LAPORAN PENELITIAN

PENGUATAN KEILMUAN

INVERS MATRIKS TOEPLITZ TRIDIAGONAL MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

UIN SUSKA RIAU

Peneliti Utama :

Fitri Aryani, S.Si, M.Si

NIP. 19770913 200604 2 002

Peneliti :

Corry Corazon Marzuki, S.Si, M. Si

NIK. 130 512 086

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

2015

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrobbil 'alamin ucap syukur ke hadirat Allah s.w.t, karena atas rahmat dan hidayahNyalah penelitian ini dapat diselesaikan. Semoga dengan adanya penelitian ini dapat menambah pengetahuan mahasiswa dibidang Aljabar, terutama bidang Matriks dan khususnya Invers Matriks. Penelitian ini adalah mengenai bagaimana menentukan bentuk umum dari suatu invers matriks toeplitz tridiagonal yang berorde *n x n.*

Penelitian ini dilakukan dijurusan matematika Fakultas Sains dan teknologi UIN Suska Riau. Waktu penelitian dimulai dari bulan Juni sampai November 2015. Peneliti berharap hasil penelitian ini banyak dibaca dan digunakan oleh bidang lain yang berhubungan dengan bentuk umum invers matriks toeplitz tridiagonal.

Peneliti menyadari bahwa belumlah lengkap dan sempurna baik isi, tulisan maupun gaya bahasa yang digunakan dalam penelitian ini tanpa kritikan dan saran dari pembaca.

Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada Pimpinan Rektorat UIN Suska Riau atas didanainya pembuatan penelitian ini, tidak lupa ucapan terimakasih kepada rekan-rekan dosen dilingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau terutama rekan-rekan Jurusan Matematika atas kritikan, masukkan-masukkan sehingga sangat membantu dalam penyelesaian Penelitian ini.

Pekanbaru, November 2015

Tim Peneliti

INVERS MATRIKS TOEPLITZ TRIDIAGONAL MENGGUNAKAN METODE ADJOIN

ABSTRAK

Invers matriks merupakan hal yang penting dalam bidang ilmu matematika, terutama ilmu aljabar. Aplikasi dari Invers matriks banyak dipakai pada bidang yang lain selain aljabar, baik dibidang matematika maupun dibidang yang lain. Banyak metode dalam menentukan invers matriks, salah satunya metode adjoin. Metode adjoin merupakan metode yang sederhana dalam menentukan invers matriks. Penelitian ini bertujuan menentukan invers matriks Toeplitz Tridiagonal dengan menggunakan metode adjoin. Dalam menentukan invers matriks toeplitz tridiagonal, ada tiga langkah yang dikerjakan. Pertama, diperhatikan pola dari determinan matriks toeplitz tridiagonal orde 3x3 sampai 20x20 sehingga didapat bentuk umumnya. Kedua, perhatikan pola matriks kofaktor orde 3x3 sampai 10x10 sehingga diperoleh bentuk umumnya. Dan terakhir, menngunakan persamaan $(A_n)^{-1} = \frac{1}{|A_n|} adj(A_n)$ untuk mendapatkan bentuk umum invers matriks toeplitz tridiagonal orde *n x n* .

Katakunci: Adjoin, Determinan, Invers Matriks, Matriks Kofaktor, Matriks Toeplitz Tridiagonal

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika maupun ilmu terapannya.

Menurut Howard Anton dan Chris Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Salah satu jenis matriks adalah matriks toeplitz. Menurut Robert (2005), matriks toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan, dimana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. Bentuk umum dari matriks toeplitz adalah sebagai berikut.

$$T_n = (t_{ij}) \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & t_{(n-4)} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dimana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Salah satu contoh dari matriks toeplitz adalah matriks tridiagonal. Menurut Salkuyeh (2006), suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

dengan $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Pembahasan menarik dalam teori matriks adalah menentukan invers dari suatu matriks. Sebuah matriks memiliki invers jika matriks tersebut memiliki

$det \neq 0$. Beberapa metode yang digunakan dalam menghitung invers suatu matriks adalah Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Permasalahan dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks, semakin besar ukuran matriks akan semakin sulit untuk menentukan invers dari matriks tersebut, sehingga dibutuhkan formula yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Salah satu kegunaan invers dari suatu matriks adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak sekali kegunaannya dalam memudahkan pengambilan keputusan di berbagai bidang, seperti bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya.

Pada Tahun 1991, Kouachi telah melakukan penelitian mengenai nilai eigen dan vector eigen dari matriks tridiagonal dengan entri-entri diagonalnya tidak konstan. Selanjutnya, pada Tahun 2005 Gray dan Robert juga melakukan penelitian mengenai teori matriks juga dengan judul "*Toeplitz and Circulant Matrices*".

Bakti Siregar dkk. juga membahas mengenai matriks toeplitz pada Tahun 2014 pada makalahnya yang berjudul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Di dalam makalah tersebut, dirumuskan formula invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini :

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Adapun hasil yang diperoleh pada makalah tersebut adalah sebagai berikut :

1. Rumus determinan matriks toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.3) adalah
$$\det(T_n) = (-1)^n (n-1) x^n$$
2. Rumus kofaktor-kofaktor yang terletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.3) adalah
$$K_{ij}T_n = \begin{cases} \det(T_n) & ; \text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1} x^{n-1} & ; \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$
3. Rumus invers dari matriks toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.3) adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-n-2}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa ada rumus khusus untuk menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers dari suatu matriks toeplitz yang bentuknya unik seperti Persamaan (1.3). Sehingga untuk menghitung determinan, matriks kofaktor dan inversnya tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit menggunakan metode-metode yang biasa digunakan, namun cukup dengan mensubstitusikan nilai *n* dan *x* yang ada pada matriks ke rumus-rumus di atas.

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang sudah dipaparkan di atas, belum ditemukan rumus umum untuk determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal seperti pada Persamaan (1.2), sehingga penulis tertarik untuk membuat formulasi/rumus umum untuk menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz tridiagonal menggunakan metode adjoin. Dengan keunikan bentuk matriks toeplitz tridiagonal ini, penulis menduga adanya sifat-sifat khusus pada matriks ini sehingga didapatkan rumus determinan, matriks kofaktor, dan invers yang lebih sederhana dibandingkan matriks secara umum.

Dengan adanya rumus tersebut, diharapkan dapat memudahkan kita dalam menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz tridiagonal. Sehingga hal ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah “menentukan rumus determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal secara umum menggunakan metode adjoin”.

1.3 Batasan Masalah

Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik maka penulis membatasi masalah pada penelitian ini, yaitu :

1. Matriks yang dibahas berorde $n \geq 3$.
2. Mencari determinan menggunakan ekspansi kofaktor.

1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk mendapatkan rumus umum determinan dari matriks toeplitz tridiagonal menggunakan metode ekspansi kofaktor.
2. Untuk mendapatkan rumus umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal menggunakan metode minor-kofaktor.
3. Untuk mendapatkan rumus umum invers dari matriks toeplitz tridiagonal menggunakan metode adjoin.

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Rumus umum yang diperoleh pada penelitian ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks, terutama dalam menentukan determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks toeplitz tridiagonal.
2. Memberikan kontribusi penelitian di bidang matematika terutama bidang aljabar mengenai determinan, matriks kofaktor, dan invers dari suatu matriks.
3. Menghasilkan penelitian baru yang bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks, determinan, invers matriks, determinan matriks toeplitz, matriks kofaktor, dan invers matriks toeplitz, serta induksi matematika.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Ruminta, 2009) Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis di antara dua tanda kurung, yaitu ( ) atau [ ]. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan : a_{ij} = elemen atau unsur matriks

$i = 1,2,3, \ldots m$, indeks baris

$j = 1,2,3, \ldots n$, indeks kolom

Definisi 2.2 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar orde n, dan entri $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.1) yang diberi arsiran merupakan diagonal utama dari matriks A.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Definisi 2.3 (Robert, 2005) Sebuah matriks toeplitz adalah matrik berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \dots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

Berdasarkan Definisi 2.3 maka terdapat berbagai jenis dari mariks toeplitz. Salah satu jenis dari matriks toeplitz adalah matriks toeplitz tridiagonal.

Definisi 2.4 (Salkuyeh, 2006) : Misalkan A suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \qquad \text{dengan } a, c \neq 0 \in \mathbb{R}.$$

2.2 Determinan

Definisi 2.5 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlahdari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A.

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu :

1. Metode Sarrus
2. Metode Minor dan Kofaktor
3. Metode CHIO
4. Metode Eliminasi Gauss
5. Metode Dekomposisi Matriks.

Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode minor dan kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2.6 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekpansi kofaktor dalam teorema berikut:

Teorema 2.1 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks$A, n \times n,$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(*ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j*)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(*ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i*)

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.7 (Ruminta, 2009) Jika A adalah matriks ukuran $n \times n$ dan jika ada matriks B ukuran $n \times n$ sedemikian sehingga :

$$AB = BA = I$$

dengan I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, maka matriks A disebut non singular atau *invertibel* dan matriks A merupakan invers dari B atau B merupakan invers dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Berdasarkan metode-metode tersebut penulis hanya menggunakan metode adjoin dalam mencari invers suatu matriks.

Definisi 2.8 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika Aadalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor daria_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matrik ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj\ (A)$.

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A mempunyai invers. Hal tersebut dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 2.2 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks kuadrat A dapat dibalik jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2.3 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti :

$$A\ adj(A) = \det(A)\, I$$

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dari hasilkali $A\ adj(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} \qquad (2.3)$$

Jika $i = j$, maka Persamaan (2.3) adalah ekspansi kofaktor dari$det(A)$ sepanjang baris ke-$i$dari Teorema 1 dan jika$i \neq j$, maka semua $a$dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari$A$ sehingga nilai dari Persamaan(2.3) adalah nol. Oleh karena itu

$$A\, adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I \tag{2.4}$$

karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, sehingga Persamaan (2.4) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\frac{1}{\det(A)}[A\, adj(A)] = I \text{ atau } A\left[\frac{1}{\det(A)} adj(A)\right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

2.4 Induksi Matematika

Definisi 2.9 (Sukirman, 2006) Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $\mathrm{p}(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $\mathrm{p}(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(k+1)$ juga benar.

2.5 Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers Matriks Toeplitz

Matriks toeplitz yang dibahas oleh Bakti Siregar, dkk pada tahun 2014 adalah matriks toeplitz T_n seperti Persamaan (1.3). Pada matriks tersebut akan ditentukan determinan, matriks kofaktor, dan inversnya, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Determinan dari matriks toeplitz

Untuk memperoleh formula nilai determinan matriks toeplitz dilakukan dengan mengamati pola determinan matriks toeplitz T_n yang berorde 2×2 hingga 7×7 dengan menggunakan metode operasi baris elementer.

Operasi tersebut dapat dilihat pada proses berikut :

1 Misalkan matriks toeplitz berorde 2×2 adalah $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix}$ di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh

$$|T_2| = \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} (B_1 \leftrightarrow B_2) - \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} = -x^2 \text{ maka } |T_2| = -x^2$$

2 Misalkan matriks toeplitz berorde 3×3 adalah $T_3 = \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{bmatrix}$ di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh

$$|T_3| = \begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix} (B_1 \leftrightarrow B_3) - \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} (B_1 - B_2)$$

$$- \begin{vmatrix} x & x & x \\ 0 & x & -x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} (B_2 - B_3) = - \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & -2x \end{vmatrix} = 2x^3,$$

Proses untuk memperoleh determinan matriks Toeplitz T_4, T_5, T_6 dan T_7 dapat dicari dengan cara yang sama sehingga didapat hasilnya dalam bentuk tabel seperti di bawah ini :

Tabel 2.1 Nilai Determinan Matriks Toepliz T_n

No	Matriks Toeplitz T_n	Nilai Determinan
1	T_2	$-x^2$
2	T_3	$2x^3$
3	T_4	$-3x^4$
4	T_5	$4x^5$
5	T_6	$-5x^6$
6	T_7	$6x^7$

Dari Tabel 2.1 dapat diperoleh bahwa pola dari nilai determinan matriks toeplitz T_n terlihat pada Teorema 2.4.

Teorema 2.4 (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (3) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks T_n adalah

$$|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$$

Bukti :

Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika, andaikan T_n adalah matriks toeplitz dengan orde $n \geq 2$ yakni $\{2, 3, 5, \dots, n\}$.

Langkah pertama. Diperhatikan bahwa $|T_2|, |T_3|, |T_4|, \dots, |T_n|$ memiliki pola untuk setiap $n \geq 2$.

1. untuk $n = 2$ diperoleh $|T_2| = -x^2$
2. untuk $n = 3$ diperoleh $|T_3| = 2x^3 = -x^2.(-2x) = |T_2|.(-2x)$
3. untuk $n = 4$ diperoleh $|T_4| = -3x^2 = 2x^3.\left(\frac{-3}{2}x\right) = |T_3|.\frac{3}{2}x$
4. dan seterusnya.

dengan mengamati $|T_2|, |T_3|, |T_4|, \dots, |T_n|$ diperlihatkan bahwa $|T_3|$ bergantung pada $|T_2|$ dan $|T_4|$ bergantung pada $|T_3|$ sehingga $|T_{n+1}|$ bergantung pada $|T_n|$.

Langkah kedua. Asumsikan bahwa $|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$ benar, untuk $n \geq 2$ maka $|T_{n+1}| = (-1)^{n+2}\big((n+1)-1\big)x^{n+1} = (-1)^{n+2}n.x^{n+1}$ sehingga pola atau selisih dari $|T_n|$ menuju $|T_{n+1}|$ adalah $\frac{|T_{n+1}|}{|T_{n|}} = \frac{(-1)^{n+2}n.x^{n+1}}{(-1)^{n+1}(n-1)x^n} = \frac{-n}{(n-1)}x$. Jadi, untuk $n = k, |T_k| = (k-1)x^k$ sedemikian sehingga untuk $n = k+1$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
|T_{k+1}| &= |T_k|.\frac{-k}{(k-1)}x \\
&= (-1)^{k+1}(k-1)x^k.\left(\frac{-k}{(k-1)}x\right) \\
&= (-1)^{k+1}(-k)x^{k+1} \\
&= (-1)^{k+1}(-1)kx^{k+1} \\
&= (-1)^{k+2}.kx^{k+1}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$, di mana $n \geq 2$ berlaku untuk $|T_{n+1}|$.

b. Matriks kofaktor dari matriks toeplitz

Untuk menentukan invers matriks T_n, diperlukan kofaktor-kofaktor dari matriks T_n. Formula kofaktor-kofaktor matriks T_n dapat dilihat pada Teorema 2.5.

Teorema 2.5 (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (3) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka kofaktor-kofaktor matriks Toeplitz T_n adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} |T_{n-1}|, & untuk\ i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1}, & untuk\ i \neq j \end{cases}$$

di mana $K_{ij}T_n$ kofaktor-kofaktor yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j.

Bukti :

Misalkan T_n adalah suatu matriks toeplitz pada Persamaan (3), oleh Definisi 6 maka kofaktor dari matriks T_n adalah mengeliminasi baris ke-i dan kolom ke-j diperoleh $K_{ij}T_n = (-1)^{i+j}|T_{n-1}|$ sehingga $K_{ij}T_n = |T_{n-1}|$ untuk $i = j$. Teorema 1 menjamin bahwa kofaktor $K_{ij}T_n = |T_{n-1}|$ benar, sedangkan untuk membuktikan $K_{ij}T_n = (-1)^{n+1}x^{n-1}$ dilakukan dengan induksi matematika, andaikan T_n adalah matriks toeplitz dengan orde $n \geq 2 = \{2, 3, 4, \dots, n\}$ dan $i \neq j$.

Langkah pertama. Diperlihatkan bahwa $K_{ij}T_2, K_{ij}T_3, K_{ij}T_4, \dots, K_{ij}T_n$ memliki pola, untuk setiap $n \geq 2$ dan$i \neq j$.

1. untuk $n = 2$ diperoleh $K_{ij}T_2 = -x$
2. untuk $n = 3$ diperoleh $K_{ij}T_3 = x^2 = -x.(-x)$
3. untuk $n = 4$ diperoleh $K_{ij}T_4 = -x^3 = x^2.(-x)$
4. dan seterusnya.

dengan mengamati $K_{ij}T_2, K_{ij}T_3, K_{ij}T_4, \dots, K_{ij}T_n$ dapat diperlihatkan $K_{ij}T_3$ bergantung pada $K_{ij}T_2$ dan $K_{ij}T_4$ bergantung pada $K_{ij}T_3$ sehingga $K_{ij}T_{n+1}$ bergantung pada $K_{ij}T_n$.

Langkah kedua. Asumsikan bahwa $K_{ij}T_n = (-1)^{n+1}x^{n-1}$ benar, untuk $n \geq 2$ maka $K_{ij}T_{n+1} = (-1)^{n+2}x^n$ sehingga pola atau selisih dari $K_{ij}T_n$ menuju

$K_{ij}T_{n+1}$ adalah $\frac{K_{ij}T_{n+1}}{K_{ij}T_n} = \left(\frac{(-1)^{n+2}x^n}{(-1)^{n+1}x^{n-1}}\right) = -x$. Jadi, untuk $n = k$ adalah $K_{ij}T_k = (-1)^{k+1}x^{k-1}$ sedemikian sehingga untuk $k = n + 1$ diperoleh,

$$\begin{aligned} K_{ij}T_{k+1} &= K_{ij}T_k.(-x) \\ &= (-1)^{k+1}x^{k-1}.(-x) \\ &= (-1)^{k+1}(-1).x^{(k-1+1)} \\ &= (-1)^{k+2}x^k \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $K_{ij}T_n = (-1)^{n+1}x^{n-1}$, di mana $K_{ij}T_n$ adalah kofaktor- kofaktor matriks T_n orde $n \geq 2$ dan $i \neq j$, berlaku untuk $K_{ij}T_{n+1}$.

Pada Teorema 2.5 diperlihatkan kofaktor-kofaktor matriks T_n secara umum, sehingga pada Teorema 6 akan diperlihatkan invers matriks $T_n$yang diperoleh dengan menggunakan metode adjoin matriks T_n.

Teorema 2.6 (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.3) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $|T_n| \neq 0$ maka invers matriks topelitz T_n adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x}, & untuk\ i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x}, & untuk\ i \neq j \end{cases}$$

t_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke- i dan kolom ke- j.

Bukti :

Pembuktian dilakukan sesuai dengan Teorema 2.5 mengenai invers matriks yakni; andaikan T_n suatu matriks bujur sangkar berorde n dan dapat diperlihatkan matriks T_n^{-1}, sehingga $T_nT_n^{-1} = T_n^{-1}T_n = I$ maka T_n dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan T_n^{-1} dinamakan invers dari T_n sebagai berikut :

$$T_n^{-1}T_n = I = \begin{bmatrix} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x} & \dfrac{1}{(n-1)x} & \cdots & \dfrac{1}{(n-1)x} \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x} & \cdots & \dfrac{1}{(n-1)x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & \dfrac{1}{(n-1)x} & \cdots & \dfrac{-(n-2)}{(n-1)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{(n-1)x}{(n-1)x} & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \cdots & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} \\ \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \frac{(n-1)x}{(n-1)x} & \cdots & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \frac{-(n-2)x+(n-2)x}{(n-1)x} & \cdots & \frac{(n-1)x}{(n-1)x} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.
$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Langkah-langkah Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

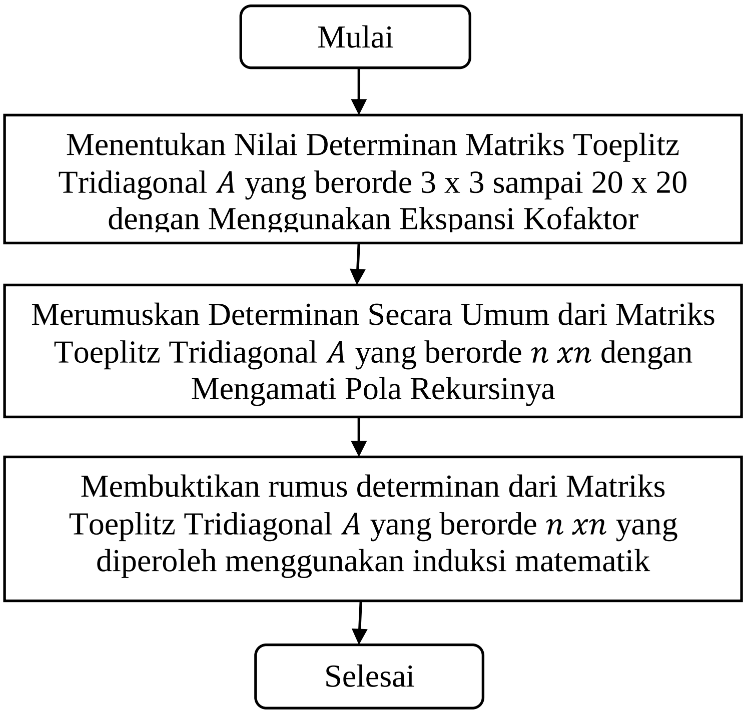
1. Diberikan suatu matriks Toeplitz tridiagonal

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

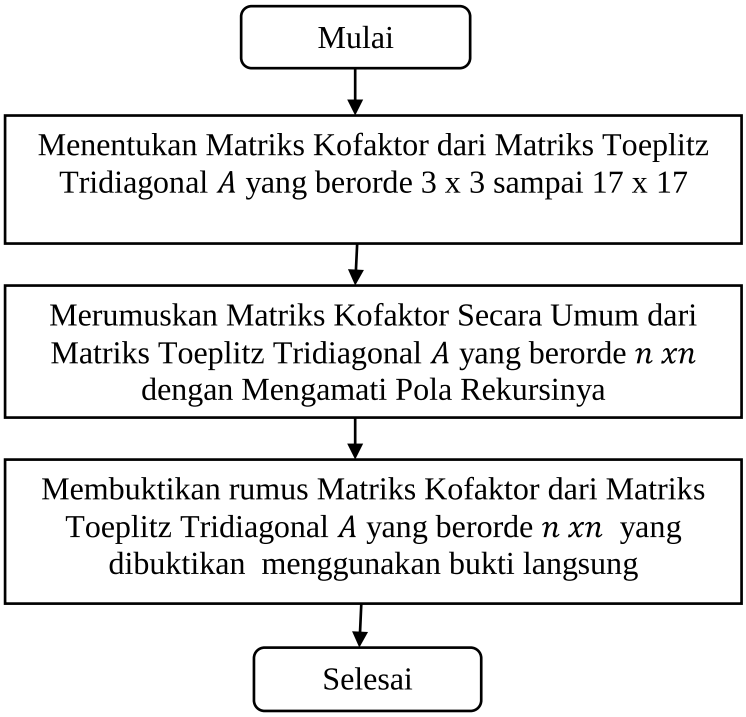
2. Menentukan Nilai Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers dari Matriks Toeplitz Tridiagonal A yang berorde 3 x 3 sampai 20 x 20 dengan Menggunakan Ekspansi Kofaktor.
3. Merumuskan bentuk Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers secara umum dari Matriks Toeplitz Tridiagonal A yang berorde $n\, xn$ dengan Mengamati Pola Rekursinya.
4. Membuktikan rumus Determinan, Matriks Kofaktor dan Invers dari Matriks Toeplitz Tridiagonal A yang berorde $n\, xn$ yang diperoleh menggunakan induksi matematik.

Langkah-langkah pada metodologi penelitian diatas dapat digambarkan secara detail dalam *Flow chart* berikut:

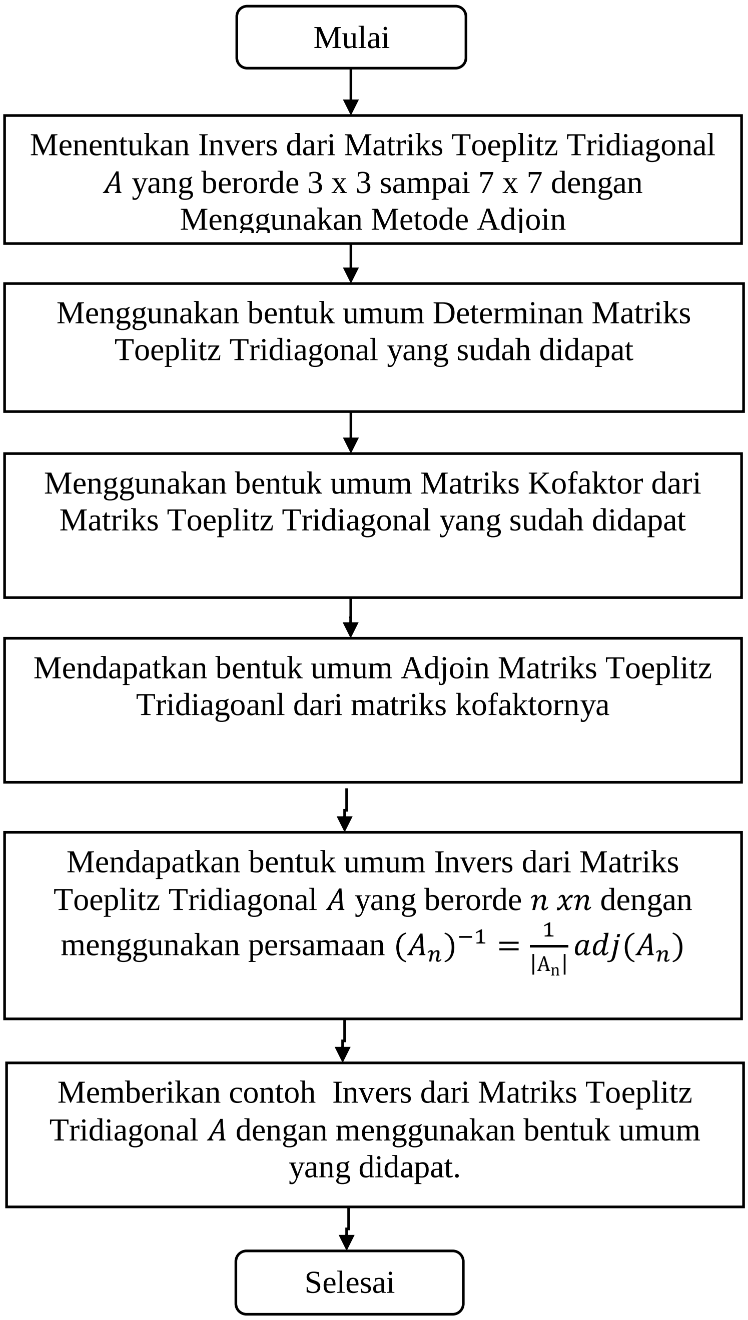
A. Langkah – langkah untuk menentukan determinan matriks toeplitz tridiagonal sebagai berikut



B. Langkah – langkah untuk menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal sebagai berikut



C. Langkah – langkah untuk menentukan invers matriks dari matriks toeplitz tridiagonal sebagai berikut



BAB IV

DETERMINAN MATRIKS TOEPLITZ TRIDIAGONAL

Penelitian ini akan membuktikan tiga persamaan umum untuk menentukan invers matriks torplitz tridiagonal. Persamaan pertama adalah menentukan determinan dari matriks toeplitz tridiagonal. Persamaan kedua adalah menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal, dan persamaan terakhir adalah mennetukan invers dari matriks toeplitz tridiagonal dengan menggunakan metode Adjoin.

4.1 Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde 3 x 3 sampai 20 x 20

Berikut proses dalam menentukan persamaan umum dari matriks toeplitz tridiagonal dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Dalam prosesnya pertama kali kita menentukan Nilai Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal yang berorde 3 x 3 sampai 20 x 20, yang disajikan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz Tridiagonal berorde 3×3 adalah

$$A_3 = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}, \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_3| = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b^3 - 2abc.$$

2. Diberikan matriks Toeplitz Tridiagonal berorde 4×4 adalah

$$A_4 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   dan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_4| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b^4 - 3ab^2c + a^2c^2.$$

3. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 5×5 adalah

$$A_5 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_5| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b^5 - 4ab^3c + 3a^2bc^2.$$

4. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 6×6 adalah

$$A_6 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_6| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b^6 - 5ab^4c + 6a^2b^2c^2 - a^3c^3.$$

5. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 7×7 adalah

$$A_7 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_7| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b^7 - 6ab^5c + 10a^2b^3c^2 - 4a^3bc^3.$$

6. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 8×8 adalah

$$A_8 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_8| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_8| = b^8 - 7ab^6c + 15a^2b^4c^2 - 10a^3b^2c^3 + a^4c^4.$$

7. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 9×9 adalah

$$A_9 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_9| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_9| = b^9 - 8ab^7c + 21a^2b^5c^2 - 20a^3b^3c^3 + 5a^4bc^4.$$

8. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 10×10 adalah

$$A_{10} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{10}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{10}| = b^{10} - 9ab^8c + 28a^2b^6c^2 - 35a^3b^4c^3 + 15a^4b^2c^4 - a^5c^5.$$

9. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 11×11 adalah

$$A_{11} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{11}| = b^{11} - 10ab^9c + 36a^2b^7c^2 - 56a^3b^5c^3 + 35a^4b^3c^4 - 6a^5bc^5.$$

10. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 12×12 adalah

$$A_{12} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{12}| = \begin{matrix} b^{12} - 11ab^{10}c + 45a^2b^8c^2 - 84a^3b^6c^3 + 70a^4b^4c^4 - 21a^5b^2c^5 \\ + a^6c^6 \end{matrix}.$$

11. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 13×13 adalah

$$A_{13} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{13}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{13}| = b^{13} - 12ab^{11}c + 55a^2b^9c^2 - 120a^3b^7c^3 + 126a^4b^5c^4 - 56a^5b^3c^5 + 7a^6bc^6$$

12. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 14×14 adalah

$$A_{14} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{14}| = \begin{vmatrix}
b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b
\end{vmatrix}$$

$$|A_{14}| = \begin{array}{l} b^{14} - 13ab^{12}c + 66a^2b^{10}c^2 - 165a^3b^8c^3 + 210a^4b^6c^4 - 126a^5b^4c^5 \\ + 28a^6b^2c^6 - a^7c^7 \end{array}$$

13. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 15×15 adalah

$$A_{15} = \begin{bmatrix}
b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b
\end{bmatrix}$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{15}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{15}| = \begin{aligned} & b^{15} - 14ab^{13}c + 78a^2b^{11}c^2 - 220a^3b^9c^3 + 330a^4b^7c^4 - 252a^5b^5c^5 \\ & + 84a^6b^3c^6 - 8a^7bc^7 \end{aligned}$$

14. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 16×16 adalah

$$A_{16} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{16}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{16}| = \begin{aligned} & b^{16} - 15ab^{14}c + 91a^2b^{12}c^2 - 286a^3b^{10}c^3 + 495a^4b^8c^4 - 462a^5b^6c^5 \\ & + 210a^6b^4c^6 - 36a^7b^2c^7 + a^8c^8 \end{aligned}$$

15. Diberikan matrik Teoplitz Tridiagonal berorde 17×17 adalah

$$A_{17} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

dan diberikan determinan dari matriks tersebut adalah

$$|A_{17}| = \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$|A_{16}| = \begin{array}{l} b^{16} - 15ab^{14}c + 91a^2b^{12}c^2 - 286a^3b^{10}c^3 + 495a^4b^8c^4 - 462a^5b^6c^5 \\ + 210a^6b^4c^6 - 36a^7b^2c^7 + a^8c^8 \end{array}$$

Berikut diberikan nilai determinan dari matriks Toeplitz Tridiagonal yang berorde 3×3 sampai orde 20×20.

$$\left|A_3\right| = b^3 - 2abc$$
$$\left|A_4\right| = b^4 - 3ab^2c + a^2c^2$$
$$\left|A_5\right| = b^5 - 4ab^3c + 3a^2bc^2$$
$$\left|A_6\right| = b^6 - 5ab^4c + 6a^2b^2c^2 - a^3c^3$$
$$\left|A_7\right| = b^7 - 6ab^5c + 10a^2b^3c^2 - 4a^3bc^3$$
$$\left|A_8\right| = b^8 - 7ab^6c + 15a^2b^4c^2 - 10a^3b^2c^3 + a^4c^4$$
$$\left|A_9\right| = b^9 - 8ab^7c + 21a^2b^5c^2 - 20a^3b^3c^3 + 5a^4bc^4$$
$$\left|A_{10}\right| = b^{10} - 9ab^8c + 28a^2b^6c^2 - 35a^3b^4c^3 + 15a^4b^2c^4 - a^5c^5$$
$$\left|A_{11}\right| = b^{11} - 10ab^9c + 36a^2b^7c^2 - 56a^3b^5c^3 + 35a^4b^3c^4 - 6a^5bc^5$$
$$\left|A_{12}\right| = b^{12} - 11ab^{10}c + 45a^2b^8c^2 - 84a^3b^6c^3 + 70a^4b^4c^4 - 21a^5b^2c^5 + a^6c^6$$
$$\left|A_{13}\right| = b^{13} - 12ab^{11}c + 55a^2b^9c^2 - 120a^3b^7c^3 + 126a^4b^5c^4 - 56a^5b^3c^5 + 7a^6bc^6$$
$$\left|A_{14}\right| = b^{14} - 13ab^{12}c + 66a^2b^{10}c^2 - 165a^3b^8c^3 + 210a^4b^6c^4 - 126a^5b^4c^5 + 28a^6b^2c^6 - a^7c^7$$
$$\left|A_{15}\right| = b^{15} - 14ab^{13}c + 78a^2b^{11}c^2 - 220a^3b^9c^3 + 330a^4b^7c^4 - 252a^5b^5c^5 + 84a^6b^3c^6 - 8a^7bc^7$$
$$\left|A_{16}\right| = b^{16} - 15ab^{14}c + 91a^2b^{12}c^2 - 286a^3b^{10}c^3 + 495a^4b^8c^4 - 462a^5b^6c^5 + 210a^6b^4c^6 - 36a^7b^2c^7 + a^8c^8$$
$$\left|A_{17}\right| = b^{17} - 16ab^{15}c + 105a^2b^{13}c^2 - 364a^3b^{11}c^3 + 715a^4b^9c^4 - 792a^5b^7c^5 + 462a^6b^5c^6 - 120a^7b^3c^7 + 9a^8bc^8$$
$$\left|A_{18}\right| = b^{18} - 17ab^{16}c + 120a^2b^{14}c^2 - 455a^3b^{12}c^3 + 1001a^4b^{10}c^4 - 1287a^5b^8c^5 + 924a^6b^6c^6 - 330a^7b^4c^7 + 45a^8b^2c^8 - a^9c^9$$
$$\left|A_{19}\right| = b^{19} - 18ab^{17}c + 136a^2b^{15}c^2 - 560a^3b^{13}c^3 + 1365a^4b^{11}c^4 - 2002a^5b^9c^5 + 1716a^6b^7c^6 - 792a^7b^5c^7 + 165a^8b^3c^8 - 10a^9c^9$$
$$\left|A_{20}\right| = b^{20} - 19ab^{18}c + 153a^2b^{16}c^2 - 680a^3b^{14}c^3 + 182a^4b^{12}c^4 - 3003a^5b^{10}c^5 + 3003a^6b^8c^6 - 1716a^7b^6c^7 + 495a^8b^4c^8 - 55a^9b^2c^9 + a^{10}c^{10}$$

4.2 Bentuk Umum Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde $n\ x\ n$

Setelah kita mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks toplitz tridiagonal yang berorde 3 x 3 sampai 20 x 20, maka kita akan buatkan bentuk umum dari determinan matriks toeplitz tridiagonal tersebut. Terlihat dalam teorema 3.1 berikut.

Teorema 4.1. Diberikan A_n suatu metrik toeplitz tridiagonal berorde $n \geq 3$ pada persamaan (1.2) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$
\begin{aligned}
|A_n| = {} & b^n - (n-1)ab^{n-2}c + \sum_{i=1}^{n-3} ia^2b^{n-4}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{n-5} i \right) a^3 b^{n-6} c^3 \\
& + \left[\frac{(n-7)}{1!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-8)}{1!} \sum_{i=1}^{2} i + \frac{(n-9)}{1!} \sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-7} i \right] a^4 b^{n-8} c^4 \\
& - \left[\frac{(n-9)(n-8)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-10)(n-9)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-9} i \right] a^5 b^{n-10} c^5 \\
& + \left[\frac{(n-11)(n-10)(n-9)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-12)(n-11)(n-10)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-11} i \right] \\
& a^6 b^{n-12} c^6 \\
& - \left[\frac{(n-13)(n-12)(n-11)(n-10)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-14)(n-13)(n-12)(n-11)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-13} i \right] \\
& a^7 b^{n-14} c^7 + \cdots
\end{aligned}
$$

Pembuktian teorema tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

Bukti:

1. Untuk $n = 3$ maka berlaku

   $$|A_3| = b^3 - 2abc + 0$$

   $$= b^3 - 2abc \qquad \text{,benar}$$

2. Asumsikan untuk $n = k$ benar, yaitu

$$\left|A_k\right| = b^k - (k-1)ab^{k-2}c + \sum_{i=1}^{k-3} i a^2 b^{k-4} c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-5} i \right) a^3 b^{k-6} c^3$$

$$+ \left[\frac{(k-7)}{1!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-8)}{1!} \sum_{i=1}^{2} i + \frac{(k-9)}{1!} \sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-7} i \right] a^4 b^{k-8} c^4$$

$$- \left[\frac{(k-9)(k-8)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-10)(k-9)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-9} i \right] a^5 b^{k-10} c^5$$

$$+ \left[\frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-11} i \right]$$

$$a^6 b^{k-12} c^6$$

$$- \left[\frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-14)(k-13)(k-12)(k-11)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-13} i \right]$$

$$a^7 b^{k-14} c^7 + \cdots$$

3. Akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$ juga benar,

$$\left|A_{k+1}\right| = b^{k+1} - (k)ab^{k-1}c + \sum_{i=1}^{k-2} i a^2 b^{k-3} c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-4} i \right) a^3 b^{k-5} c^3$$

$$+ \left[\frac{(k-6)}{1!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-7)}{1!} \sum_{i=1}^{2} i + \frac{(k-8)}{1!} \sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-6} i \right] a^4 b^{k-7} c^4$$

$$- \left[\frac{(k-8)(k-7)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-9)(k-8)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-8} i \right] a^5 b^{k-9} c^5$$

$$+ \left[\frac{(k-10)(k-9)(k-8)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-10} i \right]$$

$$a^6 b^{k-11} c^6$$

$$- \left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)(k-9)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{k-12} i \right]$$

$$a^7 b^{k-13} c^7 + \cdots$$

Selanjutnya dibuktikan sebagai berikut:

Perhatikan bahwa

$$\left|A_{k+1}\right| = b\left|A_k\right| - ac\left|A_{k-1}\right|$$

$$= b^{k+1} - (k-1)\,ab^{k-1}c + \sum_{i=1}^{k-3} i\,.\; a^2b^{k-3}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-5} i\right) a^3b^{k-5}c +$$

$$a^3b^{k-5}c^3\left[\frac{(k-7)}{1!}\sum_{i=1}^{i} i + \frac{(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + \frac{(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1\cdot\sum_{i=1}^{k-7} i\right]$$

$$a^4b^{k-7}c^4 - \left[\frac{(k-9)(k-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-10)(k-9)}{2!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\cdot\sum_{i=1}^{k-9} i\right]$$

$$a^5b^{k-9}c^5 + \left[\frac{(k-11)\,(k-10)\,(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-12)\,(k-11)\,(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots\right.$$

$$\left.+1.\sum_{i=1}^{k-11} i\right] a^6b^{k-11}c^6 + \cdots + \left[\frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(k-14)(k-13)(k-12)(k-11)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1.\sum_{i=1}^{k-13} i\right] a^7b^{k-13}c^8 + \ldots -$$

$$ac\left\{b^{k-1} - (k-2)\,ab^{k-3}c + \sum_{i=1}^{k-4} i\,.\,a^2b^{k-5}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-6} i\right)\right.$$

$$a^3b^{k-7}c^3\left[\frac{k-8}{1!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{k-9}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + (k-10)\sum_{i=1}^{3} i + \cdots \sum_{i=1}^{k-8} i\right] a^4b^{k-9}c^4 -$$

$$\left[\frac{(k-10)(k-9)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-11)(k-10)}{2!}\sum_{i=1}^{2} i \cdots + 1.\sum_{i=1}^{k-10} i\right] a^5b^{k-11}c^5 +$$

$$\left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-13)(k-12)(k-11)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots +\right.$$

$$\left.\left.1.\sum_{i=1}^{k-12} i\right] a^7b^{k-15}c^7 + \cdots\right\}$$

$$= b^{k+1} - (k-1)\,ab^{k-1}c + \sum_{i=1}^{k-3} i\,.\; a^2b^{k-3}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-5} i\right) a^3b^{k-5}c +$$

$$a^3b^{k-5}c^3\left[\frac{(k-7)}{1!}\sum_{i=1}^{i} i + \frac{(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + \frac{(k-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1\cdot\sum_{i=1}^{k-7} i\right]$$

$$a^4b^{k-7}c^4 - \left[\frac{(k-9)(k-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-10)(k-9)}{2!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1\cdot\sum_{i=1}^{k-9} i\right]$$

$$a^5b^{k-9}c^5 + \left[\frac{(k-11)\,(k-10)\,(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-12)\,(k-11)\,(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots \right.$$

$$\left. + 1.\sum_{i=1}^{k-11} i \right] a^6b^{k-11}c^6 + \cdots + \left[\frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(k-14)(k-13)(k-12)(k-11)}{4!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1.\sum_{i=1}^{k-13} i \right] a^7b^{k-13}c^8 + \ldots$$

$$-b^{k-1}.\,ac + (k-2)\,a^2b^{k-3}c^2 - \sum_{i=1}^{k-4} i\,.\,a^3b^{k-5}c^3 + \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-6} i\right)$$

$$a^4b^{k-7}c^4 - \left(\frac{(k-8)}{1!}\sum_{i=1}^{1} i + (k-9)\sum_{i=1}^{2} i + (k-10)\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-8} i\right) a^5b^{k-9}c^5$$

$$+ \left[\frac{(k-9(k-10)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-11)(k-10)}{2!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-10} i\right] a^6b^{k-11}c^6 -$$

$$\left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-13)(k-12)(k-11)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + 1.\sum_{i=1}^{k-12} i\right] a^8b^{k-15}c^8$$

Artinya kita dapatkan

$$= b^{k+1} - k\,ab^{k-1}c + \sum_{i=1}^{k-2} i\,.\,a^2b^{k-3}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-4} i\right) a^3b^{k-5}c^3 +$$

$$\left[(k-6)\sum_{i=1}^{1} i + (k-7)\sum_{i=1}^{2} i + (k-8)\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1.\sum_{i=1}^{k-6} i\right] a^4b^{k-7}c^4 -$$

$$\left[\frac{(k-8)(k-7)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-9)(k-8)}{2!}\sum_{i=1}^{2} i + \frac{(k-10)(k-9)}{2!}\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1.\sum_{i=1}^{k-8} i\right]$$

$$a^5b^{k-9}c^5 + \left[\frac{(k-10)(k-9)(k-8)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-11)(k-10)(k-9)}{3!}\sum_{i=1}^{2} i + \cdots 1.\sum_{i=1}^{k-10} i\right]$$

$$a^6b^{k-11}c^6 - \left[\frac{(k-12)(k-11)(k-10)(k-9)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(k-13)(k-12)(k-11)(k-10)}{4!}\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{k-12} i\right] a^8b^{k-13}c^8 + \cdots$$

Pembuktian berakhir.

BAB V

MATRIKS KOFAKTOR UNTUK
MATRIKS TOEPLITZ TRIDIAGONAL

Matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal diperoleh dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Menentukan matriks kofaktor diketahui dengan menggunakan persamaan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Berikut diberikan proses untuk mendapatkan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal.

5.1 Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde 3 x 3 sampai 7 x 7

1. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 3 x 3, yaitu

$$A_3 = \begin{bmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = b^2 - ac = |A_2|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = -1(ab) = -ab$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = -1bc = -bc$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b^2$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & a \end{vmatrix} = -ab$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = c^2$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 \\ a & c \end{vmatrix} = -bc$$

$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = b^2 - ac = |A_2|$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah

$$C_3 = \begin{bmatrix} b^2 - ac & -ab & a^2 \\ -bc & b^2 & -ab \\ c^2 & -bc & b^2 - ac \end{bmatrix}$$

atau

$$C_3 = \begin{bmatrix} |A_2| & -a|A_1| & a^2 \\ -c|A_1| & |A_1||A_1| & -a|A_1| \\ c^2 & -c|A_1| & |A_2| \end{bmatrix}$$

dengan,

$|A_1| = b$

$|A_2| = b^2 - ac$

2. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 4 x 4, yaitu

$$A_4 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b^3 - 2abc = |A_3|$

$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = (-1)(ab^2 - a^2c) = -a(b^2 - ac) = -a|A_2|$

$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a(ab) = a^2b = a^2|A_1|$

$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3$

Selanjutnya entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = (-1)c(b^2 - ac) = -c|A_2|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b(b^2 - ac) = b|A_2| = |A_1||A_2|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (-1)ab^2 = -ab|A_1| = -a|A_1| = -a|A_1||A_1|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2b = a^2|A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = bc^2 = c^2|A_1|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = (-1)b^2c = -c|A_1||A_1|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b(b^2 - ac) = b|A_2| = |A_1||A_2|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)a(b^2 - ac) = -a|A_2|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -c^3$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = bc^2 = c^2|A_1|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} = -c(b^2 - ac) = -c|A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b^3 - 2abc = |A_3|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor C_4 adalah

$$C_4 = \begin{bmatrix} |A_3| & -a|A_2| & a^2|A_1| & -a^3 \\ -c|A_2| & |A_1||A_2| & -a|A_1||A_1| & a^2|A_1| \\ c^2|A_1| & -c|A_1||A_1| & |A_1||A_2| & -a|A_2| \\ -c^3 & c^2|A_1| & -c|A_2| & |A_4| \end{bmatrix}$$

dengan,

$|A_1| = b$

$|A_3| = b^2 - ac$

$|A_3| = b^2 - 2abc$

3. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 5 x 5, yaitu :

$$A_5 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b^4 - 3ab^2c + a^2c^2 = |A_4|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = (-1)(a) \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_3|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a.a \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = a^2|A_2|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (-1)(a) \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a.a \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} = -a^3b$$
$$= a^3|A_1|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_3|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b|A_3| = |A_1||A_3|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -b.a|A_2| = -a|A_1||A_2|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^2b^2 = a^2|A_1||A_1|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3b = -a^3|A_1|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_2|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -bc|A_2| = -c|A_1||A_2|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_2||A_2|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -b.a \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = -ab|A_2|$$
$$= -a|A_1||A_2|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_2|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^2 \begin{vmatrix} c & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = -c^3 b = -c^3|A_1|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = b^2 \begin{vmatrix} c & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = b^2c^2 = c^2|A_1||A_1|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -b \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} = -bc|A_2| = -c|A_1||A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b|A_3| = |A_1||A_3|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_3|$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix} = c^4$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -bc^3 = -c^3|A_1|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} = c^2|A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & c \end{vmatrix} = -c \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_4|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya C_5 adalah

$$C_5 = \begin{bmatrix} |A_4| & -a|A_3| & a^2|A_2| & -a^3|A_1| & a^4 \\ -c|A_3| & |A_1||A_3| & -a|A_1||A_2| & a^2|A_1||A_1| & -a^3|A_1| \\ c^2|A_2| & -c|A_1||A_2| & |A_2||A_2| & -a|A_1||A_2| & a^2|A_2| \\ -c^3|A_1| & c^2|A_1||A_1| & -c|A_1||A_2| & |A_1||A_2| & -a|A_3| \\ c^4 & -c^3|A_1| & c^2|A_2| & -c|A_3| & |A_4| \end{bmatrix}$$

dengan,

$|A_1| = b$

$|A_2| = b^2 - ac$

$|A_3| = b^3 - 2abc$

$|A_4| = b^4 - 3ab^2c + a^2c^2$

4. Menentukan matriks kofaktor untuk matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 6 x 6, yaitu :

$$A_6 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b^5 - 4ab^3c + 3a^2bc^2 = |A_5|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = (-a)|A_4|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a.a \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & b & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_3|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^3 \begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} = -a^3|A_2|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^4|A_1|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5$$

Selanjutnya untuk entri matiks kofaktor baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_4|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b|A_4| = |A_1||A_4|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -b.a|A_3| = -a|A_1||A_3|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b.a^2|A_2| = a^2|A_1||A_2|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -b.a^3.b = -a^3|A_1||A_1|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = b.a^4 = a^4|A_1|$$

Selanjutnya untuk entri matriks kofaktor baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_3|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -b.c|A_3| = -c|A_1||A_3|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = (b^2 - ac)|A_3| = |A_2||A_3|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_2||A_2|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^2.b|A_2| = a^2|A_1||A_2|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_2|$$

Selanjutnya untuk matriks kofaktor baris ke 4

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_2|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2.b|A_2| = c^2|A_1||A_2|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_2||A_2|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_3||A_2|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a.b|A_3| = -a|A_1||A_3|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_3|$$

Selanjutnya untuk matrik kofaktor baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^4.b = c^4|A_1|$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3.b.b = -c^3|A_1||A_1|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2.b|A_2| = c^2|A_1||A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c.b.|A_3| = -c|A_1||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = |A_4||A_1|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_4|$$

Selanjutnya untuk matriks kofaktor baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^7 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^5$$

$$C_{62} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = c^4.b = c^4|A_1|$$

$$C_{63} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^3|A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} = c^2|A_3|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c \end{vmatrix} = -c|A_4|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_5|$$

Sehingga diperoleh untuk matriks kofaktor dari A_6 adalah

$$C_6 = \begin{bmatrix} |A_5| & -a|A_4| & a^2|A_3| & -a^3|A_2| & a^4|A_1| & -a^5 \\ -c|A_4| & |A_1||A_4| & -a|A_1||A_3| & a^2|A_1||A_2| & -a^3|A_1||A_1| & a^4|A_1| \\ c^2|A_3| & -c|A_1||A_3| & |A_2||A_3| & -a|A_2||A_2| & a^2|A_1||A_2| & -a^3|A_2| \\ -c^3|A_2| & c^2|A_1||A_2| & -c|A_2||A_2| & |A_3||A_2| & -a|A_1||A_3| & a^2|A_3| \\ c^4|A_1| & -c^3|A_1||A_1| & c^2|A_1||A_2| & -c|A_1||A_3| & |A_4||A_1| & -a|A_4| \\ -c^5 & c^4|A_1| & -c^3|A_2| & c^2|A_3| & -c|A_4| & |A_5| \end{bmatrix}$$

5. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_7, yaitu:

$$A_7 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_6|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = (-a)|A_5|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_4|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^3|A_3|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4|A_2|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^5 . b = -a^5|A_1|$$

$$C_{17} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^6$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_5|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = b|A_5| = |A_1||A_5|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a.b|A_4| = -a|A_1||A_4|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2.b|A_3| = a^2|A_1||A_3|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^3.b|A_2| = -a^3|A_1||A_2|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^4.b.b = a^4|A_1||A_1|$$

$$C_{27} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5.b = -a^5|A_1|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_4|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c.b|A_4| = -c|A_1||A_4|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_2||A_4|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_2||A_3|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_2||A_2|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^3|A_2||A_1|$$

$$C_{37} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4|A_2|$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_3|$$

$$C_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2.b|A_3| = c^2|A_1||A_3|$$

$$C_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_2||A_3|$$

$$C_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_2||A_4|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a.b|A_4| = -a|A_1||A_4|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_3|$$

$$C_{47} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_3|$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^4|A_2|$$

$$C_{52} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_1||A_2|$$

$$C_{53} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_2||A_2|$$

$$C_{54} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_2||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_4||A_2|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a|A_4||A_1|$$

$$C_{57} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_4|$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^5.b = -c^5.|A_1|$$

$$C_{62} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^4|A_1||A_1|$$

$$C_{63} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_1||A_2|$$

$$C_{64} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_1||A_3|$$

$$C_{65} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_1||A_4|$$

$$C_{66} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = |A_5||A_1|$$

$$C_{67} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_5|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = c^6$$

$$C_{72} = (-1)^{9} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^5.b = -c^5|A_1|$$

$$C_{73} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = c^4|A_2|$$

$$C_{74} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^3|A_3|$$

$$C_{75} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} = c^2|A_4|$$

$$C_{76} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \end{vmatrix} = -c|A_5|$$

$$C_{77} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_6|$$

Sehingga diperoleh matriks kofaktor dari A_7 adalah

$$C_7 = \begin{bmatrix} |A_6| & -a|A_5| & a^2|A_4| & -a^3|A_3| & a^4|A_2| & -a^5|A_1| & a^6 \\ -c|A_5| & |A_1||A_5| & -a|A_1||A_4| & a^2|A_1||A_3| & -a^3|A_1||A_2| & a^4|A_1||A_1| & -a^5|A_1| \\ c^2|A_4| & -c|A_1||A_4| & |A_2||A_4| & -a|A_2||A_3| & a^2|A_2||A_2| & -a^3|A_1||A_2| & a^4|A_2| \\ -c^3|A_3| & c^2|A_1||A_3| & -c|A_2||A_3| & |A_2||A_4| & -a|A_1||A_4| & a^2|A_1||A_3| & -a^3|A_3| \\ c^4|A_2| & -c^3|A_1||A_2| & c^2|A_2||A_2| & -c|A_2||A_3| & |A_4||A_2| & -a|A_4||A_1| & a^2|A_4| \\ -c^5|A_1| & c^4|A_1||A_1| & -c^3|A_1||A_2| & c^2|A_1||A_3| & -c|A_1||A_4| & |A_5||A_1| & -a|A_5| \\ c^6 & -c^5|A_1| & c^4|A_2| & -c^3|A_3| & c^2|A_4| & -c|A_5| & |A_6| \end{bmatrix}$$

5.2 Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde 8 x 8 sampai 10 x 10

6. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_8, dengan proses sebagai berikut:

$$A_8 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_7|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_6|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_5|$$

$$C_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^3|A_4|$$

$$C_{15} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4|A_3|$$

$$C_{16} = (-1)^7 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^5|A_2|$$

$$C_{17} = (-1)^8 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^6|A_1|$$

$$C_{18} = (-1)^9 \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^7$$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_6|$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_1||A_6|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_1||A_5|$$

$$C_{24} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_1||A_4|$$

$$C_{25} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^3|A_1||A_3|$$

$$C_{26} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^4|A_1||A_2|$$

$$C_{27} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^5|A_1||A_1|$$

$$C_{28} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^6|A_1|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_5|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_1||A_5|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_2||A_5|$$

$$C_{34} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_2||A_4|$$

$$C_{35} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_2||A_3|$$

$$C_{36} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a^3|A_2||A_2|$$

$$C_{37} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^4|A_2||A_1|$$

$$C_{38} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^5|A_2|$$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$$C_{41} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_4|$$

$$C_{42} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_1||A_4|$$

$$C_{43} = (-1)^{7} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_2||A_4|$$

$$C_{44} = (-1)^{8} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_3||A_4|$$

$$C_{45} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_3||A_3|$$

$$C_{46} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = a^2|A_3||A_2|$$

$$C_{47} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a^3|A_3||A_1|$$

$$C_{48} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4|A_3|$$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$$C_{51} = (-1)^6 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^4|A_3|$$

$$C_{52} = (-1)^7 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_1||A_3|$$

$$C_{53} = (-1)^8 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_2||A_3|$$

$$C_{54} = (-1)^9 \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_3||A_3|$$

$$C_{55} = (-1)^{10} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_4||A_3|$$

$$C_{56} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -a|A_4||A_2|$$

$$C_{57} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^2|A_4||A_1|$$

$$C_{58} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3|A_4|$$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$$C_{61}=(-1)^7\begin{vmatrix} c&0&0&0&0&0&0\\ b&c&0&0&0&0&0\\ a&b&c&0&0&0&0\\ 0&a&b&c&0&0&0\\ 0&0&a&b&c&0&0\\ 0&0&0&0&a&b&c\\ 0&0&0&0&0&a&b \end{vmatrix}=-c^5.|A_2|$$

$$C_{62}=(-1)^8\begin{vmatrix} b&0&0&0&0&0&0\\ a&c&0&0&0&0&0\\ 0&b&c&0&0&0&0\\ 0&a&b&c&0&0&0\\ 0&0&a&b&c&0&0\\ 0&0&0&0&a&b&c\\ 0&0&0&0&0&a&b \end{vmatrix}=c^4|A_1||A_2|$$

$$C_{63}=(-1)^9\begin{vmatrix} b&c&0&0&0&0&0\\ a&b&0&0&0&0&0\\ 0&a&c&0&0&0&0\\ 0&0&b&c&0&0&0\\ 0&0&a&b&c&0&0\\ 0&0&0&0&a&b&c\\ 0&0&0&0&0&a&b \end{vmatrix}=-c^3|A_2||A_2|$$

$$C_{64}=(-1)^{10}\begin{vmatrix} b&c&0&0&0&0&0\\ a&b&c&0&0&0&0\\ 0&a&b&0&0&0&0\\ 0&0&a&c&0&0&0\\ 0&0&0&b&c&0&0\\ 0&0&0&0&a&b&c\\ 0&0&0&0&0&a&b \end{vmatrix}=c^2|A_3||A_2|$$

$$C_{65}=(-1)^{11}\begin{vmatrix} b&c&0&0&0&0&0\\ a&b&c&0&0&0&0\\ 0&a&b&c&0&0&0\\ 0&0&a&b&0&0&0\\ 0&0&0&a&c&0&0\\ 0&0&0&0&a&b&c\\ 0&0&0&0&0&a&b \end{vmatrix}=-c|A_4||A_2|$$

$$C_{66}=(-1)^{12}\begin{vmatrix} b&c&0&0&0&0&0\\ a&b&c&0&0&0&0\\ 0&a&b&c&0&0&0\\ 0&0&a&b&c&0&0\\ 0&0&0&a&b&0&0\\ 0&0&0&0&0&b&c\\ 0&0&0&0&0&a&b \end{vmatrix}=|A_5||A_2|$$

$$C_{67} = (-1)^{13}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = -a|A_5||A_1|$$

$$C_{68} = (-1)^{14}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2|A_5|$$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$$C_{71} = (-1)^{8}\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^6|A_1|$$

$$C_{72} = (-1)^{9}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^5|A_1||A_1|$$

$$C_{73} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^4|A_1||A_2|$$

$$C_{74} = (-1)^{11}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c^3|A_1||A_3|$$

$$C_{75} = (-1)^{12}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = c^2|A_1||A_4|$$

$$C_{76} = (-1)^{13}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = -c|A_1||A_5|$$

$$C_{77} = (-1)^{14}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = |A_1||A_6|$$

$$C_{78} = (-1)^{15}\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -a|A_6|$$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$$C_{81} = (-1)^{9}\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^7$$

$$C_{82} = (-1)^{10}\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = c^6|A_1|$$

$$C_{83} = (-1)^{11} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^5|A_2|$$

$$C_{84} = (-1)^{12} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = c^4|A_3|$$

$$C_{85} = (-1)^{13} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -c^3|A_4|$$

$$C_{86} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \end{vmatrix} = c^2|A_5|$$

$$C_{87} = (-1)^{15} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & c \end{vmatrix} = -c|A_6|$$

$$C_{88} = (-1)^{14} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} = |A_7|$$

Berdasarkan hasil dari matriks kofaktor-kofaktor yang didapat dari matriks A_8 baris pertama sampai baris kedelapan, maka dapat dibuat dalam suatu matrik kofaktor, yaitu

$$C_8 = \begin{bmatrix} |A_7| & -a|A_6| & a^2|A_5| & -a^3|A_4| & a^4|A_3| & -a^5|A_2| & a^6|A_1| & -a^7 \\ -c|A_6| & |A_1||A_6| & -a|A_1||A_5| & a^2|A_1||A_4| & -a^3|A_1||A_3| & a^4|A_1||A_2| & -a^5|A_1||A_1| & a^6|A_1| \\ c^2|A_5| & -c|A_1||A_5| & |A_2||A_5| & -a|A_2||A_4| & a^2|A_2||A_3| & -a^3|A_2||A_2| & a^4|A_2||A_1| & -a^5|A_2| \\ -c^3|A_4| & c^2|A_1||A_4| & -c|A_2||A_4| & |A_3||A_4| & -a|A_3||A_3| & a^2|A_3||A_2| & -a^3|A_3||A_1| & a^4|A_3| \\ c^4|A_3| & -c^3|A_1||A_3| & c^2|A_2||A_3| & -c|A_3||A_3| & |A_4||A_3| & -a|A_4||A_2| & a^2|A_4||A_1| & -a^3|A_4| \\ -c^5|A_2| & c^4|A_1||A_2| & -c^3|A_2||A_2| & c^2|A_3||A_2| & -c|A_4||A_2| & |A_5||A_2| & -a|A_5||A_1| & a^2|A_5| \\ c^6|A_1| & -c^5|A_1||A_1| & c^4|A_1||A_2| & -c^3|A_1||A_3| & c^2|A_1||A_4| & -c|A_1||A_5| & |A_6||A_1| & -a|A_6| \\ -c^7 & c^6|A_1| & -c^5|A_2| & c^4|A_3| & -c^3|A_4| & c^2|A_5| & -c|A_6| & |A_7| \end{bmatrix}$$

7. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_9, dengan proses sebagai berikut:

$$A_9 = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = |A_8|$ $\quad C_{12} = -a|A_7|$ $\quad C_{13} = a^2|A_6|$

$C_{14} = -a^3|A_5|$ $\quad C_{15} = a^4|A_4|$ $\quad C_{16} = -a^5|A_3|$

$C_{17} = a^6|A_2|$ $\quad C_{18} = -a^7|A_1|$ $\quad C_{19} = a^8$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = -c|A_7|$ $\quad C_{22} = |A_1||A_7|$ $\quad C_{23} = -a|A_1||A_6|$

$C_{24} = a^2|A_1||A_5|$ $\quad C_{25} = -a^3|A_1||A_4|$ $\quad C_{26} = a^4|A_1||A_3|$

$C_{27} = -a^5|A_1||A_2|$ $\quad C_{28} = a^6|A_1||A_1|$ $\quad C_{29} = -a^7|A_1|$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$C_{31} = c^2|A_6|$ $\quad C_{32} = -c|A_1||A_6|$ $\quad C_{33} = |A_2||A_6|$

$C_{34} = -a|A_2||A_5|$ $\quad C_{35} = a^2|A_2||A_4|$ $\quad C_{36} = -a^3|A_2||A_3|$

$C_{37} = a^4|A_2||A_2|$ $\quad C_{38} = -a^5|A_2||A_1|$ $\quad C_{39} = a^6|A_2|$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$C_{41} = -c^3|A_5|$ $\quad C_{47} = -a^3|A_3||A_2|$ $\quad C_{45} = -a|A_3||A_4|$

$C_{44} = |A_3||A_5|$ $\quad C_{42} = c^2|A_1||A_5|$ $\quad C_{48} = a^4|A_3||A_1|$

$C_{43} = -c|A_2||A_5|$ $\quad C_{46} = a^2|A_3||A_3|$ $\quad C_{49} = -a^5|A_3|$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$C_{51} = c^4|A_4|$ $\quad C_{52} = -c^3|A_1||A_4|$ $\quad C_{53} = c^2|A_2||A_4|$

$C_{54} = -c|A_3||A_4|$ $\quad C_{55} = |A_4||A_4|$ $\quad C_{56} = -a|A_4||A_3|$

$C_{57} = a^2|A_4||A_2|$ $\quad C_{58} = -a^3|A_4||A_1|$ $\quad C_{59} = a^4|A_4|$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$C_{61} = -c^5.|A_3|$ $\quad C_{62} = c^4|A_1||A_3|$ $\quad C_{63} = -c^3|A_2||A_3|$

$C_{64} = c^2|A_3||A_3|$ $\quad C_{65} = -c|A_4||A_3|$ $\quad C_{66} = |A_5||A_3|$

$C_{67} = -a|A_5||A_2|$ $\quad C_{68} = a^2|A_5||A_1|$ $\quad C_{69} = -a^3|A_5|$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh

$C_{71} = c^6|A_2|$ $\quad C_{72} = -c^5|A_1||A_2|$ $\quad C_{73} = c^4|A_2||A_2|$

$C_{74} = -c^3|A_3||A_2|$ $\quad C_{75} = c^2|A_4||A_2|$ $\quad C_{76} = -c|A_5||A_1|$

$C_{77} = |A_6||A_2|$ $\quad C_{78} = -a|A_6||A_1|$ $\quad C_{79} = a^2|A_6|$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$C_{81} = -c^7|A_1|$ $\quad C_{82} = c^6|A_1||A_1|$ $\quad C_{83} = -c^5|A_1||A_2|$

$C_{84} = c^4|A_1||A_3|$ $\quad C_{85} = -c^3|A_1||A_4|$ $\quad C_{86} = c^2|A_1||A_5|$

$C_{87} = -c|A_1||A_6|$ $\quad C_{88} = |A_7||A_1|$ $\quad C_{89} = -a|A_7|$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$C_{91} = c^8$ $\quad C_{92} = -c^7|A_1|$ $\quad C_{93} = c^6|A_2|$

$C_{94} = -c^5|A_3|$ $\quad C_{95} = c^4|A_4|$ $\quad C_{96} = -c^3|A_5|$

$C_{97} = c^2|A_6|$ $\quad C_{98} = -c|A_7|$ $\quad C_{99} = |A_8|$

Berdasarkan hasil dari matriks kofaktor-kofaktor yang didapat dari matriks A_9 baris pertama sampai baris kesembilan, maka dapat dibuat dalam suatu matrik kofaktor, yaitu

$$C_9 = \begin{bmatrix} |A_8| & -a|A_7| & a^2|A_6| & -a^3|A_5| & a^4|A_4| & -a^5|A_3| & a^6|A_2| & -a^7|A_1| & -a^8 \\ -c|A_7| & |A_1||A_7| & -a|A_1||A_6| & a^2|A_1||A_5| & -a^3|A_1||A_4| & a^4|A_1||A_3| & -a^5|A_1||A_2| & a^6|A_1||A_1| & -a^7|A_1| \\ c^2|A_6| & -c|A_1||A_6| & |A_2||A_6| & -a|A_2||A_5| & a^2|A_2||A_4| & -a^3|A_2||A_3| & a^4|A_2||A_2| & -a^5|A_2||A_1| & a^6|A_2| \\ -c^3|A_5| & c^2|A_1||A_5| & -c|A_2||A_5| & |A_3||A_5| & -a|A_3||A_4| & a^2|A_3||A_3| & -a^3|A_3| & a^4|A_3||A_1| & -a^5|A_3| \\ c^4|A_4| & -c^3|A_1||A_4| & c^2|A_2||A_4| & -c|A_3||A_4| & |A_4||A_4| & -a|A_4||A_3| & a^2|A_4||A_2| & -a^3|A_4||A_1| & a^4|A_4| \\ -c^5|A_3| & c^4|A_1||A_3| & -c^3|A_2||A_3| & c^2|A_3||A_3| & -c|A_4||A_3| & |A_5||A_3| & -a|A_5||A_2| & a^2|A_5||A_1| & -a^3|A_5| \\ c^6|A_2| & -c^5|A_1||A_2| & c^4|A_2||A_2| & -c^3|A_3||A_2| & c^2|A_4||A_2| & -c|A_5||A_2| & |A_6||A_2| & -a|A_6||A_1| & a^2|A_6| \\ -c^7|A_1| & c^6|A_1||A_1| & -c^5|A_2||A_1| & c^4|A_3||A_1| & -c^3|A_4||A_1| & c^2|A_5||A_1| & -c|A_6||A_1| & |A_7||A_1| & -a|A_7| \\ c^8 & -c^7|A_1| & c^6|A_2| & -c^5|A_3| & c^4|A_4| & -c^3|A_5| & c^2|A_6| & -c|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

8. Selanjutnya dengan perlakuan yang sama maka kita akan mendapatkan matriks kofaktor dari A_{10}, dengan proses sebagai berikut:

$$A_{10} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor untuk baris pertama sebagai berikut:

$C_{11} = |A_9|$ $\quad C_{12} = -a|A_8|$ $\quad C_{13} = a^2|A_7|$

$C_{14} = -a^3|A_6|$ $\quad C_{15} = a^4|A_5|$ $\quad C_{16} = -a^5|A_4|$

$C_{17} = a^6|A_3|$ $\quad C_{18} = -a^7|A_2|$ $\quad C_{19} = a^8|A_1|$

$C_{110} = -a^9$

Matriks kofaktor untuk baris kedua sebagai berikut:

$C_{21} = -c|A_8|$ $\quad C_{22} = |A_1||A_8|$ $\quad C_{23} = -a|A_1||A_7|$

$C_{24} = a^2|A_1||A_6|$ $\quad C_{25} = -a^3|A_1||A_5|$ $\quad C_{26} = a^4|A_1||A_4|$

$C_{27} = -a^5|A_1||A_3|$ $\quad C_{28} = a^6|A_1||A_2|$ $\quad C_{29} = -a^7|A_1||A_1|$

$C_{210} = a^8|A_1|$

Matriks kofaktor untuk baris ketiga sebagai berikut:

$C_{31} = c^2|A_7|$ $\quad C_{32} = -c|A_1||A_7|$ $\quad C_{33} = |A_2||A_7|$

$C_{34} = -a|A_2||A_6|$ $\quad C_{35} = a^2|A_2||A_5|$ $\quad C_{36} = -a^3|A_2||A_4|$

$C_{37} = a^4|A_2||A_3|$ $\quad C_{38} = -a^5|A_2||A_2|$ $\quad C_{39} = a^6|A_2||A_1|$

$C_{310} = -a^7|A_2|$

Matriks kofaktor untuk baris keempat sebagai berikut:

$C_{41} = -c^3|A_6|$ $C_{42} = c^2|A_1||A_6|$ $C_{43} = -c|A_2||A_6|$

$C_{44} = |A_3||A_6|$ $C_{45} = -a|A_3||A_5|$ $C_{46} = a^2|A_3||A_4|$

$C_{47} = -a^3|A_3||A_3|$ $C_{48} = a^4|A_3||A_2|$ $C_{49} = -a^5|A_3||A_1|$

$C_{410} = a^6|A_3|$

Matrik kofaktor untuk baris kelima sebagai berikut:

$C_{51} = c^4|A_5|$ $C_{52} = -c^3|A_1||A_5|$ $C_{53} = c^2|A_2||A_5|$

$C_{54} = -c|A_3||A_5|$ $C_{55} = |A_4||A_5|$ $C_{56} = -a|A_4||A_4|$

$C_{57} = a^2|A_4||A_3|$ $C_{58} = -a^3|A_4||A_2|$ $C_{59} = a^4|A_4||A_1|$

$C_{510} = -a^5|A_4|$

Matriks kofaktor untuk baris keenam sebagai berikut:

$C_{61} = -c^5.|A_4|$ $C_{62} = c^4|A_1||A_4|$ $C_{63} = -c^3|A_2||A_4|$

$C_{64} = c^2|A_3||A_4|$ $C_{65} = -c|A_4||A_4|$ $C_{66} = |A_5||A_4|$

$C_{67} = -a|A_5||A_3|$ $C_{68} = a^2|A_5||A_2|$ $C_{69} = -a^3|A_5||A_1|$

$C_{610} = a^4|A_5|$

Matriks kofaktor untuk baris ketujuh sebagai berikut:

$C_{71} = c^6|A_3|$ $C_{72} = -c^5|A_1||A_3|$ $C_{73} = c^4|A_2||A_3|$

$C_{74} = -c^3|A_3||A_3|$ $C_{75} = c^2|A_4||A_3|$ $C_{76} = -c|A_5||A_3|$

$C_{77} = |A_6||A_3|$ $C_{78} = -a|A_6||A_2|$ $C_{79} = a^2|A_6||A_1|$

$C_{710} = -a^3|A_6|$

Matriks kofaktor untuk baris kedelapan sebagai berikut:

$C_{81} = -c^7|A_2|$ $C_{82} = c^6|A_1||A_2|$ $C_{83} = -c^5|A_2||A_2|$

$C_{84} = c^4|A_3||A_2|$ $C_{85} = -c^3|A_4||A_2|$ $C_{86} = c^2|A_5||A_2|$

$C_{87} = -c|A_6||A_2|$ $C_{88} = |A_7||A_2|$ $C_{89} = -a|A_7||A_1|$

$C_{810} = a^2|A_7|$

Matriks kofaktor untuk baris kesembilan sebagai berikut:

$C_{91} = c^8|A_1|$ $C_{92} = -c^7|A_1||A_1|$ $C_{93} = c^6|A_2||A_1|$

$C_{94} = -c^5|A_3||A_1|$ $C_{95} = c^4|A_4||A_1|$ $C_{96} = -c^3|A_5||A_1|$

$C_{97} = c^2|A_6||A_1|$ $C_{98} = -c|A_7||A_1|$ $C_{99} = |A_8||A_1|$

$C_{910} = -a|A_8|$

Matriks kofaktor untuk baris kesepuluh sebagai berikut:

$C_{101} = -c^9$ $C_{102} = c^8|A_1|$ $C_{103} = -c^7|A_2|$

$C_{104} = c^6|A_3|$ $C_{105} = -c^5|A_4|$ $C_{106} = c^4|A_5|$

$C_{107} = -c^3|A_6|$ $C_{108} = c^2|A_7|$ $C_{109} = c|A_8|$

$C_{1010} = |A_9|$

Sehingga matriks kofaktor untuk A_{10}, yaitu

$$C_{10} = \begin{bmatrix} |A_9| & -a|A_7| & a^2|A_6| & -a^3|A_5| & a^4|A_4| & -a^5|A_3| & a^6|A_2| & -a^7|A_2| & a^8|A_1| & -a^9 \\ -c|A_8| & |A_1||A_8| & -a|A_1||A_7| & a^2|A_1||A_6| & -a^3|A_1||A_5| & a^4|A_1||A_4| & -a^5|A_1||A_3| & a^6|A_1||A_2| & -a^7|A_1||A_1| & a^8|A_1| \\ c^2|A_7| & -c|A_1||A_7| & |A_2||A_7| & -a|A_2||A_6| & a^2|A_2||A_5| & -a^3|A_2||A_4| & a^4|A_2||A_3| & -a^5|A_2||A_2| & a^6|A_2||A_1| & -a^7|A_2| \\ -c^3|A_6| & c^2|A_1||A_6| & -c|A_2||A_6| & |A_3||A_6| & -a|A_3||A_5| & a^2|A_3||A_4| & -a^3|A_3||A_3| & a^4|A_3||A_2| & -a^5|A_3||A_1| & a^6|A_2| \\ c^4|A_5| & -c^3|A_1||A_5| & c^2|A_2||A_5| & -c|A_3||A_5| & |A_4||A_5| & -a|A_4||A_4| & a^2|A_4||A_3| & -a^3|A_4||A_2| & a^4|A_4||A_1| & -a^5|A_3| \\ -c^5|A_4| & c^4|A_1||A_4| & -c^3|A_2||A_4| & c^2|A_3||A_4| & -c|A_4||A_4| & |A_5||A_4| & -a|A_5||A_3| & a^2|A_5||A_2| & -a^3|A_5||A_1| & a^4|A_4| \\ c^6|A_3| & -c^5|A_1||A_3| & c^4|A_2||A_3| & -c^3|A_3||A_3| & c^2|A_4||A_3| & -c|A_5||A_3| & |A_6||A_3| & -a|A_6||A_2| & a^2|A_6||A_1| & -a^3|A_5| \\ -c^7|A_2| & c^6|A_1||A_2| & -c^5|A_2||A_2| & c^4|A_3||A_2| & -c^3|A_4||A_2| & c^2|A_5||A_2| & -c|A_6||A_2| & |A_7||A_2| & -a|A_7||A_1| & a^2|A_7| \\ c^8|A_1| & -c^7|A_1||A_1| & c^6|A_2||A_1| & -c^5|A_3||A_1| & c^4|A_4||A_1| & -c^3|A_5||A_1| & c^2|A_6||A_1| & -c|A_7||A_1| & |A_8||A_1| & -a|A_8| \\ -c^9 & c^8|A_1| & -c^7|A_2| & c^6|A_2| & -c^5|A_3| & c^4|A_4| & -c^3|A_5| & c^2|A_6| & -c|A_7| & |A_8| \end{bmatrix}$$

5.3 Bentuk umum Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde *n x n*

Setelah kita dapat menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal dari orde 3 x 3 sampai 10 x 10, maka kita dapat memformulasikan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal untuk orde $n \times n$. Berikut diberikan formulasi umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal orde $n \times n$ dalam teorema 5.1, serta pembuktiannya menggunakan induksi matematik.

Teorema 5.1 Diberikan A_n suatu metrik toeplitz tridiagonal berorde $n \geq 3$ pada persamaan (1.2) dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3\, c\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5\, a\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}\, a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4\, c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5\, c\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}\, a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5\, c^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6\, c^2\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7\, c\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}\, a^{n-5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4}\, a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\, c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\, c^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, c^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2}\, a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}\, c^{n-1} & (-1)^{n+2}\, c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\, c^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}\, c\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\, c\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Bukti :

Perhatikan matriks berikut

$$A_n = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{bmatrix} \qquad dengan \quad a, b, c \in R$$

Selanjutnya kita akan membuktikan setiap entri dari matriks kofaktornya. Mulai dari entri matriks kofaktor baris pertama dan kolom pertama sampai baris pertama kolom ke n . Selanjutnya baris kedua dan kolom pertama sampai baris kedua dan kolom ke n. Seterusnya dilakukan hal yang sama sampai baris ke n dan kolom ke n. Prosesnya diberikan sebagai berikut:

a. Entri baris pertama matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^2 |A_{n-1}|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 a\, |A_{n-2}|$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 a^2\, |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{1n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris pertama matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{1n} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} a^{n-1}$$

b. Entri baris kedua matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{21} = (-1)^{3} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{3} c \left|A_{n-2}\right|$$

$$C_{22} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{4} \left|A_{n-2}\right| . b = (-1) \left|A_{n-2}\right| \left|A_{1}\right| = (-1)\left|A_{1}\right| \left|A_{n-2}\right|$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5 \ . \ a \left|A_1\right| \left|A_{n-3}\right|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{2n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{2n} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} \ b \ a^{n-2} = (-1)^{n+2} \ a^{n-2} \ \left|A_1\right|$$

c. Entri baris ketiga matriks Kofaktor sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 c \left|A_{n-3}\right|$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5\ b\ .\ c\ |A_{n-3}| = (-1)^5\ c\ |A_1|\ |A_{n-3}|$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{bmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{bmatrix}_{n-1} = (-1)^6 |A_2|\ |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{3n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{3n} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3}\ a^{n-3}\ |A_2|$$

Entri baris ke-4,5,6 dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, sehingga di peroleh entri untuk baris ke-n sebagai berikut :

$$C_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1}\, c^{n-1}$$

$$C_{n2} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+2}\, b\,.\,c^{n-1} = (-1)^{n+2}\, c^{n-2}\, |A_1|$$

$$C_{n3} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3}\, c^{n-3}\, |A_2|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{nn}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{nn} = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{2n}\, |A_{n-1}|$$

Dari perhitungan diatas, diperoleh :

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3\, c\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5\, a\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}\, a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4\, c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5\, c\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}\, a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5\, c^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6\, c^2\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7\, c\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}\, a^{n-5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4}\, a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\, c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\, c^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, c^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2}\, a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}\, c^{n-1} & (-1)^{n+2}\, c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\, c^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}\, c\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\, c\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Pembuktian selesai.

BAB VI
INVERS MATRIKS TOEPLITZ TRIDIAGONAL

Rumusan umum yang ketiga adalah rumusan umum dari invers matriks topelitz tridiagonal. Berikut diberikan proses mendapatkan bentuk umum invers matriks toeplitz tridiagonalnya.

6.1 Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde 3 x 3 sampai 7 x 7

1. Menentukan invers matriks toeplitz tridiagonal untuk orde 3 x 3, yaitu:

$$(A_3)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_3|} adj(A_3)$$

$$(A_3)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_3|} \begin{bmatrix} |A_2| & -c|A_1| & c^2 \\ -a|A_1| & |A_1||A_1| & -c|A_1| \\ a^2 & -a|A_1| & |A_2| \end{bmatrix}$$

2. Menentukan invers matriks toeplitz tridiagonal untuk orde 4 x 4, yaitu:

$$(A_4)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_4|} adj(A_4)$$

$$(A_4)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_4|} \begin{bmatrix} |A_3| & -c|A_2| & c^2|A_1| & -c^3 \\ -a|A_2| & |A_1||A_2| & -c|A_1||A_1| & c^2|A_1| \\ a^2|A_1| & -a|A_1||A_1| & |A_1||A_2| & -c|A_2| \\ -a^3 & a^2|A_1| & -a|A_2| & |A_4| \end{bmatrix}$$

3. Menentukan invers matriks toeplitz tridiagonal untuk orde 5 x 5, yaitu:

$$(A_5)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_5|} adj(A_5)$$

$$(A_5)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_5|} \begin{bmatrix} |A_4| & -c|A_3| & c^2|A_2| & -c^3|A_1| & c^4 \\ -a|A_3| & |A_1||A_3| & -c|A_1||A_2| & c^2|A_1||A_1| & -c^3|A_1| \\ a^2|A_2| & -a|A_1||A_2| & |A_2||A_2| & -c|A_1||A_2| & c^2|A_2| \\ -a^3|A_1| & a^2|A_1||A_1| & -a|A_1||A_2| & |A_1||A_2| & -c|A_3| \\ a^4 & -a^3|A_1| & a^2|A_2| & -a|A_3| & |A_4| \end{bmatrix}$$

4. Menentukan invers matriks toeplitz tridiagonal untuk orde 6 x 6, yaitu:

$$(A_6)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_6|} adj(A_6)$$

$$(A_6)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_6|}\begin{bmatrix} |A_5| & -c|A_4| & c^2|A_3| & -c^3|A_2| & c^4|A_1| & -c^5 \\ -a|A_4| & |A_1||A_4| & -c|A_1||A_3| & c^2|A_1||A_2| & -c^3|A_1||A_1| & c^4|A_1| \\ a^2|A_3| & -a|A_1||A_3| & |A_2||A_3| & -c|A_2||A_2| & c^2|A_1||A_2| & -c^3|A_2| \\ -a^3|A_2| & a^2|A_1||A_2| & -a|A_2||A_2| & |A_3||A_2| & -c|A_1||A_3| & c^2|A_3| \\ a^4|A_1| & -a^3|A_1||A_1| & a^2|A_1||A_2| & -a|A_1||A_3| & |A_4||A_1| & -c|A_4| \\ -a^5 & a^4|A_1| & -a^3|A_2| & a^2|A_3| & -a|A_4| & |A_5| \end{bmatrix}$$

5. Menentukan invers matriks toeplitz tridiagonal untuk orde 7 x 7, yaitu:

$$(A_7)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}_7|} adj(A_7)$$

$(A_7)^{-1}$

$$= \frac{1}{|\mathrm{A}_7|}\begin{bmatrix} |A_6| & -c|A_5| & c^2|A_4| & -c^3|A_3| & c^4|A_2| & -c^5|A_1| & c^6 \\ -a|A_5| & |A_1||A_5| & -c|A_1||A_4| & c^2|A_1||A_3| & -c^3|A_1||A_2| & c^4|A_1||A_1| & -c^5|A_1| \\ a^2|A_4| & -a|A_1||A_4| & |A_2||A_4| & -c|A_2||A_3| & c^2|A_2||A_2| & -c^3|A_1||A_2| & c^4|A_2| \\ -a^3|A_3| & a^2|A_1||A_3| & -a|A_2||A_3| & |A_2||A_4| & -c|A_1||A_4| & c^2|A_1||A_3| & -c^3|A_3| \\ a^4|A_2| & -a^3|A_1||A_2| & a^2|A_2||A_2| & -a|A_2||A_3| & |A_4||A_2| & -c|A_4||A_1| & c^2|A_4| \\ -a^5|A_1| & a^4|A_1||A_1| & -a^3|A_1||A_2| & a^2|A_1||A_3| & -a|A_1||A_4| & |A_5||A_1| & -c|A_5| \\ a^6 & -a^5|A_1| & a^4|A_2| & -a^3|A_3| & a^2|A_4| & -a|A_5| & |A_6| \end{bmatrix}$$

6.2 Bentuk umum Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal Orde *n x n*

6. Telah kita dapatkan bentuk umum determinan dari matriks toeplitz tridiagonal yaitu:

$$|A_n| = b^n - (n-1)ab^{n-2}c + \sum_{i=1}^{n-3} ia^2b^{n-4}c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{n-5} i\right)a^3b^{n-6}c^3$$
$$+\left[\frac{(n-7)}{1!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-8)}{1!}\sum_{i=1}^{2} i + \frac{(n-9)}{1!}\sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{n-7} i\right]a^4b^{n-8}c^4$$
$$-\left[\frac{(n-9)(n-8)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-10)(n-9)}{2!}\sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{n-9} i\right]a^5b^{n-10}c^5$$
$$+\left[\frac{(n-11)(n-10)(n-9)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-12)(n-11)(n-10)}{3!}\sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{n-11} i\right]$$
$$a^6b^{n-12}c^6$$
$$-\left[\frac{(n-13)(n-12)(n-11)(n-10)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-14)(n-13)(n-12)(n-11)}{4!}\sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1\sum_{i=1}^{n-13} i\right]$$
$$a^7b^{n-14}c^7 + \cdots$$

7. Selanjutnya juga telah kita dapatkan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal, yaitu:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3 c\,|A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a\,|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4 c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 c\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5 c^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6 c^2\,|A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 c\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{n-5}\,|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} c^{n-4}\,|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} c^{n-1} & (-1)^{n+2} c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} c^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} c\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n} c\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

8. Dari matriks kofaktor di atas kita akan menentukan adjoin dari matriks kofaktor tersebut. Menentukan adjoin matriks kofaktor dengan cara mentransposkan matriks kofaktor tersebut, yaitu mengubag baris menjadi kolom dan mengubah kolom menjadi baris, seperti berikut:

$$Adj(A_n) = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 c\,|A_{n-2}| & (-1)^4 c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 c^3\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^n c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-1} \\ (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 c\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 c^2\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+1} c^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} c^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & (-1)^5 a\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & (-1)^7 c\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+2} c^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} c^{n-3}\,|A_2| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-5}\,|A_1||A_3| & \cdots & (-1)^{n+n-2} |A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-1} c\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| & (-1)^{n+4} a^{n-4}\,|A_3| & \cdots & (-1)^{n+n-2} a\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n} c\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

9. Selanjutnya kita akan mensubstitusi bentuk umum dari semua persamaan di atas ke dalam persamaan umum invers matriks, yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

atau

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n)$$

Untuk dapat memahami bentuk umum persamaan invers matriks topelitz tridiagonal tersebut, maka diberikan beberapa contoh sebagai berikut:

6.3 Beberapa Contoh Invers Matriks Toeplitz Tridiagonal

Contoh 6.1 : Diberikan matriks toeplitz tridiagonal dengan orde 6 x 6. Tentukan invers matriks tersebut dengan menggunakan bentuk umum yang telah ada.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0&0\\3&1&2&0&0&0\\0&3&1&2&0&0\\0&0&3&1&2&0\\0&0&0&3&1&2\\0&0&0&0&3&1\end{bmatrix} \qquad ; a=3, b=1, c=2, n=6$$

Penyelesaian

Pertama kali kita akan menentukan nilai determinan dari matriks tersebut, yaitu:

$$|A| = 1^6 - (6-1).\,3.1^{6-1}.\,2 + \sum_{i=1}^{6-3} i\,.\,3^2\,1^{6-4}.\,2^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i\right)3^2.1^0.2^3$$

$$= 1 - 5.3.1.2 + (1+2+3)\,9.1.4 - 1.27.1.8$$

$$= 1 - 30 - +6.36 - 216$$

$$= -29 + 216 - 216$$

$$= -29$$

Selanjutnya kita menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 6 x 6. Sebelumnya kita menentukan entri-entri untuk matriks kofaktornya terlebih dahulu, yaitu:

Entri untuk baris pertama matriks kofaktornya sebagai berikut:

$$C_{11} = |A_5| = 1^5 - 4.3.1^3.2 + \sum_{i=1}^{2} i\,.\,3^2.1^1.\,2^2$$

$$= 1 - 24 + (1+2).\,9.1.4$$

$$= 1 - 24 + 108$$

$$= 85$$

$$C_{12} = |A_4| = -3\left\{1^4 - 3.3.1^2.2 + \sum_{i=1}^{1} i\,.\,3^2.1^0.\,2^2\right\}$$

$$= -3\{1 - 18 + 36\}$$

$$= -3.19$$

$$= -57$$

$$C_{13} = a^2|A_3| = 3^2.\{1^3 - 2.3.1^1.2\}$$

$$= 9(1-12)$$
$$= 9(-11)$$
$$= -99$$

$$C_{14} = -a^3|A_2| = -3^3.\{1^2 - 1.3.1^0.2\}$$
$$= -27(1-6)$$
$$= -27(-5)$$
$$= 135$$

$$C_{16} = -a^5 = -3^5 = -243$$

Entri untuk baris kedua matriks kofaktor sebgai berikut:

$$C_{21} = -c|A_4| = -2.19 = -38$$

$$C_{22} = |A_1||A_4| = 1.19 = 19$$

$$C_{23} = -a|A_1||A_3| = -3.1.-11 = 33$$

$$C_{24} = a^2|A_1||A_2| = 3^2.1.-5 = -45$$

$$C_{25} = -a^3|A_1||A_1| = -3^3.1.1 = -27$$

$$C_{26} = a^4|A_1| = 3^4 = 81$$

Entri untuk baris ketiga matriks kofaktor sevagai berikut:

$$C_{31} = c^2|A_3| = 2^2(-11) = -44$$

$$C_{32} = -c|A_1||A_3| = -2.1.-11 = 22$$

$$C_{33} = |A_2||A_3| = -5.-11 = 55$$

$$C_{34} = -a|A_2||A_2| = -3.-5.-5 = -75$$

$$C_{35} = a^2|A_2||A_{11}| = 3^2.-5.1 = -45$$

$$C_{36} = -a^3|A_2| = -3^3.-5 = -45 = -27.-5 = 135$$

Entri untuk baris keempat matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{41} = -c^3 |A_2| = -2^3 . -5 = 40$$

$$C_{42} = c^2 |A_1||A_2| = 2^2 . 1. -5 = -20$$

$$C_{43} = -c|A_2||A_2| = -2. -5. -5 = -50$$

$$C_{44} = |A_3||A_2| = -11. -5 = 55$$

$$C_{45} = -a|A_3||A_1| = -3. -11. 1 = 33$$

$$C_{46} = a^2 |A_3| = 3^2. -11 = -99$$

Entri untuk baris kelima matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{51} = c^4 |A_1| = 2^4 .1 = 16$$

$$C_{52} = -c^3 |A_1||A_1| = 2^3 . 1.1 = -8$$

$$C_{53} = c^2 |A_1||A_2| = 2^2 . 1. -5 = -20$$

$$C_{54} = -c|A_1||A_3| = -2.1. -11 = 22$$

$$C_{55} = |A_4||A_1| = 19. 1 = 19$$

$$C_{56} = -a|A_4| = -3.19 = -57$$

Entri untuk baris keenam matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{61} = -c^5 = -2^5 = -32$$

$$C_{62} = c^4 |A_1| = 2^4 . 1 = 16$$

$$C_{63} = -c^3 |A_2| = -2^3 . -5 = 40$$

$$C_{64} = c^2 |A_3| = 2^2 . -11 = -44$$

$$C_{65} = -c|A_4| = -2.19. = -38$$

$$C_{66} = |A_5| = 85$$

Selanjutnya didapat matriks kofaktor untuk orde 6 x 6, yaitu:

$$\therefore \quad C = \begin{bmatrix} 85 & -57 & -99 & 135 & 81 & -243 \\ -38 & 19 & 33 & -45 & -27 & 81 \\ -44 & 22 & 55 & -75 & -45 & 135 \\ 40 & -20 & -50 & 55 & 33 & -99 \\ 16 & -8 & -20 & 22 & 19 & -57 \\ -32 & 16 & 40 & -44 & -38 & 85 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat determinan dan matriks kofaktor dari amtriks toeplitz tridiagonal yang berorde 6 x 6 maka kita kan mendapatkan invers matriksnya sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{-29} \begin{bmatrix} 85 & -38 & -44 & 40 & 16 & -32 \\ -57 & 19 & 22 & -20 & -8 & 16 \\ -99 & 33 & 55 & -50 & -20 & 40 \\ 135 & -45 & -75 & 55 & 22 & -44 \\ 81 & -27 & -45 & 33 & 19 & -38 \\ -243 & 81 & 135 & -99 & -57 & 85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -85/29 & 38/29 & 44/29 & -40/29 & -16/29 & 32/29 \\ -57/29 & -19/29 & -22/29 & -20/29 & 8/29 & -16/29 \\ 99/29 & -33/29 & -55/29 & 50/29 & 20/29 & -40/29 \\ -135/29 & 45/29 & 75/29 & -55/29 & -22/29 & 44/29 \\ -81/29 & 27/29 & 45/29 & --33/29 & -19/29 & 38/29 \\ 243/29 & -81/29 & -135/29 & 99/29 & -57/29 & -85/29 \end{bmatrix}$$

Contoh 6.2 : Diberikan matriks toeplitz tridiagonal dengan orde 9 x 9. Tentukan invers matriks tersebut dengan menggunakan bentuk umum yang telah ada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \; a = -1, b = 1, c = 2, n = 9$$

Penyelesaian:

Pertamakali kita akan menentukan nilai determinan dari matriks tersebut, yaitu:

$$|A| = b^9 - 8.a.b^7.c + \sum_{i=1}^{6} i.a^2.b^5.c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{4} i \right) a^3.b^3.c^3 +$$

$$\left(\frac{2}{1!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^{2} i \right).a^4.b^1.\ c^4$$

$$= 1^9 - 8(-1).1^7.2 + \sum_{i=1}^{6} i\,(-1)^2.1^5.2^2 - (1+1+2+1+2+3+1+2+3+4)$$

$$(-1)^3.1^3 + (2.1 + 1(1+2))\,(-1)^4.1.2^4$$

$$= 1 + 16 + (1+2+3+4+5+6)1.4 - 20(-8) + (2+3).16$$

$$= 17 + 11.4 + 160 + 80$$

$$= 301$$

Selanjutnya kita menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal yang berorde 9 x 9. Sebelumnya kita menentukan entri-entri untuk matriks kofaktornya terlebih dahulu, yaitu:

Entri baris pertama untuk matriks kofaktor sebgaai berikut:

$$C_{11} = |A_8| = b^8 - 7.a.b^6\ c + \sum_{i=1}^{5} i\,a^2 b^4 c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \sum_{i=1}^{3} i \right) a^3 b^2 c^3 +$$

$$\frac{1}{1!} \sum_{i=1}^{1} i.a.b^0.c^4$$

$$= 1^8 - 7(-1).1^6.2 + (1+2+3+4+5).(-1)^2.1^4.2^2 - (1+1+2+1$$

$$+ 2 + 3).(-1)^3.1^2.2^3 + 1(-1)^4.1^0.2^4$$

$$= 1 + 14 + 15.4 - 10.(-8) + 16$$
$$= 15 + 60 + 80 + 16$$
$$= 171$$

$$C_{12} = -a|A_7| = 1.\left\{b^7 - 6.ab^5c + \sum_{i=1}^{4} i\,.a^2b^3c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i\right)a^3bc^3\right\}$$

$$= 1^7 - 6(-1).1^5.2 + (1+2+3+4).(-1)^2.1^3.2^2 - (1+1+2)(-1)^3$$
$$1.2^3$$
$$= 1 + 12 + 10.4 + 32$$
$$= 13 + 40 + 32$$
$$= 85$$

$$C_{13} = a^2|A_6| = a^2\left\{b^6 - 5.ab^4c + \sum_{i=1}^{3} i\,.a^2b^2c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i\right)a^3b^0c^3\right\}$$

$$= (-1)^2\left\{1^6. - 5.(-1).1^4.2 + (1+2+3).(-1)^2.1^2.2^2 - 1(-1)^3.1^0.2^3\right\}$$
$$= 1\{1 + 10 + 6.4 + 8\}$$
$$= 1\{11 + 24 + 8\}$$
$$= 43$$

$$C_{14} = -a^3|A_5| = -(-1)^3\left\{b^5 - 4.ab^3c + \sum_{i=1}^{2} i\,.a^2bc^2\right\}$$

$$= 1\left\{1^5. - 4.(-1).1^3.2 + (1+2).(-1)^2.1.2^2\right\}$$
$$= 1 + 8 + 12$$
$$= 21$$

$$C_{15} = a^4|A_4| = (-1)^4\left\{b^4 - 3.ab^2c + \sum_{i=1}^{2} i\,.a^2b^0c^2\right\}$$

$$= 1\left\{1^4. - 3.(-1).1^2.2 + 1.(-1)^2.1^0.2^2\right\}$$
$$= 1(1 + 6 + 4)$$
$$= 11$$

$$C_{16} = a^5|A_3| = -(-1)^5\left\{b^2 - 2.abc\right\}$$

$$= 1\{1^3 - 2.(-1).1.2\}$$
$$= 1(1 + 4)$$
$$= 5$$

$$C_{17} = a^6|A_2| = (-1)^6\left\{b^2 - 2.ab^0c\right\}$$

$$= 1\{1^2 - (-1).1.2\}$$
$$= 1(1+2)$$
$$= 3$$

$$C_{18} = -a^7|A_1| = (-1)^7.1 = 1$$

$$C_{19} = a^8 = (-1)^8 = 1$$

Entri baris kedua untuk matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{21} = -c|A_7| = -2^7.85 = -170$$

$$C_{22} = |A_1||A_7| = 1.85 = 85$$

$$C_{23} = -a|A_1||A_6| = 1.1.43 = 43$$

$$C_{24} = a^2|A_1||A_5| = (-1)^2.(1).(21) = 21$$

$$C_{25} = -a^3|A_1||A_4| = -(-1)^3.1.11 = 11$$

$$C_{26} = a^4|A_1||A_3| = (-1)^4.1.5 = 5$$

$$C_{27} = -a^5|A_1||A_2| = -(-1)^5.1.3 = 3$$

$$C_{28} = a^6|A_1||A_1| = (-1)^6.1.1 = 1$$

$$C_{29} = -a^7|A_1| = -(-1)^7.1. = -1$$

Entri baris ketiga matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{31} = c^2|A_6| = 2^2.43 = 172$$

$$C_{32} = -c|A_1||A_6| = -2.1.43 = -86$$

$$C_{33} = |A_2||A_6| = 3.43 = 129$$

$$C_{34} = -a|A_2||A_5| = 1.3.21 = 63$$

$$C_{35} = a^2|A_2||A_4| = (-1)^2 . 3.11 = 33$$

$$C_{36} = -a^3|A_2||A_3| = -(-1)^3 . 3.5 = 15$$

$$C_{37} = a^4|A_2||A_2| = (-1)^4 . 3.3 = 9$$

$$C_{38} = -a^5|A_1||A_2| = -(-1)^5 .1.3 = 3$$

$$C_{39} = a^6 |A_2| = (-1)^6 . 3 = 3$$

Entri baris keempat matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{41} = -c^3|A_5| = -2^3 .21 = 168$$

$$C_{42} = c^2|A_1||A_5| = 2^2 .1.21 = 84$$

$$C_{43} = -c|A_2||A_5| = -2.3.21 = -126$$

$$C_{44} = |A_3||A_5| = 5.21 = -105$$

$$C_{45} = -a|A_4||A_3| = -(-1).11.5 = 55$$

$$C_{46} = a^2 |A_3||A_3| = (-1)^2 .5.5 = 25$$

$$C_{47} = -a^3 |A_2||A_3| = -(-1)^3 .3.5 = 15$$

$$C_{48} = a^4 |A_1||A_3| = (-1)^4 .1.5 = 5$$

$$C_{49} = -a^5 |A_3| = -(-1)^5 .5 = 5$$

Entri baris kelima matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{51} = c^4|A_4| = 2^4 .11 = 176$$

$$C_{52} = -c^3|A_1||A_4| = -2^3 .1.11 = -88$$

$$C_{53} = c^2|A_2||A_4| = 2^2 .3.11 = 132$$

$$C_{54} = -c|A_3||A_4| = -2.5.11 = -110$$

$$C_{55} = |A_4||A_4| = 11.11 = 121$$

$$C_{56} = -a|A_3||A_4| = -(-1).5.11 = 55$$

$$C_{57} = a^2 |A_2||A_4| = (-1)^2 .3.11 = 33$$

$$C_{58} = -a^3 |A_1||A_4| = -(-1)^3 .1.11 = 11$$

$$C_{59} = a^4 |A_4| = (-1)^4 .11 = 11$$

Entri baris keenam matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{61} = -c^5 |A_3| = -2^5 .5 = -90$$

$$C_{62} = c^4 |A_1||A_3| = 2^4 .1.5 = 80$$

$$C_{63} = -c^3 |A_2||A_3| = -2^3 .3.5 = -120$$

$$C_{64} = c^2 |A_3||A_3| = 2^2 .5.5 = 100$$

$$C_{65} = -c|A_4||A_3| = -2.11.5 = -110$$

$$C_{66} = |A_5||A_3| = 21.5 = 105$$

$$C_{67} = -a|A_2||A_5| = -(-1).3.21 = 63$$

$$C_{68} = a^2 |A_1||A_5| = (-1)^2 .1.21 = 21$$

$$C_{69} = -a^3 |A_5| = -(-1)^3 .21 = 21$$

Entri baris ketujuh matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{71} = c^6 |A_2| = 2^6 .3 = 192$$

$$C_{72} = -c^5 |A_1||A_2| = -2^5 .1.3 = -96$$

$$C_{73} = c^4 |A_2||A_2| = 2^4 .3.3 = 144$$

$$C_{74} = -c^3 |A_3||A_2| = -2^3 .5.3 = -120$$

$$C_{75} = c^2 |A_4||A_2| = 2^2.11.3 = 132$$

$$C_{76} = -c|A_5||A_2| = -2.21.3 = -126$$

$$C_{77} = |A_6||A_2| = 43.3 = -129$$

$$C_{78} = -a|A_6||A_1| = 1.43.1 = 43$$

$$C_{79} = a^2 |A_6| = (-1)^2.43 = 43$$

Entri baris kedelapan matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{81} = -c^7 |A_1| = -2^7.1 = -128$$

$$C_{82} = c^6 |A_1||A_1| = 2^6.1.1 = 64$$

$$C_{83} = -c^5 |A_1||A_2| = -2^5.1.3 = -96$$

$$C_{84} = c^4 |A_1||A_3| = 2^4.1.5 = 80$$

$$C_{85} = -c^3 |A_1||A_4| = -2^3.1.11 = -88$$

$$C_{86} = c^2 |A_1||A_5| = 2^2.1.21 = 84$$

$$C_{87} = -c|A_1||A_6| = -2.1.43 = -86$$

$$C_{88} = |A_7||A_1| = 85.1 = 85$$

$$C_{89} = -a|A_7| = -(-1).85 = 85$$

Entri baris kesembilan matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{91} = c^8 = 2^8 = 256$$

$$C_{92} = -c^7|A_1| = -2^7.1 = -128$$

$$C_{93} = c^6|A_2| = 2^6.1 = 192$$

$$C_{94} = -c^5|A_3| = -2^5.5 = -160$$

$$C_{95} = c^4|A_4| = 2^4.11 = 176$$

$$C_{96} = -c^3|A_5| = -2^3.21 = -168$$

$$C_{97} = c^2|A_6| = 2^2.43 = 172$$

$$C_{98} = -c|A_7| = -2.85 = -170$$

$$C_{99} = |A_8| = 171$$

Setelah didapat semua entri matriks kofaktor untuk orde 9 x 9 maka kita kan matriks kofaktornya sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 171 & 85 & 43 & 21 & 11 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -170 & 85 & 43 & 21 & 11 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 172 & -86 & 129 & 63 & 33 & 15 & 9 & 3 & 3 \\ -168 & 84 & -126 & 105 & 55 & 25 & 15 & 5 & 5 \\ 176 & -88 & 132 & -110 & 121 & 55 & 33 & 11 & 11 \\ -90 & 80 & -120 & 100 & -110 & 105 & 63 & 21 & 21 \\ 192 & -96 & 144 & -120 & 132 & -126 & 129 & 43 & 43 \\ -128 & 64 & -96 & 80 & -88 & 84 & -86 & 85 & -85 \\ 256 & -128 & 192 & -160 & 176 & -168 & 172 & -170 & 171 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat determinan dan matriks kofaktor dari amtriks toeplitz tridiagonal yang berorde 9 x 9 maka kita kan mendapatkan invers matriksnya sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$
= \frac{1}{301}\begin{bmatrix}
171 & -170 & 172 & -168 & 176 & -90 & 192 & -128 & 256 \\
85 & 85 & -86 & 84 & -88 & 80 & -96 & 64 & -128 \\
43 & 43 & 129 & -126 & 132 & -120 & 144 & -96 & 192 \\
21 & 21 & 63 & 105 & -110 & 100 & -120 & 80 & -160 \\
11 & 11 & 33 & 55 & 121 & -110 & 132 & -88 & 176 \\
5 & 5 & 15 & 25 & 55 & 105 & -126 & 84 & -168 \\
3 & 31 & 9 & 15 & 33 & 63 & 129 & -86 & 172 \\
1 & 1 & 3 & 5 & 11 & 21 & 43 & 85 & -170 \\
1 & 1 & 3 & 5 & 11 & 21 & 43 & -85 & 171
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
171/301 & -170/301 & 172/301 & -168/301 & 176/301 & -90/301 & 192/301 & -128/301 & 256/301 \\
85/301 & 85/301 & -86/301 & 84/301 & -88/301 & 80/301 & -96/301 & 64/301 & -128/301 \\
43/301 & 43/301 & 129/301 & -126/301 & 132/301 & -120/301 & 144/301 & -96/301 & 192/301 \\
21/301 & 21/301 & 63/301 & 105/301 & -110/301 & 100/301 & -120/301 & 80/301 & -160/301 \\
11/301 & 11/301 & 33/301 & 55/301 & 121/301 & -110/301 & 132/301 & -88/301 & 176/301 \\
5/301 & 5/301 & 15/301 & 25/301 & 55/301 & 105/301 & -126/301 & 84/301 & -168/301 \\
3/301 & 31/301 & 9/301 & 15/301 & 33/301 & 63/301 & 129/301 & -86/301 & 172/301 \\
1/301 & 1/301 & 3/301 & 5/301 & 11/301 & 21/301 & 43/301 & 85/301 & -170/301 \\
1/301 & 1/301 & 3/301 & 5/301 & 11/301 & 21/301 & 43/301 & -85/301 & 171/3-1
\end{bmatrix}
$$

BAB VII
PENUTUP

7.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari pembahasan sebelumnya kita ketahui bahwa untuk mendapatkan invers matriks toeplitz tridiagonal dengan menggunakan metode adjoin terlebih dahulu kita menentukan nilai determinan dari amtriks tersebut. Selanjutnya kita menentukan matriks kofaktornya yang ditransposkan yang disebut adjoin dari matriks awal. Barulah akhirnya dengan mensubstitusi kepersamaan invers matriks kita dapat invers matriks toeplitz tridiagonal. Berikut diberikan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor dan inversnya.

1. Bentuk umum dari determinannya matriks toeplitz tridiagonal, yaitu:

$$|A_n| = b^n - (n-1)ab^{n-2}c + \sum_{i=1}^{n-3} i a^2 b^{n-4} c^2 - \left(\sum_{i=1}^{1} i + \sum_{i=1}^{2} i + \cdots + \sum_{i=1}^{n-5} i \right) a^3 b^{n-6} c^3$$

$$+ \left[\frac{(n-7)}{1!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-8)}{1!} \sum_{i=1}^{2} i + \frac{(n-9)}{1!} \sum_{i=1}^{3} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-7} i \right] a^4 b^{n-8} c^4$$

$$- \left[\frac{(n-9)(n-8)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-10)(n-9)}{2!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-9} i \right] a^5 b^{n-10} c^5$$

$$+ \left[\frac{(n-11)(n-10)(n-9)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-12)(n-11)(n-10)}{3!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-11} i \right]$$

$$a^6 b^{n-12} c^6$$

$$- \left[\frac{(n-13)(n-12)(n-11)(n-10)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \frac{(n-14)(n-13)(n-12)(n-11)}{4!} \sum_{i=1}^{1} i + \cdots + 1 \sum_{i=1}^{n-13} i \right]$$

$$a^7 b^{n-14} c^7 + \cdots$$

2. Bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz tridiagonal, yaitu:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3 c\,|A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a\,|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4 c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 c\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5 c^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6 c^2\,|A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 c\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{n-5}\,|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} c^{n-4}\,|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} c^{n-1} & (-1)^{n+2} c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} c^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} c\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n} c\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Bentuk umum dari matriks kofaktor yang ditransposkan atau bentuk umum dari adjoin matriks toeplitz tridiagonalnya, yaitu:

$$Adj(A_n) = \begin{bmatrix} (-1)^2 |A_{n-1}| & (-1)^3 c\,|A_{n-2}| & (-1)^4 c^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 c^3\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^n c^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} c^{n-1} \\ (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 c\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 c^2\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+1} c^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} c^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4 a\,|A_{n-3}| & (-1)^5 a\,|A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & (-1)^7 c\,|A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+2} c^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} c^{n-3}\,|A_2| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-5}\,|A_1||A_3| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-1} c\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| & (-1)^{n+4} a^{n-4}\,|A_3| & \cdots & (-1)^{n+n-2} a\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n} c\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

4. Bentuk umum dari invers matriks toeplitz tridiagonal adalah dengan mensubstitusikan bentuk umum yang ada kepersamaan berikut:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|}\, adj(A_n)$$

7.2 Saran

Penelitian ini hanya membahas mengenai bentuk umum invers matriks toeplitz tridiagonal dengan menggunakan metode adjoin. Disarankan para pembaca dapat melanjutkan hal-hal yang berhubungan dengan determinan, seperti nilai eigen dan vector eigen. Atau dapat melanjutkan dengan menentukan invers matriks tetapi terhadap matriks yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard & Rorres, Chris, 2004, "*Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi"*, Edisi Ketujuh, Jakarta, Erlangga.

Gray, Robert M., 2005 "Toeplitz and Circulan Matrices", Stanford 94305, Department of Electrical Engineering Stanford, USA.

Hefferon, Jim, 2012, *Linear Algebra*. Saint Michaels College Colchester, Vermont USA.

Kouachi, S., 1991, "Eigenvalues and Eigenvectors of Some Tridiagonal Matrices with Non Constant Diagonal Entries. ELA, In press.

Leon, S.J. , 2009, *Aljabar Linier dan Aplikasinya*. Edisi kelima. Jakarta : Erlangga.

Nicholson, W. Keith, 2004, *Linear Algebra with Applications*, Fourth Edition. University of Calgary.

Ruminta, 2009, "*Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*", Bandung, Rekayasa Sains.

Salkuyeh, Davod Khojasteh, 2006, "Positive Integer Power of the Tridiagonal Matriks Toeplitz". International Mathematical Forum, Vol 1, no. 22, 1061 - 1065, Mohaghegh Ardabili University. Ardabil, Iran.

Sianipar, 2009, P.Invers Z-Matriks, *Bulletin of Mathematics*, Vol. 01, No. 01,1-14. Medan Indonesia.

Siregar, Bakti., 2014, dkk."Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". *Saintia Matematika*. 02, (01), 85-94.

Sukirman, 2006, "*Pengantar Teori Bilangan*", Yogyakarta, Hanggar Kreator.

Supranto, Johannes, 2003, *Pengantar Matriks*. Jakarta: Rineka Cipta.

Zwilinger, D., 2003, *Standard Mathematical Tables and Formulae*. Chapman & Hall / CRC Press Company. New York.