para verificar la consistencia con otros formalismos [42, 49, 86, 68]. En efecto, sería deseable saber si estos llevan a los números mostrados en la Tabla 4. Esto

sería una prueba simple y definitiva para todos los elementos de matriz nucleares excepto para M_p . A partir de los resultados numéricos, hemos determinado los límites superiores para los parámetros que contienen información sobre la posible existencia de física más allá del Modelo Estándar, tales como la masa efectiva $\langle m_\nu \rangle$ de los neutrinos de Majorana, y las constantes de acoplamiento efectivas $\langle \lambda \rangle$ y $\langle \eta \rangle$ de las corrientes derechas [39].

Este trabajo se diferencia de estudios QRPA similares, no sólo en el formalismo $\beta\beta_{0\nu}$, sino también en la interacción residual. En efecto, aquí usamos una interacción- δ simple en vez de la matriz-G usada comunmente. El hecho de que nuestros resultados sean equivalentes a los calculados por MBK y PSVF muestra claramente que las vidas-medias $\beta\beta_{0\nu}$ no son muy sensibles a los detalles de la fuerza nuclear. En otras palabras, las llamadas "interacciones realistas" no son de ninguna manera la panacea para la evaluación de estructura nuclear de los procesos beta doble, como algunos autores han proclamado por largo tiempo. La razón para ello es el rol crucial desempeñado por la restauración de las simetrías de isospín y SU(4), producida por la interacción residual, en reducir las amplitudes de transición de Fermi y Gamow-Teller, respectivamente [55, 59, 88]. Este mecanismo de restauración no está limitado a modelos tipo-RPA [55, 59, 88, 89, 90, 91], sino que también ocurre en los cálculos dentro del modelo de capas. (Un ejemplo simple fue discutido en la Sec. 3.5.) Estamos convencidos de que el problema de estructura nuclear involucrado en los decaimientos beta doble nos mantendrá ocupados por largo tiempo, y que definitivamente no puede ser resuelto simplemente empleando una "buena" interacción residual. Ninguno de los métodos de RPA renormalizada o auto consistente son capaces de resolver este problema [92].

6.2 Decaimiento beta doble con emisión del majorón.

Examinamos en detalle las predicciones del modelo de majorón cargado introducido en los últimos años por Burgess y Cline. Hallamos que la probabilidad del decaimiento beta doble sin neutrinos y con emisión del majorón dentro de ese modelo, es sumamente pequeña como para ser observada, a menos que haya una gran mezcla entre neutrinos estériles exóticos de masa $\gtrsim 100$ MeV, y fuertes acoplamientos entre los neutrinos estériles [40]. Es importante destacar que al computar los elementos de matriz, no hemos considerado los efectos de

las correlaciones de corto alcance y tamaño finito del nucleón, que tenderían a reducir los elementos de matriz calculados [46].

Por otro lado, los argumentos empleados usualmente [61, 65] para simplificar los operadores de transición nucleares de (4.3.1) a (4.3.5) no son rigurosos. Entonces, debido a que creemos que nuestro cálculo es el análisis más cuantitativo del modelo de majorón cargado hasta la fecha, si la situación experimental diera serias indicaciones de eventos de decaimiento beta doble anómalos en el futuro, sería apropiado emplear nuestro formalismo para una evaluación más cuidadosa de las predicciones del modelo.

El formalismo también es aplicable a los elementos de matriz que aparecen en algunas contribuciones supersimétricas [93]. En tales modelos aparece un elemento de matriz con un potencial de neutrino de la forma [94]

$$h_R(\mathbf{r}) \sim \int dq \frac{q^2}{\omega(\omega + \mu)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad (6.2.1)$$

cuya potencia extra de q^2 relativa al potencial de neutrino usual muestra que es similar a los términos del tipo de retroceso que hemos evaluado antes. Esto nos da un el elemento de matriz que puede ser calculado por nuestro método.

En resumen, hemos desarrollado un formalismo especialmente preparado para evaluar factores de forma nucleares que contienen operadores de retroceso, independiente del modelo nuclear, y lo hemos aplicado a los elementos de matriz para la emisión del majorón cargado en la QRPA. De esta manera hallamos que las aproximaciones usadas en algunos trabajos previos [61, 65] para simplificar los factores de forma nucleares (4.3.1) funcionan bien, con un error relativo del 15% [41].

6.3 Competencia entre los decaimientos exóticos y estándar.

A partir del análisis de las correcciones de orden superior al decaimiento estándar con dos neutrinos $\beta\beta_{2\nu}$, hallamos que, en el contexto de la aproximación- ξ , la contribución de las transiciones prohibidas no-únicas se puede factorizar de la misma manera que en la aproximación permitida [35], es decir, con el mismo factor cinemático. Por lo tanto, ellas no pueden modificar la forma del espectro, como se ve claramente de la Ec. (2.2.14). Notemos

también que el momento $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$ dado en la Ec. (2.2.8) se puede obtener a partir de $\mathcal{M}_{2\nu}^P$ haciendo la sustitución

$$\begin{aligned} g_V \tau^+ &\rightarrow -g_A \tau^+ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \xi i \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r}), \\ g_A \tau^+ \boldsymbol{\sigma} &\rightarrow -\tau^+ \{g_V \mathbf{v} + \xi [g_V i \mathbf{r} - g_A \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{r}]\}, \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

o sea en forma completamente análoga a como se obtienen las expresiones para las transiciones primeras prohibidas a partir de las permitidas en los procesos de decaimiento β simple [52]. Esto es sorprendente ya que, debido a la antisimetrización entre los pares de electrón y neutrino, el decaimiento $\beta\beta_{2\nu}$ no es un sencillo producto de dos decaimientos β simples.

Hallamos que los momentos $\mathcal{M}_{2\nu}^{NU}$ son comparables al valor necesario para explicar las vidas-medias de los núcleos ^{128}Te y ^{130}Te , mientras que para ^{76}Ge , ^{82}Se y ^{100}Mo los momentos no únicos son relativamente pequeños comparados con las amplitudes medidas. Sin embargo, aún en este caso esos momentos podrían ser importantes en las evaluaciones teóricas de las vidas-medias del modo $\beta\beta_{2\nu}$ porque ellos tienden a cancelar el efecto de los elementos de matriz permitidos [35]. Además, la sensibilidad de los experimentos $\beta\beta_{2\nu}$ ha mejorado mucho en los últimos años, y no hay razón para creer que no sean posibles mejoras futuras.

Hemos encontrado que los efectos de orden superior en la física estándar que dan contribución a transiciones a estados intermedios $J^\pi = 2^-$ modifican la forma del espectro de dos electrones $\beta\beta_{2\nu}$, pero sólo al nivel de 10^{-6} y principalmente en la parte de menor energía, donde tienden a dominar la mayoría de los efectos de fondo. Entonces concluimos que es muy poco probable que sus efectos dificulten la detección de los posibles eventos exóticos sin emisión de neutrinos en experimentos contemporáneos [36].

Comparamos los espectros con y sin la contribución de las correcciones segundas prohibidas a las transiciones de Gamow-Teller, y hallamos que son muy similares para todos los núcleos analizados. Por lo tanto, ellas tampoco modifican la forma del espectro de energía de dos electrones de una manera apreciable, como se muestra en la Fig. 8 [35, 36, 37].

De (2.3.6) y (2.3.7) vemos que el efecto principal del magnetismo-débil consiste en renormalizar el elemento de matriz de Gamow-Teller como [37]

$$\mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} \rightarrow \mathcal{M}_{2\nu}^{(0)} \left(1 + \frac{2g_V \xi f_W}{g_A M_N} \right), \quad (6.3.2)$$

es decir por un factor de ~ 1.05 para los núcleos que pueden decaer por emisión beta doble, *independientemente del modelo nuclear empleado*. Además del término del magnetismo débil, los elementos de matriz dependientes de la velocidad son importantes, y particularmente en el caso de ^{100}Mo . Contrariamente a lo que ocurre en el caso de las transiciones prohibidas no-únicas, las correcciones segundas prohibidas disminuyen las vidas-medias. El rango de reducción va desde 6% en ^{128}Te hasta $\sim 32\%$ en ^{100}Mo [37].

Apéndice A: Funciones de Onda

El objetivo de esta Sección es presentar las funciones de onda relativista del electrón, distorsionadas por el campo de Coulomb debido al núcleo inicial, y del neutrino y el majorón, que no sufren interacción coulombiana. Una deducción detallada fue hecha por Rose [95] También presentaremos la función de onda de los nucleones en el límite no relativista.

La función de onda del electrón es una solución de la ecuación de Dirac

$$(i \not{\partial} - 1 + \gamma_0 V)\psi = 0, \quad (\text{A.1.1})$$

donde $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$, con un potencial [42, 61]

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha Z}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] & \text{para } r \leq R, \\ -\frac{\alpha Z}{r} & \text{para } r \geq R, \end{cases} \quad (\text{A.1.2})$$

donde $R = 1.2A^{1/3}$ fm es el radio medio del núcleo inicial con número atómico Z , y $\alpha \simeq 1/137$ es la constante de estructura fina. La solución de energía positiva de esta ecuación, que describe un estado con energía ϵ , impulso \mathbf{p} y proyección de espín s_e , será denotada por $\psi(\epsilon, \mathbf{r})$.

Estas funciones de onda se pueden expresar como una superposición de ondas esféricas distorsionadas por el campo coulombiano debido al núcleo [52]. Nosotros expondremos aquí solamente los primeros términos de ese desarrollo, que son los que nos interesan.

La función de onda se expande en términos de las ondas esféricas como

$$\psi(\epsilon, \mathbf{r}) = \psi^{(S)}(\epsilon, \mathbf{r}) + \psi^{(P)}(\epsilon, \mathbf{r}) + \dots \quad (\text{A.1.3})$$

Aquí S y P representan las ondas S y P ,

$$\psi^{(S)}(\epsilon, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g_{-1}(\epsilon) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} f_1(\epsilon) \end{pmatrix} \chi_{s_e}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$\psi^{(P)}(\epsilon, \mathbf{r}) = i \begin{pmatrix} g_1(\epsilon) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + g_{-2}(\epsilon) [3\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \\ -f_{-1}(\epsilon) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} + f_2(\epsilon) [3\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}}] \end{pmatrix} \chi_{s_e}, \quad (\text{A.1.5})$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$ son los versores de posición e impulso del electrón, respectivamente, y χ_{s_e} es un espinor de dos componentes. Las funciones de onda radiales $g_{-1}(\epsilon)$ y $f_1(\epsilon)$ son ondas S

con impulso angular total $j = 1/2$, y $g_1(\epsilon)$ y $f_{-1}(\epsilon)$ son ondas P con impulso angular total $j = 1/2$, mientras que $g_{-2}(\epsilon)$ y $f_2(\epsilon)$ son ondas P con $j = 3/2$.

Nosotros daremos las funciones de onda relativistas del electrón en una distribución de carga uniforme en el núcleo (potencial dado más arriba). Reteniendo la potencia más baja en la expansión en r , las funciones radiales están dadas por

$$\begin{pmatrix} g_{-1}(\epsilon) \\ f_1(\epsilon) \end{pmatrix} = A_{\mp 1}, \quad (\text{A.1.6})$$

$$\begin{pmatrix} g_1(\epsilon) \\ f_{-1}(\epsilon) \end{pmatrix} = \pm A_{\pm 1} [\alpha Z/2 + (\epsilon \pm 1)R/3] (r/R), \quad (\text{A.1.7})$$

$$\begin{pmatrix} g_{-2}(\epsilon) \\ f_2(\epsilon) \end{pmatrix} = A_{\mp 2} (pr/3). \quad (\text{A.1.8})$$

Las constantes de normalización $A_{\pm k}$ están dadas en forma aproximada por

$$A_{\pm k} = \sqrt{(\epsilon \mp 1)/2\epsilon} \sqrt{F_{k-1}(Z, \epsilon)}, \quad (\text{A.1.9})$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots$ y

$$F_{k-1}(Z, \epsilon) = \left[\frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k)\Gamma(2\gamma_k+1)} \right] (2pR)^{2(\gamma_k-k)} |\Gamma(\gamma_k + iy)|^2 e^{\pi y},$$

$$\gamma_k = \sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2}, \quad y = \alpha Z \epsilon / p. \quad (\text{A.1.10})$$

Es importante notar que en el decaimiento $\beta\beta$ hay una interacción coulombiana repulsiva adicional entre los dos electrones emitidos. Nosotros no consideramos esta interacción en este trabajo. Más aún, el primer electrón emitido es afectado por el campo de Coulomb del núcleo intermedio con $Z+1$ protones, antes que decaiga el segundo neutrón, pero finalmente ambos electrones en el decaimiento $\beta\beta$ son atraídos por el núcleo final con $Z+2$ protones. Esta corrección tampoco será tenida en cuenta en este trabajo.

Similarmente, la función de onda de un autoestado de masa de Majorana con masa m_ℓ será solución de la ecuación de Dirac libre

$$(i \not{\partial} - m_\ell)\phi = 0. \quad (\text{A.1.11})$$

La solución de energía positiva de esta ecuación, que describe un estado con energía ω_ℓ , impulso \mathbf{q} y proyección de espín s_ν , será denotada como $\phi(\omega, \mathbf{x})$, y se reduce a la onda plana

$$\phi(\omega_\ell, \mathbf{x}) = e^{-i\omega_\ell t} \phi(\omega_\ell, \mathbf{r}), \quad \phi(\omega_\ell, \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\omega_\ell + m_\ell}{2\omega_\ell}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}}{\omega_\ell + m_\ell} \end{pmatrix} \chi_{s_\nu} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{A.1.12})$$

Esta solución puede ser expandida en ondas esféricas usando la ecuación (A.1.3) en el límite $\alpha Z \rightarrow 0$, en el cual $F_{k-1} \rightarrow 1$, de la siguiente manera

$$\phi(\omega_\ell, \mathbf{r}) = \phi^{(S)}(\omega_\ell, \mathbf{r}) + \phi^{(P)}(\omega_\ell, \mathbf{r}) + \dots, \quad (\text{A.1.13})$$

con

$$\phi^{(S)}(\omega_\ell, \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\omega_\ell + m_\ell}{2\omega_\ell}} \left(\frac{1}{\omega_\ell + m_\ell} \right) \chi_{s\nu}, \quad (\text{A.1.14})$$

$$\phi^{(P)}(\omega_\ell, \mathbf{r}) = i \sqrt{\frac{\omega_\ell + m_\ell}{2\omega_\ell}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \left(\frac{1}{\omega_\ell + m_\ell} \right) \chi_{s\nu}. \quad (\text{A.1.15})$$

Por otro lado, el majorón es el bosón de Goldstone sin masa asociado con la ruptura espontánea de simetría, y por lo tanto su función de onda será una solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \phi_M \equiv \partial^\mu \partial_\mu \phi_M = 0. \quad (\text{A.1.16})$$

La solución de energía positiva de esta ecuación, normalizada a la unidad, tiene la forma

$$\phi_M(x) = \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0}}, \quad k = (k_0, \mathbf{k}) = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}), \quad (\text{A.1.17})$$

donde \mathbf{k} es el impulso del majorón y $|\mathbf{k}|$ su energía.

Las funciones de onda de los nucleones serán soluciones de la ecuación de Dirac. En el límite no relativista, las soluciones de energía positiva de dicha ecuación tienen la forma [96, 97]

$$\psi_n(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{NR}(x) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_n}{2M_N} \varphi_{NR}(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.18})$$

donde M_N es la masa del nucleón, \mathbf{p}_n su impulso, y $\varphi_{NR}(x)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger no-relativista.

A partir de todas estas funciones de onda es posible construir los operadores de campo cuantificados $\Psi_e(x)$, $N_\ell(x)$, $\Phi_M(x)$ y $\Psi_n(x)$ del electrón, el neutrino de Majorana con masa m_ℓ , el majorón y el nucleón, respectivamente. En particular, nosotros estamos interesados en los autoestados débiles del neutrino del electrón, que es el que interviene en los decaimientos beta que analizamos. El operador de campo $\Psi_{\nu_e}(x)$ que describa dicho autoestado débil

estará relacionado con los autoestados de neutrinos de Majorana $N_\ell(x)$ por las ecuaciones [42, 98]

$$\Psi_{\nu_{eL}} = \sum_{\ell=1}^{2n} U_{\ell e} N_{\ell L}, \quad \Psi_{\nu_{eR}} = \sum_{\ell=1}^{2n} V_{\ell e} N_{\ell R}, \quad (\text{A.1.19})$$

con matrices de mezcla $U_{\ell e}$ y $V_{\ell e}$ diferentes para los neutrinos izquierdos y derechos, que satisfacen las siguientes relaciones de normalización y ortogonalidad

$$\sum_{\ell=1}^{2n} |U_{\ell e}|^2 = \sum_{\ell=1}^{2n} |V_{\ell e}|^2 = 1, \quad \sum_{\ell=1}^{2n} U_{\ell e} V_{\ell e} = 0. \quad (\text{A.1.20})$$

Todas las sumas se realizan sobre el número de generaciones de leptones.

Apéndice B: Momentos Nucleares y Factores Leptónicos para el Decaimiento $\beta\beta_{0\nu}$

B.1 Elementos de matriz $M_x(\mathbf{q}, N)$.

La forma explícita de los factores de forma definidos en (3.1.11) y (3.1.12), una vez que se realizan las integraciones en dx y dy indicadas en (3.1.10), es:

$$M_F(\mathbf{q}, N) = g_V^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle, \quad (\text{B.1.1})$$

$$M_{GT}(\mathbf{q}, N) = g_A^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ \sigma_n e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ \sigma_m e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle, \quad (\text{B.1.2})$$

$$M_F(\mathbf{q}, N) = -2ig_V^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle, \quad (\text{B.1.3})$$

$$M_{GT}(\mathbf{q}, N) = -2ig_A^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n \sigma_n e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ \sigma_m e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle, \quad (\text{B.1.4})$$

$$M_R(\mathbf{q}, N) = -i \frac{Rg_A g_V}{2M_N} \mathbf{q} \cdot \left\{ \langle F | \sum_n \tau_n^+ \sigma_n e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \times \right. \\ \left. \langle N | \sum_m \tau_m^+ \left[\mathbf{p}_m e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \mathbf{p}_m + f_w \nabla \times \sigma_m e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} \right] | I \rangle \right\}, \quad (\text{B.1.5})$$

$$M_T(\mathbf{q}, N) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} ig_A^2 \langle F | \sum_n \tau_n^+ [\sigma_n \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}_n)^{(2)}]^{(1)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ \sigma_m e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle, \quad (\text{B.1.6})$$

$$M_P(\mathbf{q}, N) = -\sqrt{2} ig_A g_V \left\{ \sqrt{3} \langle F | \sum_n \tau_n^+ [\sigma_n \otimes (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}_n)^{(1)}]^{(0)} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle \right. \\ \left. - \langle F | \sum_n \tau_n^+ \sigma_n e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} | N \rangle \cdot \langle N | \sum_m \tau_m^+ (\mathbf{q} \otimes \mathbf{r}_m)^{(1)} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_m} | I \rangle \right\}. \quad (\text{B.1.7})$$

B.2 Factores leptónicos.

Los elementos de matriz leptónicos $L_1(\epsilon_1, \epsilon_2)$ de la Ec. (3.1.18) están dados por:

$$L_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = (-1)^{1/2-s_{e_2}} \chi_{s_{e_1}}^\dagger [g_{-1}(\epsilon_1) - f_1(\epsilon_1) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1] [f_1(\epsilon_2) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 + g_{-1}(\epsilon_2)] \chi_{-s_{e_2}}, \\ L_2(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\epsilon_1 - \epsilon_2) (-1)^{1/2-s_{e_2}} \chi_{s_{e_1}}^\dagger [g_{-1}(\epsilon_1) f_1(\epsilon_2) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 + f_1(\epsilon_1) g_{-1}(\epsilon_2) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1] \chi_{-s_{e_2}}, \\ L_3(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{R} (-1)^{1/2+s_{e_2}} \chi_{s_{e_1}}^\dagger [g_{-1}(\epsilon_1) g_{-1}(\epsilon_2) + f_1(\epsilon_1) f_1(\epsilon_2) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2] \chi_{-s_{e_2}}, \quad (\text{B.2.1}) \\ L_4(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{i}{2R} (-1)^{1/2+s_{e_2}} \chi_{s_{e_1}}^\dagger \{ [f_1(\epsilon_1) f_{-1}(\epsilon_2) + g_1(\epsilon_1) g_{-1}(\epsilon_2)] \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_1 \\ - [f_{-1}(\epsilon_1) f_1(\epsilon_2) + g_{-1}(\epsilon_1) g_1(\epsilon_2)] \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 \} \chi_{-s_{e_2}},$$

$$L_5(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{i}{2R}(-1)^{1/2+s_{e_2}} \chi_{\epsilon_1}^\dagger \{ [g_{-1}(\epsilon_1)f_{-1}(\epsilon_2) + f_{-1}(\epsilon_1)g_{-1}(\epsilon_2)] \\ - [g_1(\epsilon_1)f_1(\epsilon_2) + f_1(\epsilon_1)g_1(\epsilon_2)] \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}_1 \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 \} \chi_{-\epsilon_2},$$

con las funciones $g_{\pm 1}(\epsilon)$ y $f_{\pm 1}(\epsilon)$ definidas en (A.1.6) y (A.1.7).

Los factores del electrón $b_k(\epsilon_1, \epsilon_2)$ que aparecen en Ec. (3.1.24) son:

$$\begin{aligned} b_1(\epsilon_1, \epsilon_2) &= \epsilon_1 \epsilon_2, \\ b_2(\epsilon_1, \epsilon_2) &= (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (\epsilon_1 \epsilon_2 - 1) / 2, \\ b_3(\epsilon_1, \epsilon_2) &= (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2, \\ b_4(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 2(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1) / 9, \\ b_5(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 2(Q^2 - 2\epsilon_1 \epsilon_2 - 2 + 6\xi Q) / 3, \\ b_6(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 4Q / R, \\ b_7(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 8 [Q(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1) + 6\xi(\epsilon_1 \epsilon_2 + 1)] / (3R), \\ b_8(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 2 [Q^2(\epsilon_1 \epsilon_2 - 3) + 4(\epsilon_1 \epsilon_2 + 1) + 12\xi Q(\epsilon_1 \epsilon_2 - 1) + 36\xi^2] / 9, \\ b_9(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 8(\epsilon_1 \epsilon_2 + 1) / R^2, \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

con $\xi = \alpha Z / 2R$.

B.3 Derivación de las fórmulas finales para los momentos nucleares.

Aquí daremos los detalles para la derivación del último término de la Ec. (3.2.7). Primero, reescribimos (B.1.5) como

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R(\mathbf{q}, N) &= -i \frac{R g_A g_V}{2M_N} \mathbf{q} \cdot \langle F | \sum_n \tau_n^+ \sigma_n e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} | N \rangle \times \\ &\quad \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_m} [2\mathbf{p}_m - \mathbf{q} + i f_w \sigma_m \times \mathbf{q}] | I \rangle. \end{aligned} \tag{B.3.1}$$

Daremos ahora los detalles para la evaluación del primer término en \mathbf{M}_R que involucra el impulso del nucleón, al que designaremos como $\mathbf{M}_R^{(p)}$. Expresando el producto vectorial en coordenadas esféricas tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R^{(p)}(\mathbf{q}, N) &= \frac{R g_A g_V}{M_N} \sqrt{2} \sum_{\nu\nu'\mu} (-1)^\mu (1\nu 1\nu' | 1\mu) q^\mu \\ &\quad \langle F | \sum_n \tau_n^+ \sigma_n^{-\nu} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_n} | N \rangle \langle N | \sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_m} p_m^{-\nu'} | I \rangle. \end{aligned} \tag{B.3.2}$$

Después de realizar la expansión multipolar (3.2.1) y manejar un poco de álgebra de Racah sencilla, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R^{(p)}(\mathbf{q}, N) &= \frac{Rg_A g_V}{M_N} \sqrt{6}(4\pi)^2 q \sum_{LL'JJ'M'MM'\kappa\rho\nu} i^{L-L'} (-1)^{M'} \hat{L} \left\{ \begin{matrix} L & J' & 1 \\ 1 & 1 & \kappa \end{matrix} \right\} (L010|\kappa 0) \\ &\times (1, -\nu\kappa\rho|J', -M')(1, -\nu L' M'|JM) \\ &\times Y_{\kappa\rho}(\hat{\mathbf{q}}) Y_{L'M'}^*(\hat{\mathbf{q}}) \langle F | S_{LL'J'M'}^0(q) | N \rangle \langle N | P_{L'JM}(q) | I \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.3.3})$$

con los operadores $S_{LL'J}^0(q)$ y $P_{L'J}(q)$ definidos en (3.2.2). Finalmente, la integración angular nos permite realizar las sumas sobre las proyecciones de impulso angular y obtener

$$\begin{aligned} \int d\Omega_{\mathbf{q}} \mathbf{M}_R^{(p)}(\mathbf{q}, N) &= \frac{Rg_A g_V}{M_N} \sqrt{6}(4\pi)^2 q \sum_{LL'J} i^{L-L'} \hat{L} \left\{ \begin{matrix} L & J & 1 \\ 1 & 1 & L' \end{matrix} \right\} (L010|L'0) \\ &\langle F | S_{LL'J}^0(q) | N \rangle \cdot \langle N | P_{L'J}(q) | I \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.3.4})$$

Este resultado, junto con la Ec. (3.1.14), nos lleva al último término en la Ec. (3.2.7).

B.4 Factores de forma radiales para las funciones de onda del oscilador armónico.

Siguiendo el método de Horie y Sasaki [87], las integrales (3.3.17) pueden ser expresadas como

$$\mathcal{R}_{LL'}^{\kappa 0}(pn p' n'; \omega_{J_{\alpha}^{\pi}}) = [M(p, n) M(p', n')]^{-1/2} \sum_{mm'} a_m(p, n) a_{m'}(p', n') f_{LL'}^{\kappa}(m, m'; \omega_{J_{\alpha}^{\pi}}), \quad (\text{B.4.1})$$

donde

$$M(n_p l_p, n_n l_n) = 2^{n_p + n_n} n_p! n_n! (2l_p + 2n_p + 1)!! (2l_n + 2n_n + 1)!!, \quad (\text{B.4.2})$$

$$a_{l_p + l_n + 2s}(n_p l_p, n_n l_n) = \sum_{k+k'=s} \binom{n_p}{k} \binom{n_n}{k'} \frac{(2l_p + 2n_p + 1)!! (2l_n + 2n_n + 1)!!}{(2l_p + 2k + 1)!! (2l_n + 2k' + 1)!!}, \quad (\text{B.4.3})$$

$$f_{LL'}^{\kappa}(m, m'; \omega_{J_{\alpha}^{\pi}}) = \sum_{\mu} a_{2\mu} \left(\frac{m-L}{2} L, \frac{m'-L'}{2} L' \right) \mathcal{J}_{\mu}^{\kappa}(\omega_{J_{\alpha}^{\pi}}), \quad (\text{B.4.4})$$

y

$$\mathcal{J}_{\mu}^{\kappa}(\omega_{J_{\alpha}^{\pi}}) = (2\nu)^{-\mu} R \int_0^{\infty} dq q^{2\mu+2+\kappa} e^{-q^2/2\nu} v(q; \omega_{J_{\alpha}^{\pi}}). \quad (\text{B.4.5})$$

Apéndice C: Aproximación de Fases al Azar para Cuasipartículas (QRPA)

C.1 El Hamiltoniano nuclear.

Es conveniente expresar el Hamiltoniano nuclear en la forma [99]

$$H = H_p + H_n + H_{pn}, \quad (\text{C.1.1})$$

donde H_p y H_n describen los Hamiltonianos efectivos de protones y neutrones, respectivamente, mientras que H_{pn} representa la interacción efectiva entre protones y neutrones. En el formalismo de segunda cuantización estas cantidades están dadas por

$$H_t = \sum_t (e_t - \lambda_t) a_t^\dagger a_t + \frac{1}{4} \sum_{t's} \langle t_1 t_2 | V | t_3 t_4 \rangle_{\mathcal{A}} a_{t_1}^\dagger a_{t_2}^\dagger a_{t_4} a_{t_3}, \quad t = p, n, \quad (\text{C.1.2})$$

$$H_{pn} = \sum_{pp'n'} \langle pn | V | p'n' \rangle_{\mathcal{A}} : a_p^\dagger a_n^\dagger a_{n'} a_{p'} : , \quad (\text{C.1.3})$$

donde los subíndices p (n) indican todo el conjunto de números cuánticos, es decir $p \equiv \{n_p, l_p, j_p, m_p\}$ ($n \equiv \{n_n, l_n, j_n, m_n\}$), y toda la otra notación tiene el significado usual: e_t es la energía de partícula independiente, λ_t el potencial químico, a_t^\dagger (a_t) son los operadores de creación (aniquilación) de partícula independiente, el símbolo $: \quad :$ indica el producto normal de operadores fermiónicos respecto al vacío de quasipartículas que definiremos más adelante, y el índice \mathcal{A} señala elementos de matriz respecto de estados antisimétricos, es decir

$$\langle t_1 t_2 | V | t_3 t_4 \rangle_{\mathcal{A}} = \langle t_1 t_2 | V | t_3 t_4 \rangle - \langle t_1 t_2 | V | t_4 t_3 \rangle. \quad (\text{C.1.4})$$

El Hamiltoniano (C.1.2) es diagonalizado a través de una transformación canónica a quasipartículas [100]

$$\alpha_t^\dagger = u_t a_t^\dagger - v_t a_{\bar{t}}, \quad u_t^2 + v_t^2 = 1, \quad a_{\bar{t}} = (-1)^{t+m_t} a_{t,-m_t}, \quad (\text{C.1.5})$$

y utilizando el teorema de Wick con respecto al vacío de quasipartículas dado por

$$|BCS\rangle \equiv |0^+\rangle = |0_p\rangle |0_n\rangle, \quad |0_t\rangle = \prod_t (u_t + v_t a_t^\dagger a_{\bar{t}}^\dagger), \quad t = p, n, \quad (\text{C.1.6})$$

donde $| \rangle$ es el vacío de partículas. En efecto, a partir de la transformación (C.1.5), el Hamiltoniano (C.1.2) toma la forma

$$H_t = H_t^0 + H_t^{11} + H_t^{20}, \quad (\text{C.1.7})$$

donde

$$\begin{aligned} H_t^0 &= \sum_t (e_t - \lambda_t) v_t^2 - \frac{1}{2} u_t v_t \Delta_t, \\ H_t^{11} &= \sum_t [(e_t - \lambda_t)(u_t^2 - v_t^2) + 2u_t v_t \Delta_t] \alpha_t^\dagger \alpha_t, \\ H_t^{20} &= \sum_t [(e_t - \lambda_t) u_t v_t - \frac{1}{2}(u_t^2 - v_t^2) \Delta_t] (\alpha_t^\dagger \alpha_t^\dagger + \alpha_t \alpha_t), \end{aligned} \quad (\text{C.1.8})$$

con los *gaps* de apareamiento están dados por

$$\Delta_t = -\frac{1}{2} \sum_{t'} \hat{j}_{t'} \hat{j}_t^{-1} u_{t'} v_{t'} \langle tt'; 0 | V^{pair} | t't'; 0 \rangle, \quad (\text{C.1.9})$$

donde V^{pair} es la parte de la interacción nuclear que describe el apareamiento. Esta acopla estados de pares de partículas con impulso angular total nulo. Exigiendo que el término H_t^{20} se anule obtenemos la siguiente relación

$$2(e_t - \lambda_t) u_t v_t = (u_t^2 - v_t^2) \Delta_t, \quad (\text{C.1.10})$$

que junto con la condición de normalización $u_t^2 + v_t^2 = 1$ tiene como soluciones

$$u_t^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e_t - \lambda_t}{\epsilon_t} \right), \quad v_t^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e_t - \lambda_t}{\epsilon_t} \right), \quad (\text{C.1.11})$$

con $\epsilon_t = \sqrt{(e_t - \lambda_t)^2 + \Delta_t^2}$. A menos de un término constante, el Hamiltoniano (C.1.2) toma la forma diagonal

$$H_t = \sum_t \epsilon_t \alpha_t^\dagger \alpha_t, \quad (\text{C.1.12})$$

de donde queda claro que ϵ_t es la energía de quasipartícula.

Después de realizar la transformación (C.1.5), la interacción residual protón-neutrón puede escribirse

$$H_{pn} = H_{pn}^{22} + H_{pn}^{04} + H_{pn}^{40}, \quad (\text{C.1.13})$$

con

$$\begin{aligned}
 H_{pn}^{22} &= \sum_{pp'nn'} [\langle pn|V|p'n' \rangle_{\mathcal{A}} (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) \\
 &\quad - \langle p\bar{n}'|V|p'\bar{n} \rangle_{\mathcal{A}} (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'})] \alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger \alpha_{n'} \alpha_{p'}, \\
 H_{pn}^{04} &= H_{pn}^{40} = \sum_{pp'nn'} \langle pn|V|p'n' \rangle_{\mathcal{A}} u_p u_n v_{p'} v_{n'} \alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger \alpha_{n'}^\dagger \alpha_{p'}^\dagger.
 \end{aligned} \tag{C.1.14}$$

Hasta el momento hemos incluido, además del campo medio, una parte de corto alcance de la interacción residual, que no es más que la interacción de apareamiento. La interacción residual entre protones y neutrones será tratada como una perturbación en el marco de la aproximación de fases al azar para quasipartículas .

C.2 Ecuaciones de QRPA.

Comenzaremos definiendo los estados excitados $|J_\alpha^\pi M\rangle$ que se construyen por la acción de los operadores de intercambio de carga $\Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M)$ sobre el estado fundamental correlacionado *exacto* $|\bar{0}\rangle$, es decir $|J_\alpha^\pi M\rangle = \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M)|\bar{0}\rangle$. Para llegar a las ecuaciones de QRPA partiremos de la ecuación de movimiento [100]

$$\langle \bar{0} | [\delta\Gamma(J_\alpha^\pi), [H, \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi)]] | \bar{0} \rangle = \omega_{J_\alpha^\pi} \langle \bar{0} | [\delta\Gamma(J_\alpha^\pi), \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi)] | \bar{0} \rangle, \tag{C.2.1}$$

donde $\omega_{J_\alpha^\pi}$ es la energía de la excitación y $\delta\Gamma(J_\alpha^\pi)$ representa una variación arbitraria del operador. La QRPA consiste en aproximar el operador de excitación en la representación acoplada por la expansión ¹³

$$\Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M) = \sum_{pn} [X_{J_\alpha^\pi}(pn) A_{JM}^\dagger(pn) - Y_{J_\alpha^\pi}(pn) A_{\overline{JM}}(pn)], \tag{C.2.2}$$

en la base de operadores

$$A_{JM}^\dagger(pn) = (\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger)_{JM}, \quad A_{\overline{JM}}(pn) = (-1)^{J+M} A_{J-M}(pn). \tag{C.2.3}$$

¹³En este operador de excitación se tienen en cuenta correlaciones del estado fundamental, es decir, se contempla que en ese estado puedan existir quasipartículas y que un estado excitado pueda obtenerse por creación de quasipartículas (primer término de la sumatoria), o por aniquilación de las mismas (segundo término).

Además, debido a que no se conoce el vacío exacto $|\bar{0}\rangle$, se asume $|\bar{0}\rangle \simeq |BCS\rangle$, que lleva a la llamada *aproximación cuasibosónica*

$$\begin{aligned} \langle \bar{0} | [A_{J\pm M}(pn), A_{J\pm M}(p'n')] | \bar{0} \rangle &\simeq 0, \\ \langle \bar{0} | [A_{J\pm M}^\dagger(pn), A_{J\pm M}^\dagger(p'n')] | \bar{0} \rangle &\simeq 0, \\ \langle \bar{0} | [A_{JM}(pn), A_{JM}^\dagger(p'n')] | \bar{0} \rangle &\simeq \delta_{pp'} \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (C.2.4)$$

De esta manera, la ecuación de movimiento (C.2.1) nos provee los coeficientes $X_{J\pm}(pn)$ e $Y_{J\pm}(pn)$ y los autovalores $\omega_{J\pm}$ como una solución de la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}, \quad (C.2.5)$$

con submatrices

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(pn p'n'; J) &= \langle BCS | [A_{\bar{J}}(pn), [H, A_{\bar{J}}^\dagger(p'n')]] | BCS \rangle \\ &= (\epsilon_p + \epsilon_n) \delta_{pp'} \delta_{nn'} + (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) F(pn p'n'; J) \\ &\quad + (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) G(pn p'n'; J), \\ \mathcal{B}(pn p'n'; J) &= -\langle BCS | [A_{\bar{J}}(pn), [H, A_{\bar{J}}(p'n')]] | BCS \rangle \\ &= (v_p u_n u_{p'} v_{n'} + u_p v_n v_{p'} u_{n'}) F(pn p'n'; J) \\ &\quad + (u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) G(pn p'n'; J). \end{aligned} \quad (C.2.6)$$

Aquí F y G son, respectivamente, los elementos de matriz de partícula-agujero y partícula-partícula definidos como

$$G(pn p'n'; J) = \langle pn; J | V | p'n'; J \rangle, \quad F(pn p'n'; J) = \langle pn^{-1}; J | V | p'n'^{-1}; J \rangle. \quad (C.2.7)$$

C.3 Interacción residual.

En este trabajo emplearemos una interacción residual del tipo delta [101, 102, 103]

$$V = -4\pi(v_s P_s + v_t P_t) \delta(\tau) \quad (\text{en unidades de MeV fm}^3), \quad (C.3.1)$$

con diferentes valores de las constantes v_s y v_t para los canales partícula-agujero (ph), partícula-partícula (pp) y apareamiento (pair). Los elementos de matriz acoplados a mo-

mento angular total J para los canales pp y ph, están en este caso dados por [102, 103]

$$\begin{aligned} G(ppp'n'; J) &= -\frac{1}{2}f(ppp'n') [v_s g(ppnJ)g(p'n'J) + v_t h(ppnJ)h(p'n'J)], \\ F(ppp'n'; J) &= \frac{1}{4}f(ppp'n') [(3v_t - v_s)g(ppnJ)g(p'n'J) + (v_t + v_s)h(ppnJ)h(p'n'J)], \end{aligned} \quad (\text{C.3.2})$$

donde

$$f(ppp'n') = \frac{1}{2} \int_0^\infty u_{n_p, l_p}(r) u_{n_n, l_n}(r) u_{n_{p'}, l_{p'}}(r) u_{n_{n'}, l_{n'}}(r) r^2 dr, \quad (\text{C.3.3})$$

es la integral radial y

$$\begin{aligned} g(ppnJ) &\equiv \sqrt{4\pi} \hat{J}^{-1} \langle (\frac{1}{2}l_p)j_p || Y_J || (\frac{1}{2}l_n)j_n \rangle = (-1)^{j_p - \frac{1}{2}} \hat{j}_p \hat{j}_n \begin{pmatrix} j_p & j_n & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ h(ppnJ) &\equiv \sqrt{4\pi} \hat{J}^{-1} \langle (\frac{1}{2}l_p)j_p || [\sigma \times Y_L]_{J=L} || (\frac{1}{2}l_n)j_n \rangle = (-1)^{j_p - j_n + l_p + J} \hat{j}_p \hat{j}_n \begin{pmatrix} j_p & j_n & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

son los elementos de matriz reducidos de los operadores con y sin intercambio de espín.

C.4 Matriz densidad dentro de la QRPA.

Como indica la Ec. (3.3.2), la evaluación de un dado elemento de matriz requiere el conocimiento de la matriz densidad definida en la Ec. (3.3.3). Si escribimos el estado intermedio en términos del operador de excitación, es decir $|J_\alpha^\pi M\rangle = \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M)|\tilde{0}\rangle$, siendo $|\tilde{0}\rangle$ el vacío exacto en el núcleo intermedio $(N-1, Z+1)$, la matriz densidad toma la forma

$$\rho^{ph}(ppp'n'; J_\alpha^\pi) = (-1)^{J+M} \langle 0_f^+ | \left[(a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{J^\pi - M}, \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M) \right] |\tilde{0}\rangle \langle \tilde{0} | \left[\Gamma(J_\alpha^\pi M), (a_{p'}^\dagger a_{\bar{n}'})_{J^\pi M} \right] |0_i^+\rangle. \quad (\text{C.4.1})$$

Mediante la transformación a quasipartículas (C.1.5) podemos reescribir

$$(a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{JM} = -u_n v_p A_{JM}(pn) - u_p v_n A_{JM}^\dagger(pn), \quad (\text{C.4.2})$$

donde ya hemos despreciado los términos de dispersión del tipo $\alpha_p \alpha_n$ y $\alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger$.

Hasta aquí el cálculo es exacto. Dentro de la QRPA empleamos la expansión (C.2.2) para el operador de excitación, y hacemos la aproximación $|0_i^+\rangle \simeq |0_f^+\rangle \simeq |\tilde{0}\rangle \simeq |BCS\rangle$. Entonces, introduciendo (C.2.2) y (C.4.2) en (C.4.1), y usando las reglas de conmutación (C.2.4), después de un poco de álgebra simple obtenemos

$$\rho^{ph}(ppp'n'; J_\alpha^\pi) = [u_p v_n X_{J_\alpha^\pi}(pn) + u_n v_p Y_{J_\alpha^\pi}(pn)] [u_{n'} v_{p'} X_{J_\alpha^\pi}(p'n') + u_{p'} v_{n'} Y_{J_\alpha^\pi}(p'n')]. \quad (\text{C.4.3})$$

Apéndice D: Matriz de Mezcla y Matriz-S para el Modelo de Majorón Cargado

D.1 Diagonalización de la matriz de masa.

Para dar un ejemplo sencillo, en esta Sección vamos a analizar la matriz de masa (4.1.7) para la siguiente elección particular de los parámetros de modelo de Burgess y Cline (ver Ec. (4.1.3))

$$\lambda v = M, \quad g_+ = g_- \equiv g. \quad (\text{D.1.1})$$

En este caso la matriz de masa puede escribirse como

$$\mathcal{M} = \frac{\tilde{M}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & s_\theta & 0 & 0 & 0 \\ s_\theta & 0 & s_\theta & 0 & c_\theta \\ 0 & s_\theta & 0 & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1.2})$$

donde $\tilde{M} = \sqrt{2}\sqrt{g^2 u^2 + M^2}$ es la forma particular de la cantidad definida en (4.1.8). Usamos la notación $s_\theta = \text{sen}\theta$, $c_\theta = \text{cos}\theta$, etc.

El problema de la diagonalización de esta matriz consiste en hallar los autovalores m_i y los autovectores L_i , $i = 1, \dots, 5$, que satisfacen las ecuaciones $\det(m_i \mathbf{1} - \mathcal{M}) = 0$, $\mathcal{M}X_i = m_i X_i$, donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad 5×5 . Los resultados que se obtienen son

$$\begin{aligned} m_1 &= 0, & X_1 &= (c_\theta, 0, 0, 0, -s_\theta), \\ m_2 &= -M_-, & X_2 &= \frac{1}{2}(s_\theta, -(1-s_\theta)^{1/2}, -1, (1+s_\theta)^{1/2}, c_\theta), \\ m_3 &= M_-, & X_3 &= \frac{1}{2}(s_\theta, (1-s_\theta)^{1/2}, -1, -(1+s_\theta)^{1/2}, c_\theta), \\ m_4 &= -M_+, & X_4 &= \frac{1}{2}(s_\theta, -(1+s_\theta)^{1/2}, 1, -(1-s_\theta)^{1/2}, c_\theta), \\ m_5 &= M_+, & X_5 &= \frac{1}{2}(s_\theta, (1+s_\theta)^{1/2}, 1, (1-s_\theta)^{1/2}, c_\theta), \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

donde

$$M_\pm = \frac{\tilde{M}}{\sqrt{2}} (1 \pm s_\theta)^{1/2}, \quad (\text{D.1.4})$$

son las expresiones para las masas (4.1.8) en el caso particular que estamos analizando.

Ahora podemos construir la matriz unitaria U tal que

$$U\mathcal{M}U^\dagger = \mathcal{M}', \quad (\text{D.1.5})$$

donde \mathcal{M}' es la matriz de masa diagonal

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -M_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_+ \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1.6})$$

Dicha matriz es ¹⁴

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2c_\theta & 0 & 0 & 0 & -2s_\theta \\ -is_\theta & i(1-s_\theta)^{1/2} & i & -i(1+s_\theta)^{1/2} & -ic_\theta \\ s_\theta & (1-s_\theta)^{1/2} & -1 & -(1+s_\theta)^{1/2} & c_\theta \\ -is_\theta & i(1+s_\theta)^{1/2} & -i & i(1-s_\theta)^{1/2} & -ic_\theta \\ s_\theta & (1+s_\theta)^{1/2} & 1 & (1-s_\theta)^{1/2} & c_\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1.7})$$

D.2 Relación entre estados de masa y sabor.

En la Ec. (4.1.6) la densidad Lagrangiana fue escrita en término de los autoestados de sabor

$\bar{L} = (\bar{\nu}_e, \bar{s}_-, \bar{P}_L s_+, \bar{N}_+, \bar{N}_-)$ como

$$\mathcal{L} = -\bar{L} \mathcal{M} L. \quad (\text{D.2.1})$$

A partir de la Ec. (D.1.5), podemos reescribirla en términos de la matriz de masa diagonal \mathcal{M}' de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = -\bar{L}' \mathcal{M}' L', \quad (\text{D.2.2})$$

donde

$$\bar{L}' = \bar{U} L = (\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5), \quad (\text{D.2.3})$$

son los autoestados de masa. De (D.1.7) vemos que ellos están relacionados con los estados de sabor de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nu_e &= c_\theta \nu'_e + \frac{1}{\sqrt{2}} s_\theta (\psi_- + \psi_+), \\ s_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1-s_\theta)^{1/2} \psi'_- + \frac{1}{\sqrt{2}} (1+s_\theta)^{1/2} \psi'_+, \\ P_L s_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_- + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_+, \end{aligned}$$

¹⁴Hemos introducido los factores i en las filas correspondientes a los autovectores X_2 y X_4 para absorber los signos de sus autovalores $-M_-$ y $-M_+$ en las matrices de mezcla y los campos de Majorana (ver Sección 2.3.2 en Ref. [42]).

$$\begin{aligned}
 N_- &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+s_\theta)^{1/2}\psi'_- + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-s_\theta)^{1/2}\psi'_+, \\
 N_+ &= -s_\theta\nu'_e + \frac{1}{\sqrt{2}}c_\theta(\psi_- + \psi_+),
 \end{aligned} \tag{D.2.4}$$

donde hemos definido los neutrinos

$$\begin{aligned}
 \nu'_e &= N_1, & \psi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_3 + iN_2), & \psi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_5 + iN_4), \\
 \psi'_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_3 - iN_2), & \psi'_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(N_5 - iN_4).
 \end{aligned} \tag{D.2.5}$$

El neutrino ν'_e es no masivo, los neutrinos de Dirac ψ_+ y ψ'_+ tienen masa M_+ , mientras que ψ_- y ψ'_- tienen masa M_- ¹⁵.

De la Ec. (D.2.4) vemos claramente que el neutrino no-masivo ν'_e y los neutrinos de Dirac ψ_\pm son una combinación 'lineal' de los estados ν_e , $P_L s_+$ y N_+ , con número leptónico $L = 1$, mientras que los neutrinos de Dirac ψ'_\pm son una combinación lineal de los estados s_- y N_- , con número leptónico $L = -1$. Restringiéndonos entonces al subespacio generado por los estados (ν'_e, ψ_-, ψ_+) debido a la conservación del número leptónico, de (D.2.4) vemos que la matriz de mezcla unitaria con los estados $(\nu_e, N_+, P_L s_+)$ será

$$\begin{pmatrix} c_\theta & \frac{s_\theta}{\sqrt{2}} & \frac{s_\theta}{\sqrt{2}} \\ -s_\theta & \frac{c_\theta}{\sqrt{2}} & \frac{c_\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{D.2.6}$$

que no es más que la matriz de (4.1.9) aplicada a nuestro caso particular (D.1.1).

D.3 Evaluación de la matriz-S.

En esta Sección vamos a esbozar el procedimiento seguido para evaluar la matriz-S, y a partir de ella la amplitud de transición (4.2.5). El primer paso es introducir un conjunto completo de estados intermedios $|N\rangle$ y emplear la Ec. (4.2.4) para la corriente nuclear. La integración en x_0 , y_0 y z_0 puede realizarse haciendo el cambio de variables

$$x_0 - y_0 = 2\xi, \quad x_0 + y_0 = 2\eta, \tag{D.3.1}$$

¹⁵La no masividad de ν'_e se debe a que N_1 es no masivo. Por otro lado, a partir de un par de neutrinos de Majorana N y N' degenerados en masa, es decir, con masas m y $-m$ respectivamente, es posible construir dos neutrinos de Dirac con masa m , dados por $\psi = (N \pm N')/\sqrt{2}$ (ver Sección 2.5.1 en Ref. [42]).

y usando las propiedades

$$\int d\eta e^{i\Delta\eta} = 2\pi\delta(\Delta), \quad \int d\xi e^{i\Delta\xi}\theta(\xi) = \frac{i}{\Delta + i\epsilon}, \quad \int d\xi e^{i\Delta\xi}\theta(-\xi) = \frac{-i}{\Delta - i\epsilon}. \quad (\text{D.3.2})$$

De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} S_{MC} &= -\frac{G^2}{2}\delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + k^0 - Q) \sum_N \sum_{\ell\ell'} b_{\ell\ell'} U_{e\ell} U_{e\ell'} \int dx dy dz \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^3} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^3} \\ &\times \delta(k^0 + q_1^0 - q_2^0) \frac{e^{iq_1 \cdot (x-z)}}{q_1^2 - m_\ell^2 + i\epsilon} \frac{e^{-ik \cdot z}}{\sqrt{2k_0} q_2^2 - m_{\ell'}^2 + i\epsilon} \frac{e^{iq_2 \cdot (z-y)}}{\sqrt{2k_0} q_2^2 - m_{\ell'}^2 + i\epsilon} \\ &\times \left[\frac{\langle F | J_L^{\rho\dagger}(\mathbf{x}) | N \rangle \langle N | J_L^{\sigma\dagger}(\mathbf{y}) | I \rangle}{\omega_N + \frac{1}{2}(q_1^0 + q_2^0) - i\epsilon} + \frac{\langle F | J_L^{\sigma\dagger}(\mathbf{y}) | N \rangle \langle N | J_L^{\rho\dagger}(\mathbf{x}) | I \rangle}{\omega_N - \frac{1}{2}(q_1^0 + q_2^0) - i\epsilon} \right] \\ &\times \bar{\psi}(\epsilon_1, \mathbf{x}) \gamma_\rho \not{q}_1 \not{q}_2 P_L \gamma_\sigma \psi^C(\epsilon_2, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (\text{D.3.3})$$

donde usamos la aproximación $\epsilon_i \simeq Q/2$ en los denominadores de energía, basándonos en la simetría del espectro respecto a los dos electrones finales [42, 52], empleamos la definición (3.1.17) y la propiedad

$$P_L(\not{q}_1 + m_\ell)P_R(\not{q}_2 + m_{\ell'})P_L = \not{q}_1 \not{q}_2 P_L. \quad (\text{D.3.4})$$

Aproximando ω_N por una energía de excitación promedio $\langle \omega_N \rangle \equiv \mu$ e integrando en \mathbf{z} y q_2 resulta ¹⁶

$$\begin{aligned} S_{MC} &= G^2 \sqrt{\frac{k}{2}} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + k - Q) \sum_N \sum_{\ell\ell'} b_{\ell\ell'} U_{e\ell} U_{e\ell'} \int dx dy \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} e^{iq \cdot (x-y)} \\ &\times \frac{\mu}{(q^2 - m_\ell^2 + i\epsilon)(q^2 - m_{\ell'}^2 + i\epsilon)(q_0^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \\ &\times \langle F | J_L^{\rho\dagger}(\mathbf{x}) | N \rangle \langle N | J_L^{\sigma\dagger}(\mathbf{y}) | I \rangle \bar{\psi}(\epsilon_1, \mathbf{x}) \gamma_\rho \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\gamma} \gamma_0 P_L \gamma_\sigma \psi^C(\epsilon_2, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{D.3.5})$$

A partir de las Ecs. (4.1.12) y (4.1.13), para el modelo de majorón cargado obtenemos

$$\sum_{\ell\ell'} \frac{b_{\ell\ell'} U_{e\ell} U_{e\ell'}}{(q^2 - m_\ell^2 + i\epsilon)(q^2 - m_{\ell'}^2 + i\epsilon)} = \frac{ig_+}{4} s_\theta s_{2\theta} s_{2\alpha} (P_- - P_+) (P_0 - s_\alpha^2 P_+ - c_\alpha^2 P_-), \quad (\text{D.3.6})$$

con $P_i = (q^2 - M_i^2 + i\epsilon)^{-1}$, $M_0 \equiv 0$. Para transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$, de la Ec. (2.1.8) resulta

¹⁶Despreciamos todas las dependencias con k^0 en la exponencial y los denominadores de energía debido a que $k^0 = |\mathbf{k}| \equiv k$ es del orden de unos pocos MeV [42]. Sólo retenemos el término proporcional a kq en el numerador pues la contribución de orden cero en la energía del majorón resulta nula, y eso hace necesario trabajar al próximo orden [17, 18].

$$\begin{aligned}
 J_L^{\rho\dagger}(\mathbf{x})J_L^{\sigma\dagger}(\mathbf{y})\gamma_\rho\mathbf{q}\cdot\gamma\gamma_0\gamma_\sigma &= \mathbf{q}\cdot\left[\mathbf{j}_\lambda(\mathbf{x})\rho_\lambda(\mathbf{y})-\rho_\lambda(\mathbf{x})\mathbf{j}_\lambda(\mathbf{x})\right. \\
 &+ i\left(\mathbf{j}_\lambda(\mathbf{x})\times\mathbf{j}_\nu(\mathbf{y})+\mathbf{j}_\nu(\mathbf{x})\times\mathbf{j}_\lambda(\mathbf{y})\right) \\
 &\left. + \mathbf{j}_\nu(\mathbf{x})\rho_\nu(\mathbf{y})-\rho_\nu(\mathbf{x})\mathbf{j}_\nu(\mathbf{y})\right].
 \end{aligned}
 \tag{D.3.7}$$

Introduciendo (D.3.6) y (D.3.7) en (D.3.5), podemos escribir la matriz S_{MC} en la forma [104]

$$S_{MC} = -2\pi i\delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + k - Q)R_{MC},
 \tag{D.3.8}$$

con la amplitud de transición dada en (4.2.5).

Referencias

- [1] C.S. Wu, E. Ambler, R.H. Hayward, D.O. Hopper y R.P. Hudson, *Phys. Rev.* **105**, (1957), 1413.
- [2] T.D. Lee y C.N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, (1956), 254.
- [3] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
- [4] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.
- [5] A. Salam, *Proc. of the Eight Nobel Symp.* ed. N. Svartholm (Almqvist y Wiksell, Stockholm, 1968) p. 367.
- [6] M. Goeppert-Mayer, *Phys. Rev.* **48** (1935) 512.
- [7] J. Schimer, D. Habs, R. Kroth, N. Kwong, D. Schwalm y M. Zirnbauer, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1897.
- [8] W.H. Furry, *Phys. Rev.* **56** (1939) 1184.
- [9] J. Schechter y J.W.F. Valle, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 2951.
- [10] Y. Chikashige, R.N. Mohapatra y R.D. Peccei, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1926.
- [11] G.B. Gelmini y M. Roncadelli, *Phys. Lett.* **B99** (1981) 411.
- [12] G.S. Abrams et al., *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 724.
- [13] M.C. Gonzalez-Garcia y Y. Nir, *Phys. Lett.* **B232** (1989) 383.
- [14] M.K. Moe, M.A. Nelson, M.A. Vient y S.R. Elliot in *Neutrino '92*, Proceedings of the XVth International Conference on Neutrino Physics y Astrophysics, Granada, Spain, 1992.
- [15] S.R. Elliot, M.K. Moe, M.A. Nelson y M.A. Vient, *J. Phys.* **G17** (1991) S145; *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.) **31** (1993) 68.

- [16] F.T. Avignone III et al., *Phys. Lett.* **B256** (1991) 559.
- [17] C.P. Burgess y J.M. Cline, *Phys. Lett.* **B298**, (1993), 141.
- [18] C.P. Burgess y J.M. Cline, *Phys. Rev.* **D49**, (1994), 5925.
- [19] H. V. Klapdor-Kleingrothaus, *Prog. in Part. and Nucl. Phys.* **32** (1994) 261.
- [20] F. Šimkovic, J. Schwieger, G. Pantis and A. Faessler, *Fund. Phys.* **27** (1997) 1275.
- [21] T. Tomoda y A. Faessler, *Phys. Lett.* **B199** (1987) 475.
- [22] K. Muto, E. Bender y H.V. Klapdor, *Z. Phys.* **A334** (1989) 187.
- [23] G. Pantis, F. Šimkovic, J.D. Vergados y A. Faessler, *Phys. Rev.* **C53** (1996) 695.
- [24] A. Faessler and F. Šimkovic *J. Phys.* **G54** (1998) 2139.
- [25] S.R. Elliot, A.A. Hahn y M.K. Moe, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1649.
- [26] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, *hep-ex/9802007* (1998).
- [27] E.L. Fremlin y M.C. Walters, *Proc. Phys. Soc.* **A65** (1952) 911.
- [28] F.T. Avignone III, R.L. Brodzinski, D.P. Brown, J.C. Evans, Jr, W.K. Hensley y J.H. Reeves, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 721.
- [29] M. Beck et al., *Phys. Rev. Lett.* **70**, (1993), 2853.
- [30] Günter et al., *Phys. Rev.* **D55** (1997) 54.
- [31] B. Eman y D. Tadić, *Glasnik Matematičko Fizički i Astronomski* **16** (1961) 89; *ibid Nucl. Phys.* **38** (1962) 453.
- [32] H.F. Schoper, *Weak Interactions y Nuclear Beta Decay* (North-Holland, Amsterdam, 1966).
- [33] A. Bohr y B.R. Mottelson, *Nuclear Structure* (Benjamin, New York, 1969) vol. I.

- [34] H. Beherens y W. Büring, *Electron Radial Wave Functions and Nuclear Beta Decay* (Clarendon, Oxford, England, 1982).
- [35] C. Barbero, F. Krmpotić y A. Mariano, *Phys. Lett.* **B345**, (1995) 192.
- [36] C. Barbero, F. Krmpotić y A. Mariano, *Phys. Lett.* **B436**, (1998) 49.
- [37] C. Barbero, F. Krmpotić, A. Mariano y D. Tadić, *Phys. Lett.* **B445**, (1999) 249.
- [38] C. Barbero, F. Krmpotić y D. Tadić, *Nucl. Phys.* **A628**, (1998) 170.
- [39] C. Barbero, F. Krmpotić, A. Mariano y D. Tadić, *Nucl. Phys. A*, (1999) (aceptado), *nucl-th/9902040*.
- [40] C. Barbero, J.M. Cline, F. Krmpotić y D. Tadić, *Phys. Lett.* **B371**, (1996) 78.
- [41] C. Barbero, J.M. Cline, F. Krmpotić y D. Tadić, *Phys. Lett.* **B392**, (1997) 419.
- [42] M. Doi, T. Kotani y E. Takasugi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **83**, (1985), 1.
- [43] T. Tomoda, A. Faessler, K.W. Schmid y F. Grümmer, *Nucl. Phys.* **A452** (1986) 591; T. Tomoda, *Rep. Prog. Phys.* **54** (1991) 53.
- [44] M. Doi y T. Kotani, *Prog. Theor. Phys.* **89**, (1993) 139.
- [45] C. Itzykson y J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Inc, USA, 1980).
- [46] J. Hirsch, E. Bauer y F. Krmpotić, *Nucl. Phys.* **A516** (1990) 304.
- [47] B.A. Brown y B.H. Wildenthal, *Atom Data and Nuclear Data Tables* **33** (1985) 347.
- [48] E.D. Commins y P.H. Bucksbaum, *Weak interactions of leptons and quarks*, (Cambridge University Press, 1983).
- [49] W. C. Haxton y G. Stephenson, *Prog. in Part. and Nucl. Phys.* **12** (1984) 409.
- [50] D. Vergados, *Phys. Rep.* **133** (1986) 1.

- [51] J.D. Walecka, *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics* (Oxford University Press, New York, 1995).
- [52] E.J. Konopinski, *Theory of Beta Radioactivity* (London: Oxford University Press, 1966).
- [53] M.E. Rose y R.K. Osborn, *Phys. Rev.* **93** (1954) 1315, *ibid. Phys. Rev.* **93** (1954) 1326.
- [54] T. deForest y J.D. Walecka, *Adv. Phys.* **15** (1966) 1.
- [55] F. Krmpotić y S. Shelly Sharma, *Nucl. Phys.* **A572** (1994) 329.
- [56] J. Hirsch y F. Krmpotić, *Phys. Rev.* **C41** (1990) 792.
- [57] F. Krmpotić, J. Hirsch y H. Dias, *Nucl. Phys.* **A542** (1992) 85.
- [58] F. Krmpotić, T.T.S. Kuo, A. Mariano, E.J.V. de Passos y A.F.R. de Toledo Piza, *Nucl. Phys.* **A612** (1997) 223.
- [59] F. Krmpotić, *Rev. Mex. Fís.* **40** (1994) 285.
- [60] H. Ejiri, K. Fushimi, K. Hayashi, T. Kishimoto, N. Kudomi, K. Kume, K. Nagata, H. Ohsumi, K. Okada, T. Shima y J. Tanaka, *Nucl. Phys.* **A611** (1996) 85.
- [61] M. Doi, T. Kotani y E. Takasugi, *Phys. Rev.* **D37**, (1988), 2104; *Phys. Rev.* **D37**, (1988), 2575.
- [62] H. Georgi, S.L. Glasshow y S. Nussinov, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 297.
- [63] C.D. Carone, *Phys. Lett.* **B308**, (1993), 85.
- [64] P. Bamert, C.P. Burgess y R.N. Mohapatra, *Nucl. Phys.* **B438**, (1995), 3.
- [65] M. Hirsch, H.V. Klapdor-Kleingrothaus, S.G. Kovalenko y H. Päs, *Phys. Lett.* **B372** (1996) 8.
- [66] F. Krmpotić, in *Lectures on Hadron Physics*, ed. E. Ferreira (World Scientific, Singapore, 1990) 205.

- [67] G. Pantis y J.D. Vergados *Phys. Lett.* **B242** (1990) 1.
- [68] J.D. Vergados *Nucl. Phys.* **A506** (1990) 482.
- [69] M. Rho, *nucl-th/9708060* (1997).
- [70] G.E. Brown, S.O. Bäckman, E. Oset y W. Weise, *Nucl. Phys.* **A286** (1977) 191.
- [71] J. Suhonen, P.C. Divari, L.D. Skouras y I.P. Johnstone, *Phys. Rev.* **C55** (1997) 714.
- [72] A. Morales *Nucl. Phys.* **B48** (1996) 210.
- [73] T. Bernatowitz, J. Brannon, R. Brazle, R. Cowsik, C. Hohenberg y F. Podosek, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2341; *Phys. Rev.* **C47** (1993) 806.
- [74] A. Alessandrello et al., *Nucl. Phys. A Proc. Suppl.* **35** (1994) 366.
- [75] M. Alston-Garnjost et al., *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1928.
- [76] E.K. Warburton, J.A. Becker, B.A. Brown y D.J. Millener, *Ann. Phys. (N.Y.)* **187** (1988) 471.
- [77] E.K. Warburton, J.A. Becker, B.A. Brown y D.J. Millener, *Phys. Rev.* **49** (1994) 824.
- [78] R.J. Blin-Stoyle y S.C.K. Nair, *Ann. Phys.*, **15** (1966) 493; R.J. Blin-Stoyle, *Fundamental Interactions and the Nucleus*, (North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [79] K. Kubedera, J. Delorme y M. Rho, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 755.
- [80] E.G. Adelberger y W.C. Haxton, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **35** (1986) 501.
- [81] A. Williams y W.C. Haxton, in *Intersections between Particle y Nuclear Physics*, ed. G.M. Bunce (AIP Conf. Proc. No. 176, 1988) p. 924.
- [82] S.R. Elliot, A.A. Hahn, M.K. Moe, M.A. Nelson y M.A. Vient, *Phys. Rev.* **C46** (1992) 1535.
- [83] A. De Silva, M.K. Moe, M.A. Nelson y M.A. Vient, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 2451.

- [84] A. Faessler, W.A. Kaminski, G. Pantis, y J.D. Vergados *Phys. Rev. C* **43** (1991) 21.
- [85] G. Pantis y J.D. Vergados *Phys. Rep.* **242** (1994) 284.
- [86] J. Suhonen, S.B. Khadkikar y A. Faessler, *Phys. Lett. B* **237** (1990) 8; *ibid. Nucl. Phys. A* **529** (1991) 727; *Nucl. Phys. A* **535** (1991) 509.
- [87] H. Horie y K. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **25** (1961) 475.
- [88] F. Krmpotić, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 1452.
- [89] C.A. Engelbrecht y R.H. Lemmer, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 607
- [90] H.C. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 200.
- [91] A.M. Lane y J. Martorell, *Ann. Phys.* **129** (1980) 273
- [92] F. Krmpotic, E.J.V. de Passos, D.S. Delion, J. Dukelsky y P. Schuck, *Nucl. Phys. A* **637** (1998) 295, y referencias en ella.
- [93] M. Hirsch, H. V. Klapdor-Kleingrothaus y S. G. Kovalenko, *Phys. Lett. B* **352** (1995) 1; *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 17; *Phys. Rev. D* **53** (1996); A. Faessler, S. Kovalenko, F. Šimkovic, y J. Schwieger, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 183.
- [94] M. Hirsch, H.V. Klapdor-Kleingrothaus y S.G. Kovalenko, *Phys. Lett. B* **372** (1996) 1.
- [95] M.E. Rose, *Relativistic Electron Theory* (John Wiley & Sons, Inc., New York and London, 1961); C.P. Bhalla y M.E. Rose, *Phys. Rev.* **128** (1962) 774.
- [96] A. Messiah, *Quantum Mechanics II* (North-Holland Publishing Company, 1961) p 333.
- [97] Gordon Baym *Lectures on Quantum Mechanics* (Benjamin, Massachusetts, 1969).
- [98] S.M. Bilenky y S.T. Petcov, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 671.
- [99] J. Hirsch y F. Krmpotić, *Phys. Lett. B* **246** (1990) 5.
- [100] D.J. Rowe, *Nuclear Collective Motion* (Methuen, London, 1970).

- [101] K. Nakayama, A. Pio Galeão y F. Krmpotić, *Phys. Lett.* **B114** (1982) 217.
- [102] K. Ikeda, *Prog. Theor. Phys.* **31** (1964) 434.
- [103] J.I. Fujita y K. Ikeda, *Nucl. Phys.* **67** (1965) 143.
- [104] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory* (John Wiley & Sons, Inc., 1993).