PENYELESAIAN PROGRAM LINIER MENGGUNAKAN ALGORITMA *INTERIOR POINT* DAN METODE SIMPLEKS

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh:

ELFIRA SAFITRI
10854004221

UIN SUSKA RIAU

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

PENYELESAIAN PROGRAM LINIER MENGGUNAKAN ALGORITMA *INTERIOR POINT* DAN METODE SIMPLEKS

ELFIRA SAFITRI
10854004221

Tanggal Sidang : 01 Oktober 2012
Tanggal Wisuda : November 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Program linier adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber terbatas secara optimal. Metode simpleks merupakan algoritma yang efisien untuk menyelesaikan permasalahan program linier. Algoritma *interior point* merupakan alat baru yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier yang kompleks, yaitu yang memiliki fungsi kendala dan variabel keputusan yang jumlahnya besar. Nilai *interior point* diberikan secara acak, dengan nilai yang harus memenuhi batasan (*constraint)* yang ada pada permasalahan. Apabila nilai *interior point* tidak memenuhi batasan, maka tidak dapat dihasilkan nilai solusi yang optimal. Berdasarkan contoh 4.1 dan contoh 4.2, penyelesaian program linier menggunakan metode simpleks lebih efisien dibandingkan algoritma *interior point.* Hal ini dapat dilihat dari banyaknya iterasi yang dilakukan, karena *interior point,* iterasi dan nilai α diambil secara acak.

Katakunci: *algoritma interior point, iterasi, metode simpleks.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"PENYELESAIAN PROGRAM LINIER MENGGUNAKAN ALGORITMA *INTERIOR POINT* DAN METODE SIMPLEKS"** dengan baik dan selesai tepat pada waktunya. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah SWT amin. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Plt. Ketua Jurusan Matematika sekaligus Dosen Pembimbing yang telah memberikan arahan, motivasi, dan membimbing penulis dengan penuh kesabaran sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku Penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

5. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008 yang telah banyak memberi semangat dan memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan penulisan tugas akhir ini.
8. Ucapan terima kasih juga kepada sahabat-sahabat ku (Nursukaisih, Kak Vira Ratnawati, Mia, Dewi, Ali, Kak tuti, Adek Dewi dan Sari) yang telah banyak memberi dukungan dan motivasi kepada penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini.

Dengan segala kerendahan hati, penulis juga menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Kepada semua pihak yang membaca tugas akhir ini, semogadapat mengambil manfaatnya. Amin.

Pekanbaru, 01 Oktober 2012

Elfira Safitri

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan perusahaan pada era globalisasi mengalami pertumbuhan yang sangat pesat, sehingga banyak perusahaan yang dengan cepat berkembang menjadi perusahaan besar. Permasalahan yang dialami oleh perusahaan tersebut semakin besar pula, perlu pengolahan secara profesional karena tujuan umum perusahaan adalah mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya (maksimum) dengan biaya serendah-rendahnya (minimum) (Sadono, 2005). Untuk menyelesaikan permasalahan diatas dilakukan optimasi yaitu memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan perusahaan.

Optimasi digunakan untuk mendapatkan solusi yang terbaik dari suatu permasalahan. Permasalahan tersebut dibedakan atas dua macam fungsi yaitu fungsi linier dan fungsi nonlinier. Untuk melakukan optimasi atau pencarian solusi optimal pada pemograman linier, metode yang umum digunakan adalah metode simpleks. Ada suatu pendekatan untuk menyelesaikan permasalahan program linier yaitu pendekatan *interior point*. Penemuan *interior point* berhasil mengembangkan algoritma baru dalam program linier. Menurut Hillier (1990), Algoritma *interior point* digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier yang kompleks, yaitu yang memiliki kendala fungsional dan variabel keputusan yang jumlahnya besar.

Solusi penyelesaian dengan menggunakan algoritma *interior point* adalah dengan menemukan solusi kunci dengan menentukan karakteristik yang sama yaitu secara algoritma iteratif. Untuk fungsi kendala yang kecil, algoritma *interior point* ini memerlukan iterasi yang relatif banyak untuk mencapai suatu penyelesaian yang optimal, sedangkan metode simpleks memerlukan iterasi yang sedikit. Sehingga, semakin banyak fungsi kendala maka algoritma *interior point* lebih efisien dibandingkan dengan metode simpleks. Metode simpleks memakai tabel simpleks dengan perulangan/iterasi, perlu banyak langkah dan ketelitian tinggi, sedangkan algoritma *interior point* menggunakan *software* MatLab yang bisa menyelesaikan masalah program linier lebih cepat daripada metode simpleks (Hillier, 1990).

Hal ini yang membuat penulis tertarik untuk mengambil judul pada tugas akhir ini yaitu **“ Penyelesaian Program Linier Menggunakan Algoritma *Interior Point* dan Metode Simpleks ”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan diselesaikan dalam penelitian ini yaitu: metode mana yang lebih efisien dalam menyelesaikan program linier dengan menggunakan algoritma *interior point* dan metode simpleks?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah maka penelitian dibatasi dengan:

1. Terdiri dari 3 fungsi kendala.
2. Terdiri dari 3 variabel keputusan.
3. Fungsi tujuan yang digunakan kasus maksimasi.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui perbandingan hasil dari algoritma *interior point* dan metode simpleks.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini adalah :

1. Membantu pencarian solusi optimal dengan kendala yang besar secara cepat menggunakan algoritma *interior point*.
2. Penulis dapat membandingkan cara pencarian solusi optimal secara cepat dari hasil algoritma *interior point* dan metode simpleks.

3. Penulis dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai pencarian solusi secara cepat dengan menggunakan algoritma *interior point*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan teori-teori tentang program linier, formulasi model program linier, algoritma *interior point* dan metode simpleks.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur menyelesaikan pencarian solusi optimal secara cepat menggunakan algoritma *interior point* dan metode simpleks.

BAB IV PEMBAHASAN dan ANALISA

Bab ini membahas tentang hasil-hasil yang diperoleh dari algoritma *interior point* menggunakan MatLab dan metode simpleks.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 *Linear Programming* (Program Linier)

Menurut Tjuju (1999) program linier (*Linear programming)* adalah suatu cara untuk menyelesaikan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas diantara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan.

Menurut Siswanto (2007) pemograman linier adalah sebuah metode matematis yang berkarakteristik linier untuk menemukan suatu penyelesaian optimal dengan cara memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan terhadap satu susunan kendala.

Ada beberapa karakteristik yang bisa digunakan dalam persoalan program linier, yaitu:

a. Variabel Keputusan

   Variabel keputusan adalah variabel yang menguraikan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat.

b. Fungsi Tujuan

   Fungsi tujuan merupakan fungsi dari variabel keputusan yang akan dimaksimumkan (keuntungan) dan diminimumkan (untuk ongkos).

c. Pembatas

   Pembatas merupakan kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga-harga dari variabel keputusan secara sembarang.

d. Pembatas Tanda

   Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau variabel keputusan tersebut boleh berharga positif, boleh juga negatif (tidak terbatas dalam tanda) (Tjutju, 1999).

2.2 Model Program Linier

Membuat formulasi model program linier terdapat tiga langkah utama yang harus dilakukan, yaitu:

a. Tentukan variabel keputusan atau variabel yang ingin diketahui dan gambarkan dengan simbol matematik.

b. Tentukan tujuan dari variabel keputusan yang dapat berbentuk maksimum atau minimum.

c. Tentukan kendala dari variabel keputusan.

Tabel 2.1 Data untuk Model Program Linier

Aktivitas / **Sumber**	**Penggunaan Sumber/Unit**				**Banyaknya Sumber Yang Digunakan**
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
M	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Kontribusi Perunit Variabel Terhadap Z	c_1	c_2	...	c_n	

Berdasarkan Tabel 2.1 di atas, dapat dibentuk formulasi model matematis dari persoalan program linier, sebagai berikut:

1. Fungsi tujuan (*Objective function*): Maksimumkan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.1}$$

2. Fungsi Kendala/Sumber daya yang membatasi (*constraints)* :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \tag{2.2}$$

dan

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ (2.3)

dengan:

z = Fungsi tujuan (*Objective function)*

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ = Variabel keputusan

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ = Kontribusi masing-masing variabel terhadap tujuan

$a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn}$ = Penggunaan perunit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ = Jumlah tiap sumber daya yang tersedia

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ = Pembatas non negatif

Metode-metode yang dikembangkan untuk memecahkan model program linier ditujukan untuk mencari solusi dari beberapa alternatif solusi yang dibentuk oleh persamaan-persamaan pembatas sehingga diperoleh nilai fungsi tujuan yang optimum. Ada dua cara yang bisa digunakan dalam menyelesaikan persoalan-persoalan program linier, yaitu cara grafis dan cara simpleks.

Penyelesaian program linier dengan algoritma *interior point* merupakan sebuah penyelesaian persoalan yang kompleks. Penggunaan metode *interior point* dilakukan melalui proses relaksasi sampai pada tahapan persoalan program linier memiliki solusi yang optimal.

Permasalahan program linier yang kompleks, untuk menemukan solusi optimal dapat diselesaikan dengan melakukan kombinasi antara metode simpleks dengan algoritma *interior point*.

2.3 Algoritma *Interior Point*

Algoritma *interior point* digunakan untuk menyelesaikan masalah program linier yang kompleks, yaitu yang memiliki fungsi kendala dan variabel keputusan yang jumlahnya besar.

Penyelesaian program linier dengan algoritma *interior point* yang dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984) merupakan suatu metode mengoptimalkan fungsi objektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$. Algoritma *interior point* perlu diketahui hal-hal berikut: menambahkan *slack* variabel pada fungsi *objektif* $Z = c^T x$ menjadi $Z' = (c^T)' x'$, kendala $Ax \leq b$ menjadi $A'x' = b'$ sehingga program bisa dientri data fungsi *objektif* dan fungsi kendala kedalam bentuk matriks, dimana $C = (c^T)'$, $B = b'$, $A = A'$, dan $X = x'$. Pemilihan *interior point* secara acak dengan α $(0 < \alpha < 1)$, dimana α sebagai penggerak *interior point* sebelum keluar dari daerah fisibel menuju ke titik optimal dan titik berada pada daerah fisibel.

Definisi 2.1 (Lianah, 2008) Matriks diagonal merupakan suatu matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar elemen diagonal utama sama dengan nol, dan paling tidak satu elemen pada diagonal utamanya tidak sama dengan nol. Jadi, matriks $m\ x\ n$ secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2 (Kartono, 1995) Diberikan $a \in R$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran ε dari a didefinisikan sebagai himpunan:

$$N_\varepsilon(a) = \{x \in R: |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \tag{2.4}$$

Contoh 2.1:

Misal $a = 2$ dengan $\varepsilon > 0$.

Tentukan persekitaran dari 2?

Penyelesaian:

$a = 2$

Ambil sebarang $\varepsilon = \frac{1}{2}$ karena $\varepsilon > 0$ maka diperoleh:

$$N_{\frac{1}{2}}(2) = \left\{x \in R: |x - 2| < \frac{1}{2}\right\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

$$= |x - 2| < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 < x < \frac{1}{2} + 2$$

$= \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$..

Jadi, persekitaran dari 2 adalah $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$.

Definisi 2.3 (Kartono, 1995) Misalkan x disebut *interior point* himpunan A jika ada bilangan $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(x) \subset A$.

Contoh 2.2:

Misal diberikan himpunan $A = (0, 2) \cup \{3, 4, 5\}$ dengan $x \in (0, 2)$.

Tentukan *interior point* dari himpunan A ?

Penyelesaian:

Diketahui: $A = (0, 2) \cup \{3, 4, 5\}$

$x \in (0, 2)$

Ditanya: *interior point* dari himpunan A ?

Jawab**:**

$A = (0, 2) \cup \{3, 4, 5\}$

Ambil sebarang $\varepsilon = \frac{1}{2}$ karena $\varepsilon > 0$ maka diperoleh:

$N_\varepsilon (x) = N_{\frac{1}{2}}(x)$

$= (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

$= \left(2 - \frac{1}{2} , 2 + \frac{1}{2}\right)$

$= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Jadi, *interior point* dari himpunan A adalah $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Definisi 2.4 (Klain, 2010) Misalkan P adalah matriks proyeksi jika dan hanya jika P adalah simetris dan idempotent.

Contoh 2.3:

Diberikan matriks proyeksi $Q \subset W$ dengan vektor $\left(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ dan $(1, 1, 1)$.

Tentukan matriks proyeksi Q dalam W?

Penyelesaian:

Diketahui: $Q \subset W$

vektor $\left(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ dan $(1, 1, 1)$

Ditanya: matriks proyeksi dari vektor $(0, 2, 5, -1)$.

Jawab:

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AA^T) = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks proyeksi dari Q, sebagai berikut:

$$Q = I - A^T(AA^T)^{-1}A = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Jadi, matriks proyeksi dari Q, sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.5 (Hiller, 1990) *Projected gradient* adalah tingkat kemiringan yang diproyeksikan dari fungsi tujuan yang merupakan garis tegak lurus yang memotong daerah layak.

Algoritma *interior point* dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984), merupakan suatu metode menyelesaikan program linier untuk mengoptimalkan fungsi objektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$. Penyelesaian algoritma *interior point* untuk kasus maksimasi perlu penambahan variabel *slack*, dengan langkah-langkah menyelesaikan algoritma *interior point* sebagai berikut:

1. Memilih *interior point*

$$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \tag{2.5}$$

dengan x merupakan variabel keputusan.

Kemudian tentukan matriks diagonal D sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}.$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan

$$\widetilde{A} = AD \text{ dan } \tilde{c} = D\,c \tag{2.6}$$

dengan:

A = Koefisien dari fungsi kendala

$\widetilde{A}$ = Koefisien baru dari fungsi kendala

D = Matriks diagonal dari *interior point*

c = Koefisien dari fungsi tujuan

$\tilde{c}$ = Koefisien baru dari fungsi tujuan

3. Menentukan matriks proyeksi P

$$P = I - \tilde{A}\left(\tilde{A}\,\widetilde{A^T}\right)^{-1}\tilde{A} \tag{2.7}$$

dengan:

P = Matriks proyeksi

I = Matriks identitas

4. Menentukan *projected gradient*

$$c_p = P\,\tilde{c} \text{ dan } v = \left|c_p\right| \tag{2.8}$$

dengan:

c_p = Tingkat kemiringan yang diproyeksikan

P = Matriks proyeksi

v = Nilai absolut dari komponen negatif c_p

5. Menentukan dengan iterasi koordinat titik baru

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v}\, c_p \tag{2.9}$$

dengan α merupakan konstanta yang dipilih antara 0 dan 1 dengan $0 < \alpha < 1$

6. Menghitung x sebagai penyelesaian percobaan untuk iterasi berikutnya (langkah 1).

$$x = D\,\tilde{x} \text{ dan } Z = c^T x \tag{2.10}$$

2.4 Metode Simpleks

George B. Dantzig merupakan ahli matematika yang diakui sebagai pioneer program linier. Selama perang dunia II Dantzig bekerja pada Angkatan Udara Amerika Serikat, dia bekerjasama dengan Von Neumann, Hurwicz, dan Koopmans melahirkan " Program Saling Ketergantungan Kegiatan-kegiatan dalam Struktur Linier", kemudian disebut *Linear Programming.*

Pada tahun 1974 Dantzig mempublikasikan "metode simpleks". Kemudian bekerjasama dengan Marshall Wood dan Alex Orgen dalam pengembangan "metode simpleks". Pada awalnya metode simpleks diterpakan pada masalah-masalah militer seperti logistik, transportasi, dan perbekalan. Sejalan dengan perkembangannya, program linier sudah diaplikasikan hampir kesemua bidang yang didukung dengan perkembangan yang sangat pesat bidang ilmu komputer.

Metode simpleks merupakan salah satu teknik penyelesaian dalam program linier yang digunakan sebagai teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumber daya secara optimal. Metode simpleks digunakan untuk mencari nilai optimal dari program linier yang melibatkan banyak *constraint* (pembatas) dan banyak variabel (lebih dari dua variabel) (Dian, 2009).

Untuk menyelesaikan persoalan optimasi dengan menggunakan metode simpleks, harus memenuhi kriteria-kriteria berikut :

1. Seluruh pembatas berbentuk persamaan ($=$).
   a. Jika pembatas bertanda $\geq$ atau $\leq$ dapat dijadikan suatu persamaan yang bertanda $=$ dengan cara menambah *slack variabel* atau mengurangi *surplus variabel* yang merupakan variabel yang mewakili tingkat kapasitas batasan. Jika tanda pada persamaan tersebut adalah $\leq$ maka kita harus menambahkannya dengan *slack variabel* $(+x_{n+1})$ dan jika persamaan

tersebut bertanda $\geq$ maka kita harus menguranginya dengan *surplus* variabel $(-x_{n+1})$.

b. Ruas kanan dari suatu persamaan dapat dijadikan bilangan non negatif jika kedua ruas dikalikan – 1.
c. Arah ketidaksamaan dapat berubah jika kedua ruas dikalikan dengan – 1.
d. Pembatas dengan ketidaksamaan yang ruas kirinya berada dalam tanda mutlak dapat diubah menjadi dua ketidaksamaan.

2. Seluruh variabel merupakan variabel non negatif.
3. Fungsi tujuan berupa maksimum atau minimum.

Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam membuat bentuk baku, sebagai berikut:

1. Nilai kanan (NK) fungsi tujuan harus nol (0).
2. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\leq$ dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan $(=)$ dengan menambahkan satu variabel *slack.*
3. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan $(=)$ dengan mengurangkan satu variabel *surplus.*
4. Fungsi kendala persamaan $(=)$ dalam bentuk umum, ditambahkan satu *artificial* variabel (variabel buatan).

Menurut (Bambang, 2007) langkah-langkah penyelesaian program linier dengan metode simpleks sebagai berikut:

1. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala

   Fungsi tujuan diubah menjadi bentuk baku. Fungsi pembatas sebelum dimasukkan dalam tabel ditambahkan *slack* variabel atau dikurangkan *surplus* variabel. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\leq$ maka fungsi kendala tersebut ditambahkan *slack* variabel $(+x_{n+1})$, sedangkan untuk fungsi kendala dengan pertidaksamaan $\geq$ maka fungsi kendala tersebut dikurangkan *surplus* variabel $(-x_{n+1})$.
2. Menyusun persamaan-persamaan ke dalam tabel.

   Bentuk tabel awal simpleks, sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel Awal Simpleks dalam Bentuk Simbol

Variabel Dasar	z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+m}	NK
z	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m

NK adalah Nilai Kanan dari fungsi kendala

3. Memilih kolom kunci

   Kolom kunci adalah kolom yang mempunyai nilai pada baris z yang bernilai negatif dengan angka terbesar.

4. Memilih baris kunci

   Baris kunci ditentukan berdasarkan nilai indeks positif terkecil. Cara menentukan indeks sebagai berikut:

$$I = \frac{NK}{K_c} \tag{2.11}$$

   dengan:

   I = Indeks

   NK = Nilai kanan batasan

   K_c = Nilai kolom kunci

5. Mengubah nilai-nilai baris kunci

   Nilai baris kunci diubah dengan cara membaginya dengan angka kunci.

6. Mengubah nilai-nilai selain baris kunci sehingga nilai-nilai kolom kunci (selain baris kunci) $=$ 0.

7. Melanjutkan perbaikan-perbaikan (langkah 3-6) sampai baris z tidak ada yang bernilai negatif pada permasalahan maksimum.

Contoh 2.4: (Masalah Produk Mix)

PT Yummy Food memiliki sebuah pabrik yang akan memproduksi dua jenis produk yaitu vanilla dan violette, Untuk memproduksi kedua produk tersebut diperlukan bahan baku dan jam tenaga kerja. Maksimum penyediaan bahan baku 60 kg per hari dan tenaga kerja 40 jam per hari. Kebutuhan setiap unit produk akan bahan baku dan jam tenaga kerja, dapat dilihat dalam Tabel 2.3 berikut:

Tabel 2.3 Data Jumlah Produksi Kursi dan Meja

No	Bahan Baku dan Jam Tenaga Kerja	Produk		Maksimum Penyediaan
		Vanilla	Violette	
1	Bahan Baku	2	3	60
2	Tenaga Kerja	2	1	40
3	Keuntungan	Rp.40	Rp.30	

Sumber: Bahan Kuliah Riset Operasi

Dari tabel di atas, menentukan jumlah unit setiap jenis produk yang akan diproduksi dalam setiap hari agar mendapatkan keuntungan yang maksimal?

Penyelesaian:

Variabel keputusan

x_1 = jumlah kursi yang diproduksi

x_2 = jumlah meja yang diproduksi

Formulasi *linear programming*:

Fungsi tujuan:

Memaksimumkan $z = 40x_1 + 30x_2$

dengan kendala:

$2x_1 + 3x_2 \leq 60 \longrightarrow$ untuk kendala bahan mentah

$2x_1 + x_2 \leq 40 \longrightarrow$ untuk kendala buruh

$x_1, x_2 \geq 0$

Menggunakan metode simpleks:

Langkah-langkah dalam penyelesaian dengan metode simpleks sebagai berikut:

1. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala ke dalam bentuk baku.

$z = 40x_1 + 30x_2 + 0x_3 + 0x_4$ atau

$z - 40x_1 - 30x_2 - 0x_3 - 0x_4 = 0$

dengan kendala:

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 60$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 40$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

2. Setelah diperoleh bentuk baku, maka persamaan tersebut dimasukkan dalam tabel simpleks , sebagai berikut:

Tabel 2.4 Tabel Simpleks Awal untuk Contoh 2.4

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK
z	1	-40	-30	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	60
x_4	0	2	1	0	1	40

3. Menentukan nilai dari baris kunci dan kolom kunci seperti pada Tabel 2.5. Karena nilai negatif terbesar ada pada kolom x_1, yaitu -40 dan baris kunci diperoleh dengan persamaan (2.11), kemudian memilih nilai positif terkecil yaitu $\frac{40}{2} = 20$.

Tabel 2.5 Kolom Kunci dan Baris Kunci

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK	Rasio
z	1	-40	-30	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	60	30
x_4	0	2	1	0	1	40	20

Kolom kunci Baris kunci

4. Mengubah nilai-nilai baris kunci. Untuk iterasi I, variabel untuk kolom kunci (x_1) menjadi pengganti dari variabel pada baris kunci (x_4) dengan nilai dari baris tabelnya :

$$x_1 = nilai\ kolom\ lama\ (x_4) : nilai\ angka\ kunci \quad (2.12)$$

Sedangkan untuk baris lainnya, nilai baris barunya diperoleh dengan rumus, sebagai berikut:

$$Baris\ baru = baris\ lama - (koefisien\ angka\ kolom\ kunci\ x\ nilai\ baris\ baru\ \&kunci) \tag{2.13}$$

Sehingga untuk iterasi I diperoleh baris-baris baru:

$x_1 \quad = (0, 2, 1, 0, 1, 40) : 2$

$\quad\;\; = \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 20\right)$

$z \quad = (1, -40, -30, 0, 0, 0,) - \left((-40)\ x\ \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 20\right)\right)$

$\quad\;\; = (1, 0, -10, 0, 20, 800)$

$x_3 \quad = (0, 2, 3, 1, 0, 60) - \left((2)\ x\ \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 20\right)\right)$

$\quad\;\; = (0, 0, 2, 1, -1, 20)$

Nilai-nilai tersebut dimasukkan ke dalam tabel iterasi I yang kemudian menjadi tabel awal melakukan iterasi II. Karena pada baris z masih terdapat nilai negatif, maka iterasi akan terus dilakukan.

Tabel 2.6 Iterasi II untuk Contoh 2.4

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK	Rasio
z	1	0	-10	0	20	800	
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	20	10
x_3	0	0	2	1	-1	20	10

Kolom kunci

Baris kunci

5. Melakukan iterasi dengan cara yang sama sampai tidak ada nilai negatif pada baris z. Baris z pada iterasi I masih mengandung nilai negatif, maka akan dilakukan iterasi II, dengan cara yang sama pada iterasi I diperoleh:

$x_2 \quad = (0, 0, 2, 1, -1, 20) : 20$

$\quad\;\; = \left(0, 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 10\right)$

$z \quad = (1, 0, -10, 0, 20, 800) - \left((-10)\ x\ \left(0, 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 10\right)\right)$

$\quad\;\; = (1, 0, 0, 5, 15, 900)$

$x_1 \quad = \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 20\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)\ x\ \left(0, 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 10\right)\right)$

$= \left(0, 1, 0, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 15\right)$

Tabel 2.7 Iterasi III untuk Contoh 2.4

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK
z	1	0	0	5	15	900
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	15
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10

Jadi, karena baris z tidak ada yang negatif lagi, maka telah ditemukan nilai: untuk jumlah kursi (x_1) yang diproduksi sebanyak 15 unit dan untuk jumlah meja (x_2) yang diproduksi sebanyak 10 unit. Sehingga keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan sebesar $z = 900$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Dalam penelitian ini menggunakan penelitian perpustakaan (*library research*). Penelitian perpustakaan bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam-macam materi yang terdapat dalam ruang perpustakaan, seperti buku, jurnal, dan internet.

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dan membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan dan memahami berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara membahas dan menelaah materi yang berkaitan. Dalam hal ini, literatur yang digunakan berupa buku-buku yang berkaitan dengan riset operasi dan aljabar linier.
3. Menyelesaikan permasalahan metode algoritma *interior point* dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan *interior point*

   $$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

   membuat matriks diagonal D

   $$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix}.$$

   b. Menentukan $\widetilde{A} = AD$ dan $\tilde{c} = Dc$.

   c. Menentukan matriks proyeksi $P = I - \tilde{A}\left(\tilde{A}\,\widetilde{A^T}\right)^{-1}\tilde{A}$.

   d. Menentukan *projected gradient* $c_p = P\,\tilde{c}$ dan $v = |c_p|$ = absolut komponen negatif terbesar dari c_p.

   e. Menentukan dengan iterasi koordinat titik baru

   $$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v}\, c_p.$$

dengan α merupakan konstanta yang dipilih antara 0 dan 1 (misalnya $\alpha = 0.5$).

f. Menghitung $x = D\,\tilde{x}$ sebagai penyelesaian percobaan untuk iterasi berikutnya (langkah 1).

4. Menyelesaikan permasalahan metode simpleks dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Merubah dari bentuk standar ke bentuk kanonik dengan menambahkan *slack* (S)

b. Menyusun persamaan-persamaan ke dalam tabel.

c. Memilih kolom kunci, yaitu kolom yang mempunyai nilai pada baris z yang bernilai negatif dengan angka terbesar.

d. Memilih baris kunci berdasarkan nilai indeks terkecil.

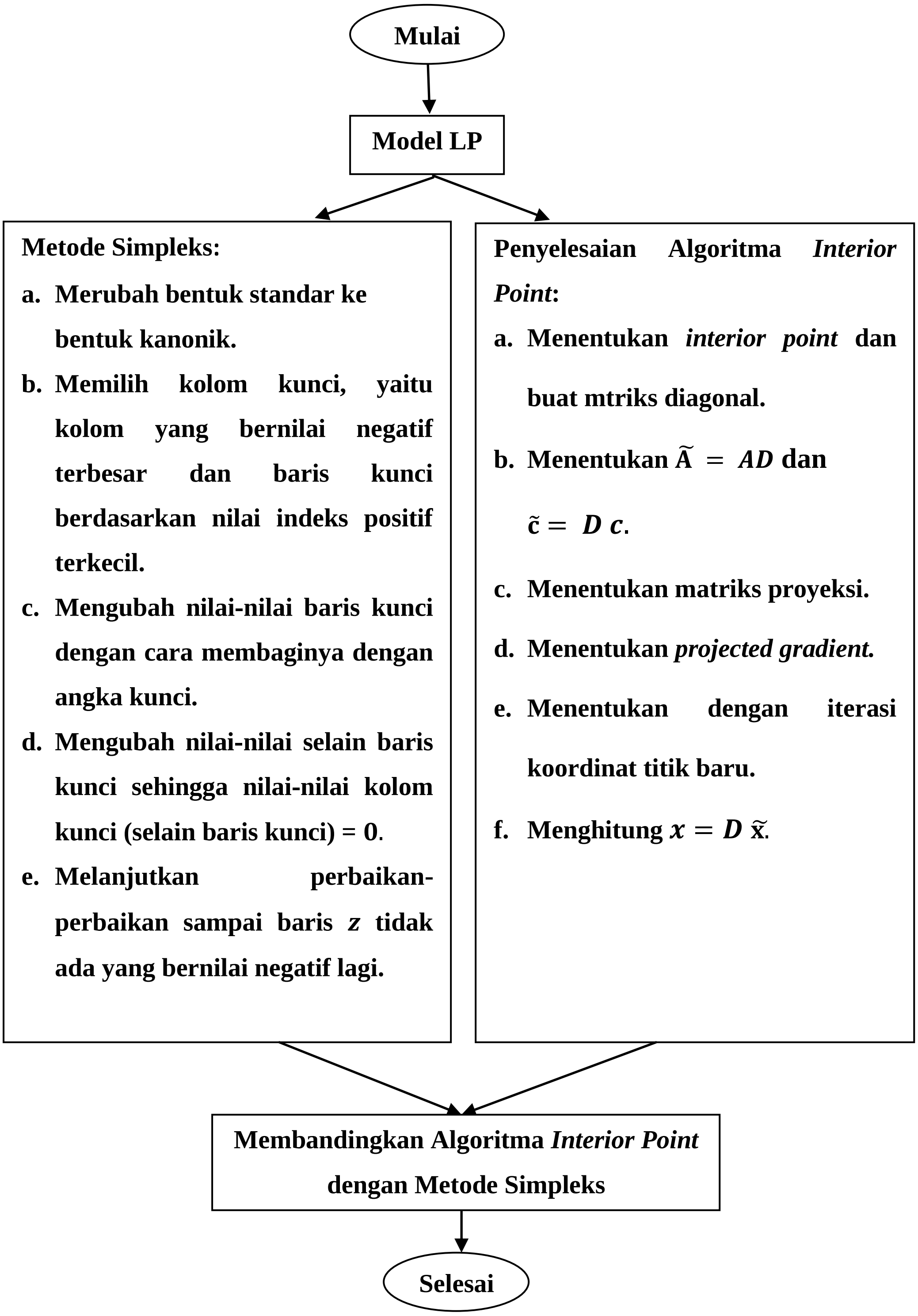
e. Mengubah nilai-nilai baris kunci dengan cara membaginya dengan angka kunci.

f. Mengubah nilai-nilai selain baris kunci sehingga nilai-nilai kolom kunci (selain baris kunci) = 0.

g. Melanjutkan perbaikan-perbaikan (langkah 3-6) sampai baris z tidak yang bernilai negatif pada permasalahan maksimum.

5. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukan dalam pembahasan.

Langkah-langkah metodologi penelitian diatas dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:



Gambar 1. ***Flowchart* Metodologi Penelitian**

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini berisikan analisis dan pembahasan mengenai penyelesaian algoritma *interior point* dan metode simpleks.

4.1 Penyelesaian Algoritma *Interior Point*

Algoritma *interior point* dikemukakan oleh Narendra Karmarkar (1984), merupakan suatu metode penyelesaikan program linier untuk mengoptimalkan fungsi objektif $Z = c^T x$ dengan kendala $Ax = b$ dan $x \geq 0$. Algoritma *interior point* perlu diketahui hal-hal berikut: menambahkan *slack* variabel pada fungsi *objektif* $Z = c^T x$ menjadi $Z' = (c^T)'x'$, kendala $Ax \leq b$ menjadi $A'x' = b'$ sehingga program bisa dientri data fungsi *objektif* dan fungsi kendala kedalam bentuk matriks, dimana $C = (c^T)'$, $B = b'$, $A = A'$ dan $X = x'$. Pemilihan *interior point* secara acak dengan α $(0 < \alpha < 1)$.

4.2 Penyelesaian Metode Simpleks

Metode simpleks merupakan salah satu teknik penyelesaian dalam program linier yang digunakan sebagai teknik pengambilan keputusan dalam permasalahan yang berhubungan dengan pengalokasian sumber daya secara optimal.

Optimasi dengan metode simpleks diawali dengan membentuk model program linier dalam persamaan standar simpleks. Setelah persamaan standar simpleks terbentuk, dilanjutkan dengan proses optimasi.

Contoh 4.1:

Diberikan model progam linier, memaksimumkan fungsi *objektif*:

$$z = 40x_1 + 30x_2$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 60 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Selesaikan kasus di atas menggunakan algoritma *interior point* dan metode simpleks untuk mendapatkan nilai z optimum?

Penyelesaian:

i) Penyelesaian menggunakan Algoritma *Interior Point*

Menyelesaikan program linier menggunakan algoritma *interior point*, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan cara menambahkan *slack* variabel, maka model program liniernya menjadi:

Maksimum $z = 40x_1 + 30x_2 + 0x_4 + 0x_5$

kendala:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 &= 60 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 \ \ 1x_4 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Langkah-langkah menyelesaikan algoritma *interior point*, sebagai berikut:

Iterasi 1:

1. Diambil *interior point* $[10, 10, 10, 10]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 10 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 30 & 10 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{35} & \frac{-8}{35} & \frac{2}{35} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-8}{35} & \frac{9}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{29}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} \frac{11}{35} & \frac{-8}{35} & \frac{2}{35} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-8}{35} & \frac{9}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{29}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{400}{7} \\ \frac{-100}{7} \\ \frac{-500}{7} \\ -100 \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$v = |-100| = 100.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{100} \begin{bmatrix} \frac{400}{7} \\ \frac{-100}{7} \\ \frac{-500}{7} \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.514 \\ 0.871 \\ 0.357 \\ 0.100 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.514 \\ 0.871 \\ 0.357 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.143 \\ 8.714 \\ 3.571 \\ 1.000 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.143 \\ 8.714 \\ 3.571 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

$$= [867.143].$$

Iterasi 2:

1. Diambil *interior point*

   $[15.143 \quad 8.714 \quad 3.571 \quad 1.000]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

   $$D = \begin{bmatrix} 15.143 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan

   dengan:

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0]$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

   $$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.143 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 30.283 & 26.143 & 3.571 & 0 \\ 30.286 & 8.714 & 0 & 1.000 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

   $$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 15.143 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 605.714 \\ 261.429 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

   dengan:

   $$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 30.286 & 30.286 \\ 26.143 & 8.714 \\ 3.571 & 0 \\ 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30.286 & 30.286 \\ 26.143 & 8.714 \\ 3.571 & 0 \\ 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 30.283 & 26.143 & 3.571 & 0 \\ 30.286 & 8.714 & 0 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.286 & 30.286 \\ 26.143 & 8.714 \\ 3.571 & 0 \\ 0 & 1.000 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 30.283 & 26.143 & 3.571 & 0 \\ 30.286 & 8.714 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.006 & -0.014 & 0.056 & -0.484 \\ -0.014 & 0.043 & -0.195 & 0.054 \\ 0.056 & -0.195 & 0.957 & 0.014 \\ -0.048 & 0.054 & 0.014 & 0.994 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.006 & -0.014 & 0.056 & -0.484 \\ -0.014 & 0.043 & -0.195 & 0.054 \\ 0.056 & -0.195 & 0.957 & 0.014 \\ -0.048 & 0.054 & 0.014 & 0.994 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 605.714 \\ 261.429 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.268 \\ 2.674 \\ -17.293 \\ -15.167 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$v = |-17.293| = 17.293.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{17.29346} \begin{bmatrix} -0.268 \\ 2.674 \\ -17.293 \\ -15.167 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.986 \\ 1.139 \\ 0.100 \\ 0.211 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 15.143 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.986 \\ 1.139 \\ 0.100 \\ 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14.931 \\ 9.927 \\ 0.357 \\ 0.211 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.931 \\ 9.927 \\ 0.357 \\ 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= [895.054].$$

Iterasi 3:

1. Diambil *interior point*

$$\begin{bmatrix} 14.931 & 9.927 & 0.357 & 0.211 \end{bmatrix}$$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 14.931 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.927 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.931 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.927 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.863 & 29.780 & 0.357 & 0 \\ 29.863 & 9.927 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 14.931 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.927 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 597.251 \\ 297.803 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi *P*

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 29.863 & 29.863 \\ 29.780 & 9.927 \\ 0.357 & 0 \\ 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29.863 & 29.863 \\ 29.780 & 9.927 \\ 0.357 & 0 \\ 0 & 0.211 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 29.863 & 29.780 & 0.357 & 0 \\ 29.863 & 9.927 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.863 & 29.863 \\ 29.780 & 9.927 \\ 0.357 & 0 \\ 0 & 0.211 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 29.863 & 29.780 & 0.357 & 0 \\ 29.863 & 9.927 & 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0002 & 0.006 & -0.011 \\ -0.0002 & 0.0004 & -0.018 & 0.011 \\ 0.006 & -0.018 & 0.991 & 0.0003 \\ -0.011 & 0.011 & 0.0003 & 0.991 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0002 & 0.006 & -0.011 \\ -0.0002 & 0.0004 & -0.018 & 0.011 \\ 0.006 & -0.018 & 0.991 & 0.0003 \\ -0.011 & 0.011 & 0.0003 & 0.991 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 597.251 \\ 297.803 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.023 \\ -0.001 \\ -1.786 \\ -3.151 \end{bmatrix} \text{ dan } v = |-3.151| = 3.151.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{3.151} \begin{bmatrix} 0.023 \\ -0.001 \\ -1.786 \\ -3.151 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.006 \\ 0.991 \\ 0.491 \\ 0.100 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung $x = D\ \tilde{x}$ untuk melakukan iterasi berikutnya.

$$x = \begin{bmatrix} 14.931 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.927 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.357 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.006 \\ 0.991 \\ 0.491 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.028 \\ 9.928 \\ 0.175 \\ 0.211 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 15.028 \\ 9.928 \\ 0.175 \\ 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= [898.807].$$

Iterasi 4:

1. Diambil *interior point*

$$[15.028 \quad 9.928 \quad 0.175 \quad 0.211]$$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 15.028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30.056 & 29.768 & 0.175 & 0 \\ 30.056 & 9.923 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 15.028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 601.123 \\ 297.684 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi *P*

dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 30.056 & 30.056 \\ 29.768 & 9.923 \\ 0.175 & 0 \\ 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30.056 & 30.056 \\ 29.768 & 9.923 \\ 0.175 & 0 \\ 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 30.056 & 29.768 & 0.175 & 0 \\ 30.056 & 9.923 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.056 & 30.056 \\ 29.768 & 9.923 \\ 0.175 & 0 \\ 0 & 0.211 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 30.056 & 29.768 & 0.175 & 0 \\ 30.056 & 9.923 & 0 & 0.211 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.96\ 10^{-5} & -0.00003 & 0.003 & -0.001 \\ -0.00003 & 0.00008 & -0.009 & 0.001 \\ 0.003 & -0.009 & 0.999 & 0.00001 \\ -0.001 & 0.001 & 0.00001 & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.96\ 10^{-5} & -0.00003 & 0.003 & -0.001 \\ -0.00003 & 0.00008 & -0.009 & 0.001 \\ 0.003 & -0.009 & 0.999 & 0.00001 \\ -0.001 & 0.001 & 0.00001 & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 601.123 \\ 297.684 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0.007 \\ -0.877 \\ -0.316 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$v = |-0.877| = 0.877.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.877} \begin{bmatrix} -0.002 \\ 0.007 \\ -0.877 \\ -0.316 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.998 \\ 1.008 \\ 0.100 \\ 0.676 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 15.028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.211 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.998 \\ 1.008 \\ 0.100 \\ 0.676 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14.994 \\ 9.998 \\ 0.018 \\ 0.014 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.994 \\ 9.998 \\ 0.018 \\ 0.014 \end{bmatrix}$$

$$= [899.699].$$

Iterasi 5:

1. Diambil *interior point*

   $[14.994 \quad 9.998 \quad 0.175 \quad 0.014]$

   Kemudian membuat matriks diagonal *D* sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 14.994 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.014 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan

   dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0]$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.994 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.014 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.987 & 29.995 & 0.175 & 0 \\ 29.987 & 9.998 & 0 & 0.014 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 14.994 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 599.749 \\ 299.951 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi *P*

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 29.987 & 29.987 \\ 29.995 & 9.998 \\ 0.175 & 0 \\ 0 & 0.014 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29.987 & 29.987 \\ 29.995 & 9.998 \\ 0.175 & 0 \\ 0 & 0.014 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 29.987 & 29.995 & 0.175 & 0 \\ 29.987 & 9.998 & 0 & 0.014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.987 & 29.987 \\ 29.995 & 9.998 \\ 0.175 & 0 \\ 0 & 0.014 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 29.987 & 29.995 & 0.175 & 0 \\ 29.987 & 9.998 & 0 & 0.014 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.59\ 10^{-6} & -0.8\ 10^{-6} & 0.0003 & -0.001 \\ -0.76\ 10^{-6} & 0.13\ 10^{-5} & -0.001 & 0.001 \\ 0.0003 & -0.001 & 0.999 & 0.83\ 10^{-6} \\ -0.001 & 0.001 & 0.83\ 10^{-6} & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.59\ 10^{-6} & -0.8\ 10^{-6} & 0.0003 & -0.001 \\ -0.76\ 10^{-6} & 0.13\ 10^{-5} & -0.001 & 0.001 \\ 0.0003 & -0.001 & 0.999 & 0.83\ 10^{-6} \\ -0.001 & 0.001 & 0.83\ 10^{-6} & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 599.749 \\ 299.951 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.088 \\ -0.214 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$v = |-0.214| = 0.214.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.214} \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \\ -0.088 \\ -0.214 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 0.999 \\ 0.630 \\ 0.100 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 14.994 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.998 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.175 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 0.999 \\ 0.630 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.002 \\ 9.995 \\ 0.011 \\ 0.001 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.002 \\ 9.995 \\ 0.011 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= [899.924].$$

Iterasi 6:

1. Diambil *interior point*

   $[15.002 \quad 9.995 \quad 0.011 \quad 0.001]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0]$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30.004 & 29.985 & 0.011 & 0 \\ 30.004 & 9.995 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 600.070 \\ 299.854 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 30.004 & 30.004 \\ 29.985 & 9.995 \\ 0.011 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30.004 & 30.004 \\ 29.985 & 9.995 \\ 0.011 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 30.004 & 29.985 & 0.011 & 0 \\ 30.004 & 9.995 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.004 & 30.004 \\ 29.985 & 9.995 \\ 0.011 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 30.004 & 29.985 & 0.011 & 0 \\ 30.004 & 9.995 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.39\ 10^{-7} & -0.11\ 10^{-6} & 0.0002 & -0.0001 \\ -0.11\ 10^{-6} & 0.31\ 10^{-6} & -0.001 & 0.0001 \\ 0.0002 & -0.001 & 0.999 & 0.53\ 10^{-7} \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.53\ 10^{-7} & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.39\ 10^{-7} & -0.11\ 10^{-6} & 0.0002 & -0.0001 \\ -0.11\ 10^{-6} & 0.31\ 10^{-6} & -0.001 & 0.0001 \\ 0.0002 & -0.001 & 0.999 & 0.53\ 10^{-7} \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.53\ 10^{-7} & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600.070 \\ 299.854 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.91\ 10^{-5} \\ 0.00003 \\ -0.055 \\ -0.021 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$v \;=\; |-0.055| = 0.055.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.055} \begin{bmatrix} -0.91\ 10^{-5} \\ 0.00003 \\ -0.055 \\ -0.021 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.991 \\ 1.001 \\ 0.100 \\ 0.652 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Bedasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x \;=\; \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.011 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.991 \\ 1.001 \\ 0.100 \\ 0.652 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14.991 \\ 9.991 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z \;= c^T x$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.991 \\ 9.991 \\ 0.001 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= [899.975].$$

Iterasi 7:

1. Diambil *interior point*

$$\begin{bmatrix} 14.991 & 9.991 & 0.001 & 0.001 \end{bmatrix}$$

   Kemudian membuat matriks diagonal *D* sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 14.991 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan

   dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.991 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29.991 & 29.999 & 0.001 & 0 \\ 29.991 & 9.991 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 14.991 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 599.981 \\ 299.994 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 29.991 & 29.991 \\ 29.999 & 9.991 \\ 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29.991 & 29.991 \\ 29.999 & 9.991 \\ 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 29.991 & 29.999 & 0.001 & 0 \\ 29.991 & 9.991 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29.991 & 29.991 \\ 29.999 & 9.991 \\ 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 29.991 & 29.999 & 0.001 & 0 \\ 29.991 & 9.991 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.51\ 10^{-8} & -0.27\ 10^{-8} & 0.00002 & -0.0001 \\ -0.4\ 10^{-8} & 0.79\ 10^{-8} & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.00002 & -0.0001 & 0.999 & 0.34\ 10^{-8} \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.34\ 10^{-8} & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.51\ 10^{-8} & -0.27\ 10^{-8} & 0.00002 & -0.0001 \\ -0.4\ 10^{-8} & 0.79\ 10^{-8} & -0.0001 & 0.0001 \\ 0.00002 & -0.0001 & 0.999 & 0.34\ 10^{-8} \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.34\ 10^{-8} & 0.999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 599.981 \\ 299.994 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.22\ 10^{-5} \\ -0.2910^{-7} \\ -0.006 \\ -0.014 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$v = |-0.014| = 0.014.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.014}\begin{bmatrix} 0.22\ 10^{-5} \\ -0.2910^{-7} \\ -0.006 \\ -0.014 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0002 \\ 0.999 \\ 0.643 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 14.991 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.0002 \\ 0.999 \\ 0.643 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.002 \\ 9.991 \\ 0.001 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$Z \quad = c^T x$$

$$= [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 15.002 \\ 9.991 \\ 0.001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$= [900.062].$$

Iterasi 8:

1. Diambil *interior point*

   $[15.002 \quad 9.991 \quad 0.001 \quad 0.0001]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0]$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30.003 & 29.999 & 0.001 & 0 \\ 30.003 & 9.991 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 600.069 \\ 299.993 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 30.003 & 30.003 \\ 29.999 & 9.991 \\ 0.001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30.003 & 30.003 \\ 29.999 & 9.991 \\ 0.001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 30.003 & 29.999 & 0.001 & 0 \\ 30.003 & 9.991 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.003 & 30.003 \\ 29.999 & 9.991 \\ 0.001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 30.003 & 29.999 & 0.001 & 0 \\ 30.003 & 9.991 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.25\ 10^{-8} & -0.8\ 10^{-9} & 0.00001 & -0.46\ 10^{-8} \\ -0.2\ 10^{-8} & 0.24\ 10^{-8} & -0.00004 & 0.46\ 10^{-8} \\ 0.00001 & -0.00004 & 0.999 & 0.22\ 10^{-6} \\ -0.46\ 10^{-8} & 0.46\ 10^{-5} & 0.22\ 10^{-9} & 1.000 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.25\ 10^{-8} & -0.8\ 10^{-9} & 0.00001 & -0.46\ 10^{-8} \\ -0.2\ 10^{-8} & 0.24\ 10^{-8} & -0.00004 & 0.46\ 10^{-8} \\ 0.00001 & -0.00004 & 0.999 & 0.22\ 10^{-6} \\ -0.46\ 10^{-8} & 0.46\ 10^{-5} & 0.22\ 10^{-9} & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600.069 \\ 299.993 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.13\ 10^{-5} \\ -0.48\ 10^{-6} \\ -0.004 \\ -0.001 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$v = |-0.004| = 0.004.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.004} \begin{bmatrix} 0.13\ 10^{-5} \\ -0.48\ 10^{-6} \\ -0.004 \\ -0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.991 \\ 0.099 \\ 0.647 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 15.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.991 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.991 \\ 0.099 \\ 0.647 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.007 \\ 9.999 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= [40 \quad 30 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 15.007 \\ 9.999 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$= [900.217].$$

Jadi, pada iterasi ke-8 diperoleh nilai z optimal sebesar $z = 900.217$ dengan $x_1,\ x_2$ masing-masing sebesar 15.007 dan 9.999.

ii) Penyelesaian menggunakan Metode Simpleks

Langkah-langkah penyelesaian dengan metode simpleks adalah sebagai berikut:

1. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala

   Fungsi tujuan diubah menjadi bentuk baku. Fungsi pembatas sebelum dimasukkan dalam tabel ditambahkan *slack* variabel karena pertidaksamaannya $\leq$.

Persamaan standar simpleks berdasarkan persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) yaitu:

$$z - 40x_1 - 30x_2 - 0x_4 \quad = 0$$
$$2x_1 + \ 3x_2 + x_3 + 0x_4 \quad = 60$$
$$2x_1 + \ 1x_2 + 0x_3 \ \ 1x_4 \quad = 40$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \geq 0$$

dengan:

x_3 = *slack* variabel untuk batasan pertama

x_4 = *slack* variabel untuk batasan kedua

2. Setelah diperoleh bentuk baku, maka persamaan tersebut dimasukkan dalam tabel simpleks sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Awal Simpleks untuk Contoh 4.1

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK
z	1	-40	-30	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	60
x_4	0	2	1	0	1	40

NK adalah Nilai Kanan dari fungsi kendala

3. Menentukan nilai dari baris kunci dan kolom kunci seperti pada Tabel 4.2. Karena nilai negatif terbesar ada pada kolom x_1, yaitu -40 dan baris kunci diperoleh dengan persamaan (2.11), kemudian memilih nilai positif terkecil yaitu $\frac{40}{2} = 20$.

Tabel 4.2 Kolom Kunci dan Baris Kunci untuk Contoh 4.1

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK	Rasio
z	1	-40	-30	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	60	30
x_4	0	2	1	0	1	40	20

Kolom kunci

Baris kunci

4. Mengubah nilai-nilai baris kunci. Untuk iterasi I, variabel untuk kolom kunci (x_1) menjadi pengganti dari variabel pada baris kunci (x_4) dengan nilai , pada baris tabelnya pada persamaan (2.12)**.** Sedangkan untuk baris lainnya, nilai baris barunya diperoleh dengan rumus pada persamaan (2.13). sehingga untuk iterasi I diperoleh baris-baris baru:

$$x_1 = (0, 2, 1, 0, 1, 40) : 2$$

$$= \left(0, 1, \tfrac{1}{2}, 0,\ \tfrac{1}{2}, 20\right)$$

$$z = (1, -40, -30, 0, 0, 0,) - \left((-40)\ x\left(0, 1, \tfrac{1}{2}, 0,\ \tfrac{1}{2}, 20\right)\right)$$

$$= (1, 0, -10, 0, 20, 800)$$

$$x_3 = (0, 2, 3, 1, 0, 60) - \left((2)\ x\left(0, 1, \tfrac{1}{2}, 0,\ \tfrac{1}{2}, 20\right)\right)$$

$$= (0, 0, 2, 1, -1, 20)$$

Nilai-nilai tersebut dimasukkan kedalam tabel iterasi I yang kemudian menjadi tabel awal melakukan iterasi II. Karena pada baris z masih terdapat nilai negatif, maka iterasi akan terus dilakukan.

Tabel 4.3 Tabel Awal Iterasi II untuk Contoh 4.1

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	**NK**	**Rasio**
z	1	0	-10	0	20	800	
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	20	10
x_3	0	0	2	1	-1	20	10

Kolom kunci Baris kunci

5. Melakukan iterasi dengan cara yang sama sampai tidak ada nilai negatif pada baris z. Baris z pada iterasi I masih mengandung nilai negatif, maka akan dilakukan iterasi II, dengan cara yang sama pada iterasi I diperoleh:

$$x_2 = (0, 0, 2, 1, -1, 20) : 20$$

$$= \left(0, 0, 1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 10\right)$$

$$z = (1, 0, -10, 0, 20, 800) - \left((-10)\ x\left(0, 0, 1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 10\right)\right)$$

$$= (1, 0, 0, 5, 15, 900)$$

$$x_1 = \left(0, 1, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 20\right) - \left(\left(\tfrac{1}{2}\right) x\left(0, 0, 1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 10\right)\right)$$

$$= \left(0, 1, 0, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, 15\right)$$

Tabel 4.4 Hasil Iterasi III untuk Contoh 4.1

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	NK
z	1	0	0	5	15	900
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	15
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10

Berdasarkan Tabel 4.4 baris z tidak ada yang bernilai negatif, maka iterasi tidak perlu dilanjutkan. Setelah langkah-langkah di atas dilakukan, diperoleh hasil optimum untuk permasalahan ini. Hasil optimum tersebut disajikan dalam Tabel 4.5 berikut:

Tabel 4.5 Hasil Optimasi Tabel Simpleks untuk Contoh 4.1

Variabel Keputusan	Nilai Akhir
z	900
x_1	15
x_2	10

Berdasarkan Tabel 4.5 di atas maka diperoleh bahwa nilai $x_1 = 15$ dan $x_2 = 10$. Sehingga nilai z optimal yang diperoleh adalah sebesar 900.

Contoh 4.2:

Diberikan model program linier, memaksimumkan fungsi objektif:

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 &\le 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Selesaikan kasus di atas menggunakan algoritma *interior point* dan metode simpleks untuk mendapatkan nilai z optimum?

Penyelesaian:

i) Penyelesaian menggunakan Algoritma *Interior Point*

Menyelesaikan program linier menggunakan algoritma *interior point*, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan cara menambahkan *slack* variabel, maka model program liniernya menjadi:

Maksimum $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

kendala:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 1x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \ 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 &= 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \ 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

Langkah-langkah menyelesaikan algoritma *interior point* sebagai berikut:

Iterasi 1:

1. Diambil *interior point* $[1, 0, 8, 32, 4, 2]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan

   dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad]$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi *P*

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \\ 32 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 32 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.806 & 0 & -0.290 & -0.129 & 0.065 & -0.226 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.290 & 0 & 0.176 & 0.029 & -0.237 & -0.061 \\ 0.129 & 0 & 0.029 & 0.025 & 0.043 & 0.072 \\ -0.065 & 0 & -0.237 & 0.043 & 0.645 & 0.409 \\ 0.226 & 0 & -0.061 & 0.072 & 0.409 & 0.348 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diproleh:

$$c_p = \begin{bmatrix} 0.806 & 0 & -0.290 & -0.129 & 0.065 & -0.226 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.290 & 0 & 0.176 & 0.029 & -0.237 & -0.061 \\ 0.129 & 0 & 0.029 & 0.025 & 0.043 & 0.072 \\ -0.065 & 0 & -0.237 & 0.043 & 0.645 & 0.409 \\ 0.226 & 0 & -0.061 & 0.072 & 0.409 & 0.348 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.935 \\ 0 \\ 10.681 \\ -3.154 \\ -33.978 \\ -23.297 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-33.978| = 33.978.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{33.978} \begin{bmatrix} 1.935 \\ 0 \\ 10.681 \\ -3.154 \\ -33.978 \\ -23.297 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.051 \\ 1 \\ 1.283 \\ 0.916 \\ 0.091 \\ 0.383 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.051 \\ 1 \\ 1.283 \\ 0.916 \\ 0.091 \\ 0.383 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.051 \\ 0 \\ 10.263 \\ 29.327 \\ 0.391 \\ 0.766 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z \quad = c^T x$$

$$= [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad] \begin{bmatrix} 1.051 \\ 0 \\ 10.263 \\ 29.327 \\ 0.391 \\ 0.766 \end{bmatrix}$$

$$= [268.342].$$

Iterasi 2:

1. Diambil *interior point*

   $[1.051 \quad 0 \quad 10.263 \quad 29.327 \quad 0.399 \quad 0.766]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1.051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.263 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.327 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.263 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.327 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8.410 & 0 & 10.263 & 29.327 & 0 & 0 \\ 4.205 & 0 & 15.395 & 0 & 0.399 & 0 \\ 2.103 & 0 & 5.132 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1.051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.263 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.327 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63.076 \\ 0 \\ 205.266 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 8.41013 & 4.20506 & 2.10253 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10.26329 & 15.39494 & 5.13165 \\ 29.32658 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39999 & 0 \\ 0 & 0 & 0.76582 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8.410 & 4.205 & 2.103 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10.263 & 15.395 & 5.132 \\ 29.327 & 0 & 0 \\ 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8.410 & 0 & 10.263 & 29.327 & 0 & 0 \\ 4.205 & 0 & 15.395 & 0 & 0.399 & 0 \\ 2.103 & 0 & 5.132 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.410 & 4.205 & 2.103 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10.263 & 15.395 & 5.132 \\ 29.327 & 0 & 0 \\ 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 8.410 & 0 & 10.263 & 29.327 & 0 & 0 \\ 4.205 & 0 & 15.395 & 0 & 0.399 & 0 \\ 2.103 & 0 & 5.132 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.519 & 0 & -0.144 & -0.099 & 0.078 & -0.462 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.144 & 0 & 0.041 & 0.027 & -0.0478 & 0.124 \\ -0.099 & 0 & 0.027 & 0.019 & -0.006 & 0.089 \\ 0.078 & 0 & -0.047 & -0.006 & 0.981 & 0.099 \\ -0.462 & 0 & 0.124 & 0.089 & 0.099 & 0.439 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$c_p =$

$$\begin{bmatrix} 0.519 & 0 & -0.144 & -0.099 & 0.078 & -0.462 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.144 & 0 & 0.041 & 0.027 & -0.0478 & 0.124 \\ -0.099 & 0 & 0.027 & 0.019 & -0.006 & 0.089 \\ 0.078 & 0 & -0.047 & -0.006 & 0.981 & 0.099 \\ -0.462 & 0 & 0.124 & 0.089 & 0.099 & 0.439 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 63.0765 \\ 0 \\ 205.266 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.226 \\ 0 \\ -0.759 \\ -0.659 \\ -4.691 \\ -3.769 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$v = |-4.691| = 4.691.$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{4.691} \begin{bmatrix} 3.226 \\ 0 \\ -0.759 \\ -0.659 \\ -4.691 \\ -3.769 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.619 \\ 1 \\ 0.854 \\ 0.873 \\ 0.099 \\ 0.277 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$x =$

$$\begin{bmatrix} 1.051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.263 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 29.327 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.766 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.619 \\ 1 \\ 0.854 \\ 0.873 \\ 0.099 \\ 0.277 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.702 \\ 0 \\ 8.768 \\ 25.616 \\ 0.399 \\ 0.212 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1.702 \\ 0 \\ 8.768 \\ 25.616 \\ 0.399 \\ 0.212 \end{bmatrix}$$

$$= [277.479].$$

Iterasi 3:

1. Diambil *interior point*

   $[1.701 \quad 0 \quad 8.768 \quad 25.616 \quad 0.399 \quad 0.212]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1.702 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.768 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.702 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.768 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13.615 & 0 & 8.768 & 25.616 & 0 & 0 \\ 6.808 & 0 & 13.152 & 0 & 0.399 & 0 \\ 3.404 & 0 & 4.384 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1.702 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.768 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 102.115 \\ 0 \\ 175.364 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi *P*

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 13.615 & 6.808 & 3.404 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.768 & 13.152 & 4.384 \\ 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13.615 & 6.808 & 3.404 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.768 & 13.152 & 4.384 \\ 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 13.615 & 0 & 8.768 & 25.616 & 0 & 0 \\ 6.808 & 0 & 13.152 & 0 & 0.399 & 0 \\ 3.404 & 0 & 4.384 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13.615 & 6.808 & 3.404 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.768 & 13.152 & 4.384 \\ 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 13.615 & 0 & 8.768 & 25.616 & 0 & 0 \\ 6.808 & 0 & 13.152 & 0 & 0.399 & 0 \\ 3.404 & 0 & 4.384 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.033 & 0 & -0.017 & -0.012 & 0.011 & -0.178 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.017 & 0 & 0.009 & 0.006 & -0.009 & 0.092 \\ -0.012 & 0 & 0.006 & 0.004 & -0.003 & 0.063 \\ 0.011 & 0 & -0.009 & -0.003 & 0.999 & 0.003 \\ -0.178 & 0 & 0.092 & 0.063 & 0.003 & 0.954 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p =$$

$$\begin{bmatrix} 0.033 & 0 & -0.017 & -0.012 & 0.011 & -0.178 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.017 & 0 & 0.009 & 0.006 & -0.009 & 0.092 \\ -0.012 & 0 & 0.006 & 0.004 & -0.003 & 0.063 \\ 0.011 & 0 & -0.009 & -0.003 & 0.999 & 0.003 \\ -0.178 & 0 & 0.092 & 0.063 & 0.003 & 0.954 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 102.115 \\ 0 \\ 175.364 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.373 \\ 0 \\ -0.192 \\ -0.133 \\ -0.407 \\ -2.023 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-2.023| = 2.023.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{2.023} \begin{bmatrix} 0.373 \\ 0 \\ -0.192 \\ -0.133 \\ -0.407 \\ -2.023 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.166 \\ 1 \\ 0.915 \\ 0.941 \\ 0.819 \\ 0.100 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diproleh:

$$x = \begin{bmatrix} 1.702 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.768 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25.616 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.166 \\ 1 \\ 0.915 \\ 0.941 \\ 0.819 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.985 \\ 0 \\ 8.019 \\ 24.104 \\ 0.033 \\ 0.021 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.985 \\ 0 \\ 8.019 \\ 24.104 \\ 0.033 \\ 0.021 \end{bmatrix}$$

$$= [279.461].$$

Iterasi 4:

1. Diambil *interior point*

   $$[1.985 \quad 0 \quad 8.019 \quad 24.104 \quad 0.033 \quad 0.021]$$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

   $$D = \begin{bmatrix} 1.985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koefisien baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

   $$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

   $$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.877 & 0 & 8.019 & 24.104 & 0 & 0 \\ 7.938 & 0 & 12.029 & 0 & 0.033 & 0 \\ 3.969 & 0 & 4.009 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1.985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 119.075 \\ 0 \\ 160.386 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 15.877 & 7.9383 & 3.969 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.0193 & 12.029 & 4.009 \\ 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15.877 & 7.9383 & 3.969 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.0193 & 12.029 & 4.009 \\ 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 15.877 & 0 & 8.019 & 24.104 & 0 & 0 \\ 7.938 & 0 & 12.029 & 0 & 0.033 & 0 \\ 3.969 & 0 & 4.009 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.877 & 7.9383 & 3.969 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.0193 & 12.029 & 4.009 \\ 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 15.877 & 0 & 8.019 & 24.104 & 0 & 0 \\ 7.938 & 0 & 12.029 & 0 & 0.033 & 0 \\ 3.969 & 0 & 4.009 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & -0.0002 & -0.0001 & 0.008 & -0.016 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0002 & 0 & 0.0002 & 0.00001 & -0.008 & 0.0106 \\ -0.0001 & 0 & 0.00001 & 0.00006 & -0.003 & 0.007 \\ 0.008 & 0 & -0.008 & -0.003 & 0.999 & 0.0002 \\ -0.016 & 0 & 0.011 & 0.007 & 0.0002 & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0003 & 0 & -0.0002 & -0.0001 & 0.008 & -0.016 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0002 & 0 & 0.0002 & 0.00001 & -0.008 & 0.0106 \\ -0.0001 & 0 & 0.00001 & 0.00006 & -0.003 & 0.007 \\ 0.008 & 0 & -0.008 & -0.003 & 0.999 & 0.0002 \\ -0.016 & 0 & 0.011 & 0.007 & 0.0002 & 0.999 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 119.075 \\ 0 \\ 160.386 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.007 \\ 0 \\ 0.0004 \\ -0.001 \\ -0.328 \\ -0.212 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-0.328| = 0.328.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.328} \begin{bmatrix} 0.007 \\ 0 \\ 0.0004 \\ -0.001 \\ -0.328 \\ -0.212 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.002 \\ 1 \\ 1.001 \\ 0.998 \\ 0.100 \\ 0.418 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 1.985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.019 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.104 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.021 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.002 \\ 1 \\ 1.001 \\ 0.998 \\ 0.100 \\ 0.418 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.988 \\ 0 \\ 8.029 \\ 24.064 \\ 0.003 \\ 0.009 \end{bmatrix}$$

$$Z = c^T x$$

$$= [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1.988 \\ 0 \\ 8.029 \\ 24.064 \\ 0.003 \\ 0.009 \end{bmatrix}$$

$$= [279.879].$$

Iterasi 5:

1. Diambil *interior point*

   $[1.988 \quad 0 \quad 8.029 \quad 24.064 \quad 0.003 \quad 0.009]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1.988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koordinat-koordinat baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad]$$

Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.907 & 0 & 8.029 & 24.064 & 0 & 0 \\ 7.953 & 0 & 12.043 & 0 & 0.003 & 0 \\ 2.103 & 0 & 5.132 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1.988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 119.301 \\ 0 \\ 160.578 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi *P*

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 15.907 & 7.953 & 2.103 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.029 & 12.043 & 5.132 \\ 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15.907 & 7.953 & 2.103 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.029 & 12.043 & 5.132 \\ 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 15.907 & 0 & 8.029 & 24.064 & 0 & 0 \\ 7.953 & 0 & 12.043 & 0 & 0.003 & 0 \\ 2.103 & 0 & 5.132 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.907 & 7.953 & 2.103 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.029 & 12.043 & 5.132 \\ 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 15.907 & 0 & 8.029 & 24.064 & 0 & 0 \\ 7.953 & 0 & 12.043 & 0 & 0.003 & 0 \\ 2.103 & 0 & 5.132 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.00005 & 0 & -0.00003 & -0.00002 & 0.001 & -0.007 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00003 & 0 & 0.00002 & 0.00001 & -0.001 & 0.004 \\ -0.00002 & 0 & 0.00001 & 0.87\ 10^{-5} & -0.0003 & 0.003 \\ 0.0008 & 0 & -0.001 & -0.0003 & 0.999 & 0.99\ 10^{-5} \\ -0.007 & 0 & 0.004 & 0.003 & 0.99\ 10^{-5} & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p =$$

$$\begin{bmatrix} 0.00005 & 0 & -0.00003 & -0.00002 & 0.001 & -0.007 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.00003 & 0 & 0.00002 & 0.00001 & -0.001 & 0.004 \\ -0.00002 & 0 & 0.00001 & 0.87\ 10^{-5} & -0.0003 & 0.003 \\ 0.0008 & 0 & -0.001 & -0.0003 & 0.999 & 0.99\ 10^{-5} \\ -0.007 & 0 & 0.004 & 0.003 & 0.99\ 10^{-5} & 0.999 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 119.301 \\ 0 \\ 160.578 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ -0.0004 \\ -0.0003 \\ -0.033 \\ -0.089 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-0.089| = 0.089.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.089} \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ -0.0004 \\ -0.0003 \\ -0.033 \\ -0.089 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.006 \\ 1 \\ 0.996 \\ 0.997 \\ 0.667 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x =$$

$$\begin{bmatrix} 1.988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.029 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.009 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.006 \\ 1 \\ 0.996 \\ 0.997 \\ 0.667 \\ 0.100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.999 \\ 0 \\ 7.999 \\ 24.003 \\ 0.002 \\ 0.0009 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.999 \\ 0 \\ 7.999 \\ 24.003 \\ 0.002 \\ 0.0009 \end{bmatrix}$$

$$= [279.966].$$

Iterasi 6:

1. Diambil *interior point*

$$[1.999 \quad 0 \quad 7.999 \quad 24.003 \quad 0.002 \quad 0.001]$$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.999 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koordinat-koordinat baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.999 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.998 & 0 & 7.999 & 24.003 & 0 & 0 \\ 7.999 & 0 & 11.999 & 0 & 0.0022 & 0 \\ 3.999 & 0 & 3.999 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.999 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 119.985 \\ 0 \\ 159.981 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 15.998 & 7.999 & 3.999 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7.999 & 11.999 & 3.999 \\ 24.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15.998 & 7.999 & 3.999 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7.999 & 11.999 & 3.999 \\ 24.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 15.998 & 0 & 7.999 & 24.003 & 0 & 0 \\ 7.999 & 0 & 11.999 & 0 & 0.0022 & 0 \\ 3.999 & 0 & 3.999 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 15.998 & 0 & 7.999 & 24.003 & 0 & 0 \\ 7.999 & 0 & 11.999 & 0 & 0.0022 & 0 \\ 3.999 & 0 & 3.999 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7\ 10^{-6} & 0 & -0.6\ 10^{-6} & -0.3\ 10^{-6} & 0.001 & -0.0007 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6\ 10^{-6} & 0 & 0.5\ 10^{-6} & 0.2\ 10^{-6} & -0.0005 & 0.0004 \\ -0.3\ 10^{-6} & 0 & 0.2\ 10^{-6} & 0.1\ 10^{-6} & -0.0002 & 0.0003 \\ 0.001 & 0 & -0.00055 & -0.0002 & 0.999 & 0.7\ 10^{-6} \\ -0.001 & 0 & 0.0004 & 0.0003 & 0.66\ 10^{-6} & 0.999 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan *projected gradient* $c_p = P\ \tilde{c}$ dan $v = |c_p|$

$c_p =$

$$\begin{bmatrix} 0.7\ 10^{-6} & 0 & -0.6\ 10^{-6} & -0.3\ 10^{-6} & 0.001 & -0.0007 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6\ 10^{-6} & 0 & 0.5\ 10^{-6} & 0.2\ 10^{-6} & -0.0005 & 0.0004 \\ -0.3\ 10^{-6} & 0 & 0.2\ 10^{-6} & 0.1\ 10^{-6} & -0.0002 & 0.0003 \\ 0.001 & 0 & -0.00055 & -0.0002 & 0.999 & 0.7\ 10^{-6} \\ -0.001 & 0 & 0.0004 & 0.0003 & 0.66\ 10^{-6} & 0.999 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 119.985 \\ 0 \\ 159.981 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.54\ 10^{-5} \\ 0 \\ 0.89\ 10^{-5} \\ 0.15\ 10^{-5} \\ -0.022 \\ -0.009 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-0.022| = 0.022.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.022} \begin{bmatrix} -0.54\ 10^{-5} \\ 0 \\ 0.89\ 10^{-5} \\ 0.15\ 10^{-5} \\ -0.022 \\ -0.009 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.999 \\ 1 \\ 1.0004 \\ 1.0001 \\ 0.100 \\ 0.635 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7.999 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.999 \\ 1 \\ 1.0004 \\ 1.0001 \\ 0.100 \\ 0.635 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.999 \\ 0 \\ 8.002 \\ 24.005 \\ 0.0002 \\ 0.001 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z = c^T x$$

$$= \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.999 \\ 0 \\ 8.002 \\ 24.005 \\ 0.0002 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= [279.998].$$

Iterasi 7:

1. Diambil *interior poin*

   $[1.999 \quad 0 \quad 8.002 \quad 24.005 \quad 0.0002 \quad 0.001]$

   Kemudian membuat matriks diagonal D sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan koordinat-koordinat baru dari fungsi kendala dan fungsi tujuan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.6), sehingga diperoleh:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15.998 & 0 & 8.001 & 24.005 & 0 & 0 \\ 7.999 & 0 & 12.001 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 3.999 & 0 & 4.0004 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 119.984 \\ 0 \\ 160.014 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Menentukan matriks proyeksi P

   dengan:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \widetilde{A^T} = \begin{bmatrix} 15.998 & 7.999 & 3.999 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.001 & 12.001 & 4.0004 \\ 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan persamaan (2.7), sehingga diperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15.998 & 7.999 & 3.999 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.001 & 12.001 & 4.0004 \\ 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 15.998 & 0 & 8.001 & 24.005 & 0 & 0 \\ 7.999 & 0 & 12.001 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 3.999 & 0 & 4.0004 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.998 & 7.999 & 3.999 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8.001 & 12.001 & 4.0004 \\ 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 15.998 & 0 & 8.001 & 24.005 & 0 & 0 \\ 7.999 & 0 & 12.001 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 3.999 & 0 & 4.0004 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1\ 10^{-8} & 0 & 0.4\ 10^{-8} & 0.96\ 10^{-9} & 0.00004 & -0.00004 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9\ 10^{-8} & 0 & 0.6\ 10^{-8} & 0.1210^{-8} & -0.00004 & 0.00003 \\ 0.1\ 10^{-8} & 0 & -0.1\ 10^{-8} & -0.1\ 10^{-8} & -0.00001 & 0.00001 \\ 0.00004 & 0 & -0.00004 & -0.00001 & 0.999 & 0.27\ 10^{-8} \\ -0.000 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.27\ 10^{-8} & 0.999 \end{bmatrix}.$$

4. Menentukan *projected gradient*

   Berdasarkan persamaan (2.8), sehingga diperoleh:

$$c_p =$$

$$\begin{bmatrix} -0.1\ 10^{-8} & 0 & 0.4\ 10^{-8} & 0.96\ 10^{-9} & 0.00004 & -0.00004 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9\ 10^{-8} & 0 & 0.6\ 10^{-8} & 0.1210^{-8} & -0.00004 & 0.00003 \\ 0.1\ 10^{-8} & 0 & -0.1\ 10^{-8} & -0.1\ 10^{-8} & -0.00001 & 0.00001 \\ 0.00004 & 0 & -0.00004 & -0.00001 & 0.999 & 0.27\ 10^{-8} \\ -0.000 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.27\ 10^{-8} & 0.999 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 119.984 \\ 0 \\ 160.014 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.52\ 10^{-6} \\ 0 \\ 0.20\ 10^{-5} \\ 0.2810^{-6} \\ -0.001 \\ -0.001 \end{bmatrix} \text{dan } v = |-0.001| = 0.001.$$

5. Menentukan iterasi koordinat titik baru, dengan $\alpha = 0.9$.

   Berdasarkan persamaan (2.9), sehingga diperoleh:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.9}{0.001} \begin{bmatrix} 0.52\ 10^{-6} \\ 0 \\ 0.20\ 10^{-5} \\ 0.2810^{-6} \\ -0.001 \\ -0.001 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1 \\ 1.002 \\ 1.000 \\ 0.100 \\ 0.644 \end{bmatrix}.$$

6. Menghitung x untuk melakukan iterasi berikutnya.

   Berdasarkan persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$x \;=$$

$$\begin{bmatrix} 1.999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1 \\ 1.001 \\ 1.000 \\ 0.100 \\ 0.644 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.000 \\ 0 \\ 8.011 \\ 2.008 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$Z \;=\; c^T x$$

$$= [60 \quad 30 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 0\;] \begin{bmatrix} 2.000 \\ 0 \\ 8.011 \\ 2.008 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

$$= [280.244.]$$

ii) Penyelesaian menggunakan Metode Simpleks

Langkah-langkah penyelesaian dengan metode simpleks adalah sebagai berikut:

1. Mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala

Fungsi tujuan diubah menjadi bentuk baku. Fungsi pembatas sebelum dimasukkan dalam tabel ditambahkan *slack* variabel karena pertidaksamaannya $\leq$.

Persamaan standar simpleks berdasarkan persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) yaitu:

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 - 0x_4 - 0x_5 - 0x_6 = 0$$

$$8x_1 + 6x_2 + 1x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \ 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \ 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_{5,}x_6 \geq 0$$

dengan:

x_4 = *slack* variabel untuk batasan pertama

x_5 = *slack* variabel untuk batasan kedua

x_6 = *slack* variabel untuk batasan ketiga

2. Setelah diperoleh bentuk baku, maka persamaan tersebut dimasukkan dalam tabel simpleks sebagai berikut:

Tabel 4.6 Tabel Awal Simpleks untuk Contoh 4.2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	NK
z	1	-60	-30	-20	0	0	0	0
x_4	0	8	6	1	1	0	0	48
x_5	0	4	2	1.5	0	1	0	20
x_6	0	2	1.5	0.5	0	0	1	8

NK adalah Nilai Kanan dari fungsi kendala

3. Menentukan nilai dari baris kunci dan kolom kunci seperti pada Tabel 4.7. Karena nilai negatif terbesar ada pada kolom x_1, yaitu -60 dan baris kunci diperoleh dengan persamaan (2.5), kemudian memilih nilai positif terkecil yaitu $\frac{8}{2} = 4$.

Tabel 4.7 Kolom Kunci dan Baris Kunci untuk Contoh 4.2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	NK	Rasio
z	1	-60	-30	-20	0	0	0	0	
x_4	0	8	6	1	1	0	0	48	6
x_5	0	4	2	1.5	0	1	0	20	5
x_6	0	2	1.5	0.5	0	0	1	8	4

Baris kunci

Kolom kunci

4. Mengubah nilai-nilai baris kunci. Untuk iterasi I, variabel untuk kolom kunci (x_1) menjadi pengganti dari variabel pada baris kunci (x_6) dengan nilai , pada baris tabelnya pada persamaan (2.6)**.** Sedangkan untuk baris lainnya, nilai baris barunya diperoleh dengan rumus pada persamaan (2.7). sehingga untuk iterasi I diperoleh baris-baris baru:

$$x_1 = (0, 2, 1.5, 0.5, 0, 0, 1, 8) : 2$$
$$= (0, 1, 0.75, 0.25, 0, 0, 0.5, 4)$$
$$z = (1, -60, -30, -20, 0, 0, 0, 0) - \big((-60)\ x\ (0, 1, 0.75, 0.25, 0, 0, 0.5, 4)\big)$$
$$= (1, 0, 15, -5, 0, 0, 30, 240)$$
$$x_4 = (0, 8, 6, 1, 1, 0, 0, 48) - \big((8)\ x\ (0, 1, 0.75, 0.25, 0, 0, 0.5, 4)\big)$$
$$= (0, 0, 0, -1, 1, 0, -4, 16)$$
$$x_5 = (0, 4, 2, 1.5, 0, 1, 0, 20) - \big((4)\ x\ (0, 1, 0.75, 0.25, 0, 0, 0.5, 4)\big)$$
$$= (0, 0, -1, 0.5, 0, 1, -2, 4)$$

Nilai-nilai tersebut dimasukkan kedalam tabel iterasi I yang kemudian menjadi tabel awal melakukan iterasi II. Karena pada baris z masih terdapat nilai negatif, maka iterasi akan terus dilakukan.

Tabel 4.8 Tabel Simpleks Iterasi II untuk Contoh 4.2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	NK	Rasio
z	1	0	15	-5	0	0	30	240	
x_4	0	0	0	-1	1	0	-4	16	-16
x_5	0	0	-1	0.5	0	1	-2	4	8
x_1	0	2	1.5	0.5	0	0	1	8	16

Kolom kunci Baris kunci

5. Melakukan iterasi dengan cara yang sama sampai tidak ada nilai negatif pada baris z. Baris z pada iterasi I masih mengandung nilai negatif, maka akan dilakukan iterasi II, dengan cara yang sama pada iterasi I diperoleh:

$$x_3 = (0, 0, -1, 0.5, 0, 1, -2, 4) : 0.5$$
$$= (0, 0, -2, 1, 0, 2, -4, 8)$$
$$z = (1, 0, 15, -5, 0, 0, 30, 240) - \left((-5)\ x(0, 0, -2, 1, 0, 2, -4, 8)\right)$$
$$= (1, 0, 5, 0, 0,10, 10, 280)$$
$$x_4 = (0, 0, 0, -1, 1, 0, -4, 16) - \left((-1)\ x\ (0, 0, -2, 1, 0, 2, -4, 8)\right)$$
$$= (0, 0, -2, 0, 1, 2, -8, 24)$$
$$x_1 = (0, 1, 0.75, 0.25, 0, 0, 0.5, 4) - \left((0.25)\ x\ (0, 0, -2, 1, 0, 2, -4, 8)\right)$$
$$= (0, 1, 1.25, 0, 0, -0.5, 1.5, 2)$$

Tabel 4.9 Hasil Iterasi III untuk Contoh 4.2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	NK
z	1	0	5	0	0	10	10	280
x_1	0	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_4	0	0	-2	0	1	2	-8	24

Berdasarkan Tabel 4.9 baris z tidak ada yang bernilai negatif, maka iterasi tidak perlu dilanjutkan. Setelah langkah-langkah di atas dilakukan, diperoleh hasil optimum untuk permasalahan ini. Hasil optimum tersebut disajikan dalam Tabel 4.10 berikut:

Tabel 4.10 Hasil Optimasi Tabel Simpleks untuk Contoh 4.2

Variabel Keputusan	Nilai Akhir
z	280
x_1	2
x_2	0
x_3	8

Berdasarkan Tabel 4.10 di atas maka diperoleh bahwa nilai $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ dan $x_3 = 8$. Sehingga nilai z optimal yang diperoleh adalah sebesar 280.

Setelah dilakukan penyelesaian program linier pada kedua contoh di atas dengan menggunakan dua metode yaitu algoritma *interior point* dan metode simpleks terlihat bahwa dalam metode simpleks melakukan iterasi lebih sedikit dibandingkan dengan algoritma *interior point.* Kedua metode tersebut menghasilkan nilai z optimum dan nilai variabel keputusan yang hampir sama.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Pemberian nilai *interior point* diberikan secara acak, dengan nilai yang harus memenuhi batasan (*constraint*) yang ada pada permasalahan. Apabila nilai *interior point* tidak memenuhi batasan dan syarat yang ada, maka tidak dapat dihasilkan nilai solusi yang optimal.
2. Berdasarkan contoh 4.1 dan contoh 4.2, penyelesaian program linier menggunakan metode simpleks lebih efisien dibandingkan algoritma *interior point*, hal ini dapat dilihat dari banyaknya iterasi yang dilakukan.
3. Berdasarkan kedua metode yaitu algoritma *interior point* dan metode simpleks menghasilkan nilai z optimum untuk contoh 4.1 sebesar 900.217 dan 900 dengan nilai variabel keputusan untuk kedua metode masing-masing sebesar $15.007,\ 9.999, 15, 10$ sedangkan untuk contoh 4.2 nilai z optimum sebesar 280.244 dan 280 dengan nilai variabel keputusan untuk kedua metode masing-masing $2.0003, 0, 8.011, 2, 0, 8$.

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis menggunakan algoritma *interior point* dan metode simpleks dengan tiga variabel keputusan dan tiga fungsi kendala, diharapkan bagi pembaca yang berminat dapat menggunakan variabel keputusan dan fungsi kendala yang lebih besar untuk mendapatkan solusi optimum secara cepat.

DAFTAR PUSTAKA

Cillen, C.G. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta. 1993.

Gere, J.M. dkk. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Erlangga, Jakarta. 1983.

Hendri, J. *Riset Operasional*. Universitas Gunadarma, 2009.

Hillier, F.S.dkk. *Pengantar Riset Operasi.* Erlangga, Jakarta. 1990.

Kartono. *Pengantar Topologi*. Andi Offset, Yogyakarta. 1995.

Klain, D. *Orthogonal Projections and Reflections (with exercises)* . Tecnische Universitat Berlin, 2010.

Lianah. *Matematika Ekonomi*. Universitas Marcu Buana, Jakarta. 2008.

Siswanto. *Operation Research Jilid satu*. Erlangga, Jakarta. 2007.

Sukirno, S. *Mikro Ekonomi Teori Pengantar.* PT Raja Grafindo Persada, Jakarta. 2005.

Supranto, J. *Linear Programming Edisi dua*. Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia, 1983.

Tjutju. *Opertions Research Model-Model Pengambilan Keputusan*. Sinar Baru Algensindo, 1999.

Tuwankotta, J.M. *Analisis Real*. FMIPA ITB, Bandung. 2010.

Yuwono, B. *Bahan Kuliah Riset Operasional.* Teknik Informatika UPN, Yogyakarta.2007.

Winston, W.L. *Operations Research Applications and Algorithms*. *Thomson Learning*, USA. 2004.

Wirdasari, D. *Metode Simpleks dalam Program Linier*. Januari 2009.