

17

by Fitri Aryani

Submission date: 24-Nov-2018 11:56AM (UTC+0800)

Submission ID: 1043954876

File name: LAPORAN_PENELITIAN_LPPM_2017.pdf (671.63K)

Word count: 26348

Character count: 73652

**LAPORAN PENELITIAN
CLUSTER MADYA**



UIN SUSKA RIAU

**INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS
MENGUNAKAN METODE ADJOIN**

PENELITI :

Fitri Aryani, M.Sc

NIDN. 2013097702

Corry Corazon Marzuki, M.Si

NIDN. 2020038601

54

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

TAHUN 2017

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrobbil 'alamin ucap ⁹⁵syukur ke hadirat Allah s.w.t. karena atas rahmat dan hidayahNyalah penelitian ini dapat diselesaikan. Semoga dengan adanya penelitian ini dapat menambah pengetahuan mahasiswa dibidang Aljabar, terutama bidang Matriks dan khususnya Invers Matriks. Penelitian ini adalah mengenai bagaimana menentukan bentuk umum dari suatu invers matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde $n \times n$.

Penelitian ini dilakukan dijurusan ⁷matematika Fakultas Sains dan teknologi UIN Suska Riau. Waktu penelitian dimulai dari bulan Juni sampai Desember 2017. Peneliti berharap hasil penelitian ini banyak dibaca dan digunakan oleh bidang lain yang berhubungan dengan bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus.

Peneliti menyadari bahwa belumlah lengkap dan sempurna baik isi, tulisan maupun gaya bahasa yang digunakan dalam penelitian ini tanpa kritikan dan saran dari pembaca.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada Pimpinan Rektorat UIN Suska Riau atas didanainya pembuatan penelitian ini, tidak lupa ucapan terimakasih kepada rekan-rekan dosen dilingkungan ⁵⁴Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau terutama rekan-rekan Jurusan Matematika atas kritikan, masukan-masukkan sehingga sangat membantu dalam penyelesaian Penelitian ini.

Pekanbaru, Desember 2017

Tim Peneliti

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS MENGUNAKAN METODE ADJOIN

ABSTRAK

Invers matriks merupakan hal yang penting dalam bidang ilmu matematika, terutama ilmu aljabar. Aplikasi dari Invers matriks banyak dipakai pada bidang yang lain selain aljabar, baik dibidang matematika maupun dibidang yang lain. Banyak metode dalam menentukan invers matriks, salah satunya metode adjoin. Metode adjoin merupakan metode yang sederhana dalam menentukan invers matriks. Penelitian ini bertujuan menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin. Dalam menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus, ada tiga langkah yang dikerjakan. Pertama, diperhatikan pola dari determinan matriks toeplitz bentuk khusus orde 1×1 sampai 20×20 sehingga didapat bentuk umumnya. Kedua, perhatikan pola matriks kofaktor orde 2×2 sampai 10×10 sehingga diperoleh bentuk umumnya. Dan terakhir, dengan menggunakan metode adjoin untuk mendapatkan bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus orde $n \times n$.

Katakunci: Adjoin, Determinan, Invers Matriks, Matriks Kofaktor, Matriks Toeplitz

DAFTAR ISI

43 KATA PENGANTAR	i
ABSTRAK	ii
DAFTAR ISI	iii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan dan Manfaat	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks	6
2.2 Determinan	7
2.3 Invers Matriks	8
2.4 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz	10
2.5 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal	11
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Langkah-langkah untuk Menentukan Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus	15
3.2 Langkah-langkah untuk Menentukan Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus	16
3.3 Langkah-langkah untuk Menentukan Invers Matriks dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus	17
BAB IV DETERMINAN MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS	
4.1 Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 20×20	18
4.2 Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde $n \times n$	26
	ii

BAB V MATRIKS KOFAKTOR DARI MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

- 5.1 Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 10×10 31
- 5.2 Bentuk Umum Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde $n \times n$ 73

BAB VI INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

- 6.1 Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 10×10 79
- 6.2 Bentuk Umum Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde $n \times n$ 82
- 6.3 Beberapa Contoh Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus 85

108

BAB VII PENUTUP

- 7.1 Kesimpulan 94
- 7.2 Saran 95

DAFTAR PUSTAKA

96

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika maupun ilmu terapan.

Menurut Howard Anton dan Chris Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Salah satu jenis matriks adalah matriks toeplitz. Menurut Robert (2005), matriks toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan, dimana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. Bentuk umum dari matriks toeplitz adalah sebagai berikut.

$$T_n = (t_{ij}) \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \dots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & t_{(n-4)} & \dots & t_0 & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

dimana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j .

Pembahasan menarik dalam teori matriks adalah menentukan invers dari suatu matriks. Sebuah matriks memiliki invers jika matriks tersebut memiliki determinan tak nol. Beberapa metode yang digunakan dalam menghitung invers suatu matriks adalah Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Permasalahan dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks, semakin besar ukuran matriks akan semakin sulit untuk menentukan invers dari matriks tersebut, sehingga dibutuhkan formula yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Salah satu kegunaan invers dari suatu matriks adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak sekali kegunaannya

dalam memudahkan pengambilan keputusan di berbagai bidang, seperti bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya.

Pada Tahun 1991, Kouachi telah melakukan penelitian mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal dengan entri-entri diagonalnya tidak konstan. Selanjutnya, pada Tahun 2005 Gray dan Robert juga melakukan penelitian mengenai teori matriks dengan judul “*Toeplitz and Circulant Matrices*”.

Bakti Siregar dkk. juga membahas mengenai matriks toeplitz pada Tahun 2014 pada makalahnya yang berjudul “Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin”. Di dalam makalah tersebut, dirumuskan formula invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini :

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

Adapun hasil yang diperoleh pada makalah tersebut adalah sebagai berikut :

1. Rumus determinan matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1.2) adalah

$$\det(T_n) = (-1)^n (n-1)x^n$$

2. Rumus kofaktor-kofaktor yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1.2) adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} \det(T_n) & ; \text{ untuk } i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1} & ; \text{ untuk } i \neq j \end{cases}$$

3. Rumus invers dari matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1.2) adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \frac{-2}{(n-1)x} & ; \text{ untuk } i = j \\ \frac{1}{(n-1)x} & ; \text{ untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa ada rumus khusus untuk menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers dari suatu matriks toeplitz yang bentuknya unik seperti Persamaan (1.2). Sehingga untuk menghitung determinan, matriks kofaktor dan inversnya tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit menggunakan metode-metode yang biasa digunakan, namun cukup dengan mensubstitusikan nilai n dan x yang ada pada matriks ke rumus-rumus di atas.

9 Pada tahun 2015, penulis juga telah melakukan penelitian mengenai invers matriks toeplitz tridiagonal. Menurut Salkuyeh (2006), suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

dengan $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Pada penelitian itu, penulis telah mendapatkan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal pada Persamaan (1.3).

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang sudah dipaparkan di atas, belum ditemukan rumus umum untuk determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus berikut :

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dengan } a \neq 0 \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membuat formulasi/rumus umum untuk menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz tersebut menggunakan metode adjoin. Dengan keunikan bentuk matriks toeplitz ini, penulis menduga adanya sifat-sifat khusus pada matriks ini sehingga didapatkan rumus determinan, matriks kofaktor, dan invers yang lebih sederhana dibandingkan matriks secara umum.

Dengan adanya rumus tersebut, diharapkan dapat memudahkan kita dalam menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus yang ada pada Persamaan (1.4). Sehingga hal ini

diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks.

76

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah “menentukan rumus determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus yang ada pada Persamaan (1.4) secara umum menggunakan metode adjoin”.

7

1.3 Batasan Masalah

Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik maka penulis membatasi masalah pada penelitian ini, yaitu :

1. Matriks yang dibahas berorde $n \geq 1$.
2. Mencari determinan menggunakan ekspansi kofaktor.

107

1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk mendapatkan rumus umum determinan dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus pada Persamaan (1.4) menggunakan metode ekspansi kofaktor.
2. Untuk mendapatkan rumus umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus pada Persamaan (1.4) menggunakan metode minor-kofaktor.
3. Untuk mendapatkan rumus umum invers dari matriks toeplitz pada dengan bentuk khusus Persamaan (1.4) menggunakan metode adjoin.

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Rumus umum yang diperoleh pada penelitian ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks, terutama dalam menentukan determinan, matriks

kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (1.4).

2. Memberikan kontribusi penelitian di bidang matematika terutama bidang aljabar mengenai determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks.
3. Menghasilkan penelitian baru yang bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

154

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks, determinan, invers matriks, determinan matriks toeplitz, matriks kofaktor, dan invers matriks toeplitz, serta induksi matematika.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis matriks

Definisi 2.1. (Ruminta, 2009) Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis di antara dua tanda kurung () atau []. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan : a_{ij} = elemen atau unsur matriks

$i = 1, 2, 3, \dots, m$, indeks baris

$j = 1, 2, 3, \dots, n$, indeks kolom

Terdapat banyak jenis-jenis matriks, diantaranya matriks bujur sangkar dan matriks toeplitz. Berikut diberikan definisi yang menyatakan kedua jenis matriks tersebut.

Definisi 2.2. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar orde n , dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.1) yang diberi arsiran merupakan diagonal utama dari matriks A .

$$\begin{matrix}
 65 \\
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}
 \tag{2.1}$$

Definisi 2.3. (Robert, 2005) Sebuah matriks toeplitz adalah matrik berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0, 1, \dots, n - 1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula

$$T_n = \begin{bmatrix}
 t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\
 t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\
 t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0
 \end{bmatrix}
 \tag{2.2}$$

Berikut diberikan definisi dari determinan suatu matriks dan metode yang dapat digunakan untuk menentukan determinan tersebut.

2.2 Determinan

Definisi 2.6. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A . Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A .

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu :

1. Metode Sarrus
2. Metode Minor dan Kofaktor
3. Metode CHIO
4. Metode Eliminasi Gauss
5. Metode Dekomposisi Matriks.

Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode minor dan kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2.7. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A . Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij} .

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekspansi kofaktor dalam teorema berikut:

Teorema 2.1. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks A , $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i)

Suatu matriks akan mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tak nol. Berikut akan didefinisikan invers dari matriks.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.8. (Ruminta, 2009) Jika A adalah matriks ukuran $n \times n$ dan jika ada matriks B ukuran $n \times n$ sedemikian sehingga :

$$AB = BA = I$$

dengan I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, maka matriks A disebut non singular atau *invertibel* dan matriks A merupakan invers dari B atau B merupakan invers dari A .

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU.

Berdasarkan metode-metode tersebut penulis hanya menggunakan metode adjoin dalam mencari invers suatu matriks.

Definisi 2.9. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A . Transpose dari matrik ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A mempunyai invers. Hal tersebut dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 2.2. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks kuadrat A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2.3. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti :

$$A adj(A) = \det(A) I$$

$$A adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

5 Entri pada baris ke- i dan kolom ke- j dari hasil kali $A \text{adj}(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} \quad (2.3)$$

Jika $i = j$, maka Persamaan (2.3) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke- i dari Teorema 1 dan jika $i \neq j$, maka semua entri kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A sehingga nilai dari Persamaan (2.3) adalah nol. Oleh karena itu

$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) I \quad (2.4)$$

karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, sehingga Persamaan (2.4) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\frac{1}{\det(A)} [A \text{adj}(A)] = I \text{ atau } A \left[\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

8 Ada beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian – penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah Bakti Siregar dkk (2014) dan Fitri Aryani dkk (2015). Berikut diberikan penjelasannya.

2.4 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz

Matriks toeplitz yang dibahas oleh Bakti Siregar, dkk pada tahun 2014 adalah matriks toeplitz T_n seperti Persamaan (1.2). Mereka telah mendapatkan rumus umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tersebut. Hasil penelitiannya disajikan dalam Teorema 2.4, Teorema 2.5 dan Teorema 2.6 berikut.

Teorema 2.4. (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks T_n adalah

$$|T_n| = (-1)^{n+1} (n-1)x^n$$

Teorema 2.5. (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka kofaktor-kofaktor matriks Toeplitz T_n adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} |T_{n-1}|, & \text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1}, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

di mana $K_{ij}T_n$ kofaktor-kofaktor yang terletak dibaris ke- i dan kolom ke- j .

Teorema 2.6. (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $|T_n| \neq 0$ maka invers matriks toeplitz T_n adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \frac{(n-2)}{(n-1)x}, & \text{untuk } i = j \\ \frac{1}{(n-1)x}, & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

t_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke- i dan kolom ke- j .

2.5 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal

Pada tahun 2015, penulis telah mendapatkan rumus umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal. Menurut Salkuyeh (2006), suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dengan $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Bentuk umum dari determinan matriks toeplitz tridiagonal dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 2.7 Diberikan A_n suatu metrik toeplitz tridiagonal berorde $n \geq 3$ pada persamaan (1.3) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$\begin{aligned}
|A_n| &= b^n - (n-1)ab^{n-2}c + \sum_{i=1}^{n-3} ia^2b^{n-4}c^2 - \left(\sum_{i=1}^1 i + \sum_{i=1}^2 i + \dots + \sum_{i=1}^{n-5} i \right) a^3b^{n-6}c^3 \\
&+ \left[\frac{(n-7)}{1!} \sum_{i=1}^1 i + \frac{(n-8)}{1!} \sum_{i=1}^2 i + \frac{(n-9)}{1!} \sum_{i=1}^3 i + \dots + 1 \sum_{i=1}^{n-7} i \right] a^4b^{n-8}c^4 \\
&- \left[\frac{(n-9)(n-8)}{2!} \sum_{i=1}^1 i + \frac{(n-10)(n-9)}{2!} \sum_{i=1}^1 i + \dots + 1 \sum_{i=1}^{n-9} i \right] a^5b^{n-10}c^5 \\
&+ \left[\frac{(n-11)(n-10)(n-9)}{3!} \sum_{i=1}^1 i + \frac{(n-12)(n-11)(n-10)}{3!} \sum_{i=1}^1 i + \dots + 1 \sum_{i=1}^{n-11} i \right] \\
&a^6b^{n-12}c^6 \\
&- \left[\frac{(n-13)(n-12)(n-11)(n-10)}{4!} \sum_{i=1}^1 i + \frac{(n-14)(n-13)(n-12)(n-11)}{4!} \sum_{i=1}^1 i + \dots + 1 \sum_{i=1}^{n-13} i \right] \\
&a^7b^{n-14}c^7 + \dots
\end{aligned}$$

Selanjutnya, didapatkan bentuk umum dari kofaktor matriks toeplitz tridiagonal sebagaimana dituangkan pada teorema berikut.

Teorema 2.8 Diberikan A_n suatu metrik toeplitz tridiagonal berorde $n \geq 3$ pada persamaan (1.3) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:

$$C_n = \begin{pmatrix}
(-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a |A_{n-2}| & (-1)^4 a |A_{n-3}| & \dots & (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\
(-1)^3 c |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & (-1)^5 a |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| \\
(-1)^4 c^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 c |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{n-4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_2| \\
(-1)^5 c^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 c^2 |A_2| |A_{n-4}| & (-1)^7 c |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{n-5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{n-4} |A_3| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(-1)^n c^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} c^{n-4} |A_1| |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-2} a |A_{n-2}| \\
(-1)^{n+1} c^{n-1} & (-1)^{n+2} c^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+3} c^{n-3} |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-1} c |A_{n-2}| & (-1)^{2n} c |A_{n-1}|
\end{pmatrix}$$

Dari matriks kofaktor di atas, akan ditentukan adjoin dari matriks kofaktor tersebut. Adjoin matriks kofaktor ditentukan dengan cara mentransposkan matriks kofaktor tersebut, yaitu memindahkan entri pada baris menjadi entri pada kolom atau memindahkan entri pada kolom menjadi entri pada baris, seperti berikut:

$$adj(A_n) = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 c |A_{n-2}| & (-1)^4 c^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 c^3 |A_{n-4}| & \dots & (-1)^n c^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-1} |A_1| \\ (-1)^3 a |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & (-1)^5 c |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 c^2 |A_1| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+1} c^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} c^{n-2} |A_1| \\ (-1)^4 a |A_{n-3}| & (-1)^5 a |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}| & (-1)^7 c |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+2} c^{n-4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} c^{n-3} |A_2| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-5} |A_1| |A_3| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-1} c |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_2| & (-1)^{n+4} a^{n-4} |A_3| & \dots & (-1)^{n+n-2} a |A_{n-2}| & (-1)^{2n} c |A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita akan mensubstitusikan bentuk umum dari semua persamaan di atas ke dalam persamaan umum invers matriks, yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

atau

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|A_n|} adj(A_n)$$

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi dari induksi matematika.

Definisi 2.10. (Sukirman, 2006) Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n . Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k + 1)$ juga benar.

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus sebagai berikut :

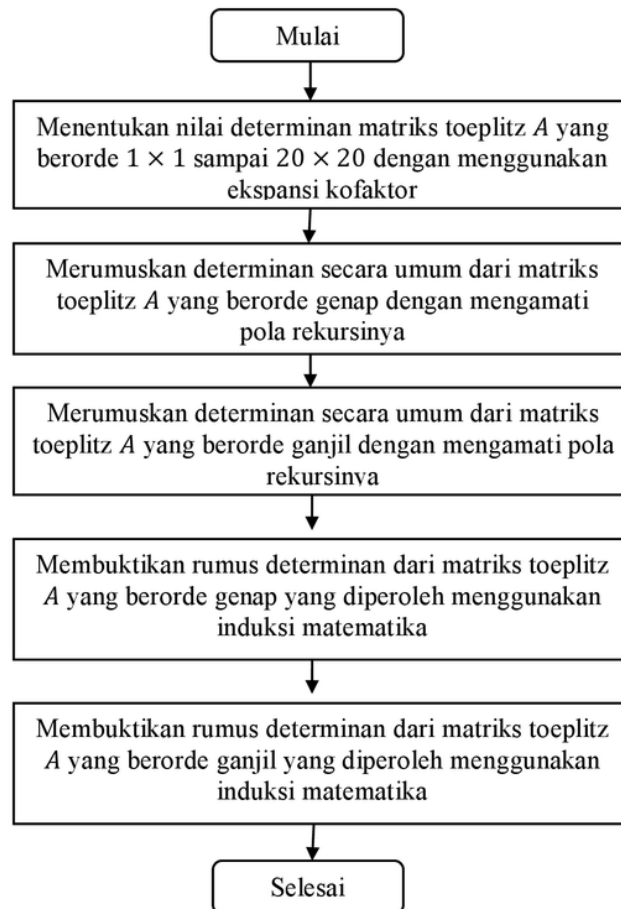
$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

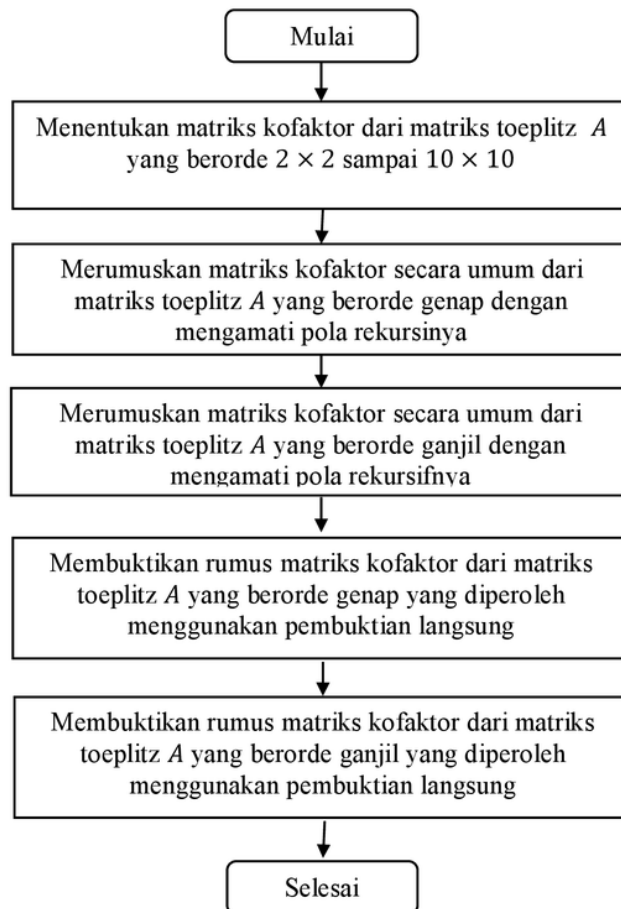
2. Menentukan nilai determinan dari matriks toeplitz A yang berorde 1×1 sampai 20×20 dengan menggunakan ekspansi kofaktor.
3. Menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz A yang berorde 2×2 sampai 10×10 dengan menggunakan minor-kofaktor
4. Menentukan invers dari matriks toeplitz A yang berorde 2×2 sampai 10×10 dengan menggunakan metode adjoin.
5. Merumuskan determinan, matriks kofaktor dan invers secara umum dari matriks toeplitz A yang berorde genap dengan mengamati pola rekursifnya.
6. Merumuskan determinan, matriks kofaktor dan invers secara umum dari matriks toeplitz A yang berorde ganjil dengan mengamati pola rekursifnya.
7. Membuktikan rumus determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz A yang berorde genap yang diperoleh menggunakan induksi matematika.
8. Membuktikan rumus determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz A yang berorde ganjil yang diperoleh menggunakan induksi matematika.

7 Langkah-langkah pada metodologi penelitian diatas dapat digambarkan secara detail dalam *Flow chart* berikut:

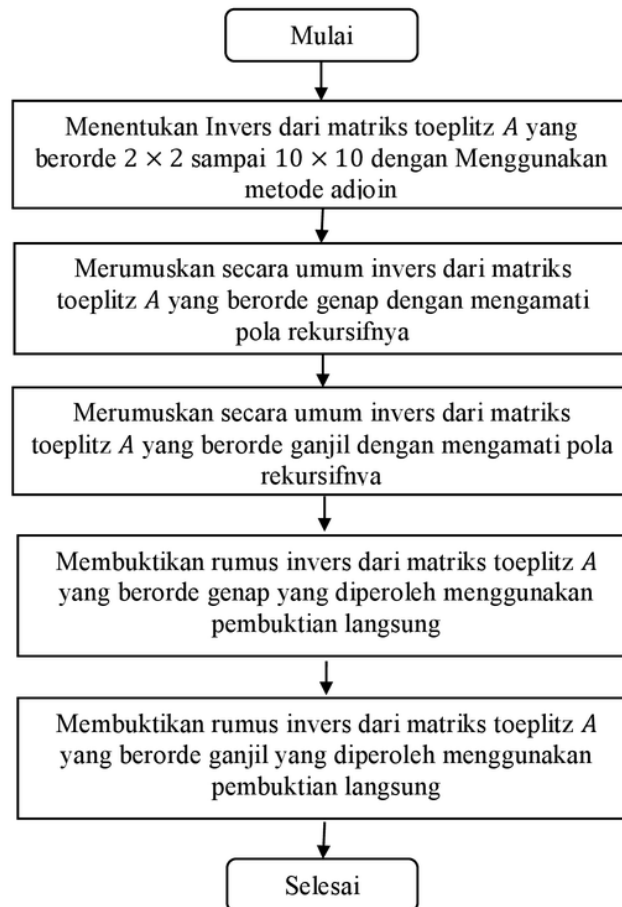
3.1 Langkah – langkah untuk menentukan determinan matriks toeplitz bentuk khusus sebagai berikut:



3.2 Langkah – langkah untuk menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus sebagai berikut:



3.3 Langkah – langkah untuk menentukan invers matriks dari matriks toeplitz bentuk khusus sebagai berikut:



BAB IV

DETERMINAN MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

Penelitian ini akan membuktikan tiga persamaan umum dalam menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus. Persamaan pertama adalah menentukan determinan dari matriks toeplitz bentuk khusus. Persamaan kedua adalah menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus, dan persamaan terakhir adalah menentukan invers dari matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin.

4.1 Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 20×20

Berikut proses dalam menentukan persamaan umum dari matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Dalam prosesnya pertama kali kita menentukan nilai determinan matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 2×2 sampai 15×15 , yang disajikan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 2×2 adalah

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 3×3 adalah

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

3. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 4×4 adalah

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

4. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 5×5 adalah

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus berorde 6×6 adalah

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_6| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 7×7 adalah

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan ³⁷ dari matriks tersebut adalah

$$|A_7| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1$$

7. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 8×8 adalah

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_8| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 9×9 adalah

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_9| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

9. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 10×10 adalah

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{10}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1.$$

10. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 11×11 adalah

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

$$|A_{10}| = -1$$

$$|A_{11}| = 0$$

$$|A_{12}| = 1$$

$$|A_{13}| = 1$$

$$|A_{14}| = 0$$

$$|A_{15}| = -1$$

$$|A_{16}| = -1$$

$$|A_{17}| = 0$$

$$|A_{18}| = 1$$

$$|A_{19}| = 1$$

$$|A_{20}| = 0$$

4.2 Bentuk Umum Determinan Matriks Teopltitz Bentuk Khusus Orde $n \times n$

Setelah kita mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks teopltitz bentuk khusus yang berorde 2×2 sampai 20×20 , maka akan dibuatkan bentuk umum dari determinan matriks teopltitz bentuk khusus tersebut. Terlihat dalam Teorema 4.1 berikut.

Teorema 4.1. Diberikan A_n suatu matriks teopltitz bentuk khusus berorde $n \geq 1$ pada Persamaan (1.4) dengan $a \neq 0$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \equiv 6 \pmod{2} \text{ atau } n = 6 \pmod{5} \\ 1 & \text{jika } n \equiv 6 \pmod{0} \text{ atau } n = 6 \pmod{1} \\ -1 & \text{jika } n \equiv 6 \pmod{3} \text{ atau } n = 6 \pmod{4} \end{cases}$$

Bukti:

Pembuktian teorema tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

(1) Basis induksi. Akan ditunjukkan $p(1)$ dan $p(2)$ benar.

Perhatikan bahwa :

$$|A_1| = |1| = 1 \text{ dan } |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Jadi terbukti bahwa } p(1) \text{ dan } p(2) \text{ benar.}$$

53

(2) Langkah induksi. Asumsikan $p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge \dots \wedge p(k)$ benar.

Maka akan dibuktikan $p(k+1)$ benar.

a. Jika $k \equiv 6 \pmod{1}$, maka diasumsikan $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = 1, |A_k| = 1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot |A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a \cdot \frac{1}{a} |A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 1 - 1 = 0$$

b. Jika $k \equiv 6 \pmod{4}$, maka diasumsikan $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = -1, |A_k| = -1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot |A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a \cdot \frac{1}{a} |A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = -1 - (-1) = 0$$

c. Jika $k \equiv 6 \pmod{5}$, maka diasumsikan $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_3| =$

$-1, \dots, |A_{k-1}| = -1, |A_k| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot |A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a \cdot \frac{1}{a} |A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 0 - (-1) = 1$$

d. Jika $k \equiv 6 \pmod{0}$, maka diasumsikan $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_3| =$

$-1, \dots, |A_{k-1}| = 0, |A_k| = 1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot |A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a \cdot \frac{1}{a} |A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 1 - 0 = 1$$

e. Jika $k \equiv 6 \pmod{2}$, maka diasumsikan $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = 1, |A_k| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot |A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a \cdot \frac{1}{a} |A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 0 - 1 = -1$$

f. Jika $k \equiv 6 \pmod{3}$, maka diasumsikan $|A_1| = 1, |A_2| = 0, |A_3| =$

$-1, \dots, |A_{k-1}| = 0, |A_k| = -1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot |A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a \cdot \frac{1}{a} |A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = -1 - 0 = -1. \quad \blacksquare$$

BAB V
MATRIKS KOFAKTOR DARI
MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

Matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus diperoleh dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Menentukan matriks kofaktor diketahui dengan menggunakan persamaan $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Berikut diberikan proses untuk mendapatkan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus.

5.1 Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus

Orde 2 x 2 sampai 10 x 10

1. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde

$$2 \times 2, \text{ yaitu; } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^{2 \cdot 0} = 1 = |A_1|$$

$$C_{12} = (-1)^{3} a = -a$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \frac{1}{a} = -\frac{1}{a} = -a^{-1}$$

$$C_{22} = (-1)^4 0 = 1 = |A_1|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah

$$C_2 = \begin{bmatrix} |A_1| & -a \\ -1/a & |A_1| \end{bmatrix}$$

2. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde
3 x 3, yaitu;

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 = |A_2|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a = -1|A_1|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a} = -a^{-1}|A_1|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_1||A_1|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a = -a|A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ 1 & 1/a \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a|A_2| = a^{-1}|A_2|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 = |A_2|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah

$$C_3 = \begin{bmatrix} |A_2| & -a|A_1| & a^2 \\ -a^{-1}|A_1| & |A_1||A_1| & -a|A_1| \\ a^{-2} & -a^{-1}|A_1| & |A_2| \end{bmatrix}$$

3. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 4×4 , yaitu

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_3|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a \cdot 0 = -a|A_2|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_1|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3$$

Selanjutnya entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_2| = -a^{-1} |A_2|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1.0 = |A_1| |A_2|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a |A_1| |A_1|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2 |A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_1| = a^{-2} |A_1|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_1| |A_1| = -a^{-1} |A_1| |A_1|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.0 = |A_1| |A_2|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a |A_2|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3 = -a^{-3}$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_1| = a^{-2} |A_1|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a |A_2| = -a^{-1} |A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_3|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor C_4 adalah

$$C_4 = \begin{bmatrix} |A_3| & -a|A_2| & a^2|A_1| & -a^3 \\ -a^{-1}|A_2| & |A_1||A_2| & -a|A_1||A_1| & a^2|A_1| \\ a^{-2}|A_1| & -a^{-1}|A_1||A_1| & |A_1||A_2| & -a|A_2| \\ -a^{-3} & a^{-2}|A_1| & -a^{-1}|A_2| & |A_4| \end{bmatrix}$$

4. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 5×5 yaitu :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_4|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_3|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_2|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 |A_1|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_3| = -a^{-1} |A_3|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 |A_3| = |A_1| |A_3|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a |A_1| |A_2|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_1| |A_1|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 |A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_2| = a^{-2} |A_2|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a \overset{129}{|A_1||A_2|} = -a^{-1}|A_1||A_2|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2||A_2|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_2|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1| = -a^{-3}|A_1|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_1| = a^{-2}|A_1||A_1|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a \overset{128}{|A_1||A_2|} = -a^{-1}|A_1||A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot -1 = \overset{148}{|A_1||A_2|}$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & \overset{74}{0} & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_3|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4 = a^{-4}$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_1| = -a^{-3} |A_1|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_2| = a^{-2} |A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a |A_3| = -a^{-1} |A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_4|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya C_5 adalah

$$C_5 = \begin{bmatrix} |A_4| & -a|A_3| & a^2|A_2| & -a^3|A_1| & a^4 \\ -a^{-1}|A_3| & |A_1||A_3| & -a|A_1||A_2| & a^2|A_1||A_1| & -a^3|A_1| \\ a^{-2}|A_1| & -a^{-1}|A_1||A_2| & |A_2||A_2| & -a|A_1||A_2| & a^2|A_2| \\ -a^{-3}|A_1| & a^{-2}|A_1||A_1| & -a^{-1}|A_1||A_2| & |A_1| & -a|A_3| \\ a^{-4} & -a^{-3}|A_1| & a^{-2}|A_2| & -a^{-1}|A_3| & |A_4| \end{bmatrix}$$

5. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 6 x 6, yaitu :

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 = |A_5|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_4|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_3|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_2|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5$$

Selanjutnya untuk entri matriks kofaktor baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_4| = -a^{-1}|A_4|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot -1 = |A_1||A_4|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_3|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_1||A_2|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 |A_1||A_1|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 |A_1|$$

Selanjutnya untuk entri matriks kofaktor baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_3| = a^{-2} |A_3|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a |A_1||A_3| = a^{-1} |A_1||A_3|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2||A_3|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2||A_2|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_2|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_2|$$

Selanjutnya untuk matriks kofaktor baris ke 4

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_2| = -a^{-3}|A_2|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_2| = a^{-2}|A_1||A_2|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_2||A_2| = -a^{-2}|A_1||A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_3||A_2|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_3|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_3|$$

Selanjutnya untuk matrik kofaktor baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1| = a^{-4}|A_1|$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1||A_1| = -a^{-3}|A_1||A_1|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_2| = a^{-2}|A_1||A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_3| = -a^{-1}|A_1||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 = |A_4| |A_1|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a |A_4|$$

Selanjutnya untuk matriks kofaktor baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^5 = -a^{-5}$$

$$C_{62} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_1| = a^{-4} |A_1|$$

$$C_{63} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_2| = -a^{-3} |A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_3| = a^{-2} |A_3|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a |A_4| = -a^{-1} |A_4|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_5|$$

Sehingga diperoleh untuk matriks kofaktor dari A_6 adalah

$$C_6 = \begin{bmatrix} |A_5| & -a|A_4| & a^2|A_3| & -a^3|A_2| & a^4|A_1| & -a^5 \\ -a^{-1}|A_4| & |A_1||A_4| & -a|A_1||A_3| & a^2|A_1||A_2| & -a^3|A_1||A_1| & a^4|A_1| \\ a^{-2}|A_3| & -a^{-1}|A_1||A_3| & |A_2||A_3| & -a|A_2||A_2| & a^2|A_1||A_2| & -a^3|A_2| \\ -a^{106}|A_2| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-1}|A_2||A_2| & |A_3||A_2| & -a|A_1||A_3| & a^2|A_3| \\ a^{-4}|A_1| & -a^{-3}|A_1||A_1| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_3| & |A_4||A_1| & -a|A_4| \\ -a^{-5} & a^{-4}|A_1| & -a^{-3}|A_2| & a^{-2}|A_3| & -a^{-1}|A_4| & |A_5| \end{bmatrix}$$

6. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_7 , yaitu:

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_6|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_5|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_4|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3 |A_3|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4 |A_2|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^5 |A_1|$$

$$C_{17} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^6$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_5| = -a^{-1} |A_5|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot |A_5| = |A_1||A_5|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_4|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_3|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_1||A_2|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1||A_1|$$

$$C_{27} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5|A_1|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_4| = a^{-2} |A_4|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_1| |A_3| = -a^{-1} |A_1| |A_3|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2| |A_4|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a |A_2| |A_3|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_2| |A_2|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 |A_2| |A_1|$$

$$C_{37} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 |A_2|$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_3| = -a^{-3} |A_3|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_1| |A_3| = a^{-2} |A_1| |A_3|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^{-1} |A_2| |A_3|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_3| |A_3|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a |A_3| |A_2|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_1| |A_3|$$

$$C_{47} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 |A_3|$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_2| = a^{-4} |A_2|$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_1| |A_2| = -a^{-3} |A_1| |A_2|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_2| |A_2| = a^{-2} |A_2| |A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_2| |A_3| = -a^{-1} |A_2| |A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_4||A_2|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_4||A_1|$$

$$C_{57} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_4|$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^5|A_1| = a^{-5}|A_1|$$

$$C_{62} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4|A_1||A_1| = a^{-4}|A_1||A_1|$$

$$C_{63} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1||A_2| = -a^{-3}|A_1||A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_1| |A_3| = a^{-2} |A_1| |A_3|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_1| |A_4| = -a^{-1} |A_1| |A_4|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A_5| |A_1|$$

$$C_{67} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a |A_5|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$$

$$C_{72} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^5 |A_1| = -a^{-5} |A_1|$$

$$C_{73} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_2| = a^{-4} |A_2|$$

$$C_{74} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_3| = -a^{-3} |A_3|$$

$$C_{75} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_4| = a^{-2} |A_4|$$

$$C_{76} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a |A_5|$$

$$C_{77} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_6|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_7 adalah

$$C_7 = \begin{bmatrix} |A_6| & -a|A_5| & a^2|A_4| & -a^3|A_3| & a^4|A_2| & -a^5|A_1| & a^6 \\ -a^{-1}|A_5| & |A_6| & -a|A_1||A_4| & a^2|A_1||A_3| & -a^3|A_1||A_2| & a^4|A_1||A_1| & -a^5|A_1| \\ a^{-2}|A_4| & -a^{-1}|A_1||A_4| & |A_2||A_4| & -a|A_2||A_3| & a^2|A_2||A_2| & -a^3|A_1||A_2| & a^4|A_2| \\ -a^{-3}|A_3| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-1}|A_2||A_3| & |A_3||A_3| & -a|A_2||A_3| & a^2|A_1||A_3| & -a^3|A_3| \\ a^{-4}|A_2| & -a^{-3}|A_1||A_2| & a^{-2}|A_2||A_2| & -a^{-1}|A_2||A_3| & |A_4||A_2| & -a|A_4||A_1| & a^2|A_4| \\ -a^{-5}|A_1| & a^{-4}|A_1||A_1| & -a^{-3}|A_2||A_2| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-1}|A_3||A_4| & |A_5||A_1| & -a|A_5| \\ a^{-6} & -a^{-5}|A_1| & a^{-4}|A_2| & -a^{-3}|A_3| & a^{-2}|A_4| & -a^{-1}|A_5| & |A_6| \end{bmatrix}$$

7. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_8 , dengan proses sebagai berikut:

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_7|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_6|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_5|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_4|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4 |A_3|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^5 |A_2|$$

$$C_{17} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^6 |A_1|$$

$$C_{18} = (-1)^9 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^7$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_6| = -a^{-1} |A_6|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1|A_6| = |A_1||A_6|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_5|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_4|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_1||A_3|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1||A_2|$$

$$C_{27} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^5 |A_1| |A_1|$$

$$C_{28} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^6 |A_1|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_5| = a^{-2} |A_5|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_1| |A_5| = -a^{-1} |A_1| |A_5|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2| |A_5|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2||A_4|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_2||A_3|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_2||A_2|$$

$$C_{37} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_2||A_1|$$

$$C_{38} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^5|A_2|$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_4| = -a^{-3} |A_4|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_1| |A_4| = a^{-2} |A_1| |A_4|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_2| |A_4|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_3| |A_4|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a |A_3| |A_4|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_3| |A_2|$$

$$C_{47} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 |A_3| |A_1|$$

$$C_{48} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 |A_3|$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_3| = a^{-4} |A_3|$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_1| |A_3| = -a^{-3} |A_1| |A_3|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_2| |A_3| = a^{-2} |A_2| |A_3|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_3| |A_3| = -a^{-1} |A_3| |A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_4| |A_3|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^{14} |A_4| |A_2|$$

$$C_{57} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 |A_4| |A_1|$$

$$C_{58} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 |A_4|$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^5 |A_2| = -a^{-5} |A_2|$$

$$C_{62} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_1| |A_2| = a^{-4} |A_1| |A_2|$$

$$C_{63} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_2| |A_2| = -a^{-3} |A_2| |A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_3| |A_2| = a^{-2} |A_3| |A_2|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_4||A_2|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_5||A_2|$$

$$C_{67} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_5||A_1|$$

$$C_{68} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_5|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^6|A_1| = a^{-6}|A_1|$$

$$C_{72} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^5 |A_1| |A_1| = -a^{-5} |A_1| |A_1|$$

$$C_{73} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_1| |A_2| = a^{-4} |A_1| |A_2|$$

$$C_{74} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_1| |A_3| = -a^{-3} |A_1| |A_3|$$

$$C_{75} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_1| |A_4| = a^{-2} |A_1| |A_4|$$

$$C_{76} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a |A_1| |A_5| = -a^{-1} |A_1| |A_5|$$

$$C_{77} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A_1||A_6|$$

$$C_{78} = (-1)^{15} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_6|$$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$$C_{81} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^7} = -a^{-7}$$

$$C_{82} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^6 |A_1| = a^{-6} |A_1|$$

$$C_{83} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^5 |A_2| = a^{-5} |A_2|$$

$$C_{84} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4 |A_3| = a^{-4} |A_3|$$

$$C_{85} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3 |A_4| = -a^{-3} |A_4|$$

$$C_{86} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2 |A_5| = a^{-2} |A_5|$$

$$C_{87} = (-1)^{15} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a |A_6| = -a^{-1} |A_6|$$

$$C_{88} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_7|$$

Berdasarkan hasil dari matriks kofaktor-kofaktor yang didapat dari matriks A_8 baris pertama sampai baris kedelapan, maka dapat dibuat dalam suatu matrik kofaktor, yaitu

$$C_8 = \begin{bmatrix} |A_7| & -a|A_2| & a^2|A_5| & -a^3|A_4| & a^4|A_3| & -a^5|A_2| & a^6|A_1| & 105a^7 \\ -a^{-1}|A_6| & |A_1||A_6| & -a|A_1||A_5| & a^2|A_1||A_4| & -a^3|A_1||A_3| & a^4|A_1||A_2| & -a^5|A_1||A_1| & a^6|A_1| \\ a^{-2}|A_5| & -a^{-1}|A_1||A_5| & 144|A_5| & -a|A_2||A_4| & a^2|A_2||A_3| & -a^3|A_2||A_2| & a^4|A_2||A_1| & -a^5|A_2| \\ -a^{-3}|A_4| & a^{-2}|A_1||A_4| & -a^{-1}|A_2||A_4| & |A_3||A_4| & -a|A_3||A_3| & a^2|A_3||A_2| & -a^3|A_3||A_1| & a^4|A_3| \\ a^{-4}|A_3| & -a^{-3}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_2||A_3| & -a^{-1}|A_3||A_3| & |A_4||A_3| & -a|A_4||A_2| & a^2|A_4||A_1| & -a^3|A_4| \\ -a^{-5}|A_2| & a^{-4}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_2||A_2| & a^{-2}|A_3||A_2| & -a^{-1}|A_4||A_2| & |A_5||A_2| & -a|A_5||A_1| & a^2|A_5| \\ a^{-6}|A_1| & -a^{-5}|A_1||A_1| & a^{-4}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_1||A_4| & -a^{-1}|A_1||A_5| & |A_6||A_1| & -a|A_6| \\ -a^{-7} & a^{-6}|A_1| & -a^{-5}|A_2| & a^{-4}|A_3| & -a^{-3}|A_4| & a^{-2}|A_5| & -a^{-1}|A_6| & |A_7| \end{bmatrix}$$

8. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_9 , dengan proses sebagai berikut:

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0 = |A_8| & C_{12} &= -a|A_7| & C_{13} &= a^2|A_6| \\ C_{14} &= -a^3|A_5| & C_{15} &= a^4|A_4| & C_{16} &= -a^5|A_3| \\ C_{17} &= a^6|A_2| & C_{18} &= -a^7|A_1| & C_{19} &= a^8 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{21} &= -1/a|A_7| & C_{22} &= |A_1||A_7| & C_{23} &= -a|A_1||A_6| \\ C_{24} &= a^2|A_1||A_5| & C_{25} &= -a^3|A_1||A_4| & C_{26} &= a^4|A_1||A_3| \\ C_{27} &= -a^5|A_1||A_2| & C_{28} &= a^6|A_1||A_1| & C_{29} &= -a^7|A_1| \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{31} &= 1/a^2|A_6| & C_{32} &= -1/a|A_1||A_6| & C_{33} &= |A_2||A_6| \\ C_{34} &= -a|A_2||A_5| & C_{35} &= a^2|A_2||A_4| & C_{36} &= -a^3|A_2||A_3| \\ C_{37} &= a^4|A_2||A_2| & C_{38} &= -a^5|A_2||A_1| & C_{39} &= a^6|A_2| \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{41} &= -1/a^3|A_5| & C_{42} &= 1/a^2|A_1||A_5| & C_{43} &= -1/a|A_2||A_5| \\ C_{44} &= |A_3||A_5| & C_{45} &= -a|A_3||A_4| & C_{46} &= a^2|A_3||A_3| \\ C_{47} &= -a^3|A_3||A_2| & C_{48} &= a^4|A_3||A_1| & C_{49} &= -a^5|A_3| \end{aligned}$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
 C_{51} = 1/a^4|A_4| & C_{52} = -1/a^3|A_1||A_4| & C_{53} = 1/a^2|A_2||A_4| \\
 C_{54} = -1/a|A_3||A_4| & C_{55} = |A_4||A_4| & C_{56} = -a|A_4||A_3| \\
 C_{57} = a^2|A_4||A_2| & C_{58} = -a^3|A_4||A_1| & C_{59} = -a^4|A_4|
 \end{array}$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
 C_{61} = -1/a^5|A_3| & C_{62} = 1/a^4|A_1||A_3| & C_{63} = -1/a^3|A_2||A_3| \\
 C_{64} = 1/a^2|A_3||A_3| & C_{65} = -1/a|A_4||A_3| & C_{66} = |A_5||A_3| \\
 C_{67} = -a|A_5||A_2| & C_{68} = a^2|A_5||A_1| & C_{69} = -a^3|A_5|
 \end{array}$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh

$$\begin{array}{lll}
 C_{71} = 1/a^6|A_2| & C_{72} = -1/a^5|A_1||A_2| & C_{73} = 1/a^4|A_2||A_2| \\
 C_{74} = -1/a^3|A_3||A_2| & C_{75} = 1/a^2|A_4||A_2| & C_{76} = -1/a|A_5||A_2| \\
 C_{77} = |A_6||A_2| & C_{78} = -a|A_6||A_1| & C_{79} = a^2|A_6|
 \end{array}$$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
 C_{81} = -1/a^7|A_1| & C_{82} = 1/a^6|A_1||A_1| & C_{83} = -1/a^5|A_1||A_2| \\
 C_{84} = 1/a^4|A_1||A_3| & C_{85} = -1/a^3|A_1||A_4| & C_{86} = 1/a^2|A_1||A_5| \\
 C_{87} = -1/a|A_1||A_6| & C_{88} = |A_7||A_1| & C_{89} = -a|A_7|
 \end{array}$$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll}
 C_{91} = 1/a^8 & C_{92} = -1/a^7|A_1| & C_{93} = 1/a^6|A_2| \\
 C_{94} = -1/a^5|A_3| & C_{95} = 1/a^4|A_4| & C_{96} = -1/a^3|A_5| \\
 C_{97} = 1/a^2|A_6| & C_{98} = -1/a|A_7| & C_{99} = |A_8|
 \end{array}$$

Berdasarkan hasil dari matriks kofaktor-kofaktor yang didapat dari matriks A_9 baris pertama sampai baris kesembilan, maka dapat dibuat dalam suatu matrik kofaktor, yaitu

$$C_9 = \begin{bmatrix} |A_8| & |A_7| & |A_6| & |A_5| & |A_4| & |A_3| & |A_2| & |A_1| \\ -a^{-1}|A_7| & |A_1||A_7| & -a|A_1||A_6| & -a^3|A_5| & a^4|A_4| & -a^5|A_3| & -a^6|A_2| & -a^7|A_1| \\ a^{-2}|A_6| & -a^{-1}|A_1||A_6| & |A_2||A_6| & a^2|A_1||A_5| & -a^3|A_1||A_4| & a^4|A_1||A_3| & a^5|A_1||A_2| & a^6|A_1||A_1| \\ -a^{-3}|A_5| & a^{-2}|A_1||A_5| & -a|A_2||A_5| & -a|A_2||A_5| & a^2|A_2||A_4| & -a^3|A_2||A_3| & -a^4|A_2||A_2| & -a^5|A_2||A_1| \\ a^{-4}|A_4| & -a^{-1}|A_2||A_4| & -a^{-1}|A_2||A_4| & |A_3||A_5| & -a|A_3||A_4| & a^2|A_3||A_3| & a^3|A_3||A_2| & a^4|A_3||A_1| \\ -a^{-5}|A_3| & a^{-4}|A_1||A_3| & a^{-3}|A_2||A_3| & -a^{-1}|A_3||A_4| & |A_4||A_4| & -a|A_4||A_3| & -a^3|A_4||A_2| & -a^4|A_4||A_1| \\ a^{-6}|A_2| & -a^{-5}|A_1||A_2| & a^{-4}|A_2||A_2| & a^{-2}|A_3||A_3| & -a^{-1}|A_4||A_2| & |A_5||A_3| & a^2|A_5||A_2| & a^3|A_5||A_1| \\ -a^{-7}|A_1| & a^{-6}|A_1||A_1| & -a^{-5}|A_2||A_1| & a^{-4}|A_3||A_2| & a^{-2}|A_4||A_2| & -a^{-1}|A_5||A_2| & -a|A_6||A_2| & a^2|A_6||A_1| \\ a^{-8} & -a^{-7}|A_1| & a^{-6}|A_2| & -a^{-5}|A_3| & a^{-4}|A_4| & -a^{-3}|A_5| & -a^{-2}|A_6| & -a^{-1}|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

9. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_{10} , dengan proses sebagai berikut:

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{11} &= |A_9| & C_{12} &= -a|A_8| & C_{13} &= a^2|A_7| \\ C_{14} &= -a^3|A_6| & C_{15} &= a^4|A_5| & C_{16} &= -a^5|A_4| \\ C_{17} &= a^6|A_3| & C_{18} &= -a^7|A_2| & C_{19} &= a^8|A_1| \\ C_{110} &= -a^9 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{21} &= -1/a|A_8| & C_{22} &= |A_1||A_8| & C_{23} &= -a|A_1||A_7| \\ C_{24} &= a^2|A_1||A_6| & C_{25} &= -a^3|A_1||A_5| & C_{26} &= a^4|A_1||A_4| \\ C_{27} &= -a^5|A_1||A_3| & C_{28} &= a^6|A_1||A_2| & C_{29} &= -a^7|A_1||A_1| \\ C_{210} &= a^8|A_1| \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_{31} &= 1/a^2|A_7| & C_{32} &= -1/a|A_1||A_7| & C_{33} &= |A_2||A_7| \\ C_{34} &= -a|A_2||A_6| & C_{35} &= a^2|A_2||A_5| & C_{36} &= -a^3|A_2||A_4| \\ C_{37} &= a^4|A_2||A_3| & C_{38} &= -a^5|A_2||A_2| & C_{39} &= a^6|A_2||A_1| \\ C_{310} &= -a^7|A_2| \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 C_{41} &= -1/a^3|A_6| & C_{42} &= 1/a^2|A_1||A_6| & C_{43} &= -1/a|A_2||A_6| \\
 C_{44} &= |A_3||A_6| & C_{45} &= -a|A_3||A_5| & C_{46} &= a^2|A_3||A_4| \\
 C_{47} &= -a^3|A_3||A_3| & C_{48} &= a^4|A_3||A_2| & C_{49} &= -a^5|A_3||A_1| \\
 C_{410} &= a^6|A_3|
 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 C_{51} &= 1/a^4|A_5| & C_{52} &= -1/a^3|A_1||A_5| & C_{53} &= 1/a^2|A_2||A_5| \\
 C_{54} &= -1/a|A_3||A_5| & C_{55} &= |A_4||A_5| & C_{56} &= -a|A_4||A_4| \\
 C_{57} &= a^2|A_4||A_3| & C_{58} &= -a^3|A_4||A_2| & C_{59} &= a^4|A_4||A_1| \\
 C_{510} &= -a^5|A_4|
 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 C_{61} &= -1/a^5|A_4| & C_{62} &= 1/a^4|A_1||A_4| & C_{63} &= -1/a^3|A_2||A_4| \\
 C_{64} &= 1/a^2|A_3||A_4| & C_{65} &= -1/a|A_4||A_4| & C_{66} &= |A_5||A_4| \\
 C_{67} &= -a|A_5||A_3| & C_{68} &= a^2|A_5||A_2| & C_{69} &= -a^3|A_5||A_1| \\
 C_{610} &= a^4|A_5|
 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 C_{71} &= 1/a^6|A_3| & C_{72} &= -1/a^5|A_1||A_3| & C_{73} &= 1/a^4|A_2||A_3| \\
 C_{74} &= -1/a^3|A_3||A_3| & C_{75} &= 1/a^2|A_4||A_3| & C_{76} &= -1/a|A_5||A_3| \\
 C_{77} &= |A_6||A_3| & C_{78} &= -a|A_6||A_2| & C_{79} &= a^2|A_6||A_1| \\
 C_{710} &= -a^3|A_6|
 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 C_{81} &= -1/a^7|A_2| & C_{82} &= 1/a^6|A_1||A_2| & C_{83} &= -1/a^5|A_2||A_2| \\
 C_{84} &= 1/a^4|A_3||A_2| & C_{85} &= -1/a^3|A_4||A_2| & C_{86} &= 1/a^2|A_5||A_2| \\
 C_{87} &= -1/a|A_6||A_2| & C_{88} &= |A_7||A_2| & C_{89} &= -a|A_7||A_1| \\
 C_{810} &= a^2|A_7|
 \end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}C_{91} &= 1/a^8|A_1| & C_{92} &= -1/a^7|A_1||A_1| & C_{93} &= 1/a^6|A_2||A_1| \\C_{94} &= -1/a^5|A_3||A_1| & C_{95} &= 1/a^4|A_4||A_1| & C_{96} &= -1/a^3|A_5||A_1| \\C_{97} &= 1/a^2|A_6||A_1| & C_{98} &= -1/a|A_7||A_1| & C_{99} &= |A_8||A_1| \\C_{910} &= -a|A_8|\end{aligned}$$

Matriks kofaktor untuk baris kesepuluh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}C_{101} &= -1/a^9 & C_{102} &= 1/a^8|A_1| & C_{103} &= -1/a^7|A_2| \\C_{104} &= 1/a^6|A_3| & C_{105} &= -1/a^5|A_4| & C_{106} &= 1/a^4|A_5| \\C_{107} &= -1/a^3|A_6| & C_{108} &= 1/a^2|A_7| & C_{109} &= 1/a|A_8| \\C_{1010} &= |A_9|\end{aligned}$$

Sehingga matriks kofaktor untuk A_{10} , yaitu

$$C_{10} = \begin{bmatrix} |A_9| & -a|A_7| & a^2|A_6| & a^4|A_4| & 10a^5|A_3| & a^6|A_2| & -a^7|A_2| & a^8|A_1| & -a^9 \\ -a^{-1}|A_8| & |A_1||A_8| & -a|A_1||A_7| & -a^3|A_1||A_5| & a^4|A_1||A_4| & -a^5|A_1||A_3| & a^6|A_1||A_2| & -a^7|A_1||A_1| & a^8|A_1| \\ a^{-2}|A_7| & -a|A_7| & -a|A_2||A_7| & a^2|A_2||A_5| & -a^3|A_2||A_4| & -a^4|A_2||A_3| & a^5|A_2||A_2| & a^6|A_2||A_1| & a^7|A_2| \\ -a^{-3}|A_6| & a^{-2}|A_1||A_6| & a^{-1}|A_2||A_6| & a^2|A_2||A_4| & -a^3|A_2||A_3| & a^4|A_2||A_2| & -a^5|A_2||A_2| & -a^6|A_2||A_1| & -a^7|A_2| \\ a^{-4}|A_5| & -a^{-3}|A_1||A_5| & a^{-2}|A_2||A_5| & -a|A_3||A_5| & a^2|A_3||A_4| & -a^3|A_3||A_3| & a^4|A_3||A_2| & -a^5|A_3||A_1| & -a^6|A_3| \\ -a^{-5}|A_4| & a^{-4}|A_1||A_4| & -a^{-3}|A_2||A_4| & |A_4||A_4| & -a|A_4||A_4| & a^2|A_4||A_3| & -a^3|A_4||A_2| & a^4|A_4||A_1| & -a^5|A_4| \\ a^{-6}|A_3| & -a^{-5}|A_1||A_3| & a^{-4}|A_2||A_3| & a^{-2}|A_4||A_3| & -a^{-1}|A_5||A_3| & -a^2|A_5||A_3| & a^3|A_5||A_2| & -a^4|A_5||A_1| & -a^5|A_5| \\ -a^{-7}|A_2| & a^{-6}|A_1||A_2| & -a^{-5}|A_2||A_2| & -a^{-3}|A_4||A_2| & a^{-2}|A_5||A_2| & -a^{-1}|A_6||A_2| & |A_7||A_2| & a^2|A_6||A_1| & -a^3|A_6| \\ a^{-8}|A_1| & -a^{-7}|A_1||A_1| & a^{-6}|A_2||A_1| & a^{-4}|A_6||A_1| & -a^{-3}|A_5||A_1| & a^{-2}|A_6||A_1| & -a^{-1}|A_7||A_1| & -a|A_7||A_1| & a^2|A_7| \\ -a^{-9} & a^{-8}|A_1| & -a^{-7}|A_2| & -a^{-5}|A_3| & a^{-4}|A_4| & -a^{-3}|A_5| & a^{-2}|A_6| & |A_8||A_1| & -a|A_8| \\ & & & & & & & -a^{-1}|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$



5.3 Bentuk umum Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus

Orde $n \times n$

Setelah kita dapat menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal dari orde 2×2 sampai 10×10 , maka kita dapat memformulasikan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal untuk orde $n \times n$. Berikut diberikan formulasi umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus orde $n \times n$ dalam teorema 5.1, serta pembuktiannya menggunakan pembuktian langsung.

Teorema 5.1 Diberikan A_n suatu matriks toeplitz bentuk khusus berorde $n \geq 2$ pada persamaan (1.4) dengan $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:

$$C_n = \begin{bmatrix} |A_{n-1}| & a^{-n+3} & a^{-n+5} & a^{-n+7} & \dots & a^{n-3} & a^{n-1} \\ a^{n-3} & |A_{n-1}| & a^{-n+3} & a^{-n+5} & \dots & a^{n-5} & a^{n-3} \\ a^{n-5} & a^{n-3} & |A_{n-1}| & a^{-n+3} & \dots & a^{n-7} & a^{n-5} \\ a^{n-7} & a^{n-5} & a^{n-3} & |A_{n-1}| & \dots & a^{n-9} & a^{n-7} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{-n+1} & a^{-n+3} & a^{-n+5} & a^{-n+7} & \dots & a^{n-3} & |A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Bukti :

Perhatikan matriks berikut

$$A_n = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & b \end{bmatrix} \quad \text{dengan } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Selanjutnya kita akan membuktikan setiap entri dari matriks kofaktornya. Mulai dari entri matriks kofaktor baris pertama dan kolom pertama sampai baris pertama kolom ke n . Selanjutnya baris kedua dan kolom pertama sampai baris kedua dan kolom ke n . Seterusnya dilakukan hal yang sama sampai baris ke n dan kolom ke n . Prosesnya diberikan sebagai berikut:

a. Entri baris pertama matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^2 |A_{n-1}|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 a |A_{n-2}|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 a^2 |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{1n} , sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris pertama matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{1n} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} a^{n-1}$$

b. Entri baris kedua matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 c |A_{n-2}|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 |A_{n-2}| \cdot b = (-1) |A_{n-2}| |A_1| = (-1) |A_1| |A_{n-2}|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5 \cdot a |A_1| |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{2n} , sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{2n} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} b a^{n-2} = (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1|$$

c. Entri baris ketiga matriks Kofaktor sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 c |A_{n-3}|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5 b \cdot c |A_{n-3}| = (-1)^5 c |A_1| |A_{n-3}|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{3n} , sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{3n} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_2|$$

Entri baris ke-4,5,6 dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, sehingga di peroleh entri untuk baris ke-n sebagai berikut :

$$C_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} c^{n-1}$$

$$C_{n2} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+2} b \cdot c^{n-1} = (-1)^{n+2} c^{n-2} |A_1|$$

$$C_{n3} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3} c^{n-3} |A_2|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{nn} , sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_m = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} \overset{32}{b} & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \underset{91}{0} & 0 & \dots & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{2n} |A_{n-1}|$$

Dari perhitungan diatas, diperoleh :

$$C_n = \begin{vmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a |A_{n-2}| \overset{139}{c} & (-1)^4 a |A_{n-3}| & \dots & (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3 c |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| \overset{138}{c} & (-1)^5 a |A_1| |A_{n-3}| \overset{138}{c} & \dots & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| \\ (-1)^4 c^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 c |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{n-4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_2| \overset{161}{c} \\ (-1)^5 c^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 c^2 |A_2| |A_{n-4}| & (-1)^7 c |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{n-5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{n-4} |A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n \overset{119}{c^{n-2}} |A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-3} \overset{158}{|A_1| |A_1|} & (-1)^{n+2} c^{n-4} |A_1| |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-2} \overset{3}{|A_{n-2}| |A_1|} & (-1)^{n+n-2} a |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} c^{n-1} & (-1)^{n+2} c^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+3} c^{n-3} |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-1} \overset{79}{c} |A_{n-2}| & (-1)^{2n} c |A_{n-1}| \end{vmatrix}$$

Pembuktian selesai.

BAB VI
INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

Rumusan umum yang ketiga adalah rumusan umum dari invers matriks toepelitz bentuk khusus. Berikut diberikan proses mendapatkan bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khususnya.

6.1 Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 10×10

1. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 2×2 , yaitu:

$$(A_2)^{-1} = \frac{1}{|A_2|} adj(A_2)$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_2| = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers.

2. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 3×3 , yaitu:

$$(A_3)^{-1} = \frac{1}{|A_3|} adj(A_3) = \frac{1}{|A_3|} (C_3)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_3| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_3)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} |A_3| & -a^{-1}|A_1| & a^{-2} \\ -a|A_1| & |A_1||A_1| & -a^{-1}|A_1| \\ a^2 & -a|A_1| & |A_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|A_2| & a^{-1}|A_1| & -a^{-2} \\ a|A_1| & -|A_1||A_1| & a^{-1}|A_1| \\ -a^2 & -a|A_1| & -|A_2| \end{bmatrix}$$

3. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 4×4 , yaitu:

$$(A_4)^{-1} = \frac{1}{|A_4|} adj(A_4) = \frac{1}{|A_4|} (C_4)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_4| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_4)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} |A_3| & -a^{-1}|A_2| & a^{-2}|A_1| & -a^{-3} \\ -a|A_2| & |A_3||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_1| & a^{-2}|A_1| \\ a^2|A_1| & -a|A_1||A_1| & |A_1||A_2| & -a^{-1}|A_2| \\ -a^3 & a^2|A_1| & -a|A_2| & |A_4| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -|A_3| & a^{-1}|A_2| & -a^{-2}|A_1| & a^{-3} \\ a|A_2| & -|A_6| & a^{-1}|A_1||A_1| & -a^{-2}|A_1| \\ -a^2|A_1| & a|A_1||A_1| & -|A_1||A_2| & a^{-1}|A_2| \\ a^3 & -a^2|A_1| & a|A_2| & -|A_4| \end{bmatrix}$$

4. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 5×5 , yaitu:

$$(A_5)^{-1} = \frac{1}{|A_5|} \text{adj}(A_5) = \frac{1}{|A_5|} (C_5)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_5| = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers.

5. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 6×6 , yaitu:

$$(A_6)^{-1} = \frac{1}{|A_6|} \text{adj}(A_6) = \frac{1}{|A_6|} (C_6)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_6| = 1$, maka diperoleh:

$$(A_6)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} |A_5| & -a^{-1}|A_4| & a^{-2}|A_3| & -a^{-3}|A_2| & a^{-4}|A_1| & -a^{-5} \\ -a|A_4| & |A_1||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_1| & a^{-4}|A_1| \\ a^2|A_3| & a|A_1||A_3| & |A_2||A_3| & -a^{-1}|A_2||A_2| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_2| \\ -a^3|A_2| & a^2|A_1||A_2| & -a|A_2||A_2| & |A_3||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_3| \\ a^4|A_1| & -a^3|A_1||A_1| & a^2|A_1||A_2| & -a|A_1||A_3| & |A_4||A_1| & -a^{-1}|A_4| \\ -a^5 & a^4|A_1| & -a^3|A_2| & a^2|A_3| & -a|A_4| & |A_5| \end{bmatrix}$$

6. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 7×7 , yaitu:

$$(A_7)^{-1} = \frac{1}{|A_7|} \text{adj}(A_7) = \frac{1}{|A_7|} (C_7)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_7| = 1$, maka diperoleh:

$$(A_7)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} |A_6| & -a^{-1}|A_5| & a^{-2}|A_4| & -a^{-3}|A_3| & a^{-4}|A_2| & -a^{-5}|A_1| & a^{-6} \\ -a|A_5| & |A_1||A_5| & -a^{-1}|A_1||A_4| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-3}|A_1||A_2| & a^{-4}|A_1||A_1| & -a^{-5}|A_1| \\ a^2|A_4| & -a|A_1||A_4| & |A_2||A_4| & -a^{-1}|A_2||A_3| & a^{-2}|A_2||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_2| & -a^{-4}|A_2| \\ -a^3|A_3| & a^2|A_1||A_3| & -a|A_2||A_3| & |A_3||A_3| & -a^{-1}|A_2||A_3| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-3}|A_3| \\ a^4|A_2| & -a^3|A_1||A_2| & a^2|A_2||A_2| & -a|A_2||A_3| & |A_4||A_2| & -a^{-1}|A_4||A_1| & a^{-2}|A_4| \\ -a^5|A_1| & a^4|A_1||A_1| & -a^3|A_1||A_2| & a^2|A_1||A_3| & -a|A_1||A_4| & |A_5||A_1| & -a^{-1}|A_5| \\ a^6 & -a^5|A_1| & a^4|A_2| & -a^3|A_3| & a^2|A_4| & -a|A_5| & |A_6| \end{bmatrix}$$

7. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 8×8 , yaitu:

$$(A_8)^{-1} = \frac{1}{|A_8|} \text{adj}(A_8) = \frac{1}{|A_8|} (C_8)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_8| = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers.

8. Menentukan invers matriks toepplitz bentuk khusus untuk orde 9×9 , yaitu:

$$(A_9)^{-1} = \frac{1}{|A_9|} \text{adj}(A_7) = \frac{1}{|A_9|} (C_9)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_9| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_9)^{-1} = \begin{bmatrix} |A_8| & -29|A_7| & -a^{-2}|A_6| & -a^{-3}|A_5| & a^{-4}|A_4| & -a^{-5}|A_3| & a^{-6}|A_2| & -a^{-7}|A_1| & a^{-8} \\ -a|A_7| & |A_1||A_6| & -a^{-1}|A_1||A_6| & a^{-2}|A_1||A_5| & -a^{-3}|A_1||A_4| & -a^{-4}|A_1||A_3| & -a^{-5}|A_1||A_2| & -a^{-6}|A_1||A_1| & -a^{-7}|A_1| \\ a^2|A_6| & -a|A_1||A_6| & |A_2||A_6| & -a^{-1}|A_2||A_5| & a^{-2}|A_2||A_4| & -a^{-3}|A_2||A_3| & a^{-4}|A_2||A_2| & -a^{-5}|A_2||A_1| & -a^{-6}|A_2| \\ -6^{-3}|A_5| & a^2|A_1||A_5| & -a|A_2||A_5| & |A_3||A_5| & -a^{-1}|A_3||A_4| & a^{-2}|A_3||A_3| & -a^{-3}|A_3| & -a^{-4}|A_3| & -a^{-5}|A_3| \\ a^4|A_4| & -18|A_1||A_4| & a^2|A_2||A_4| & -a^1|A_3||A_4| & |A_4||A_4| & -a^{-1}|A_4||A_3| & a^{-2}|A_4||A_2| & -a^{-3}|A_4||A_1| & -a^{-4}|A_4| \\ -a^5|A_3| & a^4|A_1||A_3| & -a^3|A_2||A_3| & a^2|A_3||A_3| & -a^1|A_4||A_3| & |A_5||A_3| & -a^{-1}|A_5||A_2| & -a^{-2}|A_5||A_1| & -a^{-3}|A_5| \\ a^6|A_2| & -a^5|A_1||A_2| & a^4|A_2||A_2| & -a^3|A_3||A_2| & a^2|A_4||A_2| & -a^1|A_5||A_2| & |A_6||A_4| & -a^{-1}|A_6||A_1| & -a^{-2}|A_6| \\ -a^7|A_1| & a^6|A_1||A_1| & -a^5|A_2||A_1| & a^4|A_3||A_1| & -a^3|A_4||A_1| & a^2|A_5||A_1| & -a|A_6||A_1| & |A_7||A_1| & -a^{-1}|A_7| \\ a^8 & -a^7|A_1| & a^6|A_2| & -a^5|A_3| & a^4|A_4| & -a^3|A_5| & a^2|A_6| & -a|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

10. Menentukan invers matriks toepplitz bentuk khusus untuk orde 10×10 , yaitu:

$$(A_{10})^{-1} = \frac{1}{|A_{10}|} \text{adj}(A_7) = \frac{1}{|A_{10}|} (C_{10})^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_{10}| = -1$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1} |A_{n-2}| & \dots & (-1)^n a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{-n+3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2} |A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{-n+4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3} |A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{-n+5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4} |A_3| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1} |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| & \dots & (-1)^{n+n-1} a |A_{n-2}| & (-1)^{2n} |A_{n-1}| \end{bmatrix} \\
A_n^{-1} = & \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1} |A_{n-2}| & \dots & (-1)^n a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{-n+3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2} |A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{-n+4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3} |A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{-n+5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4} |A_3| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1} |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| & \dots & (-1)^{n+n-1} a |A_{n-2}| & (-1)^{2n} |A_{n-1}| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Jika jika $n \equiv 6 \pmod 3$ atau $n \equiv 6 \pmod 4$, maka

$$\begin{aligned}
A_n^{-1} = - & \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1} |A_{n-2}| & \dots & (-1)^n a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{-n+3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2} |A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{-n+4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3} |A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{-n+5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4} |A_3| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1} |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| & \dots & (-1)^{n+n-1} a |A_{n-2}| & (-1)^{2n} |A_{n-1}| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Bukti:

1. Jika $n \equiv 6 \pmod 2$ atau $n \equiv 6 \pmod 5$, maka berdasarkan Teorema 4.1 diperoleh $|A_n| = 0$, artinya A_n tidak mempunyai invers.
2. Jika $n \equiv 6 \pmod 0$ atau $n \equiv 6 \pmod 1$, maka berdasarkan Teorema 4.1 diperoleh $|A_n| = 1$. Sehingga $(A_n)^{-1} = \frac{1}{|A_n|} \text{adj}(A_n) = \frac{1}{1} (C_n)^T = (C_n)^T$, yaitu:

6.3 Beberapa Contoh Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus

Contoh 6.1 : Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus dengan orde 7×7 . Tentukan invers matriks tersebut dengan menggunakan bentuk umum yang telah ada.

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a = -1/2$$

Penyelesaian:

Pertama kali akan ditentukan nilai determinan dari matriks tersebut, yaitu:

Ukuran matriks A adalah 7×7 , berdasarkan Teorema 4.1 maka determinan dari matriks tersebut bernilai 1 atau $|A_7| = 1$.

Selanjutnya menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 7×7 , dengan menggunakan Teorema 4.1 dan Teorema 5.1, yaitu:

Entri untuk baris pertama matriks kofaktornya sebagai berikut:

$$C_{11} = |A_6| = 1$$

$$C_{12} = -a|A_5| = 0$$

$$C_{13} = a^2|A_4| = -1/4$$

$$C_{14} = -a^3|A_3| = -1/8$$

$$C_{15} = a^4|A_2| = 0$$

$$C_{16} = -a^5|A_1| = 1/32$$

$$C_{17} = a^6 = 1/64$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = -a^{-1}|A_5| = 0$$

$$C_{22} = |A_1||A_5| = 0$$

$$C_{23} = -a|A_1||A_4| = -1/2$$

$$C_{24} = a^2|A_1||A_3| = -1/4$$

$$C_{25} = -a^3|A_1||A_2| = 0$$

$$C_{26} = a^4|A_1||A_1| = 1/16$$

$$C_{27} = -a^5|A_1| = 1/32$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = a^{-2}|A_4| = -4$$

$$C_{32} = -a^{-1}|A_1||A_3| = -2$$

$$C_{33} = |A_2||A_4| = 0$$

$$C_{34} = -a|A_2||A_3| = 0$$

$$C_{35} = a^2|A_2||A_2| = 0$$

$$C_{36} = -a^3|A_2||A_1| = 0$$

$$C_{37} = a^4|A_2| = 0$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = -a^{-3}|A_3| = -8$$

$$C_{42} = a^{-2}|A_1||A_3| = -4$$

$$C_{43} = -a^{-1}|A_2||A_3| = 0$$

$$C_{44} = |A_3||A_3| = 1$$

$$C_{45} = -a|A_3||A_2| = 0$$

$$C_{46} = a^2|A_1||A_3| = -1/4$$

$$C_{47} = -a^3|A_3| = -1/8$$

Matriks kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = a^{-4}|A_2| = 0$$

$$C_{52} = -a^{-3}|A_1||A_2| = 0$$

$$C_{53} = a^{-2}|A_2||A_2| = 0$$

$$C_{54} = -a^{-1}|A_2||A_3| = 0$$

$$C_{55} = |A_4||A_2| = 0$$

$$C_{56} = -a|A_4||A_1| = -1/2$$

$$C_{57} = a^2|A_4| = -1/4$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = -a^{-5}|A_1| = 32$$

$$C_{62} = a^{-4}|A_1||A_1| = 16$$

$$C_{63} = -a^{-3}|A_1||A_2| = 0$$

$$C_{64} = a^{-2}|A_1||A_3| = -4$$

$$C_{65} = -a^{-1}|A_1||A_4| = -2$$

$$C_{66} = |A_5||A_1| = 0$$

$$C_{67} = -a|A_5| = 0$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = \frac{1}{a^6} = 64$$

$$C_{72} = -a^{-5}|A_1| = 32$$

$$C_{73} = a^{-4}|A_2| = 0$$

$$C_{74} = -a^{-3}|A_3| = -8$$

$$C_{75} = a^{-2}|A_4| = -4$$

$$C_{76} = -\frac{1}{a}|A_5| = 0$$

$$C_{77} = |A_6| = 1$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_7 adalah:

$$C_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/8 & 0 & 1/32 & 1/64 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & 0 & 1/16 & 1/32 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4 \\ 32 & 16 & 0 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 64 & 32 & 0 & -8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat determinan dan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 7×7 maka selanjutnya mendapatkan invers matriksnya menggunakan Teorema 6.1, yaitu:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|A_n|} adj(A_n) = \frac{1}{1} (C_n)^T = (C_n)^T$$

$$(A_7)^{-1} = \frac{1}{|A_7|} \text{adj}(A_6) = \frac{1}{1} (C_7)^T = (C_7)^T$$

$$(A_7)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -8 & 0 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 16 & 32 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & -1/4 & 0 & 1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -4 \\ 1/32 & 1/16 & 0 & -1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/64 & 1/32 & 0 & -1/8 & -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 6.2 : Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus dengan orde 10×10 . Tentukan invers matriks tersebut dengan menggunakan bentuk umum yang telah ada.

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a = 3$.

Penyelesaian:

Pertamkali kita ditentukan nilai determinan dari matriks tersebut, yaitu:

Ukuran matriks A adalah 10×10 , berdasarkan Teorema 4.1 maka determinan dari matriks tersebut bernilai 1 atau $|A_{10}| = -1$.

Selanjutnya menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 10×10 , dengan menggunakan Teorema 4.1 dan Teorema 5.1, yaitu:

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = |A_9| = -1$$

$$C_{12} = -a|A_8| = 0$$

$$C_{13} = a^2|A_7| = 9$$

$$C_{14} = -a^3|A_6| = -27$$

$$C_{15} = a^4|A_5| = 0$$

$$C_{16} = -a^5|A_4| = 243$$

$$C_{17} = a^6|A_3| = -729$$

$$C_{18} = -a^7|A_2| = 0$$

$$C_{19} = a^8|A_1| = 6561$$

$$C_{110} = -a^9 = -19683$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = -1/a|A_8| = 0$$

$$C_{22} = |A_1||A_8| = 0$$

$$C_{23} = -a|A_1||A_7| = -3$$

$$C_{24} = a^2|A_1||A_6| = 9$$

$$C_{25} = -a^3|A_1||A_5| = 0$$

$$C_{26} = a^4|A_1||A_4| = -81$$

$$C_{27} = -a^5|A_1||A_3| = 243$$

$$C_{28} = a^6|A_1||A_2| = 0$$

$$C_{29} = -a^7|A_1||A_1| = -2187$$

$$C_{210} = a^8|A_1| = 6561$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = 1/a^2|A_7| = 1/9$$

$$C_{32} = -1/a|A_1||A_7| = -1/3$$

$$C_{33} = |A_2||A_7| = 0$$

$$C_{34} = -a|A_2||A_6| = 0$$

$$C_{35} = a^2|A_2||A_5| = 0$$

$$C_{36} = -a^3|A_2||A_4| = 0$$

$$C_{37} = a^4|A_2||A_3| = 0$$

$$C_{38} = -a^5|A_2||A_2| = 0$$

$$C_{39} = a^6|A_2||A_1| = 0$$

$$C_{310} = -a^7|A_2| = 0$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = -1/a^3|A_6| = -1/27$$

$$C_{42} = 1/a^2|A_1||A_6| = 1/9$$

$$C_{43} = -1/a|A_2||A_6| = 0$$

$$C_{44} = |A_3||A_6| = -1$$

$$C_{45} = -a|A_3||A_5| = 0$$

$$C_{46} = a^2|A_3||A_4| = 9$$

$$C_{47} = -a^3|A_3||A_3| = -27$$

$$C_{48} = a^4|A_3||A_2| = 0$$

$$C_{49} = -a^5|A_3||A_1| = 243$$

$$C_{410} = a^6|A_3| = 729$$

Matriks kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = 1/a^4|A_5| = 0$$

$$C_{52} = -1/a^3|A_1||A_5| = 0$$

$$C_{53} = 1/a^2|A_2||A_5| = 0$$

$$C_{54} = -1/a|A_3||A_5| = 0$$

$$C_{55} = |A_4||A_5| = 0$$

$$C_{56} = -a|A_4||A_4| = -3$$

$$C_{57} = a^2|A_4||A_3| = 9$$

$$C_{58} = -a^3|A_4||A_2| = 0$$

$$C_{59} = a^4|A_4||A_1| = 81$$

$$C_{510} = -a^5|A_4| = 243$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = -1/a^5|A_4| = 1/243$$

$$C_{62} = 1/a^4|A_1||A_4| = -1/81$$

$$C_{63} = -1/a^3|A_2||A_4| = 0$$

$$C_{64} = 1/a^2|A_3||A_4| = 1/9$$

$$C_{65} = -\frac{1}{a}|A_4||A_4| = -1/3$$

$$C_{66} = |A_5||A_4| = 0$$

$$C_{67} = -a|A_5||A_3| = 0$$

$$C_{68} = a^2|A_5||A_2| = 0$$

$$C_{69} = -a^3|A_5||A_1| = 0$$

$$C_{610} = a^4|A_5| = 0$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = 1/a^6|A_3| = -1/729$$

$$C_{72} = -1/a^5|A_1||A_3| = 1/243$$

$$C_{73} = 1/a^4|A_2||A_3| = 0$$

$$C_{74} = -1/a^3|A_3||A_3| = -1/27$$

$$C_{75} = \frac{1}{a^2}|A_4||A_3| = 1/9$$

$$C_{76} = -1/a|A_5||A_3| = 0$$

$$C_{77} = |A_6||A_3| = -1$$

$$C_{78} = -a|A_6||A_2| = 0$$

$$C_{79} = a^2|A_6||A_1| = 9$$

$$C_{710} = -a^3|A_6| = -27$$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$$C_{81} = -1/a^7|A_2| = 0$$

$$C_{82} = 1/a^6|A_1||A_2| = 0$$

$$C_{83} = -1/a^5|A_2||A_2| = 0$$

$$C_{84} = 1/a^4|A_3||A_2| = 0$$

$$C_{85} = -1/a^3|A_4||A_2| = 0$$

$$C_{86} = 1/a^2|A_5||A_2| = 0$$

$$C_{87} = -1/a|A_6||A_2| = 0$$

$$C_{88} = |A_7||A_2| = 0$$

$$C_{89} = -a|A_7||A_1| = -3$$

$$C_{810} = a^2|A_7| = 9$$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$$C_{91} = 1/a^8|A_1| = 1/6561$$

$$C_{92} = -1/a^7|A_1||A_1| = -1/2187$$

$$C_{93} = 1/a^6|A_2||A_1| = 0$$

$$C_{94} = -1/a^5|A_3||A_1| = 1/243$$

$$C_{95} = 1/a^4|A_4||A_1| = -1/81$$

$$C_{96} = -1/a^3|A_5||A_1| = 0$$

$$C_{97} = 1/a^2|A_6||A_1| = 1/9$$

$$C_{98} = -1/a|A_7||A_1| = -1/3$$

$$C_{99} = |A_8||A_1| = 0$$

$$C_{910} = -a|A_8| = 0$$

Matriks kofaktor untuk baris kesepuluh sebagai berikut:

$$C_{101} = -1/a^9 = -1/19683$$

$$C_{102} = 1/a^8|A_1| = 1/6561$$

$$C_{103} = -1/a^7|A_2| = 0$$

$$C_{104} = 1/a^6|A_3| = -1/729$$

$$C_{105} = -1/a^5|A_4| = 1/243$$

$$C_{106} = 1/a^4|A_5| = 0$$

$$C_{107} = -1/a^3|A_6| = -1/27$$

$$C_{108} = 1/a^2|A_7| = 1/9$$

$$C_{109} = 1/a|A_8| = 0$$

$$C_{1010} = |A_9| = -1$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_{10} adalah:

$$C_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 & -27 & 0 & 243 & -729 & 0 & 6561 & 19683 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & -81 & 243 & 0 & -2187 & 6561 \\ 1/9 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/27 & 1/9 & 0 & -1 & 0 & 9 & -27 & 0 & 243 & 729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 81 & 243 \\ 1/243 & -1/81 & 0 & 1/9 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/729 & 1/243 & 0 & -1/27 & 1/9 & 0 & -1 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 1/6561 & -1/2187 & 0 & 1/243 & -1/81 & 0 & 1/9 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/19683 & 1/6561 & 0 & -1/729 & 1/243 & 0 & -1/27 & 1/9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat determinan dan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 10×10 maka akan didapatkan invers matriksnya dengan menggunakan Teorema 6.1 sebagai berikut:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|A_n|} \text{adj}(A_n) = \frac{1}{1} (C_n)^T = (C_n)^T \quad 104$$

$$(A_{10})^{-1} = \frac{1}{|A_{10}|} \text{adj}(A_{10}) = \frac{1}{1} (C_{10})^T = (C_{10})^T$$

$$(A_{10})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/9 & -1/27 & 0 & 1/243 & -1/729 & 0 & 1/6561 & 1/19683 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/9 & 0 & -1/81 & 1/243 & 0 & -1/2187 & 1/6561 \\ 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & 9 & 0 & -1 & 0 & 1/9 & -1/27 & 0 & 1/243 & 1/729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/9 & 0 & 1/81 & 1/243 \\ 243 & -81 & 0 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -729 & 243 & 0 & -27 & 9 & 0 & -1 & 0 & 1/9 & -1/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/9 \\ 6561 & -2187 & 0 & 243 & -81 & 0 & 9 & -3 & 0 & 0 \\ -19683 & 6561 & 0 & -729 & 243 & 0 & -27 & 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

137
BAB VII
PENUTUP

7.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan sebelumnya kita ketahui bahwa untuk mendapatkan invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin terlebih dahulu kita menentukan nilai determinan dari matriks tersebut. Selanjutnya kita menentukan matriks kofaktornya yang ditransposkan yang disebut adjoin dari matriks awal. Barulah akhirnya dengan mensubstitusi kepersamaan invers matriks kita dapat invers matriks toeplitz bentuk khusus. Berikut diberikan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor dan inversnya.

1. Bentuk umum dari determinannya matriks toeplitz bentuk khusus, yaitu:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & \text{jika } n \equiv 6 \pmod{2} \text{ atau } n = 6 \pmod{5} \\ 1 & \text{jika } n \equiv 6 \pmod{0} \text{ atau } n = 6 \pmod{1} \\ -1 & \text{jika } n \equiv 6 \pmod{3} \text{ atau } n = 6 \pmod{4} \end{cases}$$

2. Bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus, yaitu:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a |A_{n-2}| & (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & \dots & (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} |A_1| \\ (-1)^3 a^{-1} |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & (-1)^5 a |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| |A_1| \\ (-1)^4 a^{-2} |A_{n-3}| & (-1)^5 a^{-1} |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{n-4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_1| |A_2| \\ (-1)^5 a^{-3} |A_{n-4}| & (-1)^6 a^{-2} |A_2| |A_{n-4}| & (-1)^7 a^{-1} |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{n-5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{n-4} |A_1| |A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+4} |A_1| |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-1} |A_{n-2}| |A_1| \\ (-1)^{n+1} a^{-n+1} & (-1)^{n+2} a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+3} a^{-n+3} |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-1} a^{-1} |A_{n-2}| & (-1)^{2n} |A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Bentuk umum dari invers matriks toeplitz bentuk khusus, yaitu:
 - a. Jika $n \equiv 6 \pmod{2}$ atau $n = 6 \pmod{5}$, maka A_n tidak mempunyai invers.
 - b. Jika $n \equiv 6 \pmod{0}$ atau $n = 6 \pmod{1}$, maka

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1} |A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2} |A_{n-3}| & \dots & (-1)^n a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} |A_1| \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1} |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{-n+3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2} |A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{-n+4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3} |A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2| |A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{-n+5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4} |A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4} |A_1| |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1} |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-1} a |A_{n-2}| & (-1)^{2n} |A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

c. Jika $n \equiv 6 \pmod{3}$ atau $n = 6 \pmod{4}$, maka

$$A_n^{-1} = - \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1} |A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2} |A_{n-3}| & \dots & (-1)^n a^{-n+2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} |A_1| \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1| |A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1} |A_1| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+1} a^{-n+3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2} |A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1| |A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2| |A_{n-3}| & \dots & (-1)^{n+2} a^{-n+4} |A_1| |A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3} |A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2| |A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2| |A_{n-4}| & \dots & (-1)^{n+3} a^{-n+5} |A_1| |A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4} |A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3} |A_1| |A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4} |A_1| |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}| |A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1} |A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2} |A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3} |A_2| & \dots & (-1)^{n+n-1} a |A_{n-2}| & (-1)^{2n} |A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

7.2 Saran

Penelitian ini hanya membahas mengenai bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin. Disarankan para pembaca dapat melanjutkan hal-hal yang berhubungan dengan determinan, seperti nilai eigen dan vektor eigen. Atau dapat melanjutkan dengan menentukan invers matriks tetapi terhadap matriks yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- 5 Anton, Howard & Rorres, Chris, 2004, “*Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*”, Edisi Ketujuh, Jakarta, Erlangga.
- Aryani, F. & Corazon, C.M., 2015, “Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method”, *Proceeding Icostechs 2016*, ISSN: 2356-542X.
- 1 Gray, Robert M., 2005 “Toeplitz and Circulan Matrices”, Stanford 94305, Department of Electrical Engineering Stanford, USA.
- 1 Hefferon, Jim, 2012, *Linear Algebra*. Saint Michaels College Colchester, Vermont USA.
- 96 Kouachi, S., 1991, “Eigenvalues and Eigenvectors of Some Tridiagonal Matrices with Non Constant Diagonal Entries. ELA, In press.
- 1 Leon, S.J. , 2009, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Jakarta : Erlangga.
- 1 Nicholson, W. Keith, 2004, *Linear Algebra with Applications*, Fourth Edition. University of Calgary.
- 12 Ruminta, 2009, “*Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*”, Bandung, Rekayasa Sains.
- 1 Salkuyeh, Davod Khojasteh, 2006, “Positive Integer Power of the Tridiagonal Matriks Toeplitz”. *International Mathematical Forum*, Vol 1, no. 22, 1061 - 1065, Mohaghegh Ardabili University. Ardabil, Iran.
- Sianipar, 2009, P.Invers Z-Matriks, *Bulletin of Mathematics*, Vol. 01, No. 01,1-14. Medan Indonesia.
- Siregar, Bakti., 2014, dkk.”Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin”. *Saintia Matematika*. 02, (01), 85-94.
- Sukirman, 2006, “*Pengantar Teori Bilangan*”, Yogyakarta, Hanggar Kreator.
- Supranto, Johannes, 2003, *Pengantar Matriks*. Jakarta: Rineka Cipta.
- 1 Zwilinger, D., 2003, *Standard Mathematical Tables and Formulae*. Chapman & Hall / CRC Press Company. New York.

ORIGINALITY REPORT

16%

SIMILARITY INDEX

13%

INTERNET SOURCES

8%

PUBLICATIONS

4%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	media.neliti.com Internet Source	1%
2	Submitted to Imperial College of Science, Technology and Medicine Student Paper	1%
3	Zakrajsek, H.. "Pascal-like determinants are recursive", Advances in Applied Mathematics, 200410 Publication	1%
4	www.math.ku.edu Internet Source	<1%
5	etheses.uin-malang.ac.id Internet Source	<1%
6	www.roncjohnson.net Internet Source	<1%
7	docplayer.info Internet Source	<1%
8	docslide.us Internet Source	<1%

9	repository.usu.ac.id Internet Source	<1%
10	Maehr, H.. "Combinatorial chemistry in drug research from a new vantage point", <i>Bioorganic & Medicinal Chemistry</i> , 199703 Publication	<1%
11	edasolutions.com Internet Source	<1%
12	fitrilailimasruroh309.blogspot.com Internet Source	<1%
13	ardibanyuasin.blogspot.com Internet Source	<1%
14	cage.ugent.be Internet Source	<1%
15	fs.gallup.unm.edu Internet Source	<1%
16	Douglas A. Leonard. "Using Gröbner Bases to Investigate Flag Algebras and Association Scheme Fusion", <i>Algorithmic Algebraic Combinatorics and Gröbner Bases</i> , 2009 Publication	<1%
17	Submitted to Higher Education Commission Pakistan Student Paper	<1%

164.100.133.70

18

Internet Source

<1%

19

Engineering Computations, Volume 26, Issue 4
(2009-05-24)

Publication

<1%

20

Submitted to Oxford Brookes University

Student Paper

<1%

21

Submitted to Chester College of Higher
Education

Student Paper

<1%

22

www.cs.uni-bonn.de

Internet Source

<1%

23

www.smartstat.info

Internet Source

<1%

24

www.followscience.com

Internet Source

<1%

25

www.gena.ucl.ac.be

Internet Source

<1%

26

www.beton-hartmann.de

Internet Source

<1%

27

choirudiniaimnumetro.files.wordpress.com

Internet Source

<1%

28

yuniveronikaa.blogspot.com

Internet Source

<1%

29	Li, D.. "Simple criteria for the SLOCC classification", Physics Letters A, 20061204 Publication	<1%
30	ans.disi.unitn.it Internet Source	<1%
31	fmipa.ilearn.unand.ac.id Internet Source	<1%
32	imomath.com Internet Source	<1%
33	Malena I. Espanol. "Multilevel Approach For Signal Restoration Problems With Toeplitz Matrices", SIAM Journal on Scientific Computing, 2010 Publication	<1%
34	excamera.com Internet Source	<1%
35	Submitted to University of Oxford Student Paper	<1%
36	Schlicker, S.J.. "Young diagrammatic methods in the homology of groups", Journal of Pure and Applied Algebra, 19900515 Publication	<1%
37	es.scribd.com Internet Source	<1%

38

Internet Source

<1%

39

talk-it.biz

Internet Source

<1%

40

Brigitte Werners. "Grundlagen des Operations Research", Springer Nature America, Inc, 2013

Publication

<1%

41

H PAKARZADEH. "Numerical modelling of the pump-to-signal relative intensity noise transfer in two-pump fibre optical parametric amplifiers", Pramana, 08/20/2011

Publication

<1%

42

cgibin.erols.com

Internet Source

<1%

43

blog.binadarma.ac.id

Internet Source

<1%

44

krishikosh.egranth.ac.in

Internet Source

<1%

45

Ahuja, O.P.. "Connections between various subclasses of planar harmonic mappings involving hypergeometric functions", Applied Mathematics and Computation, 20080415

Publication

<1%

46

www.openvistas.net

Internet Source

<1%

47	Submitted to Sim University Student Paper	<1%
48	eprints.uny.ac.id Internet Source	<1%
49	www.coursehero.com Internet Source	<1%
50	ftp.san.ru Internet Source	<1%
51	www.docstoc.com Internet Source	<1%
52	www.glaspolerecords.com Internet Source	<1%
53	tastyspleen.net Internet Source	<1%
54	uad.portalgaruda.org Internet Source	<1%
55	www.archive.noao.edu Internet Source	<1%
56	mirror.nwc.is Internet Source	<1%
57	Tomislav Došlić, Dragutin Svrtnan, Darko Veljan. "Enumerative aspects of secondary structures", Discrete Mathematics, 2004 Publication	<1%

58	www.trasparenzaonline.info Internet Source	<1%
59	cage.rug.ac.be Internet Source	<1%
60	www.wipm.cas.cn Internet Source	<1%
61	www.barcelonagse.eu Internet Source	<1%
62	Suetake, C.. "The nonexistence of projective planes of order 12 with a collineation group of order 16", Journal of Combinatorial Theory, Series A, 200407 Publication	<1%
63	Carrasco. "Algebraic–Geometric Codes", Non-Binary Error Control Coding for Wireless Communication and Data Storage, 11/28/2008 Publication	<1%
64	Peter Kramer. Journal of Physics A Mathematical and General, 11/10/2000 Publication	<1%
65	www.lib.ncsu.edu Internet Source	<1%
66	Submitted to University of Edinburgh Student Paper	<1%

67

Internet Source

<1%

68

Daniel Andersson. "On Acyclicity of Games with Cycles", Lecture Notes in Computer Science, 2009

Publication

<1%

69

Submitted to Escuela Politecnica Nacional

Student Paper

<1%

70

kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp

Internet Source

<1%

71

Alberto Elduque. "On the Classification of Commutative Right-Nilalgebras of Dimension at Most Four", Communications in Algebra, 2007

Publication

<1%

72

baadalsg.inflibnet.ac.in

Internet Source

<1%

73

www.microelectr.com.hk

Internet Source

<1%

74

deposit.e-mengine.com

Internet Source

<1%

75

www.aveit.org

Internet Source

<1%

76

e-journal.uajy.ac.id

Internet Source

<1%

77	researchbank.rmit.edu.au Internet Source	<1%
78	game.perm.ru Internet Source	<1%
79	Del Piero, G.. "The chemistry and the stereochemistry of poly(n-alkyliminoalanes) ", Journal of Organometallic Chemistry, 19770419 Publication	<1%
80	webpage.pace.edu Internet Source	<1%
81	Submitted to Queensland Academy for Science, Maths and Technology Student Paper	<1%
82	pdfs.semanticscholar.org Internet Source	<1%
83	www.yourmedigap.net Internet Source	<1%
84	Submitted to Universiti Teknologi MARA Student Paper	<1%
85	Submitted to University of Leicester Student Paper	<1%
86	Hitchcock, Peter B., J. David Smith, and K. Mark Thomas. "Complexes of	<1%

organoaluminium compounds. Part IX. Crystal and molecular structure of hepta- μ^3 -methylimido-heptakis(methylaluminium) a cage compound in the series of oligomers $[R_1XYR_2]_n$, Journal of the Chemical Society Dalton Transactions, 1976.

Publication

87

d-nb.info

Internet Source

<1%

88

Xinzheng Xu, Dong Shan, Shan Li, Tongfeng Sun, Pengcheng Xiao, Jianping Fan. "Multi-label learning method based on ML-RBF and Laplacian ELM", Neurocomputing, 2018

Publication

<1%

89

202.206.100.222

Internet Source

<1%

90

Submitted to Loughborough University

Student Paper

<1%

91

repositorio.ufpe.br

Internet Source

<1%

92

www.borntodie.net

Internet Source

<1%

93

edoc.site

Internet Source

<1%

94

lib.uin-malang.ac.id

Internet Source

<1%

95	nickoramadis.blogspot.com Internet Source	<1%
96	www.srd.edu.sa Internet Source	<1%
97	www.bbk.ac.uk Internet Source	<1%
98	Submitted to Universidad Estatal a Distancia Student Paper	<1%
99	M. Bernardi. "Redshift-Distance Survey of Early-Type Galaxies. I. The ENEAR[CLC]c[/CLC] Cluster Sample", The Astronomical Journal, 06/2002 Publication	<1%
100	77.241.194.98 Internet Source	<1%
101	e6.ath.cx Internet Source	<1%
102	www.whitman.edu Internet Source	<1%
103	qmro.qmul.ac.uk Internet Source	<1%
104	"Comptes de gestion et bilans financiers afferents aux operations du budget de l'exercice 1975. Volume III-B: Section III	<1%

Commission. Annex I: Credits de recherches et d'investissement (Deuxieme partie du budget) = Management account and balance sheets relating to the implementation of the 1975 budget. Volume III-B: Section III Commission. Annex I: Research and investment credits (Second part of the budget)", , 2012.

Publication

105	dsc.ijs.si Internet Source	<1%
106	Yang, W.S.. "Discovering cohesive subgroups from social networks for targeted advertising", <i>Expert Systems With Applications</i> , 200804 Publication	<1%
107	aimos.ugm.ac.id Internet Source	<1%
108	learnmine.blogspot.com Internet Source	<1%
109	mosaic.math.tamu.edu Internet Source	<1%
110	web.cheapnet.it Internet Source	<1%
111	wims.math.ecnu.edu.cn Internet Source	<1%
112	Submitted to Institute of Graduate Studies,	<1%

- 113 www.academypublisher.com <1 %
Internet Source
-
- 114 Ya-Min Li, Dong-Mei Huang, Tsang, Li-Na Zhang. "Weighted fuzzy interpolative reasoning method", 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2005 <1 %
Publication
-
- 115 Cyril Mazaud, Jan Rendek, Vincent Bombardier, Laurent Wendling. "A feature selection method based on Choquet Integral and Typicality Analysis", 2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference, 2007 <1 %
Publication
-
- 116 padshaa.blogspot.com <1 %
Internet Source
-
- 117 eprints.unm.ac.id <1 %
Internet Source
-
- 118 Greco, S.. "Rough approximation of a preference relation by dominance relations", European Journal of Operational Research, 19990816 <1 %
Publication
-
- 119 www.xhedu.org <1 %
Internet Source
-

120	www.gawisp.com Internet Source	<1%
121	www.bpm.ds.mpg.de Internet Source	<1%
122	documents.mx Internet Source	<1%
123	Automatinis valdymas, 2012. Publication	<1%
124	Chatziioannou, Katerina, Antoine Klein, Nicolás Yunes, and Neil Cornish. "Gravitational waveforms for precessing, quasicircular compact binaries with multiple scale analysis: Small spin expansion", Physical Review D, 2013. Publication	<1%
125	314159.ru Internet Source	<1%
126	www.epbowls.co.za Internet Source	<1%
127	cs.octanum.info Internet Source	<1%
128	www.flm-trucks.com Internet Source	<1%
129	www.informatik.uni-freiburg.de Internet Source	<1%

130 www.mi.uni-koeln.de <1 %
Internet Source

131 gemarmatematika21.blogspot.com <1 %
Internet Source

132 faculty.swosu.edu <1 %
Internet Source

133 www.universityofcalicut.info <1 %
Internet Source

134 kupavskii.com <1 %
Internet Source

135 alps.ewha.ac.kr <1 %
Internet Source

136 www.scribd.com <1 %
Internet Source

137 repository.unhas.ac.id <1 %
Internet Source

138 Yves Nievergelt. "Scalar fused multiply-add instructions produce floating-point matrix arithmetic provably accurate to the penultimate digit", ACM Transactions on Mathematical Software, 3/1/2003 <1 %
Publication

139 rgmia.org <1 %
Internet Source

140	mesa.ece.wisc.edu Internet Source	<1%
141	www.kar.nic.in Internet Source	<1%
142	math.leidenuniv.nl Internet Source	<1%
143	Submitted to Chulalongkorn University Student Paper	<1%
144	ftp.csci.csusb.edu Internet Source	<1%
145	www.novatek.com.tw Internet Source	<1%
146	images.starcraftcz.com Internet Source	<1%
147	parthoris.circleofseven.net Internet Source	<1%
148	bh0.physics.ubc.ca Internet Source	<1%
149	link.springer.com Internet Source	<1%
150	www.okisemi.com Internet Source	<1%
151	file.upi.edu Internet Source	<1%

152	inspirit.net.in Internet Source	<1%
153	clements.umich.edu Internet Source	<1%
154	eprints.undip.ac.id Internet Source	<1%
155	L Karlitasari, D Suhartini, L Nurrosikawati. "Implementation of preference ranking organization method for enrichment evaluation () on selection system of student's achievement ", IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018 Publication	<1%
156	Lenz, D.. "Hierarchical structures in Sturmian dynamical systems", Theoretical Computer Science, 20030715 Publication	<1%
157	Lecture Notes in Computer Science, 2010. Publication	<1%
158	Ben Ayed, M.. "Blow-up and symmetry of sign-changing solutions to some critical elliptic equations", Journal of Differential Equations, 20061115 Publication	<1%
159	Galli, P.. "New empirical relationships between	

magnitude and distance for liquefaction",
Tectonophysics, 200009

Publication

<1%

160

A. S. Dzhumadil'daev. "Engel Theorem for
Novikov Algebras", Communications in
Algebra, 2/1/2006

Publication

<1%

161

Larkin, Brian R.. "Beyond Guadalupe: The
Eucharist, the Cult of Saints, and Local
Religion in Eighteenth-Century Mexico City.
(Essay)", The Catholic Historical Review

Publication

<1%

162

Eberhard Freitag. "The Burkhardt Group and
Modular Forms", Transformation Groups,
02/01/2004

Publication

<1%

Exclude quotes On

Exclude matches Off

Exclude bibliography On