

26

by Fitri Aryani

Submission date: 24-Nov-2018 11:56AM (UTC+0800)

Submission ID: 1043954899

File name: SNTIKI_2018_PAPER_2.pdf (479.96K)

Word count: 3984

Character count: 18650

Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Fitri Aryani¹, D¹⁵ Ratna Sari², Corry Corazon Marzuki³, Sri Gemawati⁴

^{1,2,3}Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau

⁴Jurusan Matematika FMIPA Universitas Riau

e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, gemawati.sri@gmail.com

Abstrak

Menghitung *trace* dari suatu matriks tidaklah begitu sulit, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat bilangan bulat positif, maka untuk menghitung *traceny* harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n kali. Sehingga untuk menghitung *trace* matriks berpangkat cukup rumit. Makalah ini akan membahas *trace* matriks toeplitz kompleks bentuk khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum matriks toeplitz kompleks bentuk khusus berpangkat (A^n), dan membuktikan bentuk umum (A^n) menggunakan induksi matematika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Dalam makalah ini diperoleh hasil bentuk umum *trace* matriks toeplitz kompleks bentuk khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

Kata kunci: induksi matematika, pembuktian langsung, matriks toeplitz, matriks toeplitz kompleks, *trace*.

Abstract

Calculating trace of a matrix is not difficult, but if the matrix is a matrix with a rank, then to calculate its must be raised in advance n times. So to calculate trace matrix the rank is quite complicated. This paper will discuss the trace of a positive integer power of complex 3×3 toeplitz matrices. There are two steps in forming the general shape of the trace matrix. First, determine the general form of (A_3^n) from complex 3×3 toeplitz matrices and prove it using mathematical induction. Second, determine the general form $tr(A_3^n)$ and prove it by direct proof. The results obtained a general shape of trace of positive integer power of complex 3×3 toeplitz matrices for n odd and n even.

Keywords: mathematical induction, direct proof, toeplitz matrix, complex matriks toeplitz trace

1. Pendahuluan

Teori matriks merupakan teori dasar pada bidang aljabar yang sangat banyak digunakan pada bidang ilmu yang lain, di antaranya bidang ilmu asuransi, ekonomi, biologi, kimia, fisika dan bidang lainnya. Banyak hal yang dapat dilakukan dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, determinan matriks, *trace* matriks dan sebagainya. Pada penelitian kali ini yang dibahas pada matriks adalah menghitung *trace* matriks. Menurut [7] *Trace* matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar, yang didefinisikan sebagai berikut: Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar, maka

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Menghitung *trace* matriks berpangkat sangat sulit, sebab matriks harus dipangkatkan terlebih dahulu selanjutnya diperoleh nilai *trace* dari matriks berpangkat tersebut. Artinya, hal ini cukup menarik untuk diteliti bagaimana menemukan formula yang tepat untuk menghitung *trace* matriks berpangkat tanpa menghitung perpangkatan matriks. Dengan hanya substitusi entri-entri matriks ke dalam formula, maka diperolehlah nilai *trace* matriks berpangkat tersebut, tanpa harus melalui proses yang panjang pada pemangkatan matriks.

Penghitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak menjadi perhatian. Menurut [12] pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr(A^{p^r}) = Tr(A^{p^{r-1}}) \pmod{p^r}$$

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r bilangan bulat. Makalah tersebut juga membahas invarian pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz. Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut [4] ketika menganalisis suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu menghitung bilangan total segitiga pada graph sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graf. Menurut [5], *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial.

Pembahasan mengenai formula *trace* matriks berpangkat juga telah dibahas oleh [9]. Makalah tersebut mendapatkan formula *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (1)$$

Kedua, formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (2)$$

Pada tahun 2017 [2] membahas *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (3)$$

Kedua, formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots [n-(r+(r-1))] (\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (4)$$

Pada tahun 2018 [3] membahas formula *trace* matriks berbentuk khusus orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, dan kedua formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(ab)^{\frac{n}{2}} & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan hal tersebut, maka penulis ingin melanjutkan materi yang sama yaitu membahas *trace* matriks. Namun matriks yang berbeda, yaitu matriks toeplitz bentuk khusus dan dengan ukuran matriks yang lebih besar yaitu ukuran 3×3 , yang bentuknya sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in R \text{ dan } i = \text{imajiner} \quad (5)$$

2. Bahan dan Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Berikut diberikan materi-materi yang diperlukan untuk menunjang hasil dan pembahasan.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 1 [1] Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan *entri* dalam matriks. Ukuran (ordo) suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Notasi nama matriks biasanya menggunakan huruf kapital dan cetak tebal. Jika A adalah suatu matriks, maka a_{ij} untuk menyatakan entri atau elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A . Terdapat beberapa jenis matriks, matriks toeplitz dan matriks tridiagonal.

a. Matriks Toeplitz

Matriks Toeplitz adalah matriks simetris yang setiap unsur pada diagonal utamanya adalah sama dan setiap unsur pada superdiagonal utamanya adalah sama dan subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama [6]. Bentuk umum matriks toeplitz adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_n \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

b. Matriks tridiagonal (*tridiagonal matrix*) yaitu matriks diagonal dimana elemen sebelah kiri dan kanan diagonal utamanya bernilai tidak sama dengan nol. Bentuk umum dari matriks tridiagonal adalah sebagai berikut [13]:

$$T_n = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & \dots & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

2.2 Perkalian Matriks

Definisi 2 [10] Misalkan A adalah matriks $m \times k$ dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B , dinotasikan dengan AB adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke- (i, j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuaian dari baris ke- i dari A dan kolom ke- j dari B . Dengan kata lain, jika $AB = [c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Definisi 3 [1] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = 1, \quad A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ faktor}} \quad (n > 0).$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 3.

Teorema 1 [1] Jika A adalah matriks bujur sangkar dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

1. $A^r A^s = A^{r+s}$.
2. $(A^r)^s = A^{rs}$.

2.3. Determinan

Definisi 4 [1] Misalkan A adalah matriks bujur sagkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh \det dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A .

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Teorema berikut menjelaskan sifat-sifat determinan dari suatu matriks bujur sangkar.

Teorema 2 [1] Jika A adalah sebarang matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dan k adalah sebarang skalar, maka berlaku:

1. $\det(A) = \det(A^t)$
2. $\det(kA) = k^n \det(A)$
3. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu : Metode Sarrus, Metode Minor dan Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi Matriks. Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode Sarrus dalam mencari determinan suatu matriks.

2.4. Pemangkin Bilangan Kompleks

Definisi 5 [8] Bilangan kompleks adalah suatu pasangan terurut bilangan real, yang dinyatakan dengan $z = x + yi$ dimana x dan y adalah bilangan real, dan i adalah bilangan imajiner yang mempunyai sifat $i^2 = -1$. Bilangan real x disebut juga bagian riil dari bilangan kompleks, dan bilangan riil y disebut bagian imajiner dari bilangan kompleks.

Selain dinyatakan dalam bentuk $z = x + iy = (x, y)$, bilangan kompleks z dapat dinyatakan pula dalam bentuk polar, yaitu $z = (r, \theta)$. Adapun hubungan antara keduanya, (x, y) dan (r, θ) adalah:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ dengan } \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ dan } r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jika diketahui:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n), \text{ untuk } n \text{ bilangan asli}$$

Maka diperoleh hasil perkalian:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Akibahnya jika, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ maka

$$\underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ kali}} = \underbrace{r \cdot r \cdots r}_{n \text{ kali}} [\cos(\theta + \theta + \cdots + \theta) + i(\sin(\theta + \theta + \cdots + \theta))]$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (6)$$

5. Trace Matriks 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai trace matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif telah di bahas oleh [3]. Makalah tersebut mendapatkan rumus umum trace matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Formula yang diperoleh ada 2 bentuk, yang pertama untuk pangkat bilangan bulat positif genap dan yang kedua pangkat bilangan bulat positif ganjil. Hanya dengan mensubstitusikan entri-entri matriks, maka nilai trace matriks diperoleh tanpa harus melakukan pemangkatan matriks. Berikut diberikan teoremanya.

Teorema 3 [3] Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & (a + bi)^n \\ (a + bi)^n & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in R$ dan $i =$ imajiner maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & (a + bi)^n \\ (a + bi)^n & 0 \end{bmatrix} & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (a + bi)^n \end{bmatrix} & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bentuk umum trace matriks yang berbentuk khusus pada Persamaan dinyatakan dalam Teorema 4 sebagai berikut:

Teorema 4 [3] Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & (a+bi)^n \\ (a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in R$ dan $i =$ imajiner maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Materi yang berhubungan dengan induksi matematika berdasarkan [11]. Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n . Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

- Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
- Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ juga benar.

Metode penelitian yang digunakan penulis merupakan langkah-langkah yang digunakan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini, yaitu untuk mendapatkan bentuk umum trace matriks khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum trace matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum matriks toeplitz kompleks bentuk khusus berpangkat $(A_3)^n$, dan membuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ menggunakan induksi matematika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr(A_3^n)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai bentuk umum dari trace matriks toeplitz kompleks khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif seperti pada Persamaan (5). Langkah pertama yaitu menentukan nilai matriks berpangkat $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{14}$, selanjutnya menduga bentuk umum matriks berpangkat $(A_3)^n$, untuk n ganjil dan n genap dengan memperhatikan pola rekursifnya. Terakhir akan dibuktikan bentuk umum matriks berpangkat $(A_3)^n$, untuk n ganjil dan n genap dengan menggunakan induksi matematika. Bentuk umum matriks toeplitz berpangkat $(A_3)^n$ tersebut dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 5 Diberikan matriks toeplitz kompleks khusus dengan bentuk $A_3 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in R \text{ dan } i = \text{imajiner, maka}$$

$$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n \end{bmatrix} & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal, $p(n): (A_3)^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n \\ 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\frac{(n-1)}{2}}(a+bi)^n \end{bmatrix}$, untuk n ganjil.

- Akan ditunjukkan $p(1)$ benar.

$$p(1): (A_3)^1 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix} = A_3, \text{ dengan memperhatikan Persamaan (5), maka } p(1) \text{ benar.}$$

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): (A_3)^k = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 \\ 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k \\ 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 \end{bmatrix}, \forall a, b \in R \text{ dengan } i = \text{imaginer}$$

dan $k = \text{ganjil}$.

Maka akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+2): (A_3)^{k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 \\ 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} \\ 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (A_3)^{k+2} &= ((A_3)^k \cdot (A_3)^2) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 \\ 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k \\ 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2 \\ 0 & 2(a+bi)^2 & 0 \\ (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 \\ 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} \\ 0 & 2^{\left(\frac{k+1}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (7) maka $p(k+2)$ benar.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

$$\text{Misal: } p(n): (A_3)^n = \begin{bmatrix} 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n & 0 & 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a+bi)^n \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap, dibuktikan}$$

sebagai berikut:

1) Akan ditunjukkan $p(2)$ benar.

$$p(2): (A_3)^2 = \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2 \\ 0 & 2(a+bi)^2 & 0 \\ (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): (A_3)^k = \begin{bmatrix} 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k \\ 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 \\ 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k \end{bmatrix}, \forall a, b \in R, \text{ dimana}$$

$i = \text{imaginer}$ dan $k = \text{genap}$.

Maka akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar.

$$p(k+2): (A_3)^{k+2} = \begin{bmatrix} 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}(a+bi)^{k+2} \\ 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 \\ 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}(a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\left(\frac{k+2}{2}-1\right)}(a+bi)^{k+2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (A_3)^{k+2} &= ((A_3)^k \cdot (A_3)^2) \\ &= \begin{pmatrix} 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k \\ 0 & 2^{\left(\frac{k}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 \\ 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k & 0 & 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(a+bi)^k \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2 \\ 0 & 2(a+bi)^2 & 0 \\ (a+bi)^2 & 0 & (a+bi)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^{\binom{k+2}{2}-1} \cdot (a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\binom{k+2}{2}-1} \cdot (a+bi)^{k+2} \\ 0 & 2^{\binom{k+2}{2}} \cdot (a+bi)^{k+2} & 0 \\ 2^{\binom{k+2}{2}-1} \cdot (a+bi)^{k+2} & 0 & 2^{\binom{k+2}{2}-1} \cdot (a+bi)^{k+2} \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (8) maka $p(k+2)$ benar.
Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 5 terbukti. ■

3.2 Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Positif

Berdasarkan Teorema 5, maka didapat bentuk umum trace matriks toeplitz bentuk khusus beserta buktinya.

Teorema [5] Diberikan matriks toeplitz kompleks khusus dengan bentuk $A_3 =$

$$\begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ dan } i = \text{imajiner, maka:}$$

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ (2)^{\frac{n}{2}+1} \cdot (a+bi)^n & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Akan dibuktikan $tr(A_3)^n = 0$, untuk n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 5 maka bentuk umum $tr(A_3)^n$, untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A_3)^n = tr \begin{bmatrix} 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi trace matriks maka, $tr(A_3)^n = 0 + 0 + 0 = 0$, untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A_3)^n = (2)^{\frac{n}{2}+1} \cdot (a+bi)^n$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 5 maka bentuk umum $tr(A_3)^n$, untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A_3)^n = tr \begin{bmatrix} 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\binom{n}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi trace matriks maka, $tr(A_3)^n$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} tr(A_3)^n &= 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n + 2^{\binom{n}{2}}(a+bi)^n + 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \\ &= 2 \cdot \left(2^{\binom{n-1}{2}}\right) \cdot (a+bi)^n \\ &= 2^{\binom{n}{2}+1} (a+bi)^n \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 6 terbukti. ■

3.3 Aplikasi Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Berikut diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan Teorema 5 dan Teorema 6 sebagai berikut:

Contoh 1 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & 4 + \frac{2}{3}i & 0 \\ 4 + \frac{2}{3}i & 0 & 4 + \frac{2}{3}i \\ 0 & 4 + \frac{2}{3}i & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^7$ dan $tr(A_3)^{12}$

dengan menggunakan Teorema 6.

Penyelesaian:

a. Menurut Teorema 6, $tr(A_3)^n = 0$, untuk n ganjil. Sehingga diperoleh:

$$tr(A_3)^7 = tr \begin{pmatrix} 0 & 8\left(4 + \frac{2}{3}i\right)^7 & 0 \\ 8\left(4 + \frac{2}{3}i\right)^7 & 0 & 8\left(4 + \frac{2}{3}i\right)^7 \\ 0 & 8\left(4 + \frac{2}{3}i\right)^7 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{12}$

Untuk menyelesaikan bentuk $(4 + \frac{2}{3}i)^{12}$ maka digunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks seperti pada Persamaan (6), yaitu:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Selanjutnya diperlukan nilai dari r dan θ , yaitu:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{4}{9}} = \sqrt{16.444} = 4,055$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{2/3}{4} = \arctan \frac{1}{6} = 9,462322208$$

Sehingga:

$$\left(4 + \frac{2}{3}i\right)^{12} = -7.896.296,823 + i 18.118.829,95$$

Jadi, nilai dari $tr(A_3)^{12}$ menurut Teorema 6, yaitu:

$$tr(A_3)^{12} = -1.010.725.993 + i 2.319.210.233$$

Contoh 2 Diberikan matriks $(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i & 0 \\ -\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i & 0 & -\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i \\ 0 & -\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^6$ dan

$tr(A_3)^{19}$ dengan menggunakan Teorema 6.

Penyelesaian:

a. Akan dicari $tr(A_3)^6$.

Untuk menyelesaikan bentuk $(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i)^6$ maka digunakan aturan perpangkatan pada bilangan kompleks seperti pada Persamaan (6), yaitu:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Selanjutnya diperlukan nilai dari r dan θ , yaitu:

$$r = 0,781, \theta = 39,80557109$$

Sehingga:

$$\left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i\right)^6 = (-0,11744647) + i(-0,19418275)$$

Jadi, nilai dari $tr(A_3)^6$ menurut Teorema 6, yaitu:

$$tr(A_3)^6 = (2)^{6+1} \cdot \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i\right)^6 = (-1,879143529) + i(-3,106924)$$

b. Akan dicari $tr(A_3)^{19}$. Menurut Teorema 6, $tr(A_3)^n = 0$, untuk n ganjil. Sehingga diperoleh:

$$tr(A_3)^{19} = tr \left(\begin{bmatrix} 0 & 512 \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i\right)^{19} & 0 \\ 512 \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i\right)^{19} & 0 & 512 \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i\right)^{19} \\ 0 & 512 \left(-\frac{3}{5} - \frac{2}{4}i\right)^{19} & 0 \end{bmatrix} \right) = 0 + 0 + 0 = 0$$

4. Kesimpulan

Berikut diberikan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil dan pembahasan di atas. Diberikan matriks toeplitz kompleks bentuk khusus sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a + bi & 0 \\ a + bi & 0 & a + bi \\ 0 & a + bi & 0 \end{bmatrix} \forall a, b \in R \text{ dan } i = \text{imaginer},$$

maka bentuk umum perpangkatan matriks dan *trace* matriks dari A_3 adalah:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } (A_3)^n &= \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \\ 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 \end{bmatrix} & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 \\ 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \\ 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n & 0 & 2^{\binom{n-1}{2}}(a+bi)^n \end{bmatrix} & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases} \\
 \text{b. } \text{tr}(A_3)^n &= \begin{cases} 0 & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ (2^{\frac{n}{2}+1}) \cdot (a+bi)^n & , \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada reviewer, juga mahasiswa dan teman sejawat yang telah memberikan masukan dalam peningkatan kualitas makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Anton H, *Elementary Linear Algebra, Fifth Ed.*, JohnWiley & Sons, NewYork, 1987.
- [2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. 2017; Vol.3 (2).
- [3] Aryani F, Titik F. *Trace Matriks Berbentuk Khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*, Prosiding Semirata. Medan. 2018.
- [4] Avron,H, *Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation*. Proceeding of Kdd-Ldmata'10, 2010.
- [5] Brezinski, C, FikP, Mitrouli M. Estimations ofthetraceofpowers ofpositive byextrapolation ofthe moment, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2012; 39:144-155.
- [6] Gray R. Toeplitz and Circulant Matrices, *Communication and Information Theory*. 2005; Volume 2: halaman 155-239.
- [7] Gentle JE, *Matrix Algebra*. New York: Springer. 2007.
- [8] Murray RS. *Theory and Problem of College Algebra*. Jakarta; Erlangga.1964.
- [9] Pahade J, M Jha, Trace of positive integer power of real 2x2 matrices, *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*. 2015; 5:150-155.
- [10] Rosen KH. *Discrete Mathematics and Its Application*, Seventh Ed. Sinagpore: McGraw-Hill. 2007.
- [11] Sukirman. *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator. 2006
- [12] Zarelua, AV. *On Congruences for the Traces of Powers of Some Matrices*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008: 263, 78-98.
- [13] Zhang F. *Matrix Theory Basic Result and Techniques*. Second Ed. New York. 2011.

ORIGINALITY REPORT

26%

SIMILARITY INDEX

19%

INTERNET SOURCES

12%

PUBLICATIONS

6%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	Submitted to Binus University International Student Paper	3%
2	ejournal.uin-suska.ac.id Internet Source	2%
3	ardibanyuasin.blogspot.com Internet Source	1%
4	faculty.petra.ac.id Internet Source	1%
5	digilib.uin-suka.ac.id Internet Source	1%
6	Pahade, Jagdish, and Manoj Jha. "Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 Matrices", Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 2015. Publication	1%
7	www.loger.co.jp Internet Source	1%
8	Shih-Feng Yang. "Testing the robust Schur stability of a segment of complex polynomials",	1%

9	etheses.uin-malang.ac.id Internet Source	1%
10	dokumen.tips Internet Source	1%
11	www.smartstat.info Internet Source	1%
12	aguskarmana.blogspot.com Internet Source	1%
13	www.ijcaonline.org Internet Source	1%
14	B. Coestier, E. Gozlan, S. Marette. "On Food Companies Liability for Obesity", American Journal of Agricultural Economics, 2005 Publication	1%
15	media.neliti.com Internet Source	1%
16	Submitted to Universitas Negeri Jakarta Student Paper	1%
17	Beringer, J., J. Arguin, R. Barnett, K. Copic, O. Dahl, D. Groom, C. Lin, J. Lys, H. Murayama, C. Wohl, W. Yao, P. Zyla, C. Amsler, M. Antonelli, D. Asner, H. Baer, H. Band, T. Basaglia, C. Bauer, J. Beatty, V. Belousov, E. Bergren, G.	1%

Bernardi, W. Bertl, . "Review of Particle Physics", Physical Review D, 2012.

Publication

18

cmbdata.gsfc.nasa.gov

Internet Source

<1%

19

Wong, . "Matrices", Computational Methods in Physics and Engineering, 1997.

Publication

<1%

20

"Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases", Springer Nature, 2017

Publication

<1%

21

publications.csail.mit.edu

Internet Source

<1%

22

archive.org

Internet Source

<1%

23

www.jondavis.net

Internet Source

<1%

24

Submitted to Pamoja Education

Student Paper

<1%

25

Submitted to Western Governors University

Student Paper

<1%

26

surianikhusaini.blogspot.com

Internet Source

<1%

27

Submitted to Universiti Putra Malaysia

Student Paper

<1%

28

link.springer.com

Internet Source

<1%

29

Daniele D'Angeli, Alfredo Donno. "Shuffling matrices, Kronecker product and Discrete Fourier Transform", Discrete Applied Mathematics, 2017

Publication

<1%

30

B. Vasic, O. Milenkovic. "Permutation (d,k) codes: efficient enumerative coding and phrase length distribution shaping", IEEE Transactions on Information Theory, 2000

Publication

<1%

31

documents.mx

Internet Source

<1%

32

Chen, W.H.. "Global exponential stability for discrete-time neural networks with variable delays", Physics Letters A, 20061016

Publication

<1%

33

docslide.us

Internet Source

<1%

34

Mariana Haragus, Arnd Scheel. "Linear stability and instability of ion-acoustic plasma solitary waves", Physica D: Nonlinear Phenomena, 2002

Publication

<1%

gemarmatematika21.blogspot.com

35

Internet Source

<1%

36

Akewe, Hudson, Godwin Okeke, and Adekunle F Olayiwola. "Strong convergence and stability of Kirk-multistep-type iterative schemes for contractive-type operators", Fixed Point Theory and Applications, 2014.

Publication

<1%

37

Ye, Qingwei, Tingkai Zhao, Yu Zhou, and Xiaodong Wang. "Concentrated Modal Parameter Identification Based on Modal-Wavelet Continuous Transformation", 2010 Chinese Conference on Pattern Recognition (CCPR), 2010.

Publication

<1%

38

N. J. BALMFORTH. "Ocean waves and ice sheets", Journal of Fluid Mechanics, 09/25/1999

Publication

<1%

39

arkansas-water-center.uark.edu

Internet Source

<1%

40

G. Franceschetti, A. Iodice, S. Perna, D. Riccio. "SAR Sensor Trajectory Deviations: Fourier Domain Formulation and Extended Scene Simulation of Raw Signal", IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2006

Publication

<1%

41	lib.unnes.ac.id Internet Source	<1%
42	ejournal-s1.undip.ac.id Internet Source	<1%
43	www.unsri.ac.id Internet Source	<1%
44	Meini, B.. "Nonlinear matrix equations and structured linear algebra", Linear Algebra and Its Applications, 20060301 Publication	<1%
45	Chang Joo Kim. "Fast Hybrid DFT/DCT Architecture for OFDM in Cognitive Radio System", Future Generation Communication and Networking (FGCN 2007), 12/2007 Publication	<1%
46	Mark Fleischer. "Transformations for accelerating mcmc simulations with broken ergodicity", 2007 Winter Simulation Conference, 2007 Publication	<1%
47	Alan C. Lin. "Computerized design and manufacturing of plate cams", International Journal of Production Research, 8/1/1988 Publication	<1%
48	S. R. WILSON. "EVALUATION AND CLUSTERING OF RADIOCARBON AGE	<1%

DETERMINATIONS: PROCEDURES AND PARADIGMS", Archaeometry, 2/1981

Publication

49

Hans Freudenthal. "What is algebra and what has it been in history?", Archive for History of Exact Sciences, 1977

Publication

<1%

Exclude quotes On

Exclude matches Off

Exclude bibliography On