View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Analisis Harga Pokok Produksi Rumah Pada

LAPORAN PENELITIAN
CLUSTER MADYA

UIN SUSKA RIAU

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

PENELITI :

Fitri Aryani, M.Sc

NIDN. 2013097702

Corry Corazon Marzuki, M.Si

NIDN. 2020038601

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

TAHUN 2017

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrobbil 'alamin ucap syukur ke hadirat Allah s.w.t, karena atas rahmat dan hidayahNyalah penelitian ini dapat diselesaikan. Semoga dengan adanya penelitian ini dapat menambah pengetahuan mahasiswa dibidang Aljabar, terutama bidang Matriks dan khususnya Invers Matriks. Penelitian ini adalah mengenai bagaimana menentukan bentuk umum dari suatu invers matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde $n \times n$.

Penelitian ini dilakukan dijurusan matematika Fakultas Sains dan teknologi UIN Suska Riau. Waktu penelitian dimulai dari bulan Juni sampai Desember 2017. Peneliti berharap hasil penelitian ini banyak dibaca dan digunakan oleh bidang lain yang berhubungan dengan bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus.

Peneliti menyadari bahwa belumlah lengkap dan sempurna baik isi, tulisan maupun gaya bahasa yang digunakan dalam penelitian ini tanpa kritikan dan saran dari pembaca.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada Pimpinan Rektorat UIN Suska Riau atas didanainya pembuatan penelitian ini, tidak lupa ucapan terimakasih kepada rekan-rekan dosen dilingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau terutama rekan-rekan Jurusan Matematika atas kritikan, masukkan-masukkan sehingga sangat membantu dalam penyelesaian Penelitian ini.

Pekanbaru, Desember 2017

Tim Peneliti

INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

ABSTRAK

Invers matriks merupakan hal yang penting dalam bidang ilmu matematika, terutama ilmu aljabar. Aplikasi dari Invers matriks banyak dipakai pada bidang yang lain selain aljabar, baik dibidang matematika maupun dibidang yang lain. Banyak metode dalam menentukan invers matriks, salah satunya metode adjoin. Metode adjoin merupakan metode yang sederhana dalam menentukan invers matriks. Penelitian ini bertujuan menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin. Dalam menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus, ada tiga langkah yang dikerjakan. Pertama, diperhatikan pola dari determinan matriks toeplitz bentuk khusus orde 1 x 1 sampai 20 x 20 sehingga didapat bentuk umumnya. Kedua, perhatikan pola matriks kofaktor orde 2 x 2 sampai 10x10 sehingga diperoleh bentuk umumnya. Dan terakhir, dengan menggunakan metode adjoin untuk mendapatkan bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus orde *n x n* .

Katakunci: Adjoin, Determinan, Invers Matriks, Matriks Kofaktor, Matriks Toeplitz

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika maupun ilmu terapannya.

Menurut Howard Anton dan Chris Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Salah satu jenis matriks adalah matriks toeplitz. Menurut Robert (2005), matriks toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan, dimana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. Bentuk umum dari matriks toeplitz adalah sebagai berikut.

$$T_n = \left(t_{ij}\right) \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & t_{(n-4)} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dimana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Pembahasan menarik dalam teori matriks adalah menentukan invers dari suatu matriks. Sebuah matriks memiliki invers jika matriks tersebut memiliki determinan tak nol. Beberapa metode yang digunakan dalam menghitung invers suatu matriks adalah Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Permasalahan dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks, semakin besar ukuran matriks akan semakin sulit untuk menentukan invers dari matriks tersebut, sehingga dibutuhkan formula yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Salah satu kegunaan invers dari suatu matriks adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak sekali kegunaannya dalam memudahkan pengambilan keputusan di berbagai bidang, seperti bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya.

Pada Tahun 1991, Kouachi telah melakukan penelitian mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal dengan entri-entri diagonalnya tidak konstan. Selanjutnya, pada Tahun 2005 Gray dan Robert juga melakukan penelitian mengenai teori matriks dengan judul "*Toeplitz and Circulant Matrices*".

Bakti Siregar dkk. juga membahas mengenai matriks toeplitz pada Tahun 2014 pada makalahnya yang berjudul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Di dalam makalah tersebut, dirumuskan formula invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini :

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Adapun hasil yang diperoleh pada makalah tersebut adalah sebagai berikut :

1. Rumus determinan matriks toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.2) adalah
$$\det(T_n) = (-1)^n (n-1) x^n$$
2. Rumus kofaktor-kofaktor yang terletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.2) adalah
$$K_{ij}T_n = \begin{cases} \det(T_n) & ;\text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1} x^{n-1} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$
3. Rumus invers dari matriks toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.2) adalah
$${T_n}^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-n-2}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa ada rumus khusus untuk menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers dari suatu matriks toeplitz yang bentuknya unik seperti Persamaan (1.2). Sehingga untuk menghitung determinan, matriks kofaktor dan inversnya tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit menggunakan metode-metode yang biasa digunakan, namun cukup dengan mensubstitusikan nilai *n* dan *x* yang ada pada matriks ke rumus-rumus di atas.

Pada tahun 2015, penulis juga telah melakukan penelitian mengenai invers matriks toeplitz tridiagonal. Menurut Salkuyeh (2006), suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

dengan $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Pada penelitian itu, penulis telah mendapatkan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal pada Persamaan (1.3).

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang sudah dipaparkan di atas, belum ditemukan rumus umum untuk determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus berikut :

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0 \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membuat formulasi/rumus umum untuk menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz tersebut menggunakan metode adjoin. Dengan keunikan bentuk matriks toeplitz ini, penulis menduga adanya sifat-sifat khusus pada matriks ini sehingga didapatkan rumus determinan, matriks kofaktor, dan invers yang lebih sederhana dibandingkan matriks secara umum.

Dengan adanya rumus tersebut, diharapkan dapat memudahkan kita dalam menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus yang ada pada Persamaan (1.4). Sehingga hal ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah "menentukan rumus determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus yang ada pada Persamaan (1.4) secara umum menggunakan metode adjoin".

1.3 Batasan Masalah

Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik maka penulis membatasi masalah pada penelitian ini, yaitu :

1. Matriks yang dibahas berorde $n \geq 1$.
2. Mencari determinan menggunakan ekspansi kofaktor.

1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk mendapatkan rumus umum determinan dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus pada Persamaan (1.4) menggunakan metode ekspansi kofaktor.
2. Untuk mendapatkan rumus umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz dengan bentuk khusus pada Persamaan (1.4) menggunakan metode minor-kofaktor.
3. Untuk mendapatkan rumus umum invers dari matriks toeplitz pada dengan bentuk khusus Persamaan (1.4) menggunakan metode adjoin.

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Rumus umum yang diperoleh pada penelitian ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks, terutama dalam menentukan determinan, matriks

kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (1.4).

2. Memberikan kontribusi penelitian di bidang matematika terutama bidang aljabar mengenai determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks.
3. Menghasilkan penelitian baru yang bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks, determinan, invers matriks, determinan matriks toeplitz, matriks kofaktor, dan invers matriks toeplitz, serta induksi matematika.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis matriks

Definisi 2.1. (Ruminta, 2009) Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis di antara dua tanda kurung, yaitu ( ) atau [ ]. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan : $a_{ij} =$ elemen atau unsur matriks

$i = 1,2,3, \dots m,$ indeks baris

$j = 1,2,3, \dots n,$ indeks kolom

Terdapat banyak jenis-jenis matriks, diantaranya matriks bujur sangkar dan matriks toeplitz. Berikut diberikan definisi yang menyatakan kedua jenis matriks tersebut.

Definisi 2.2. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar orde $n,$ dan entri $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.1) yang diberi arsiran merupakan diagonal utama dari matriks $A.$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Definisi 2.3. (Robert, 2005) Sebuah matriks toeplitz adalah matrik berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \ldots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Berikut diberikan definisi dari determinan suatu matriks dan metode yang dapat digunakan untuk menentukan determinan tersebut.

2.2 Determinan

Definisi 2.6. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlahdari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A.

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu :

1. Metode Sarrus
2. Metode Minor dan Kofaktor
3. Metode CHIO
4. Metode Eliminasi Gauss
5. Metode Dekomposisi Matriks.

Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode minor dan kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2.7. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekpansi kofaktor dalam teorema berikut:

Teorema 2.1. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks$A, n \times n,$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$
(*ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j*)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
(*ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i*)

Suatu matriks akan mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tak nol. Berikut akan didefinisikan invers dari matriks.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.8. (Ruminta, 2009) Jika A adalah matriks ukuran $n \times n$ dan jika ada matriks B ukuran $n \times n$ sedemikian sehingga :

$$AB = BA = I$$

dengan I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, maka matriks A disebut non singular atau *invertibel* dan matriks A merupakan invers dari B atau B merupakan invers dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU.

Berdasarkan metode-metode tersebut penulis hanya menggunakan metode adjoin dalam mencari invers suatu matriks.

Definisi 2.9. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika Aadalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor daria_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matrik ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj\ (A)$.

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A mempunyai invers. Hal tersebut dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 2.2. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks kuadrat A dapat dibalik jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2.3. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti :

$$A\ adj(A) = \det(A)\, I$$

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari hasilkali $A\ adj(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \qquad (2.3)$$

Jika $i = j$, maka Persamaan (2.3) adalah ekspansi kofaktor dari$det(A)$ sepanjang baris ke-$i$dari Teorema 1 dan jika$i \neq j$, maka semua $a$dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari$A$ sehingga nilai dari Persamaan(2.3) adalah nol. Oleh karena itu

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I \qquad (2.4)$$

karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, sehingga Persamaan (2.4) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\frac{1}{\det(A)}[A\ adj(A)] = I \text{ atau } A\left[\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Ada beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian – penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah Bakti Siregar dkk (2014) dan Fitri Aryani dkk (2015). Berikut diberikan penjelasannya.

2.4 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz

Matriks toeplitz yang dibahas oleh Bakti Siregar, dkk pada tahun 2014 adalah matriks toeplitz T_n seperti Persamaan (1.2). Mereka telah mendapatkan rumus umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tersebut. Hasil penelitiannya disajikan dalam Teorema 2.4, Teorema 2.5 dan Teorema 2.6 berikut.

Teorema 2.4. (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks T_n adalah

$$|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$$

Teorema 2.5. (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka kofaktor-kofaktor matriks Toeplitz T_n adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} |T_{n-1}|, & untuk\ i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1}, & untuk\ i \neq j \end{cases}$$

di mana $K_{ij}T_n$ kofaktor-kofaktor yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j.

Teorema 2.6. **(Bakti Siregar, dkk, 2014)** Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $|T_n| \neq 0$ maka invers matriks topelitz T_n adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x}, & untuk\ i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x}, & untuk\ i \neq j \end{cases}$$

t_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke- i dan kolom ke- j.

2.5 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal

Pada tahun 2015, penulis telah mendapatkan rumus umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal. Menurut Salkuyeh (2006), suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

dengan $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Bentuk umum dari determinan matriks toeplitz tridiagonal dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 2.7 Diberikan A_n suatu metrik toeplitz tridiagonal berorde $n \geq 3$ pada persamaan (1.3) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$
\begin{aligned}
|A_n| = {} & b^n - (n-1)ab^{n-2}c + \sum_{i=1}^{n-3} i a^2 b^{n-4} c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{n-5} i \right) a^3 b^{n-6} c^3 \\
& + \left[\frac{(n-7)}{1!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-8)}{1!} \sum_{i=1}^{2} i + \frac{(n-9)}{1!} \sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-7} i \right] a^4 b^{n-8} c^4 \\
& - \left[\frac{(n-9)(n-8)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-10)(n-9)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-9} i \right] a^5 b^{n-10} c^5 \\
& + \left[\frac{(n-11)(n-10)(n-9)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-12)(n-11)(n-10)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-11} i \right] \\
& a^6 b^{n-12} c^6 \\
& - \left[\frac{(n-13)(n-12)(n-11)(n-10)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-14)(n-13)(n-12)(n-11)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-13} i \right] \\
& a^7 b^{n-14} c^7 + \cdots
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, didapatkan bentuk umum dari kofaktor matriks toeplitz tridiagonal sebagaimana dituangkan pada teorema berikut.

Teorema 2.8 Diberikan A_n suatu metrik toeplitz tridiagonal berorde $n \geq 3$ pada persamaan (1.3) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:

$$
C_n = \begin{bmatrix}
(-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\
(-1)^3\, c\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1||A_{n-2}| & (-1)^5\, a\,|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}\, a^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\,|A_1| \\
(-1)^4\, c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5\, c\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}\, a^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\,|A_2| \\
(-1)^5\, c^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6\, c^2\,|A_2||A_{n-4}| & (-1)^7\, c\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}\, a^{n-5}\,|A_1||A_3| & (-1)^{n+4}\, a^{n-4}\,|A_3| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(-1)^n\, c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\, c^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}\, c^{n-4}\,|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2}\, a\,|A_{n-2}| \\
(-1)^{n+1}\, c^{n-1} & (-1)^{n+2}\, c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\, c^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}\, c\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\, c\,|A_{n-1}|
\end{bmatrix}
$$

Dari matriks kofaktor di atas, akan ditentukan adjoin dari matriks kofaktor tersebut. Adjoin matriks kofaktor ditentukan dengan cara mentransposkan matriks kofaktor tersebut, yaitu memindahkan entri pada baris menjadi entri pada kolom atau memindahkan entri pada kolom menjadi entri pada baris, seperti berikut:

$$Adj(A_n)=\begin{bmatrix}
(-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3\,c\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5\,c^3\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^n\,c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\,c^{n-1} \\
(-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1||A_{n-2}| & (-1)^5\,c\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6\,c^2\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+1}\,c^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}\,c^{n-2}\,|A_1| \\
(-1)^4 a\,|A_{n-3}| & (-1)^5\,a\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2||A_{n-3}| & (-1)^7\,c\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+2}\,c^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3}\,c^{n-3}\,|A_2| \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\,a^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}\,a^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3}\,a^{n-5}\,|A_1||A_3| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-1}\,c\,|A_{n-2}| \\
(-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2}\,a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\,a^{n-3}\,|A_2| & (-1)^{n+4}\,a^{n-4}\,|A_3| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,a\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,c\,|A_{n-1}|
\end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita akan mensubstitusi bentuk umum dari semua persamaan di atas ke dalam persamaan umum invers matriks, yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,adj(A)$$

atau

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|}\,adj(A_n)$$

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi dari induksi matematika.

Definisi 2.10. (Sukirman, 2006) Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $\mathrm{p}(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $\mathrm{p}(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(k+1)$ juga benar.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus sebagai berikut :

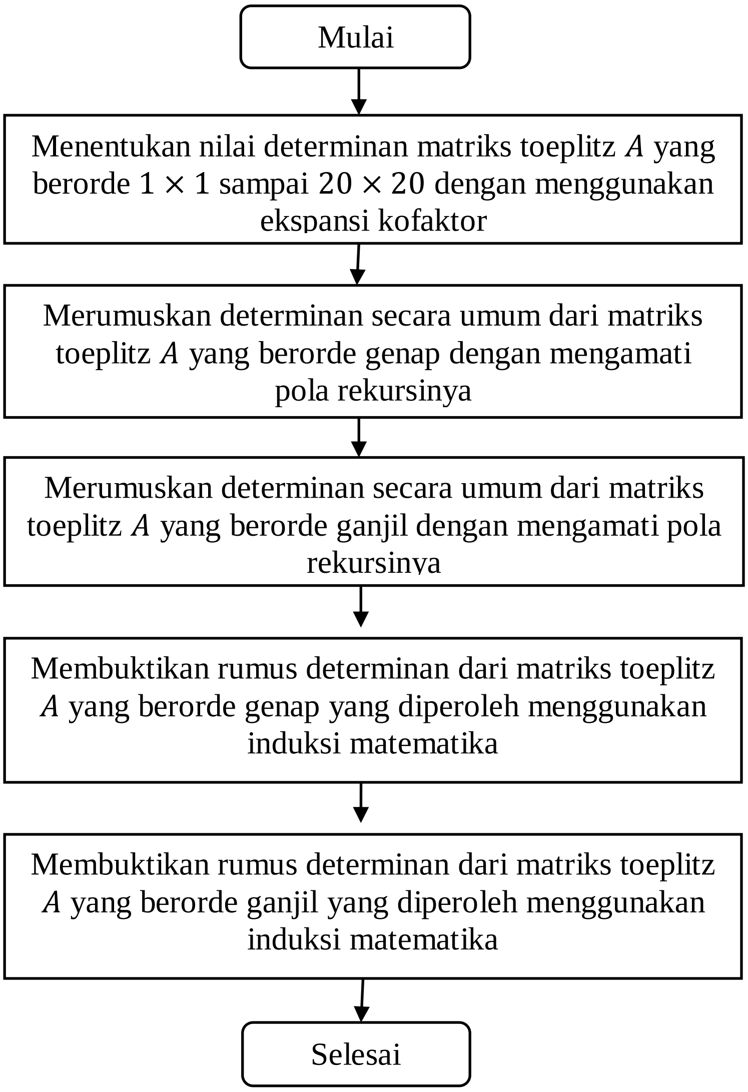
$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

   dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

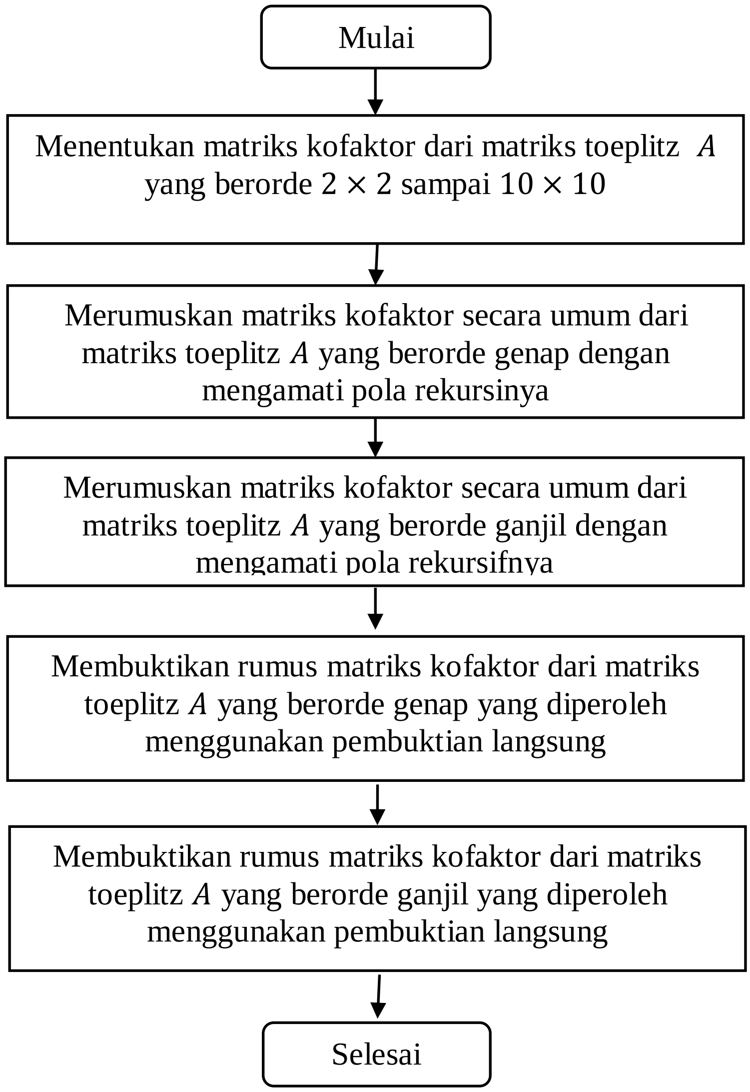
2. Menentukan nilai determinan dari matriks toeplitz A yang berorde 1×1 sampai 20×20 dengan menggunakan ekspansi kofaktor.
3. Menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz A yang berorde 2×2 sampai 10×10 dengan menggunakan minor-kofaktor
4. Menentukan invers dari matriks toeplitz A yang berorde 2×2 sampai 10×10 dengan menggunakan metode adjoin.
5. Merumuskan determinan, matriks kofaktor dan invers secara umum dari matriks toeplitz A yang berorde genap dengan mengamati pola rekursifnya.
6. Merumuskan determinan, matriks kofaktor dan invers secara umum dari matriks toeplitz A yang berorde ganjil dengan mengamati pola rekursifnya.
7. Membuktikan rumus determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz A yang berorde genap yang diperoleh menggunakan induksi matematika.
8. Membuktikan rumus determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz A yang berorde ganjil yang diperoleh menggunakan induksi matematika.

Langkah-langkah pada metodologi penelitian diatas dapat digambarkan secara detail dalam *Flow chart* berikut:

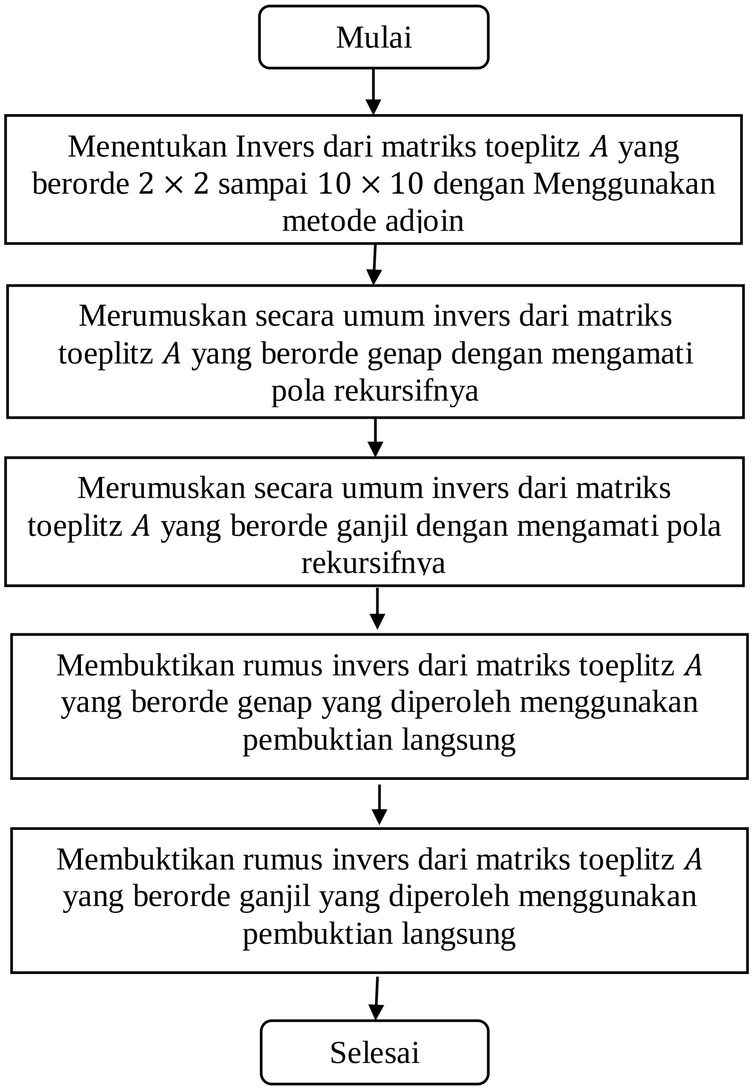
3.1 Langkah – langkah untuk menentukan determinan matriks toeplitz bentuk khusus sebagai berikut:



3.2 Langkah – langkah untuk menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus sebagai berikut:



3.3 Langkah – langkah untuk menentukan invers matriks dari matriks toeplitz bentuk khusus sebagai berikut:



BAB IV
DETERMINAN MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

Penelitian ini akan membuktikan tiga persamaan umum dalam menentukan invers matriks torplitz bentuk khusus. Persamaan pertama adalah menentukan determinan dari matriks toeplitz bentuk khusus. Persamaan kedua adalah menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus, dan persamaan terakhir adalah menentukan invers dari matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin.

4.1 Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 20×20

Berikut proses dalam menentukan persamaan umum dari matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Dalam prosesnya pertama kali kita menentukan nilai determinan matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 2×2 sampai 15×15, yang disajikan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 2×2 adalah

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

2. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 3×3 adalah

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 \,.$$

3. Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 4×4 adalah

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0.$$

dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

4. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus sesuai persamaan (1.4) berorde 5×5 adalah

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 6×6 adalah

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_6| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

6. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 7×7 adalah

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_7| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1$$

7. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 8×8 adalah

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_8| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 9×9 adalah

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{ dengan } a \neq 0.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_9| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

9. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 10×10 adalah

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{10}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1.$$

10. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 11×11 adalah

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$= 0.$

11. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 12×12 adalah

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$. Dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.$$

12. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 13×13 adalah

$|A_{13}|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

13. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 14×14 adalah

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{14}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

14. Diberikan matriks teoplitz bentuk khusus berorde 15×15 adalah

$$A_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0$, dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{15}| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1$$

Berikut diberikan nilai determinan dari matriks teoplitz bentuk khusus yang berorde 2×2 sampai orde 20×20.

$$|A_2| = 0$$

$$|A_3| = -1$$

$$|A_4| = -1$$

$$|A_5| = 0$$

$$|A_6| = 1$$

$$|A_7| = 1$$

$$|A_8| = 0$$

$$|A_9| = -1$$

$$|A_{10}| = -1$$
$$|A_{11}| = 0$$
$$|A_{12}| = 1$$
$$|A_{13}| = 1$$
$$|A_{14}| = 0$$
$$|A_{15}| = -1$$
$$|A_{16}| = -1$$
$$|A_{17}| = 0$$
$$|A_{18}| = 1$$
$$|A_{19}| = 1$$
$$|A_{20}| = 0$$

4.2 Bentuk Umum Determinan Matriks Teoplitz Bentuk Khusus Orde $n \; x \; n$

Setelah kita mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks teoplitz bentuk khusus yang berorde $2 \; x \; 2$ sampai $20 \; x \; 20$, maka akan dibuatkan bentuk umum dari determinan matriks teoplitz bentuk khusus tersebut. Terlihat dalam Teorema 4.1 berikut.

Teorema 4.1. Diberikan A_n suatu matriks teoplitz bentuk khusus berorde $n \geq 1$ pada Persamaan (1.4) dengan $a \neq 0$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\, n \equiv\ 6\ (mod\ 2)\ atau\, n =\ 6\ (mod\ 5) \\ 1 & jika\, n \equiv\ 6\ (mod\ 0)\ atau\, n =\ 6\ (mod\ 1) \\ -1 & jika\, n \equiv\ 6\ (mod\ 3)\ atau\, n =\ 6\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Bukti:

Pembuktian teorema tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

(1) Basis induksi. Akan ditunjukkan $p(1)$ dan $p(2)$ benar.

Perhatikan bahwa :

$|A_1| = |1| = 1$ dan $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0$. Jadi terbukti bahwa $p(1)$ dan $p(2)$ benar.

(2) Langkah induksi. Asumsikan $p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge \ldots \wedge p(k)$ benar. Maka akan dibuktikan $p(k+1)$ benar.

a. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 1)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \ldots, |A_{k-1}| = 1$, $|A_k| = 1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 1 - 1 = 0$$

b. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 4)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \ldots, |A_{k-1}| = -1$, $|A_k| = -1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = -1 - (-1) = 0$$

c. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 5)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = -1$, $|A_k| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 0 - (-1) = 1$$

d. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 0)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = 0$, $|A_k| = 1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 1 - 0 = 1$$

e. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 2)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = 1$, $|A_k| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 0 - 1 = -1$$

f. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 3)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \dots, |A_{k-1}| = 0$, $|A_k| = -1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = -1 - 0 = -1. \qquad \blacksquare$$

BAB V

MATRIKS KOFAKTOR DARI

MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

Matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus diperoleh dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Menentukan matriks kofaktor diketahui dengan menggunakan persamaan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Berikut diberikan proses untuk mendapatkan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus.

5.1 Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde $2 \ x \ 2$ sampai $10 \ x \ 10$

1. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde $2 \ x \ 2$, yaitu; $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{bmatrix}$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = (-1)^2 0 = 1 = |A_1|$

$C_{12} = (-1)^3 \ a = -a$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = (-1)^3 \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a} = -a^{-1}$

$C_{22} = (-1)^4 0 = 1 = |A_1|$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah

$$C_2 = \begin{bmatrix} |A_1| & -a \\ -1/a & |A_1| \end{bmatrix}$$

2. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde $3 \ x \ 3$, yaitu;

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 = |A_2|$

$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a = -1|A_1|$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a} = -a^{-1}|A_1|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_1||A_1|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ 0 & a \end{vmatrix} = -a = -a|A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 \\ 1 & 1/a \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a|A_2| = a^{-1}|A_2|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0 = |A_2|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah

$$C_3 = \begin{bmatrix} |A_2| & -a|A_1| & a^2 \\ -a^{-1}|A_1| & |A_1||A_1| & -a|A_1| \\ a^{-2} & -a^{-1}|A_1| & |A_2| \end{bmatrix}$$

3. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde $4 \ x \ 4$, yaitu

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_3|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a.0 = -a|A_2|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3$$

Selanjutnya entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_2| = -a^{-1}|A_2|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1.0 = |A_1||A_2|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_1|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1| = a^{-2}|A_1|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_1| = -a^{-1}|A_1||A_1|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.0 = |A_1||A_2|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_2|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3 = -a^{-3}$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1| = a^{-2}|A_1|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a|A_2| = -a^{-1}|A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 \\ a & 1 & 1/a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_3|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor C_4 adalah

$$C_4 = \begin{bmatrix} |A_3| & -a|A_2| & a^2|A_1| & -a^3 \\ -a^{-1}|A_2| & |A_1||A_2| & -a|A_1||A_1| & a^2|A_1| \\ a^{-2}|A_1| & -a^{-1}|A_1||A_1| & |A_1||A_2| & -a|A_2| \\ -a^{-3} & a^{-2}|A_1| & -a^{-1}|A_2| & |A_4| \end{bmatrix}$$

4. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde $5\ x\ 5$ yaitu :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_4|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_3|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_2|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_1|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_3| = -a^{-1}|A_3|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1|A_3| = |A_1||A_3|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_2|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_1|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_2| = a^{-2}|A_2|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_2| = -a^{-1}|A_1||A_2|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2||A_2|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_2|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1| = -a^{-3}|A_1|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_1| = a^{-2}|A_1||A_1|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_2| = -a^{-1}|A_1||A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.-1 = |A_1||A_2|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_3|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4 = a^{-4}$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1| = -a^{-3}|A_1|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2|A_2| = a^{-2}|A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a|A_3| = -a^{-1}|A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 = |A_4|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya C_5 adalah

$$C_5 = \begin{bmatrix} |A_4| & -a|A_3| & a^2|A_2| & -a^3|A_1| & a^4 \\ -a^{-1}|A_3| & |A_1||A_3| & -a|A_1||A_2| & a^2|A_1||A_1| & -a^3|A_1| \\ a^{-2}|A_2| & -a^{-1}|A_1||A_2| & |A_2||A_2| & -a|A_1||A_2| & a^2|A_2| \\ -a^{-3}|A_1| & a^{-2}|A_1||A_1| & -a^{-1}|A_1||A_2| & |A_1||A_2| & -a|A_3| \\ a^{-4} & -a^{-3}|A_1| & a^{-2}|A_2| & -a^{-1}|A_3| & |A_4| \end{bmatrix}$$

5. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 6 x 6, yaitu :

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 = |A_5|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_4|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_3|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_2|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5$$

Selanjutnya untuk entri matiks kofaktor baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_4| = -a^{-1}|A_4|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1.-1 = |A_1||A_4|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_3|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_2|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_1||A_1|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4|A_1|$$

Selanjutnya untuk entri matriks kofaktor baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_3| = a^{-2}|A_3|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a|A_1||A_3| = a^{-1}|A_1||A_3|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2||A_3|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2||A_2|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_2|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_2|$$

Selanjutnya untuk matriks kofaktor baris ke 4

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_2| = -a^{-3}|A_2|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_2| = a^{-2}|A_1||A_2|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_2||A_2| = -a^{-2}|A_1||A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_3||A_2|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_3|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_3|$$

Selanjutnya untuk matrik kofaktor baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1| = a^{-4}|A_1|$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1||A_1| = -a^{-3}|A_1||A_1|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_2| = a^{-2}|A_1||A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_3| = -a^{-1}|A_1||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.1 = |A_4||A_1|$$

$$C_{56} = (-1)^{11}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_4|$$

Selanjutnya untuk matriks kofaktor baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^{7}\begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^5 = -a^{-5}$$

$$C_{62} = (-1)^{8}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4|A_1| = a^{-4}|A_1|$$

$$C_{63} = (-1)^{9}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3|A_2| = -a^{-3}|A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2|A_3| = a^{-2}|A_3|$$

$$C_{65} = (-1)^{11}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a|A_4| = -a^{-1}|A_4|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_5|$$

Sehingga diperoleh untuk matriks kofaktor dari A_6 adalah

$$C_6 = \begin{bmatrix} |A_5| & -a|A_4| & a^2|A_3| & -a^3|A_2| & a^4|A_1| & -a^5 \\ -a^{-1}|A_4| & |A_1||A_4| & -a|A_1||A_3| & a^2|A_1||A_2| & -a^3|A_1||A_1| & a^4|A_1| \\ a^{-2}|A_3| & -a^{-1}|A_1||A_3| & |A_2||A_3| & -a|A_2||A_2| & a^2|A_1||A_2| & -a^3|A_2| \\ -a^{-3}|A_2| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-1}|A_2||A_2| & |A_3||A_2| & -a|A_1||A_3| & a^2|A_3| \\ a^{-4}|A_1| & -a^{-3}|A_1||A_1| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_3| & |A_4||A_1| & -a|A_4| \\ -a^{-5} & a^{-4}|A_1| & -a^{-3}|A_2| & a^{-2}|A_3| & -a^{-1}|A_4| & |A_5| \end{bmatrix}$$

6. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_7, yaitu:

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_6|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_5|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_4|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_3|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_2|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^5|A_1|$$

$$C_{17} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^6$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_5| = -a^{-1}|A_5|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1.|A_5| = |A_1||A_5|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_4|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_3|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_1||A_2|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1||A_1|$$

$$C_{27} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5|A_1|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_4| = a^{-2}|A_4|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_3| = -a^{-1}|A_1||A_3|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2||A_4|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2||A_3|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_2||A_2|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_2||A_1|$$

$$C_{37} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4|A_2|$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_3| = -a^{-3}|A_3|$$

$$C_{42} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_3| = a^{-2}|A_1||A_3|$$

$$C_{43} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^{-1}|A_2||A_3|$$

$$C_{44} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_3||A_3|$$

$$C_{45} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_3||A_2|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_3|$$

$$C_{47} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_3|$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4|A_2| = a^{-4}|A_2|$$

$$C_{52} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1||A_2| = -a^{-3}|A_1||A_2|$$

$$C_{53} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_2||A_2| = a^{-2}|A_2||A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_2||A_3| = -a^{-1}|A_2||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_4||A_2|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_4||A_1|$$

$$C_{57} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_4|$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^5|A_1| = a^{-5}|A_1|$$

$$C_{62} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4|A_1||A_1| = a^{-4}|A_1||A_1|$$

$$C_{63} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1||A_2| = -a^{-3}|A_1||A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_3| = a^{-2}|A_1||A_3|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_4| = -a^{-1}|A_1||A_4|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |A_5||A_1|$$

$$C_{67} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_5|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$$

$$C_{72} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^5|A_1| = -a^{-5}|A_1|$$

$$C_{73} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^4|A_2| = a^{-4}|A_2|$$

$$C_{74} = (-1)^{11}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \end{vmatrix} = -1/a^3|A_3| = -a^{-3}|A_3|$$

$$C_{75} = (-1)^{12}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \end{vmatrix} = 1/a^2|A_4| = a^{-2}|A_4|$$

$$C_{76} = (-1)^{13}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \end{vmatrix} = -1/a|A_5|$$

$$C_{77} = (-1)^{14}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_6|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_7 adalah

$$C_7 = \begin{bmatrix} |A_6| & -a|A_5| & a^2|A_4| & -a^3|A_3| & a^4|A_2| & -a^5|A_1| & a^6 \\ -a^{-1}|A_5| & |A_1||A_5| & -a|A_1||A_4| & a^2|A_1||A_3| & -a^3|A_1||A_2| & a^4|A_1||A_1| & -a^5|A_1| \\ a^{-2}|A_4| & -a^{-1}|A_1||A_4| & |A_2||A_4| & -a|A_2||A_3| & a^2|A_2||A_2| & -a^3|A_1||A_2| & a^4|A_2| \\ -a^{-3}|A_3| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-1}|A_2||A_3| & |A_3||A_3| & -a|A_2||A_3| & a^2|A_1||A_3| & -a^3|A_3| \\ a^{-4}|A_2| & -a^{-3}|A_1||A_2| & a^{-2}|A_2||A_2| & -a^{-1}|A_2||A_3| & |A_4||A_2| & -a|A_4||A_1| & a^2|A_4| \\ -a^{-5}|A_1| & a^{-4}|A_1||A_1| & -a^{-3}|A_1||A_2| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-1}|A_1||A_4| & |A_5||A_1| & -a|A_5| \\ a^{-6} & -a^{-5}|A_1| & a^{-4}|A_2| & -a^{-3}|A_3| & a^{-2}|A_4| & -a^{-1}|A_5| & |A_6| \end{bmatrix}$$

7. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_8, dengan proses sebagai berikut:

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 = |A_7|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_6|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_5|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_4|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_3|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^5|A_2|$$

$$C_{17} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^6|A_1|$$

$$C_{18} = (-1)^9 \begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^7$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_6| = -a^{-1}|A_6|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1|A_6| = |A_1||A_6|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_1||A_5|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_4|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_1||A_3|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_1||A_2|$$

$$C_{27} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^5|A_1||A_1|$$

$$C_{28} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^6|A_1|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_5| = a^{-2}|A_5|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_5| = -a^{-1}|A_1||A_5|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_2||A_5|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_2||A_4|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_2||A_3|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_2||A_2|$$

$$C_{37} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^4|A_2||A_1|$$

$$C_{38} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^5|A_2|$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_4| = -a^{-3}|A_4|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_1||A_4| = a^{-2}|A_1||A_4|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_2||A_4|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_3||A_4|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_3||A_3|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_3||A_2|$$

$$C_{47} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^3|A_3||A_1|$$

$$C_{48} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4|A_3|$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^4|A_3| = a^{-4}|A_3|$$

$$C_{52} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^3|A_1||A_3| = -a^{-3}|A_1||A_3|$$

$$C_{53} = (-1)^{8}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^2|A_2||A_3| = a^{-2}|A_2||A_3|$$

$$C_{54} = (-1)^{9}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_3||A_3| = -a^{-1}|A_3||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_4||A_3|$$

$$C_{56} = (-1)^{11}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a|A_4||A_2|$$

$$C_{57} = (-1)^{12}\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2|A_4||A_1|$$

$$C_{58}=(-1)^{13}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=-a^3|A_4|$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61}=(-1)^{7}\begin{vmatrix}1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\end{vmatrix}=-1/a^5|A_2|=-a^{-5}|A_2|$$

$$C_{62}=(-1)^{8}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\end{vmatrix}=1/a^4|A_1||A_2|=a^{-4}|A_1||A_2|$$

$$C_{63}=(-1)^{9}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\end{vmatrix}=-1/a^3|A_2||A_2|=-a^{-3}|A_2||A_2|$$

$$C_{64}=(-1)^{10}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\end{vmatrix}=1/a^2|A_3||A_2|=a^{-2}|A_3||A_2|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_4||A_2|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = |A_5||A_2|$$

$$C_{67} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a|A_5||A_1|$$

$$C_{68} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_5|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^6|A_1| = a^{-6}|A_1|$$

$$C_{72} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^{5}|A_1||A_1| = -a^{-5}|A_1||A_1|$$

$$C_{73} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^{4}|A_1||A_2| = a^{-4}|A_1||A_2|$$

$$C_{74} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a^{3}|A_1||A_3| = -a^{-3}|A_1||A_3|$$

$$C_{75} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1/a^{2}|A_1||A_4| = a^{-2}|A_1||A_4|$$

$$C_{76} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1/a|A_1||A_5| = -a^{-1}|A_1||A_5|$$

$$C_{77}=(-1)^{14}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=|A_1||A_6|$$

$$C_{78}=(-1)^{15}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=-a|A_6|$$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$$C_{81}=(-1)^{9}\begin{vmatrix}1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\end{vmatrix}=-\frac{1}{a^7}=-a^{-7}$$

$$C_{82}=(-1)^{10}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\end{vmatrix}=1/a^6|A_1|=a^{-6}|A_1|$$

$$C_{83}=(-1)^{11}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\end{vmatrix}=1/a^5|A_2|=a^{-5}|A_2|$$

$$C_{84} = (-1)^{12}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\end{vmatrix} = 1/a^4|A_3| = a^{-4}|A_3|$$

$$C_{85} = (-1)^{13}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\end{vmatrix} = -1/a^3|A_4| = -a^{-3}|A_4|$$

$$C_{86} = (-1)^{14}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/a\end{vmatrix} = 1/a^2|A_5| = a^{-2}|A_5|$$

$$C_{87} = (-1)^{15}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1/a\end{vmatrix} = -1/a|A_6| = -a^{-1}|A_6|$$

$$C_{88} = (-1)^{14}\begin{vmatrix}1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1\end{vmatrix} = 1 = |A_7|$$

Berdasarkan hasil dari matriks kofaktor-kofaktor yang didapat dari matriks A_8 baris pertama sampai baris kedelapan, maka dapat dibuat dalam suatu matrik kofaktor, yaitu

$$C_8 = \begin{bmatrix} |A_7| & -a|A_6| & a^2|A_5| & -a^3|A_4| & a^4|A_3| & -a^5|A_2| & a^6|A_1| & -a^7 \\ -a^{-1}|A_6| & |A_1||A_6| & -a|A_1||A_5| & a^2|A_1||A_4| & -a^3|A_1||A_3| & a^4|A_1||A_2| & -a^5|A_1||A_1| & a^6|A_1| \\ a^{-2}|A_5| & -a^{-1}|A_1||A_5| & |A_2||A_5| & -a|A_2||A_4| & a^2|A_2||A_3| & -a^3|A_2||A_2| & a^4|A_2||A_1| & -a^5|A_2| \\ -a^{-3}|A_4| & a^{-2}|A_1||A_4| & -a^{-1}|A_2||A_4| & |A_3||A_4| & -a|A_3||A_3| & a^2|A_3||A_2| & -a^3|A_3||A_1| & a^4|A_3| \\ a^{-4}|A_3| & -a^{-3}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_2||A_3| & -a^{-1}|A_3||A_3| & |A_4||A_3| & -a|A_4||A_2| & a^2|A_4||A_1| & -a^3|A_4| \\ -a^{-5}|A_2| & a^{-4}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_2||A_2| & a^{-2}|A_3||A_2| & -a^{-1}|A_4||A_2| & |A_5||A_2| & -a|A_5||A_1| & a^2|A_5| \\ a^{-6}|A_1| & -a^{-5}|A_1||A_1| & a^{-4}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_1||A_4| & -a^{-1}|A_1||A_5| & |A_6||A_1| & -a|A_6| \\ -a^{-7} & a^{-6}|A_1| & -a^{-5}|A_2| & a^{-4}|A_3| & -a^{-3}|A_4| & a^{-2}|A_5| & -a^{-1}|A_6| & |A_7| \end{bmatrix}$$

8. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_9, dengan proses sebagai berikut:

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = 0 = |A_8|$ $\quad C_{12} = -a|A_7|$ $\quad C_{13} = a^2|A_6|$

$C_{14} = -a^3|A_5|$ $\quad C_{15} = a^4|A_4|$ $\quad C_{16} = -a^5|A_3|$

$C_{17} = a^6|A_2|$ $\quad C_{18} = -a^7|A_1|$ $\quad C_{19} = a^8$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = -1/a|A_7|$ $\quad C_{22} = |A_1||A_7|$ $\quad C_{23} = -a|A_1||A_6|$

$C_{24} = a^2|A_1||A_5|$ $\quad C_{25} = -a^3|A_1||A_4|$ $\quad C_{26} = a^4|A_1||A_3|$

$C_{27} = -a^5|A_1||A_2|$ $\quad C_{28} = a^6|A_1||A_1|$ $\quad C_{29} = -a^7|A_1|$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$C_{31} = 1/a^2|A_6|$ $\quad C_{32} = -1/a|A_1||A_6|$ $\quad C_{33} = |A_2||A_6|$

$C_{34} = -a|A_2||A_5|$ $\quad C_{35} = a^2|A_2||A_4|$ $\quad C_{36} = -a^3|A_2||A_3|$

$C_{37} = a^4|A_2||A_2|$ $\quad C_{38} = -a^5|A_2||A_1|$ $\quad C_{39} = a^6|A_2|$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$C_{41} = -1/a^3|A_5|$ $\quad C_{42} = 1/a^2|A_1||A_5|$ $\quad C_{43} = -1/a|A_2||A_5|$

$C_{44} = |A_3||A_5|$ $\quad C_{45} = -a|A_3||A_4|$ $\quad C_{46} = a^2|A_3||A_3|$

$C_{47} = -a^3|A_3||A_2|$ $\quad C_{48} = a^4|A_3||A_1|$ $\quad C_{49} = -a^5|A_3|$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$C_{51} = 1/a^4|A_4|$ $C_{52} = -1/a^3|A_1||A_4|$ $C_{53} = 1/a^2|A_2||A_4|$

$C_{54} = -1/a|A_3||A_4|$ $C_{55} = |A_4||A_4|$ $C_{56} = -a|A_4||A_3|$

$C_{57} = a^2|A_4||A_2|$ $C_{58} = -a^3|A_4||A_1|$ $C_{59} = -a^4|A_4|$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$C_{61} = -1/a^5|A_3|$ $C_{62} = 1/a^4|A_1||A_3|$ $C_{63} = -1/a^3|A_2||A_3|$

$C_{64} = 1/a^2|A_3||A_3|$ $C_{65} = -1/a|A_4||A_3|$ $C_{66} = |A_5||A_3|$

$C_{67} = -a|A_5||A_2|$ $C_{68} = a^2|A_5||A_1|$ $C_{69} = -a^3|A_5|$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh

$C_{71} = 1/a^6|A_2|$ $C_{72} = -1/a^5|A_1||A_2|$ $C_{73} = 1/a^4|A_2||A_2|$

$C_{74} = -1/a^3|A_3||A_2|$ $C_{75} = 1/a^2|A_4||A_2|$ $C_{76} = -1/a|A_5||A_2|$

$C_{77} = |A_6||A_2|$ $C_{78} = -a|A_6||A_1|$ $C_{79} = a^2|A_6|$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$C_{81} = -1/a^7|A_1|$ $C_{82} = 1/a^6|A_1||A_1|$ $C_{83} = -1/a^5|A_1||A_2|$

$C_{84} = 1/a^4|A_1||A_3|$ $C_{85} = -1/a^3|A_1||A_4|$ $C_{86} = 1/a^2|A_1||A_5|$

$C_{87} = -1/a|A_1||A_6|$ $C_{88} = |A_7||A_1|$ $C_{89} = -a|A_7|$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$C_{91} = 1/a^8$ $C_{92} = -1/a^7|A_1|$ $C_{93} = 1/a^6|A_2|$

$C_{94} = -1/a^5|A_3|$ $C_{95} = 1/a^4|A_4|$ $C_{96} = -1/a^3|A_5|$

$C_{97} = 1/a^2|A_6|$ $C_{98} = -1/a|A_7|$ $C_{99} = |A_8|$

Berdasarkan hasil dari matriks kofaktor-kofaktor yang didapat dari matriks A_9 baris pertama sampai baris kesembilan, maka dapat dibuat dalam suatu matrik kofaktor, yaitu

$$C_9 = \begin{bmatrix} |A_8| & -a|A_7| & a^2|A_6| & -a^3|A_5| & a^4|A_4| & -a^5|A_3| & a^6|A_2| & -a^7|A_1| & -a^8 \\ -a^{-1}|A_7| & |A_1||A_7| & -a|A_1||A_6| & a^2|A_1||A_5| & -a^3|A_1||A_4| & a^4|A_1||A_3| & -a^5|A_1||A_2| & a^6|A_1||A_1| & -a^7|A_1| \\ a^{-2}|A_6| & -a^{-1}|A_1||A_6| & |A_2||A_6| & -a|A_2||A_5| & a^2|A_2||A_4| & -a^3|A_2||A_3| & a^4|A_2||A_2| & -a^5|A_2||A_1| & a^6|A_2| \\ -a^{-3}|A_5| & a^{-2}|A_1||A_5| & -a^{-1}|A_2||A_5| & |A_3||A_5| & -a|A_3||A_4| & a^2|A_3||A_3| & -a^3|A_3| & a^4|A_3||A_1| & -a^5|A_3| \\ a^{-4}|A_4| & -a^{-3}|A_1||A_4| & a^{-2}|A_2||A_4| & -a^{-1}|A_3||A_4| & |A_4||A_4| & -a|A_4||A_3| & a^2|A_4||A_2| & -a^3|A_4||A_1| & a^4|A_4| \\ -a^{-5}|A_3| & a^{-4}|A_1||A_3| & -a^{-3}|A_2||A_3| & a^{-2}|A_3||A_3| & -a^{-1}|A_4||A_3| & |A_5||A_3| & -a|A_5||A_2| & a^2|A_5||A_1| & -a^3|A_5| \\ a^{-6}|A_2| & -a^{-5}|A_1||A_2| & a^{-4}|A_2||A_2| & -a^{-3}|A_3||A_2| & a^{-2}|A_4||A_2| & -a^{-1}|A_5||A_2| & |A_6||A_2| & -a|A_6||A_1| & a^2|A_6| \\ -a^{-7}|A_1| & a^{-6}|A_1||A_1| & -a^{-5}|A_2||A_1| & a^{-4}|A_3||A_1| & -a^{-3}|A_4||A_1| & a^{-2}|A_5||A_1| & -a^{-1}|A_6||A_1| & |A_7||A_1| & -a|A_7| \\ a^{-8} & -a^{-7}|A_1| & a^{-6}|A_2| & -a^{-5}|A_3| & a^{-4}|A_4| & -a^{-3}|A_5| & a^{-2}|A_6| & -a^{-1}|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

9. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_{10}, dengan proses sebagai berikut:

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = |A_9|$ $\quad C_{12} = -a|A_8|$ $\quad C_{13} = a^2|A_7|$

$C_{14} = -a^3|A_6|$ $\quad C_{15} = a^4|A_5|$ $\quad C_{16} = -a^5|A_4|$

$C_{17} = a^6|A_3|$ $\quad C_{18} = -a^7|A_2|$ $\quad C_{19} = a^8|A_1|$

$C_{110} = -a^9$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = -1/a|A_8|$ $\quad C_{22} = |A_1||A_8|$ $\quad C_{23} = -a|A_1||A_7|$

$C_{24} = a^2|A_1||A_6|$ $\quad C_{25} = -a^3|A_1||A_5|$ $\quad C_{26} = a^4|A_1||A_4|$

$C_{27} = -a^5|A_1||A_3|$ $\quad C_{28} = a^6|A_1||A_2|$ $\quad C_{29} = -a^7|A_1||A_1|$

$C_{210} = a^8|A_1|$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$C_{31} = 1/a^2|A_7|$ $\quad C_{32} = -1/a|A_1||A_7|$ $\quad C_{33} = |A_2||A_7|$

$C_{34} = -a|A_2||A_6|$ $\quad C_{35} = a^2|A_2||A_5|$ $\quad C_{36} = -a^3|A_2||A_4|$

$C_{37} = a^4|A_2||A_3|$ $\quad C_{38} = -a^5|A_2||A_2|$ $\quad C_{39} = a^6|A_2||A_1|$

$C_{310} = -a^7|A_2|$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$C_{41} = -1/a^3|A_6|$ $C_{42} = 1/a^2|A_1||A_6|$ $C_{43} = -1/a|A_2||A_6|$

$C_{44} = |A_3||A_6|$ $C_{45} = -a|A_3||A_5|$ $C_{46} = a^2|A_3||A_4|$

$C_{47} = -a^3|A_3||A_3|$ $C_{48} = a^4|A_3||A_2|$ $C_{49} = -a^5|A_3||A_1|$

$C_{410} = a^6|A_3|$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$C_{51} = 1/a^4|A_5|$ $C_{52} = -1/a^3|A_1||A_5|$ $C_{53} = 1/a^2|A_2||A_5|$

$C_{54} = -1/a|A_3||A_5|$ $C_{55} = |A_4||A_5|$ $C_{56} = -a|A_4||A_4|$

$C_{57} = a^2|A_4||A_3|$ $C_{58} = -a^3|A_4||A_2|$ $C_{59} = a^4|A_4||A_1|$

$C_{510} = -a^5|A_4|$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$C_{61} = -1/a^5|A_4|$ $C_{62} = 1/a^4|A_1||A_4|$ $C_{63} = -1/a^3|A_2||A_4|$

$C_{64} = 1/a^2|A_3||A_4|$ $C_{65} = -1/a|A_4||A_4|$ $C_{66} = |A_5||A_4|$

$C_{67} = -a|A_5||A_3|$ $C_{68} = a^2|A_5||A_2|$ $C_{69} = -a^3|A_5||A_1|$

$C_{610} = a^4|A_5|$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$C_{71} = 1/a^6|A_3|$ $C_{72} = -1/a^5|A_1||A_3|$ $C_{73} = 1/a^4|A_2||A_3|$

$C_{74} = -1/a^3|A_3||A_3|$ $C_{75} = 1/a^2|A_4||A_3|$ $C_{76} = -1/a|A_5||A_3|$

$C_{77} = |A_6||A_3|$ $C_{78} = -a|A_6||A_2|$ $C_{79} = a^2|A_6||A_1|$

$C_{710} = -a^3|A_6|$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$C_{81} = -1/a^7|A_2|$ $C_{82} = 1/a^6|A_1||A_2|$ $C_{83} = -1/a^5|A_2||A_2|$

$C_{84} = 1/a^4|A_3||A_2|$ $C_{85} = -1/a^3|A_4||A_2|$ $C_{86} = 1/a^2|A_5||A_2|$

$C_{87} = -1/a|A_6||A_2|$ $C_{88} = |A_7||A_2|$ $C_{89} = -a|A_7||A_1|$

$C_{810} = a^2|A_7|$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$C_{91} = 1/a^8|A_1|$ $C_{92} = -1/a^7|A_1||A_1|$ $C_{93} = 1/a^6|A_2||A_1|$

$C_{94} = -1/a^5|A_3||A_1|$ $C_{95} = 1/a^4|A_4||A_1|$ $C_{96} = -1/a^3|A_5||A_1|$

$C_{97} = 1/a^2|A_6||A_1|$ $C_{98} = -1/a|A_7||A_1|$ $C_{99} = |A_8||A_1|$

$C_{910} = -a|A_8|$

Matriks kofaktor untuk baris kesepuluh sebagai berikut:

$C_{101} = -1/a^9$ $C_{102} = 1/a^8|A_1|$ $C_{103} = -1/a^7|A_2|$

$C_{104} = 1/a^6|A_3|$ $C_{105} = -1/a^5|A_4|$ $C_{106} = 1/a^4|A_5|$

$C_{107} = -1/a^3|A_6|$ $C_{108} = 1/a^2|A_7|$ $C_{109} = 1/a|A_8|$

$C_{1010} = |A_9|$

Sehingga matriks kofaktor untuk A_{10}, yaitu

$$C_{10} = \begin{bmatrix} |A_9| & -a|A_7| & a^2|A_6| & -a^3|A_5| & a^4|A_4| & -a^5|A_3| & a^6|A_2| & -a^7|A_2| & a^8|A_1| & -a^9 \\ -a^{-1}|A_8| & |A_1||A_8| & -a|A_1||A_7| & a^2|A_1||A_6| & -a^3|A_1||A_5| & a^4|A_1||A_4| & -a^5|A_1||A_3| & a^6|A_1||A_2| & -a^7|A_1||A_1| & a^8|A_1| \\ a^{-2}|A_7| & -a^{-1}|A_1||A_7| & |A_2||A_7| & -a|A_2||A_6| & a^2|A_2||A_5| & -a^3|A_2||A_4| & a^4|A_2||A_3| & -a^5|A_2||A_2| & a^6|A_2||A_1| & -a^7|A_2| \\ -a^{-3}|A_6| & a^{-2}|A_1||A_6| & -a^{-1}|A_2||A_6| & |A_3||A_6| & -a|A_3||A_5| & a^2|A_3||A_4| & -a^3|A_3||A_3| & a^4|A_3||A_2| & -a^5|A_3||A_1| & a^6|A_2| \\ a^{-4}|A_5| & -a^{-3}|A_1||A_5| & a^{-2}|A_2||A_5| & -a^{-1}|A_3||A_5| & |A_4||A_5| & -a|A_4||A_4| & a^2|A_4||A_3| & -a^3|A_4||A_2| & a^4|A_4||A_1| & -a^5|A_3| \\ -a^{-5}|A_4| & a^{-4}|A_1||A_4| & -a^{-3}|A_2||A_4| & a^{-2}|A_3||A_4| & -a^{-1}|A_4||A_4| & |A_5||A_4| & -a|A_5||A_3| & a^2|A_5||A_2| & -a^3|A_5||A_1| & a^4|A_4| \\ a^{-6}|A_3| & -a^{-5}|A_1||A_3| & a^{-4}|A_2||A_3| & -a^{-3}|A_3||A_3| & a^{-2}|A_4||A_3| & -a^{-1}|A_5||A_3| & |A_6||A_3| & -a|A_6||A_2| & a^2|A_6||A_1| & -a^3|A_5| \\ -a^{-7}|A_2| & a^{-6}|A_1||A_2| & -a^{-5}|A_2||A_2| & a^{-4}|A_3||A_2| & -a^{-3}|A_4||A_2| & a^{-2}|A_5||A_2| & -a^{-1}|A_6||A_2| & |A_7||A_2| & -a|A_7||A_1| & a^2|A_7| \\ a^{-8}|A_1| & -a^{-7}|A_1||A_1| & a^{-6}|A_2||A_1| & -a^{-5}|A_3||A_1| & a^{-4}|A_4||A_1| & -a^{-3}|A_5||A_1| & a^{-2}|A_6||A_1| & -a^{-1}|A_7||A_1| & |A_8||A_1| & -a|A_8| \\ -a^{-9} & a^{-8}|A_1| & -a^{-7}|A_2| & a^{-6}|A_2| & -a^{-5}|A_3| & a^{-4}|A_4| & -a^{-3}|A_5| & a^{-2}|A_6| & -a^{-1}|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

5.3 Bentuk umum Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde *n x n*

Setelah kita dapat menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal dari orde 2 x 2 sampai 10 x 10, maka kita dapat memformulasikan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal untuk orde $n \; x \; n$. Berikut diberikan formulasi umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus orde $n \; x \; n$ dalam teorema 5.1, serta pembuktiannya menggunakan pembuktian langsung.

Teorema 5.1 Diberikan A_n suatu matriks toeplitz bentuk khusus berorde $n \geq 2$ pada persamaan (1.4) dengan $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:

$$C_n = \begin{bmatrix} |A_{n-1}| & a^{-n+3} & a^{-n+5} & a^{-n+7} & \dots & a^{n-3} & a^{n-1} \\ a^{n-3} & |A_{n-1}| & a^{-n+3} & a^{-n+5} & \dots & a^{n-5} & a^{n-3} \\ a^{n-5} & a^{n-3} & |A_{n-1}| & a^{-n+3} & \dots & a^{n-7} & a^{n-5} \\ a^{n-7} & a^{n-5} & a^{n-3} & |A_{n-1}| & \dots & a^{n-9} & a^{n-7} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{-n+1} & a^{-n+3} & a^{-n+5} & a^{-n+7} & \dots & a^{n-3} & |A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Bukti :

Perhatikan matriks berikut

$$A_n = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{bmatrix} \qquad dengan \quad a,b,c \in R$$

Selanjutnya kita akan membuktikan setiap entri dari matriks kofaktornya. Mulai dari entri matriks kofaktor baris pertama dan kolom pertama sampai baris pertama kolom ke n . Selanjutnya baris kedua dan kolom pertama sampai baris kedua dan kolom ke n. Seterusnya dilakukan hal yang sama sampai baris ke n dan kolom ke n. Prosesnya diberikan sebagai berikut:

a. Entri baris pertama matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^2 |A_{n-1}|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 a\, |A_{n-2}|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 a^2\, |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{1n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris pertama matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{1n} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} a^{n-1}$$

b. Entri baris kedua matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 c \left|A_{n-2}\right|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 \left|A_{n-2}\right| . b = (-1) \left|A_{n-2}\right| \left|A_1\right| = (-1) \left|A_1\right| \left|A_{n-2}\right|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5 \; . a \left|A_1\right| \left|A_{n-3}\right|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{2n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{2n} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+2}\ b\, a^{n-2} = (-1)^{n+2}\ a^{n-2}\ |A_1|$$

c. Entri baris ketiga matriks Kofaktor sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 c\, |A_{n-3}|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5\ b\,.\,c\ |A_{n-3}| = (-1)^5\ c\ |A_1|\ |A_{n-3}|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{bmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{bmatrix}_{n-1} = (-1)^6 |A_2|\ |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{3n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{3n} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3} \; a^{n-3} \; |A_2|$$

Entri baris ke-4,5,6 dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, sehingga di peroleh entri untuk baris ke-n sebagai berikut :

$$C_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} \; c^{n-1}$$

$$C_{n2} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+2} \; b \,.\, c^{n-1} = (-1)^{n+2} \; c^{n-2} \; |A_1|$$

$$C_{n3} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3} \; c^{n-3} \; |A_2|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{nn}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{nn} = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{2n} \left|A_{n-1}\right|$$

Dari perhitungan diatas, diperoleh :

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2 \left|A_{n-1}\right| & (-1)^3 a \left|A_{n-2}\right| & (-1)^4 a \left|A_{n-3}\right| & \cdots & (-1)^n a^{n-2} \left|A_1\right| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3 c \left|A_{n-2}\right| & (-1)^4 \left|A_1\right| \left|A_{n-2}\right| & (-1)^5 a \left|A_1\right| \left|A_{n-3}\right| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{n-3} \left|A_1\right| \left|A_1\right| & (-1)^{n+2} a^{n-2} \left|A_1\right| \\ (-1)^4 c^2 \left|A_{n-3}\right| & (-1)^5 c \left|A_1\right| \left|A_{n-3}\right| & (-1)^6 \left|A_2\right| \left|A_{n-3}\right| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{n-4} \left|A_1\right| \left|A_2\right| & (-1)^{n+3} a^{n-3} \left|A_2\right| \\ (-1)^5 c^3 \left|A_{n-4}\right| & (-1)^6 c^2 \left|A_2\right| \left|A_{n-4}\right| & (-1)^7 c \left|A_2\right| \left|A_{n-4}\right| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{n-5} \left|A_1\right| \left|A_3\right| & (-1)^{n+4} a^{n-4} \left|A_3\right| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n c^{n-2} \left|A_1\right| & (-1)^{n+1} c^{n-3} \left|A_1\right| \left|A_1\right| & (-1)^{n+2} c^{n-4} \left|A_1\right| \left|A_2\right| & \cdots & (-1)^{n+n-2} \left|A_{n-2}\right| \left|A_1\right| & (-1)^{n+n-2} a \left|A_{n-2}\right| \\ (-1)^{n+1} c^{n-1} & (-1)^{n+2} c^{n-2} \left|A_1\right| & (-1)^{n+3} c^{n-3} \left|A_2\right| & \cdots & (-1)^{n+n-1} c \left|A_{n-2}\right| & (-1)^{2n} c \left|A_{n-1}\right| \end{bmatrix}$$

Pembuktian selesai.

BAB VI
INVERS MATRIKS TOEPLITZ BENTUK KHUSUS

Rumusan umum yang ketiga adalah rumusan umum dari invers matriks topelitz bentuk khusus. Berikut diberikan proses mendapatkan bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khususnya.

6.1 Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde 2×2 sampai 10×10

1. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 2×2, yaitu:

$$(A_2)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_2|} adj(A_2)$$

   Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_2| = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers.

2. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 3×3, yaitu:

$$(A_3)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_3|} adj(A_3) = \frac{1}{|\mathrm{A}_3|} (C_3)^T$$

   Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_3| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_3)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} |A_2| & -a^{-1}|A_1| & a^{-2} \\ -a|A_1| & |A_1||A_1| & -a^{-1}|A_1| \\ a^2 & -a|A_1| & |A_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|A_2| & a^{-1}|A_1| & -a^{-2} \\ a|A_1| & -|A_1||A_1| & a^{-1}|A_1| \\ -a^2 & -a|A_1| & -|A_2| \end{bmatrix}$$

3. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 4×4, yaitu:

$$(A_4)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_4|} adj(A_4) = \frac{1}{|\mathrm{A}_4|} (C_4)^T$$

   Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_4| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_4)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} |A_3| & -a^{-1}|A_2| & a^{-2}|A_1| & -a^{-3} \\ -a|A_2| & |A_1||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_1| & a^{-2}|A_1| \\ a^2|A_1| & -a|A_1||A_1| & |A_1||A_2| & -a^{-1}|A_2| \\ -a^3 & a^2|A_1| & -a|A_2| & |A_4| \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -|A_3| & a^{-1}|A_2| & -a^{-2}|A_1| & a^{-3} \\ a|A_2| & -|A_1||A_2| & a^{-1}|A_1||A_1| & -a^{-2}|A_1| \\ -a^2|A_1| & a|A_1||A_1| & -|A_1||A_2| & a^{-1}|A_2| \\ a^3 & -a^2|A_1| & a|A_2| & -|A_4| \end{bmatrix}$$

4. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 5×5, yaitu:

$$(A_5)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_5|} adj(A_5) = \frac{1}{|\mathrm{A}_5|} (C_5)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_5| = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers.

5. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 6×6, yaitu:

$$(A_6)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_6|} adj(A_6) = \frac{1}{|\mathrm{A}_6|} (C_6)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_6| = 1$, maka diperoleh:

$$(A_6)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} |A_5| & -a^{-1}|A_4| & a^{-2}|A_3| & -a^{-3}|A_2| & a^{-4}|A_1| & -a^{-5} \\ -a|A_4| & |A_1||A_4| & -a^{-1}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_1| & a^{-4}|A_1| \\ a^2|A_3| & -a|A_1||A_3| & |A_2||A_3| & -a^{-1}|A_2||A_2| & a^{-2}|A_1||A_2| & -a^{-3}|A_2| \\ -a^3|A_2| & a^2|A_1||A_2| & -a|A_2||A_2| & |A_3||A_2| & -a^{-1}|A_1||A_3| & a^{-2}|A_3| \\ a^4|A_1| & -a^3|A_1||A_1| & a^2|A_1||A_2| & -a|A_1||A_3| & |A_4||A_1| & -a^{-1}|A_4| \\ -a^5 & a^4|A_1| & -a^3|A_2| & a^2|A_3| & -a|A_4| & |A_5| \end{bmatrix}$$

6. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 7×7, yaitu:

$$(A_7)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_7|} adj(A_7) = \frac{1}{|\mathrm{A}_7|} (C_7)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_7| = 1$, maka diperoleh:

$$(A_7)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} |A_6| & -a^{-1}|A_5| & a^{-2}|A_4| & -a^{-3}|A_3| & a^{-4}|A_2| & -a^{-5}|A_1| & a^{-6} \\ -a|A_5| & |A_1||A_5| & -a^{-1}|A_1||A_4| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-3}|A_1||A_2| & a^{-4}|A_1||A_1| & -a^{-5}|A_1| \\ a^2|A_4| & -a|A_1||A_4| & |A_2||A_4| & -a^{-1}|A_2||A_3| & a^{-2}|A_2||A_2| & -a^{-3}|A_1||A_2| & a^{-4}|A_2| \\ -a^3|A_3| & a^2|A_1||A_3| & -a|A_2||A_3| & |A_3||A_3| & -a^{-1}|A_2||A_3| & a^{-2}|A_1||A_3| & -a^{-3}|A_3| \\ a^4|A_2| & -a^3|A_1||A_2| & a^2|A_2||A_2| & -a|A_2||A_3| & |A_4||A_2| & -a^{-1}|A_4||A_1| & a^{-2}|A_4| \\ -a^5|A_1| & a^4|A_1||A_1| & -a^3|A_1||A_2| & a^2|A_1||A_3| & -a|A_1||A_4| & |A_5||A_1| & -a^{-1}|A_5| \\ a^6 & -a^5|A_1| & a^4|A_2| & -a^3|A_3| & a^2|A_4| & -a|A_5| & |A_6| \end{bmatrix}$$

7. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 8×8, yaitu:

$$(A_8)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_8|} adj(A_8) = \frac{1}{|\mathrm{A}_8|} (C_8)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_8| = 0$, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers.

8. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 9×9, yaitu:

$$(A_9)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_9|} adj(A_7) = \frac{1}{|\mathrm{A}_9|} (C_9)^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_9| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_9)^{-1} = \begin{bmatrix} |A_8| & -a^{-1}|A_7| & a^{-2}|A_6| & -a^{-3}|A_5| & a^{-4}|A_4| & -a^{-5}|A_3| & a^{-6}|A_2| & -a^{-7}|A_1| & a^{-8} \\ -a|A_7| & |A_1||A_7| & -a^{-1}|A_1||A_6| & a^{-2}|A_1||A_5| & -a^{-3}|A_1||A_4| & a^{-4}|A_1||A_3| & -a^{-5}|A_1||A_2| & a^{-6}|A_1||A_1| & -a^{-7}|A_1| \\ a^2|A_6| & -a|A_1||A_6| & |A_2||A_6| & -a^{-1}|A_2||A_5| & a^{-2}|A_2||A_4| & -a^{-3}|A_2||A_3| & a^{-4}|A_2||A_2| & -a^{-5}|A_2||A_1| & a^{-6}|A_2| \\ -a^3|A_5| & a^2|A_1||A_5| & -a|A_2||A_5| & |A_3||A_5| & -a^{-1}|A_3||A_4| & a^{-2}|A_3||A_3| & -a^{-3}|A_3| & a^{-4}|A_3||A_1| & -a^{-5}|A_3| \\ a^4|A_4| & -a^3|A_1||A_4| & a^2|A_2||A_4| & -a^1|A_3||A_4| & |A_4||A_4| & -a^{-1}|A_4||A_3| & a^{-2}|A_4||A_2| & -a^{-3}|A_4||A_1| & a^{-4}|A_4| \\ -a^5|A_3| & a^4|A_1||A_3| & -a^3|A_2||A_3| & a^2|A_3||A_3| & -a^1|A_4||A_3| & |A_5||A_3| & -a^{-1}|A_5||A_2| & a^{-2}|A_5||A_1| & -a^{-3}|A_5| \\ a^6|A_2| & -a^5|A_1||A_2| & a^4|A_2||A_2| & -a^3|A_3||A_2| & a^2|A_4||A_2| & -a^1|A_5||A_2| & |A_6||A_2| & -a^{-1}|A_6||A_1| & a^{-2}|A_6| \\ -a^7|A_1| & a^6|A_1||A_1| & -a^5|A_2||A_1| & a^4|A_3||A_1| & -a^3|A_4||A_1| & a^2|A_5||A_1| & -a|A_6||A_1| & |A_7||A_1| & -a^{-1}|A_7| \\ a^8 & -a^7|A_1| & a^6|A_2| & -a^5|A_3| & a^4|A_4| & -a^3|A_5| & a^2|A_6| & -a|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

10. Menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde 10×10, yaitu:

$$(A_{10})^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_{10}|} adj(A_7) = \frac{1}{|\mathrm{A}_{10}|} (C_{10})^T$$

Berdasarkan Teorema 4.1, $|A_{10}| = -1$, maka diperoleh:

$$(A_{10})^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} |A_9| & -a^{-1}|A_7| & a^{-2}|A_6| & -a^{-3}|A_5| & a^{-4}|A_4| & -a^{-5}|A_3| & a^{-6}|A_2| & -a^{-7}|A_2| & a^{-8}|A_1| & -a^{-9} \\ -a|A_8| & |A_1||A_8| & -a^{-1}|A_1||A_7| & a^{-2}|A_1||A_6| & -a^{-3}|A_1||A_5| & a^{-4}|A_1||A_4| & -a^{-5}|A_1||A_3| & a^{-6}|A_1||A_2| & -a^{-7}|A_1||A_1| & a^{-8}|A_1| \\ a^2|A_7| & -a^1|A_1||A_7| & |A_2||A_7| & -a^{-1}|A_2||A_6| & a^{-2}|A_2||A_5| & -a^{-3}|A_2||A_4| & a^{-4}|A_2||A_3| & -a^{-5}|A_2||A_2| & a^{-6}|A_2||A_1| & -a^{-7}|A_2| \\ -a^3|A_6| & a^2|A_1||A_6| & -a^{-1}|A_2||A_6| & |A_3||A_6| & -a^{-1}|A_3||A_5| & a^{-2}|A_3||A_4| & -a^{-3}|A_3||A_3| & a^{-4}|A_3||A_2| & -a^{-5}|A_3||A_1| & a^{-6}|A_2| \\ a^4|A_5| & -a^3|A_1||A_5| & a^{-2}|A_2||A_5| & -a|A_3||A_5| & |A_4||A_5| & -a^{-1}|A_4||A_4| & a^{-2}|A_4||A_3| & -a^{-3}|A_4||A_2| & a^{-4}|A_4||A_1| & -a^{-5}|A_3| \\ -a^5|A_4| & a^4|A_1||A_4| & -a^{-3}|A_2||A_4| & a^2|A_3||A_4| & -a|A_4||A_4| & |A_5||A_4| & -a^{-1}|A_5||A_3| & a^{-2}|A_5||A_2| & -a^{-3}|A_5||A_1| & a^{-4}|A_4| \\ a^6|A_3| & -a^5|A_1||A_3| & a^{-4}|A_2||A_3| & -a^3|A_3||A_3| & a^2|A_4||A_3| & -a^1|A_5||A_3| & |A_6||A_3| & -a^{-1}|A_6||A_2| & a^{-2}|A_6||A_1| & -a^3|A_5| \\ -a^7|A_2| & a^6|A_1||A_2| & -a^{-5}|A_2||A_2| & a^4|A_3||A_2| & -a^3|A_4||A_2| & a^2|A_5||A_2| & -a|A_6||A_2| & |A_7||A_2| & -a^{-1}|A_7||A_1| & a^{-2}|A_7| \\ a^8|A_1| & -a^7|A_1||A_1| & a^{-6}|A_2||A_1| & -a^5|A_3||A_1| & a^4|A_4||A_1| & -a^3|A_5||A_1| & a^2|A_6||A_1| & -a|A_7||A_1| & |A_8||A_1| & -a^{-1}|A_8| \\ -a^9 & a^8|A_1| & -a^{-7}|A_2| & a^6|A_2| & -a^5|A_3| & a^4|A_4| & -a^3|A_5| & a^2|A_6| & -a|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

6.2 Bentuk Umum Invers Matriks Toeplitz Bentuk khusus Orde $n \times n$

Invers matriks toeplitz bentuk khusus orde 2×2 sampai 10×10 telah diperoleh pada subbab 6.1 . Selanjutnya untuk bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus orde $n \times n$, diperoleh bentuknya disajikan dalam Teorema 6.1, sebagai berikut:

Teorema 6.1 Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus A_n berorde $n \geq 2$ yang sesuai Persamaan 1.4 dengan $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ maka invers dari matriks A_n adalah:

1. $Jika\ n \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5)$, maka A_n tidak mempunyai invers.
2. $Jika\ n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1)$, maka

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Jika $jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 3)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 4)$, maka

$$A_n^{-1} = -\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Bukti:

1. $Jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 2)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 5)$, maka berdasarkan Teorema 4.1 diperoleh $|A_n| = 0$, artinya A_n tidak mempunyai invers.
2. $Jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 0)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 1)$, maka berdasarkan Teorema 4.1 diperoleh $|A_n| = 1$. Sehingga $(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n) = \frac{1}{1}(C_n)^T = (C_n)^T$, yaitu:

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. $Jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 3)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 4)$, maka berdasarkan Teorema 4.1 diperoleh $|A_n| = -1$. Sehingga $(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n) = \frac{1}{-1}(C_n)^T = -(C_n)^T$, yaitu:

$$A_n^{-1} = -\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

6.3 Beberapa Contoh Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus

Contoh 6.1 : Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus dengan orde 7×7. Tentukan invers matriks tersebut dengan menggunakan bentuk umum yang telah ada.

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a = -1/2$$

Penyelesaian:

Pertama kali akan ditentukan nilai determinan dari matriks tersebut, yaitu:

Ukuran matriks A adalah 7×7, berdasarkan Teorema 4.1 maka determinan dari mtriks tersebut bernilai 1 atau $|A_7| = 1$.

Selanjutnya menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 7×7, dengan menggunakan Teorema 4.1 dan Teorema 5.1, yaitu:

Entri untuk baris pertama matriks kofaktornya sebagai berikut:

$C_{11} = |A_6| = 1$

$C_{12} = -a|A_5| = 0$

$C_{13} = a^2|A_4| = -1/4$

$C_{14} = -a^3|A_3| = -1/8$

$C_{15} = a^4|A_2| = 0$

$C_{16} = -a^5|A_1| = 1/32$

$C_{17} = a^6 = 1/64$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = -a^{-1}|A_5| = 0$

$C_{22} = |A_1||A_5| = 0$

$C_{23} = -a|A_1||A_4| = -1/2$

$C_{24} = a^2|A_1||A_3| = -1/4$

$C_{25} = -a^3|A_1||A_2| = 0$

$C_{26} = a^4|A_1||A_1| = 1/16$

$C_{27} = -a^5|A_1| = 1/32$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$C_{31} = a^{-2}|A_4| = -4$

$C_{32} = -a^{-1}|A_1||A_3| = -2$

$C_{33} = |A_2||A_4| = 0$

$C_{34} = -a|A_2||A_3| = 0$

$C_{35} = a^2|A_2||A_2| = 0$

$C_{36} = -a^3|A_2||A_1| = 0$

$C_{37} = a^4|A_2| = 0$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$C_{41} = -a^{-3}|A_3| = -8$

$C_{42} = a^{-2}|A_1||A_3| = -4$

$C_{43} = -a^{-1}|A_2||A_3| = 0$

$C_{44} = |A_3||A_3| = 1$

$C_{45} = -a|A_3||A_2| = 0$

$C_{46} = a^2|A_1||A_3| = -1/4$

$C_{47} = -a^3|A_3| = -1/8$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$C_{51} = a^{-4}|A_2| = 0$

$C_{52} = -a^{-3}|A_1||A_2| = 0$

$C_{53} = a^{-2}|A_2||A_2| = 0$

$C_{54} = -a^{-1}|A_2||A_3| = 0$

$C_{55} = |A_4||A_2| = 0$

$C_{56} = -a|A_4||A_1| = -1/2$

$C_{57} = a^2|A_4| = -1/4$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$C_{61} = -a^{-5}|A_1| = 32$

$C_{62} = a^{-4}|A_1||A_1| = 16$

$C_{63} = -a^{-3}|A_1||A_2| = 0$

$C_{64} = a^{-2}|A_1||A_3| = -4$

$C_{65} = -a^{-1}|A_1||A_4| = -2$

$C_{66} = |A_5||A_1| = 0$

$C_{67} = -a|A_5| = 0$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$C_{71} = \frac{1}{a^6} = 64$

$C_{72} = -a^{-5}|A_1| = 32$

$C_{73} = a^{-4}|A_2| = 0$

$C_{74} = -a^{-3}|A_3| = -8$

$C_{75} = a^{-2}|A_4| = -4$

$C_{76} = -\frac{1}{a}|A_5| = 0$

$C_{77} = |A_6| = 1$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_7 adalah:

$$C_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/8 & 0 & 1/32 & 1/64 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & 0 & 1/16 & 1/32 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4 \\ 32 & 16 & 0 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 64 & 32 & 0 & -8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat determinan dan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 7×7 maka selanjutnya mendapatkan invers matriksnya menggunakan Teorema 6.1, yaitu:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n) = \frac{1}{1}(C_n)^T = (C_n)^T$$

$$(A_7)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_7|} adj(A_6) = \frac{1}{1}(C_7)^T = (C_7)^T$$

$$(A_7)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -8 & 0 & 32 & 64 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 16 & 32 \\ -1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/8 & -1/4 & 0 & 1 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -4 \\ 1/32 & 1/16 & 0 & -1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/64 & 1/32 & 0 & -1/8 & -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 6.2 : Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus dengan orde 10×10. Tentukan invers matriks tersebut dengan menggunakan bentuk umum yang telah ada.

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a = 3$.

Penyelesaian:

Pertamakali kita ditentukan nilai determinan dari matriks tersebut, yaitu:

Ukuran matriks A adalah10×10, berdasarkan Teorema 4.1 maka determinan dari mtriks tersebut bernilai 1 atau $|A_{10}| = -1$.

Selanjutnya menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 10×10, dengan menggunakan Teorema 4.1 dan Teorema 5.1, yaitu:

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = |A_9| = -1$

$C_{12} = -a|A_8| = 0$

$C_{13} = a^2|A_7| = 9$

$C_{14} = -a^3|A_6| = -27$

$C_{15} = a^4|A_5| = 0$

$C_{16} = -a^5|A_4| = 243$

$C_{17} = a^6|A_3| = -729$

$C_{18} = -a^7|A_2| = 0$

$C_{19} = a^8|A_1| = 6561$

$C_{110} = -a^9 = -19683$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = -1/a|A_8| = 0$

$C_{22} = |A_1||A_8| = 0$

$C_{23} = -a|A_1||A_7| = -3$

$C_{24} = a^2|A_1||A_6| = 9$

$C_{25} = -a^3|A_1||A_5| = 0$

$C_{26} = a^4|A_1||A_4| = -81$

$C_{27} = -a^5|A_1||A_3| = 243$

$C_{28} = a^6|A_1||A_2| = 0$

$C_{29} = -a^7|A_1||A_1| = -2187$

$C_{210} = a^8|A_1| = 6561$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$C_{31} = 1/a^2|A_7| = 1/9$

$C_{32} = -1/a|A_1||A_7| = -1/3$

$C_{33} = |A_2||A_7| = 0$

$C_{34} = -a|A_2||A_6| = 0$

$C_{35} = a^2|A_2||A_5| = 0$

$C_{36} = -a^3|A_2||A_4| = 0$

$C_{37} = a^4|A_2||A_3| = 0$

$C_{38} = -a^5|A_2||A_2| = 0$

$C_{39} = a^6|A_2||A_1| = 0$

$C_{310} = -a^7|A_2| = 0$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$C_{41} = -1/a^3|A_6| = -1/27$

$C_{42} = 1/a^2|A_1||A_6| = 1/9$

$C_{43} = -1/a|A_2||A_6| = 0$

$C_{44} = |A_3||A_6| = -1$

$C_{45} = -a|A_3||A_5| = 0$

$C_{46} = a^2|A_3||A_4| = 9$

$C_{47} = -a^3|A_3||A_3| = -27$

$C_{48} = a^4|A_3||A_2| = 0$

$C_{49} = -a^5|A_3||A_1| = 243$

$C_{410} = a^6|A_3| = 729$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$C_{51} = 1/a^4|A_5| = 0$

$C_{52} = -1/a^3|A_1||A_5| = 0$

$C_{53} = 1/a^2|A_2||A_5| = 0$

$C_{54} = -1/a|A_3||A_5| = 0$

$C_{55} = |A_4||A_5| = 0$

$C_{56} = -a|A_4||A_4| = -3$

$C_{57} = a^2|A_4||A_3| = 9$

$C_{58} = -a^3|A_4||A_2| = 0$

$C_{59} = a^4|A_4||A_1| = 81$

$C_{510} = -a^5|A_4| = 243$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$C_{61} = -1/a^5|A_4| = 1/243$

$C_{62} = 1/a^4|A_1||A_4| = -1/81$

$C_{63} = -1/a^3|A_2||A_4| = 0$

$C_{64} = 1/a^2|A_3||A_4| = 1/9$

$C_{65} = -\frac{1}{a}|A_4||A_4| = -1/3$

$C_{66} = |A_5||A_4| = 0$

$C_{67} = -a|A_5||A_3| = 0$

$C_{68} = a^2|A_5||A_2| = 0$

$C_{69} = -a^3|A_5||A_1| = 0$

$C_{610} = a^4|A_5| = 0$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$C_{71} = 1/a^6|A_3| = -1/729$

$C_{72} = -1/a^5|A_1||A_3| = 1/243$

$C_{73} = 1/a^4|A_2||A_3| = 0$

$C_{74} = -1/a^3|A_3||A_3| = -1/27$

$C_{75} = \frac{1}{a^2}|A_4||A_3| = 1/9$

$C_{76} = -1/a|A_5||A_3 = 0|$

$C_{77} = |A_6||A_3| = -1$

$C_{78} = -a|A_6||A_2| = 0$

$C_{79} = a^2|A_6||A_1| = 9$

$C_{710} = -a^3|A_6| = -27$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$C_{81} = -1/a^7|A_2| = 0$

$C_{82} = 1/a^6|A_1||A_2| = 0$

$C_{83} = -1/a^5|A_2||A_2| = 0$

$C_{84} = 1/a^4|A_3||A_2| = 0$

$C_{85} = -1/a^3|A_4||A_2| = 0$

$C_{86} = 1/a^2|A_5||A_2| = 0$

$C_{87} = -1/a|A_6||A_2| = 0$

$C_{88} = |A_7||A_2| = 0$

$C_{89} = -a|A_7||A_1| = -3$

$C_{810} = a^2|A_7| = 9$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$C_{91} = 1/a^8|A_1| = 1/6561$

$C_{92} = -1/a^7|A_1||A_1| = -1/2187$

$C_{93} = 1/a^6|A_2||A_1| = 0$

$C_{94} = -1/a^5|A_3||A_1| = 1/243$

$C_{95} = 1/a^4|A_4||A_1| = -1/81$

$C_{96} = -1/a^3|A_5||A_1| = 0$

$C_{97} = 1/a^2|A_6||A_1| = 1/9$

$C_{98} = -1/a|A_7||A_1| = -1/3$

$C_{99} = |A_8||A_1| = 0$

$C_{910} = -a|A_8| = 0$

Matriks kofaktor untuk baris kesepuluh sebagai berikut:

$C_{101} = -1/a^9 = -1/19683$

$C_{102} = 1/a^8|A_1| = 1/6561$

$C_{103} = -1/a^7|A_2| = 0$

$C_{104} = 1/a^6|A_3| = -1/729$

$C_{105} = -1/a^5|A_4| = 1/243$

$C_{106} = 1/a^4|A_5| = 0$

$C_{107} = -1/a^3|A_6| = -1/27$

$C_{108} = 1/a^2|A_7| = 1/9$

$C_{109} = 1/a|A_8| = 0$

$C_{1010} = |A_9| = -1$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_{10} adalah:

$$C_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 & -27 & 0 & 243 & -729 & 0 & 6561 & 19683 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & -81 & 243 & 0 & -2187 & 6561 \\ 1/9 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/27 & 1/9 & 0 & -1 & 0 & 9 & -27 & 0 & 243 & 729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & 81 & 243 \\ 1/243 & -1/81 & 0 & 1/9 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/729 & 1/243 & 0 & -1/27 & 1/9 & 0 & -1 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 1/6561 & -1/2187 & 0 & 1/243 & -1/81 & 0 & 1/9 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/19683 & 1/6561 & 0 & -1/729 & 1/243 & 0 & -1/27 & 1/9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat determinan dan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus yang berorde 10×10 maka akan didapatkan invers matriksnya dengan menggunakan Teorema 6.1 sebagai berikut:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n) = \frac{1}{1}(C_n)^T = (C_n)^T$$

$$(A_{10})^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_{10}}|} adj(A_{10}) = \frac{1}{1}(C_{10})^T = (C_{10})^T$$

$$(A_{10})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/9 & -1/27 & 0 & 1/243 & -1/729 & 0 & 1/6561 & 1/19683 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/9 & 0 & -1/81 & 1/243 & 0 & -1/2187 & 1/6561 \\ 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & 9 & 0 & -1 & 0 & 1/9 & -1/27 & 0 & 1/243 & 1/729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/9 & 0 & 1/81 & 1/243 \\ 243 & -81 & 0 & 9 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -729 & 243 & 0 & -27 & 9 & 0 & -1 & 0 & 1/9 & -1/27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/9 \\ 6561 & -2187 & 0 & 243 & -81 & 0 & 9 & -3 & 0 & 0 \\ -19683 & 6561 & 0 & -729 & 243 & 0 & -27 & 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

BAB VII
PENUTUP

7.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan sebelumnya kita ketahui bahwa untuk mendapatkan invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin terlebih dahulu kita menentukan nilai determinan dari matriks tersebut. Selanjutnya kita menentukan matriks kofaktornya yang ditransposkan yang disebut adjoin dari matriks awal. Barulah akhirnya dengan mensubstitusi kepersamaan invers matriks kita dapat invers matriks toeplitz bentuk khusus. Berikut diberikan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor dan inversnya.

1. Bentuk umum dari determinannya matriks toeplitz bentuk khusus, yaitu:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\; n \equiv\; 6\;(mod\; 2)\; atau\; n =\; 6\;(mod\; 5) \\ 1 & jika\; n \equiv\; 6\;(mod\; 0)\; atau\; n =\; 6\;(mod\; 1) \\ -1 & jika\; n \equiv\; 6\;(mod\; 3)\; atau\; n =\; 6\;(mod\; 4) \end{cases}$$

2. Bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus, yaitu:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a^2\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}a^{n-1} \\ (-1)^3\, a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5\, a\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}\, a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4\, a-^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5\, a^{-1}\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}\, a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5\, a^{-3}\,|A_{n-4}| & (-1)^6\, a^{-2}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7\, a^{-1}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}\, a^{n-5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4}\, a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\, a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\, a^{-n+3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{-n+4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2}\, a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}\, a^{-n+1} & (-1)^{n+2}\, a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\, a^{-n+3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}\, a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Bentuk umum dari invers matriks toeplitz bentuk khusus, yaitu:
   a. $Jika\; n \equiv\; 6\;(mod\; 2)\; atau\; n =\; 6\;(mod\; 5)$, maka A_n tidak mempunyai invers.
   b. $Jika\; n \equiv\; 6\;(mod\; 0)\; atau\; n =\; 6\;(mod\; 1)$, maka

$$A_n^{-1}=\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1|A_{n-2}| & (-1)^4|A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2|A_{n-3}| & (-1)^5 a^1|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6|A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3}a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3|A_{n-4}| & (-1)^6 a^2|A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4}a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2}a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}a^{n-1} & (-1)^{n+2}a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3}a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

c. $Jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 3)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 4)$, maka

$$A_n^{-1}=-\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1|A_{n-2}| & (-1)^4|A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2|A_{n-3}| & (-1)^5 a^1|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6|A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3}a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3|A_{n-4}| & (-1)^6 a^2|A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4}a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1}a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2}a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2}a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}a^{n-1} & (-1)^{n+2}a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3}a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

7.2 Saran

Penelitian ini hanya membahas mengenai bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin. Disarankan para pembaca dapat melanjutkan hal-hal yang berhubungan dengan determinan, seperti nilai eigen dan vektor eigen. Atau dapat melanjutkan dengan menentukan invers matriks tetapi terhadap matriks yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard & Rorres, Chris, 2004, "*Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi"*, Edisi Ketujuh, Jakarta, Erlangga.

Aryani, F. & Corazon, C.M., 2015, "Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method", *Proceeding Icostechs* 2016, ISSN: 2356-542X.

Gray, Robert M., 2005 "Toeplitz and Circulan Matrices", Stanford 94305, Department of Electrical Engineering Stanford, USA.

Hefferon, Jim, 2012, *Linear Algebra*. Saint Michaels College Colchester, Vermont USA.

Kouachi, S., 1991, "Eigenvalues and Eigenvectors of Some Tridiagonal Matrices with Non Constant Diagonal Entries. ELA, In press.

Leon, S.J. , 2009, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Jakarta : Erlangga.

Nicholson, W. Keith, 2004, *Linear Algebra with Applications*, Fourth Edition. University of Calgary.

Ruminta, 2009, "*Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*", Bandung, Rekayasa Sains.

Salkuyeh, Davod Khojasteh, 2006, "Positive Integer Power of the Tridiagonal Matriks Toeplitz". International Mathematical Forum, Vol 1, no. 22, 1061 - 1065, Mohaghegh Ardabili University. Ardabil, Iran.

Sianipar, 2009, P.Invers Z-Matriks, *Bulletin of Mathematics*, Vol. 01, No. 01,1-14. Medan Indonesia.

Siregar, Bakti., 2014, dkk."Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". *Saintia Matematika*. 02, (01), 85-94.

Sukirman, 2006, "*Pengantar Teori Bilangan*", Yogyakarta, Hanggar Kreator.

Supranto, Johannes, 2003, *Pengantar Matriks*. Jakarta: Rineka Cipta.

Zwilinger, D., 2003, *Standard Mathematical Tables and Formulae*. Chapman & Hall / CRC Press Company. New York.