VEKTOR EIGEN *GENERALIZED* MATRIKS KOMPANION

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

ARWINDA ASWANDARI
10654004466

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

VEKTOR EIGEN *GENERALIZED* MATRIKS KOMPANION

ARWINDA ASWANDARI
10654004466

Tanggal Sidang : 04 Juli 2012
Tanggal Wisuda : Oktober 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini akan membahas tentang suatu matriks kompanion dari suatu polinomial, serta mencari perhitungan matriks kompanion diantaranya yaitu: nilai eigen, vektor eigen, vektor eigen generalized, bentuk normal Jordan dan invers dari matriks kompanion itu sendiri. Berdasarkan pembahasan didapat hasil bahwasanya langkah-langkah untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks kompanion sama halnya dengan matriks biasa. Untuk eigen vektor generalized didapat dari nilai eigen yang sama. Terakhir invers matriks kompanion langkah-langkahnya sama dengan matriks biasa.

Katakunci: invers, matriks kompanion, polinomial.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Syukur *Alhamdulillah* penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Untuk ayahanda tersayang (Alm.Ardinata) dan ibunda tercinta (Asni) terima kasih atas semua kasih sayang, semangat dan segalanya baik moril ataupun materil yang telah diberikan dan yang takkan bisa terbalas, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugan akhir ini dengan sempurna dan tepat pada waktunya. Untuk suamiku tercinta (M.A. Iskandar Syam, ST) dan jagoan kecilku (Azizan Wiradinata Syam) yang selalu memberikan inspirasi, motivasi, keceriaan, semangat dan perhatian dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Dalam penulisan, penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis telah banyak menerima petunjuk, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Nazir, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknilogi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku pembimbing dan selaku koordinator Tugas Akhir yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.

6. Bapak M. Nizam Muhaijir, S.Si dan Ibu Rahmadeni, M.Si selaku penguji II yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
7. Bapak dan Ibu dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
8. Untuk kakak dan abang (Rahma Diana dan M. Toha) yang selalu memberikan semangat dan perhatian baik moril maupun materil.
9. Untuk semua keluarga besarku maktuo dan amai, cik oli dan pak zi, cik hel dan pak herman, cik as dan pak kadir terima kasih atas dorongan, semangat dan perhatiannya selama ini.
10. Untuk semua adek-adekku Yusma, Tari, Liya,Wiwit, Tika, Tira, Amri, Fazri, Ira, Ulfa, Tisa, Shasa, Asdi, yang selalu memberikan semangat dan keceriaan.
11. Untuk keponakanku Dian dan Irfan yang selalu memberikan keceriaan dan prhatian.
12. Untuk Gats (Adri, Aidil, Fitri, Fivi, Hendri, Irma, Marizal, Lihin, Vina dan Yetti) yang selalu memberikan semangat, dorongan dan motivasi.
13. Untuk teman seperjuangan Desi dan Vira terima kasih atas semangat dan dorongannya.
14. Untuk semua teman-teman Matematika angkatan 2006 yang tidak bisa dibilang satu persatu.
15. Untuk Yani Syam yang selalu bersedia untuk dipakai laptopnya setiap diperlukan.
16. Untuk Mendut, Meng dan terima kasih atas semua bantuan yang telah diberikan selama ini.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kriti dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks mempunyai peranan yang sangat penting dalam ilmu matematika. Pentingnya matriks ini dapat dilihat dengan begitu banyaknya penggunaan matriks dalam berbagai persoalan, seperti dalam bidang aljabar, statistik, dan lain sebagainya.

Bentuk dan ukuran matriks berbeda-beda seperti matriks bujur sangkar berukuran *n x n*, matriks sembarang berukuran *m x n*, matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah berukuran *n x n*, dan matriks polinomial berukuran *n x n*. Suatu matriks biasanya terbentuk dari sebuah sistem persamaan linier dan elemen-elemen matriks diambil dari koefisiannya. Sedangkan suatu matriks dari persamaan polynomial berderajat *n* dapat dibuat sebagai bentuk matriks kompanion berukuran *n x n*. Bentuk matriks kompanion agak sedikit berbeda dari bentuk matriks umumnya seperti yang didefenisikan dibawah ini.

Suatu bentuk matriks yang erat hubungannya dengan polinomial yang berderajat *n*, yaitu

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{a_n \lambda^n} + \boldsymbol{a_{n-1} \lambda^{n-1}} + \cdots + \boldsymbol{a_0}$$

adalah matriks kompanion berukuran $n \times n$ dengan simbol C yang berbentuk:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Matriks kompanion adalah matriks yang seluruh superdiagonal utamanya adalah satu dan semua elemen yang lainnya adalah nol. Matriks *C* disebut juga matriks kompanion dari polinomial *f(**λ**)*. Matriks kompanion ini juga berkaitan dengan persamaan diferensial linier, dimana matriks kompanion dapat diperoleh dapat diperoleh dengan mentransformasikan persamaan diferensial linier orde $\boldsymbol{n}$.

Elemen-elemen pada matriks kompanion tersebut merupakan koefisien-koefisien pada persamaan diferensialnya.

Adapun bentuk umum dari persamaan diferensial linier orde n adalah:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda' + a_n\lambda = 0,$$

dimana $a_0, a_1, \cdots, a_n$ adalah konstanta, dan $a_0 \neq 0$ serta λ^n menyatakan turunan ke-n. Jika $f(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ maka persamaan di atas disebut persamaan diferensial linier homogeny dan sebaliknya jika $f(\boldsymbol{\lambda}) \neq \mathbf{0}$ maka persamaan diatas disebut persamaan diferensial linier nonhomogen.

Pembahasan mengenai matriks kompanion telah banyak diteliti oleh beberapa peneliti sebelumnya, diantaranya Louis Brand pada tahun 1964 membahas tentang matriks kompanion dan sifat-sifatnya. Pada tahun 1968 Louis Brand membahas tentang aplikasi dari matriks kompanion, dan peneliti selanjutnya adalah Miroslav Fiedler tahun 2003 yang membahas tentang sebuah catatan untuk matriks kompanion.

Pengerjaan matriks terdapat beberapa operasinya seperti penjumlahan matriks, perkalian matriks, determinan matriks, invers dari matriks dan dapat ditentukan nilai eigen, dan vektor eigen dari matriks tersebut. Begitu juga halnya dengan matriks kompanion terdapat beberapa operasi perhitungan pada matriks tersebut. Berdasarkan latar belakang di atas maka penulis tertarik untuk membahas mengenai Matriks Kompanion dengan beberapa operasi matriks.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana langkah-langkah untuk menentukan vektor eigen, vektor eigen generalized dan invers dari matriks kompanion.

1.3 Batasan Masalah

Supaya penelitian ini mencapai tujuan yang diinginkan maka penulis membatasi permasalahan penelitian yaitu polinomial yang digunakan adalah polinomial monik dengan contoh matriks $3x3$, $4x4$, dan $5x5$.

1.4 Tujuan dan Manfaat.

1. **Tujuan Penelitian**

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan perhitungan matriks kompanion, yaitu menentukan nilai eigen, vektor eigen, vektor eigen generalized dan invers matriks dari matriks kompanion tersebut .

2. **Manfaat Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut :

a. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan pada bidang aljabar khususnya mengenai matriks kompanion.

b. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi Matriks yang tentunya akan sangat memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan Matriks.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Berisi teori-teori yang mendukung tentang matriks kompanion, vektor eigen general, dll

BAB III Metodologi Penelitian

Berisi mengenai studi pustaka atau literatur, yaitu dengan membaca buku-buku dan sumber-sumber lain yang berhubungan dengan matriks kompanion.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara dengan teoritis dalam mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Dalam bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II ini penulis akan menjelaskan beberapa teori yang mendukung untuk menyelesaikan matriks kompanion. Adapun teori pendukungnya adalah sebagai berikut:

2.1 Matriks

Defenisi 2.1 (Howard Anton, 2004) Matriks adalah suatu bilangan berbentuk segiempat siki-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Selanjutnya bila *A* menyatakan sebuah matriks yang terdiri atas *m* baris dan *n* kolom, maka dapat dikatakan *A* adalah matriks *m x n* dan berdasarkan definisi 1 maka dapat ditulis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$A_{mxn} = (a_{ij})$ atau $A = (a_{ij})$, dengan $i = 1, 2, \cdots, m$ dan $j = 1, 2, \cdots, n$ dan (a_{ij}) disebut elemen yang berada pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* darí matriks *A*.

Definisi 2.2 (Howard Anton, 2004) Matriks identitas adalah suatu matriks $A = (a_{ij})$, dimana $i, j = 1,2, \cdots, n$, dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan dinotasikan dengan I.

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar dengan 1 pada diagonal utamanya dan 0 untuk anggota selain diagonal utamanya sedemikian sehingga

2.2 Determinan Matriks

Definisi 2.3 (Howard Anton, 2004) : Misalkan *A* adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh *det*, dan didefenisikan *det (A)* sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari *A*. Jumlah *det (A)* dinamakan *determinan A.*

Contoh 2.2

i. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

ii. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.4 (Howard Anton, 2004) Jika *A* adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$ maka *A* disebut **bisa dibalik** dan *B* disebut **invers** dari *A*.

Contoh 2.3

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Dapat diselesaikan secara OBE sehingga menjadi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua dan -1 kali baris pertama ke baris ketiga. :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Tambahkan 2 kali baris kedua ke baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Kalikan baris ketiga dengan -1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Tambahkan 3 kali baris ketiga ke baris kedua dan -3 kali baris ketiga ke baris pertama.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tambahkan -2 kali baris kedua ke baris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Sehingga

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Berikut dijelaskan definisi tentang vektor eigen dan nilai eigen dari suatu matriks.

Definisi 2.5 (Howard Anton, 2004) Jika A adalah matriks $n\,x\,n$, maka suatu vektor yang tidak nol x di R^n dinamakan vektor karakteristik dari A jika $A.x$ adalah kelipatan skalar dari x yakni

$$Ax = \lambda x$$

Untuk skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A, persamaan diatas dapat ditulis kembali seperti :

$$Ax = \lambda I x$$

atau

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

dengan I adalah matriks identitas.

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka haruslah ada penyelesaian tak nol dari persamaan diatas penyelesaian tersebut diperoleh jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yang dinamakan persamaan karakteristik dari A. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas determinan $\det(A - \lambda I)$ adalah polinomial λ yang disebut dengan polinomial karakteristik dari A.

$$Av = \boldsymbol{\lambda v}$$

Suatu vektor $v \neq 0$ yang memenuhi persamaan diatas disebut vektor eigen dari matriks *A*. Nilai $\boldsymbol{\lambda}$ yang bersesuaian dengan vektor eigen tersebut disebut nilai eigen dari matriks *A*. Untuk memperoleh nilai dan vektor eigen dapat ditulis persamaan berikut:

$$(A - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

dengan I sebagai matriks identitas dengan ukuran yang bersesuaian. Persamaan diatas adalah sistem persamaan linier dari v dan n variabel bebas. Karena $v \neq 0$, maka persamaan diatas dipenuhi oleh

$$|A - \lambda I| = 0$$

Contoh 2.4

Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

dengan menggunakan persamaan $|A - \lambda I| = 0$ maka,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{3} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{4} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{2}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

$$= (1 - \boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2})(\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{5}) = \mathbf{0}$$

dengan demikian nilai-nilai eigennya adalah : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

selanjutnya akan ditentukan vektor eigen dari nilai eigen yang diketahui.

Untuk $\lambda_1 = 1$

$$|A - \lambda_1| v_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} v_1 = 0$$

Kofaktor untuk baris ke-1 adalah

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, A_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

dengan demikian $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari A. dalam hal ini dapat dipilih $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sebagai basis dari vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 1$

Untuk $\lambda_2 = 2$

$$|A-\lambda_2|v_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} v_2 = 0$$

Kofaktor dari baris pertamanya adalah $A_1 = 0, A_2 = -4, A_3 = 4$. Dengan demikian dapat dipilih $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sebagai vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$

Untuk $\lambda_3 = 5$

Dengan cara yang sama kita dapat memilih $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 5$.

2.5 Matriks Companion

Polinomial monik adalah sebuah polinomial yang berbentuk

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

dengan koefisien a_n adalah 1.

Matriks kompanion sangat erat hubungannya dengan polinomial monik

$$P(\lambda) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1\lambda} + \cdots + \boldsymbol{a_{n-1}\lambda^{n-1}} + \boldsymbol{\lambda^n}$$

adalah matriks kompanion berukuran $n \times n$ dengan simbol C yang berbentuk:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Kemudian transposekan matriks diatas untuk menjadikan matriks kompanion

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6 (Louis Brand, 1964) Matriks kompanion adalah matriks yang seluruh elemen superdiagonal utamanya adalah satu dan elemen $a_{ni} = -a_{n-(i-1)}$, dimana $i = 1,2,\cdots,n$ dan yang lainnya adalah nol. Matriks C disebut juga matriks kompanion dari polonomial $f(\boldsymbol{\lambda})$.

Matriks kompanion pada $\lambda + a_1$ adalah $[-a_1]$. Persamaan karakteristik pada C adalah $\det(C - \lambda I) = 0$ atau

$$\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} + \lambda \end{vmatrix}$$

Teorema 2.5 : Matriks kompanion polinomial $f(\boldsymbol{\lambda})$ mempunyai $f(\boldsymbol{\lambda})=0$ untuk persamaan karakteristik dan persamaan minimum. Matriks kompanion adalah singular jika dan hanya jika $a_n = 0$; untuk $\det A = (-1)^n a_n$

Bukti :

Misakan C adalah matriks kompanion dari $f(\boldsymbol{\lambda})$, maka polinomial karakteristik dari matriks kompanion C dapat ditulis :

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{C}),$$

atau

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} + \lambda \end{vmatrix}$$

Jika terhadap determinan ini dilakukan operasi berikut

1. Kalikan kolom 2 dengan $\boldsymbol{\lambda}$ dan tambahkan terhadap kolom pertama
2. Kalikan kolom ketiga dengan λ^2 dan tambahkan terhadap kolom pertama

$$\vdots$$

$n-1$. kalikan kolom ke n dengan λ^{n-1} dan tambahkan terhadap kolom pertama, dan akhirnya diperoleh

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-22} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Karena kofaktor dari elemen a_n di dalam $f(\boldsymbol{\lambda})$ adalah $(-1)^{n+1}$, maka polinomial karakteristik dari *C* adalah

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = (-\mathbf{1})^{n+1}\boldsymbol{a_n}$$

Akibatnya persamaan karakteristik dari *C* adalah

$$(-1)^{n+1}a_n = 0$$

Atau dapat juga ditulis $a_n = 0$. Sebab kelipatan persekutuan dari semua minor didalam $f(\boldsymbol{\lambda})$ adalah 1, maka satu-satunya polinomial monik $m(\boldsymbol{\lambda})$ yang berderajat minimum sedemikian hingga $m(C) = 0$ adalah a_n sendiri, artinya $a_n = 0$ adalah persamaan minimum dari *C*.

Contoh 2.5

Diketahui persamaan polinomial adalah $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = \boldsymbol{\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0}$, maka bentuk matriks kompanionnya adalah

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

2.6 Kebebasan Linier

Defenisi 2.8 (Howard Anton, 2000) Jika $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0$$

mempunyai paling tidak satu penyelasaian, yaitu

$$k_1 = 0\ k_2 = 0, \cdots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka *S* disebut suatu himpunan yang bebas secara linier. Jika ada penyelesaian-penyelesaian lainnya, maka *S* disebut himpunan yang tak bebas linier.

Contoh 2.6

Diberikan vektor $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)$, dan $k = (0, 0, 1)$ dalam R^3.

Dalam bentuk komponen, persamaan vektor 1, 0, 0

$$k_1 i + k_2 j + k_3 k = 0$$

menjadi

$$k_1(\mathbf{1}, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

atau secara ekuivalen

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Ini berimplikasi bahwa $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$, sehingga himpunan S=$\{i, j, k\}$ bebas linier. Suatu uraian serupa bisa digunakan untuk menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

membentuk suatu himpunan yang bebas secara linier dalam R^n.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diketahui persamaaan polinomial adalah

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{a_n}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{a_{n-1}}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{n-1}} + \cdots + \boldsymbol{a_0}$$

2. Diketahui suatu matriks kompanion yaitu

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

3. Menetukan perhitungan matriks yaitu :
    1. Vektor Eigen
        a) Untuk mendapatkan vektor eigen terlebih dahulu ditentukan nilai eigennya dengan cara $f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$.
        b) Setelah diketahui nilai eigennya masukkan setiap nilai eigen ke dalam persamaan $e(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{2}}, \cdots, \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{n}})$.
    2. Vektor Eigen Generalized
        a) Vektor eigen generalized akan didapat jika ada nilai eigen yang sama dari polinomial diatas. Kemudian masukkan ke dalam persamaan $e(\boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2\lambda_1}, \cdots, (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n-1}}$.
    3. Invers matriks
        a) Dari persamaan polinomial diatas sehingga terbentuk matriks C yang berukuran $n \ x \ n$, kemudian matriks C tersebut akan diketahui inversnya dengan menggunakan metode atau teknik untuk menghitung invers.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan uraian dari landasan teori pada bab III, maka pada bab ini penulis akan membahas tentang perhitungan matriks kompanion .

4.1 Vektor eigen

Adapun vektor eigen dari matriks kompanion *C* dapat ditulis :

$$Ce(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda e}(\boldsymbol{\lambda}) \quad \textbf{(4.1)}$$

Dimana kolom vektornya adalah

$$e(\boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}, \cdots, \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{n-1}}). \quad \textbf{(4.2)}$$

Dimana $\boldsymbol{\lambda}$ adalah nilai eigen dan e($\boldsymbol{\lambda}$) adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}$. Persamaan (4.1) dapat pula ditulis :

$$(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}.$$

Polinomial karakteristik dari matriks kompanion *C* adalah

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{det}\,(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0} \quad \textbf{(4.3)}$$

dan persamaan karakteristiknya adalah $f(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$.

Selain nilai eigen dan vektor eigen diatas, matriks kompanion juga memiliki vektor eigen dan nilai eigen yang berbeda, seperti yang dijelaskan teorema berikut:

Teorema 4.11 jika polinomial *f(**λ**)* berderajat *n* mempunyai *m* nilai eigen λ_i yang berbeda dengan $m \leq n$, maka nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ dari matriks kompanionnya mempunyai tempat *m* vektor eigen yaitu :

$$e_i = [1, \lambda_i, \lambda_i^2, \cdots, \lambda_i^{n-1}]^T$$

dimana $i = 1, 2, \cdots, m$

Yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i

Bukti :

Diketahui *f(λ)* berderajat *n* dan nilai eigen λ_i adalah m

Misalkan $e_i = e(\lambda_i)$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i, ditulis

$$e_i = [w_1, w_2, w_3, \cdots, w_n]^T$$

Persamaan $Ce(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda e}(\boldsymbol{\lambda})$ dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{n-1} \\ w_n \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{n-1} \\ w_n \end{bmatrix}$$

Dengan mengoperasikan persamaan matriks ini, diperoleh

$$w_2 = \lambda_i w_1$$

$$w_3 = \lambda_i w_2 \rightarrow w_3 = \lambda_i^2 w_1$$

$$w_4 = \lambda_i w_3 \rightarrow w_3 = \lambda_i^3 w_1$$

$$\vdots$$

$$w_n = \lambda_i w_{n-1} \rightarrow w_n = \lambda_i^{n-1} w_1$$

$$-a_n w_1 - a_{n-1} w_2 - \cdots - a_2 w_{n-1} - a_1 w_n = \lambda_i w_n$$

Atau

$$(\lambda_i + a_1) w_n + a_2 w_{n-1} + \cdots + a_{n-1} w_2 + a_n w_1 = 0 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Substitusikan nilai-nilai $w_2, w_3, \cdots, w_n$ ke dalam persamaan 4.4, diperoleh

$$\lambda_i^n w_1 + a_1 \lambda_i^{n-1} w_1 + a_2 \lambda_i^{n-2} w_1 + \cdots + a_{n-1} \lambda_i w_1 + a_n w_1 = 0 \qquad \textbf{(4.5)}$$

Karena persamaan (4.5) merupakan polinomial $f(\lambda)=0$ dimana $f(\lambda)$ suatu polinomial monik, maka haruslah $w_1 = 1$

Akibatnya :

$$w_2 = \lambda_i, w_3 = \lambda_i^2, \cdots, w_n = \lambda_i^{n-1}$$

Dengan demikian vektor eigen e_i dapat ditulis

$$e_i = [1, \lambda_i, \lambda_i^2, \cdots, \lambda_i^{n-1}]^T$$

Contoh 4.1

Tentukanlah nilai eigen dan vektor eigen dari persamaan $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = \boldsymbol{\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0}$

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan polinomial di atas, maka dapat dibentuk matriks kompanionnya yaitu ;

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks kompanionnya yaitu ;

$$\boldsymbol{det\,(C - \lambda I)} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4 - \boldsymbol{\lambda}} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$= \boldsymbol{(\lambda)(\lambda)(4 - \lambda) + 2 - 5\lambda = 0}$$

$$= \boldsymbol{(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0}$$

maka diketahui nilai eigennya adalah $\boldsymbol{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1}$

selanjtnya akan ditentukan vektor eigen dari nilai $\boldsymbol{\lambda}$ yang bersesuaian, yaitu :

$$e(\boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda^2}, \cdots, \boldsymbol{\lambda^{n-1}})$$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow e(1) = (1, 2, 2^{2)} = (1, 2, 4)$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow e(2) = (1, 1, 1^2) = (1, 1, 1)$$

Karena $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ maka vektor eigen untuk λ_3 akan menjadi vektor eigen generalized.

4.2 Vektor eigen generalized (generalized eigenvector)

Selain vektor eigen yang diutarakan dalam landasan teori matriks kompanion juga memiliki vektor eigen lain. Vektor eigen ini terjadi bila matriks kompanion tersebut memiliki jumlah eigen yang sama.

Misalkan λ_1 adalah *k* nilai eigen yang sama dari matriks kompanion *C*, maka λ_1 memenuhi persamaan berikut :

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Persamaan $f(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ dari persamaan (4.6) diatas ekiuvalen dengan persamaan (4.1), dimana $f(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ merupakan persamaan karakteristik. Dan untuk persamaan $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{f}^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ pada persamaan (4.6) tersebut diperoleh dengan mendiferensialkan persamaan (4.1) berturut-turut $(k-1)$ kali terhadap $\boldsymbol{\lambda}$ sedemikian sehingga :

$$Ce^{(j)}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda e}^{(j)}(\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{je}^{(j-1)}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{k} - \mathbf{1} \qquad \textbf{(4.7)}$$

dimana $e^0(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\lambda})$

sehingga dapat ditulis :

$$C\frac{e^{(j)}(\lambda)}{j!} = \frac{\lambda e^{(j)}(\lambda)}{j!} + \frac{e^{(j-1)}(\lambda)}{(j-1)!} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Berdasarkan persamaan (4.8) akan dibuktikan untuk memperoleh persamaan berikut:

Jika $j = 1$, maka

$$C\frac{e_j(\lambda)}{j!} = \boldsymbol{\lambda}\frac{\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{\lambda})}{\boldsymbol{j}!} + \frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\lambda})}{(\boldsymbol{j}-\mathbf{1})!}$$

$$C\frac{e_1(\lambda)}{1!} = \boldsymbol{\lambda}\frac{\boldsymbol{e_1(\lambda)}}{\mathbf{1}!} + \mathbf{0}$$

sehingga

$$Ce_1(\lambda_1) = \boldsymbol{\lambda e_1(\lambda)}$$

berdasarkan $\lambda = \lambda_1$ maka

$$\boldsymbol{Ce_1} = \boldsymbol{\lambda_1 e_1}. \qquad \textbf{(4.9)}$$

Selanjutnya untuk $j = 2$, maka

$$C\frac{e_2(\lambda)}{2!} = \boldsymbol{\lambda}\frac{\boldsymbol{e_2(\lambda)}}{\mathbf{2}!} + \frac{\boldsymbol{e_{2-1}(\lambda)}}{(\mathbf{2}-\mathbf{1})!}$$

maka

$$\boldsymbol{Ce_2} = \boldsymbol{\lambda_1 e_2} + \boldsymbol{e_1}$$

$$\vdots$$

jika $j = k$

$$C\frac{e_k(\lambda)}{k!} = \boldsymbol{\lambda}\frac{\boldsymbol{e_k(\lambda)}}{\boldsymbol{k}!} + \frac{\boldsymbol{e_{k-1}(\lambda)}}{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!}$$

sehingga

$$\boldsymbol{Ce_k} = \boldsymbol{\lambda_1 e_k} + \boldsymbol{e_{k-1}}$$

dimana $e_1 = e(\boldsymbol{\lambda_1})$ merupakan vektor eigen dan

$$e_{j+1} = \frac{e_j(\lambda_1)}{j!}, j = 1, 2, \cdots, k-1. \qquad \textbf{(4.10)}$$

Berdasarkan persamaan (4.6) maka persaman (4.10) untuk $k - 1$ disebut vektor eigen generalized. Perluasan persamaan diatas dapat ditulis:

$$e_1 = [1, \lambda_1, \lambda_1^2, \cdots, \lambda_1^{n-1}]$$

$$e_2 = [0, 1, 2\lambda_1, \cdots, (n-1)\lambda_1^{n-2}]$$

$$e_3 = \left[0, 0, 1, \binom{3}{2}\lambda_1, \cdots, \binom{n-1}{2}\lambda_1^{n-3}\right]$$

$$\vdots$$

$$e_k = \left[0, 0, 0, \cdots, \binom{n-1}{k-1}\lambda_{k-1}^{n-k}\right]$$

yang merupakan vektor eigen yang bebas linier. Vektor ini dapat digunakan untuk mereduksi *C* kedalam bentuk normal Jordan

Contoh 4.2

Tentukanlah vektor eigen generalized dari persamaan$(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = \boldsymbol{\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0}$.

Penyelesaian :

Berdasarkan hasil pada contoh sebelumnya yaitu $\boldsymbol{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1}$ maka vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen adalah

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 2 \rightarrow e(1) = (1, 2, 2^{2)} = (1, 2, 4)}$$
$$\boldsymbol{\lambda_2 = 1 \rightarrow} e\boldsymbol{(2) = (1, 1, 1^2) = (1, 1, 1)}$$
$$\boldsymbol{\lambda_3 = 1 \rightarrow e'(3) = (0, 1, 2(1)) = (0, 1, 2)}$$

Perlu dicatat bahwa e_3 adalah generalized eigenvektor. Karena $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ merupakan nilai eigen yang sama dari *f* $(\boldsymbol{\lambda})$, berdasarkan persamaan(4.7) $Ce_1 = \lambda_1 e_1, Ce_2 = \lambda_1 e_2 + e_1, Ce_3 = \lambda_1 e_3 + e_2$ maka diperoleh persamaan $\boldsymbol{Ce_1 = 2e_1, Ce_2 = e_2, Ce_3 = e_3 + e_2}$.

4.3 Bentuk Normal Jordan

Misalkan matriks kompanion *C* mempunyai nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ dan vektor eigen $e_1, e_2, \cdots, e_n$ baik dalan vector eigen maupun vektor eigen general. Dibentuk matriks yang elemen-elemennya terdiri atas vektor eigen dari *C* sebagai kolom, yakni :

$$B = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

maka matriks

$$B^{-1}CB = J \tag{4.11}$$

disebut bentuk normal Jordan dari matriks kompanion *C*.

Contoh 4.3

Tentukanlah bentuk normal Jordan dari persamaan $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = \boldsymbol{\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0}$

Penyelesaian :

Berdasarkan contoh sebelumnya diketahui eigen vektor nya adalah

$$\boldsymbol{\lambda_1} \simeq\to \boldsymbol{e}(\mathbf{1}) = \boldsymbol{e}(\mathbf{2}) = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4})$$
$$\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{1} \to \boldsymbol{e}(\mathbf{2}) = \boldsymbol{e}(\mathbf{1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$$
$$\boldsymbol{\lambda_3} = \mathbf{1} \to \boldsymbol{e}' = (\mathbf{3}) = \boldsymbol{e}(\mathbf{1}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$$

sehingga dapat ditulis matriks sebagai berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

untuk mementukan bentuk normal jordannya maka dapat dicari berdasarkan persamaan

$$B^{-1}CB = J$$

sehingga bentuk normal jordannya adalah

$$B^{-1}CB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 Invers Matriks Kompanion

Polinomial $\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{d}$ mempunyai matriks kompanion sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b & -a \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode atau teknik untuk menghitung invers dari suatu matriks, maka matriks kompanion C diatas mempunyai invers sebagai berikut :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -{}^{c}/_{d} & -{}^{b}/_{d} & -{}^{a}/_{d} & -{}^{1}/_{d} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dari hal ini diperoleh bahwa C^{-1} merupakan matriks kompanion dari polinomial berikut :

$$\lambda^4 + {}^{c}/_{d}\,\lambda^3 + {}^{b}/_{d}\,\lambda^2 + {}^{a}/_{d}\,\lambda + {}^{1}/_{d}.$$

Contoh 4.4

Tentukanlah invers dari persamaan $(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = \boldsymbol{\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0}$

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan polinomial di atas, maka dapat dibentuk matriks kompanion yaitu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

dapat diselesaikan dengan OBE sehingga menjadi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Maka hasil dari invers matriks kompanion C^{-1} adalah

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5 Aplikasi Matriks Kompanion pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Homogen.

Pandanglah persamaan diferensial linier orde n berikut ini :

$$\boldsymbol{\lambda}^n + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\lambda}^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{\lambda}' + \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{(4.12)}$$

dimana $\lambda = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t})$**,** dengan syarat awal $\lambda(0) = (\lambda, \lambda', \lambda'', \cdots, \lambda^{n-1})(0)$ diketahui.

Dengan mengambil

$$\lambda_1 = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1' = \boldsymbol{\lambda}_2$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{n-1}' = \boldsymbol{\lambda}_n \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_n' = -\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{\lambda}_2 - \cdots - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{\lambda}_n$$

Maka persamaan diferensial (4.12) dapat ditransformasikan kedalam sistem persamaan diferensial orde satu berikut ini :

$$\lambda'(t) = C\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}) \qquad \textbf{(4.14)}$$

dimana

$\lambda'(t)$ adalah vektor kolom, ditulis $(\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n)^T$

$\lambda(t)$ adalah vektor kolom, ditulis $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T$

C adalah matriks kompanion dari polinomial $f(\boldsymbol{\lambda})$ yang merupakan matriks koefisien dari sistem (4.14). dengan mengalikan persamaan (4.14) dengan e^{-st} dan mengintegralkan pada interval $0 \le t < \infty$ terhadap t sedemikian sehingga:

$$\int_0^\infty \lambda'(t)e^{-st}\,dt = C\int_0^\infty \lambda(t)e^{-st}\,dt$$

Akan diperoleh

$$s\lambda(s) - \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}) \qquad \textbf{(4.15)}$$

dimana

$$\lambda(s) = \int_0^\infty \lambda(t)e^{-st}dt$$

Persamaan (4.15) dapat ditulis :

$$(sI - C)\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})$$

$$\lambda(s) = (sI - C)^{-1}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) \qquad \textbf{(4.16)}$$

Dengan menstubstitusikan $C = BJB^{-1}$ dari persamaan $B^{-1}CB = J$ ke dalam persamaan (4.16), diperoleh

$$\lambda(s) = (sI - BJB^{-1})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})$$

$$\lambda(s) = \{B(sI - J)B^{-1}\}^{-1}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{sI} - \boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) \qquad \textbf{(4.17)}$$

Penyelesaian persamaan diferensial (4.12) diperoleh dengan mengambil invers trasformasi laplace dari persamaan (4.17).

Contoh 4.5

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut : $= \boldsymbol{\lambda}''' - \mathbf{4}\boldsymbol{\lambda}'' + \mathbf{5}\boldsymbol{\lambda}' - \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}$

Dengan syarat awal $\lambda(0) = 0, \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{0}) = \mathbf{1}, \boldsymbol{\lambda}''(\mathbf{0}) = -\mathbf{1}$

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan diferensial di atas maka bentuk polinomial adalah $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{3}} - \mathbf{4}\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}} + \mathbf{5}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{2}$ sehingga dapat dibentuk matriks kompanion sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

Vector eigennya adalah

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 2 \rightarrow e(1) = (1, 2, 2 = (1, 2, 4)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 2 \rightarrow e(2) = (1, 1, 1^2) = (1, 1, 1)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3 = 2 \rightarrow e'(3) = (0, 1, 2(1)) = (0, 1, 2)}$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditentukan nilai

$$(sI - J)^{-1} = \begin{bmatrix} (s-2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{-1} & (s-1)^2 \\ 0 & 0 & (s-1)^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga dengan melakukan perkalian matriks pada persamaan (4.17) maka diperoleh:

$$\lambda(s) = B(sI - J)^{-1}B^{-1}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0})$$

$$\lambda(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^{-1} & (s-1)^2 \\ 0 & 0 & (s-1)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(s) = \begin{bmatrix} (s-2)^{-1} & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2} \\ 2\,(s-2)^{-1} & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2} + (s-1)^{-1} \\ 4(s-2)^{-1} & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2} + 2(s-1)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(s) = \begin{bmatrix} -3(s-2)^{-1} + 3(s-1)^{-1} + 4(s-1)^{-2} \\ -6(s-2)^{-1} + 7(s-1)^{-1} + 4(s-1)^{-2} \\ -12(s-2)^{-1} + 11(s-1)^{-1} + 4(s-1)^{-2} \end{bmatrix}.$$

Dengan mengambil invers trasnformasi laplace pada $\lambda(s)$ maka :

$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} -3e^t + 3e^t + 4te^t \\ -6e^t + 7e^t + 4te^t \\ -12e^t + 11e^t + 4te^t \end{bmatrix}.$$

Maka penyelesaian persamaan diferensial homogennya adalah:

$$\lambda(t) = -3e^t + 3e^t + 4te^t.$$

Contoh 4.6

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut : $= \boldsymbol{\lambda''' - 3\lambda'' + 6\lambda' - 4\lambda}$

Dengan syarat awal $\lambda(0) = 0, \boldsymbol{\lambda'(0) = 1}, \boldsymbol{\lambda''(0) =}$

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan diferensial di atas maka bentuk polinomial adalah $\boldsymbol{\lambda^3 - 3\lambda^2} + \boldsymbol{6\lambda - 4}$ sehingga dapat dibentuk matriks kompanion sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Vector eigennya adalah

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 1} \to \boldsymbol{e(1)} = (\boldsymbol{1, 1, 1^{2}}) = (\boldsymbol{1, 1, 1})$$
$$\boldsymbol{\lambda_2 = 2} \to e(\boldsymbol{2}) = (\boldsymbol{1, 2, 2^2}) = (\boldsymbol{1, 2, 4})$$
$$\boldsymbol{\lambda_3 = 2} \to \boldsymbol{e'(3)} = (\boldsymbol{0, 1, 2(2)}) = (\boldsymbol{0, 1, 4})$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditentukan nilai

$$(sI - J)^{-1} = \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & (s-1)^2 \\ 0 & 0 & (s-2)^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga dengan melakukan perkalian matriks pada persamaan (4.17) maka diperoleh:

$$\lambda(s) = B(sI - J)^{-1}B^{-1}\boldsymbol{\lambda(0)}$$

$$\lambda(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s-1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (s-2)^{-1} & (s-1)^2 \\ 0 & 0 & (s-2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(s)=\begin{bmatrix}(s-1)^{-1} & (s-1)^{-1} & (s-1)^{-2}\\ (s-1)^{-1} & 2(s-2)^{-1} & 2(s-1)^{2}+(s-2)^{-1}\\ (s-1)^{-1} & 4(s-2)^{-1} & 4(s-1)^{-1}+4(s-2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\lambda(s)=\begin{bmatrix}-5(s-1)^{-1} & 3(s-1)^{-1} & 4(s-1)^{-2}\\ -5(s-1)^{-1} & 6(s-2)^{-1} & 8(s-1)^{2}+4(s-2)^{-1}\\ -5(s-1)^{-1} & 12(s-2)^{-1} & 16(s-1)^{-1}+16(s-2)^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\lambda(s)=\begin{bmatrix}-5(s-1)^{-1}+3(s-2)^{-1}+4(s-1)^{-2}\\ -5(s-1)^{-1}+10(s-2)^{-1}+8(s-1)^{-2}\\ -5(s-1)^{-1}+30(s-2)^{-1}+16(s-1)^{-2}\end{bmatrix}.$$

Dengan mengambil invers trasnformasi laplace pada $\lambda(s)$ maka :

$$\lambda(t)=\begin{bmatrix}-5e^{t}+3e^{t}+4te^{t}\\ -5e^{t}+10e^{t}+8te^{t}\\ -5e^{t}+30e^{t}+16te^{t}\end{bmatrix}.$$

Maka penyelesaian persamaan diferensial homogennya adalah:

$$\lambda(t)=-5e^{t}+3e^{t}+4te^{t}.$$

Contoh 4.7

Matriks kompanion dari $(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{1})(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{1})(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{2})^{2}=\boldsymbol{\lambda}^{4}-\mathbf{4}\boldsymbol{\lambda}^{3}+\mathbf{3}\boldsymbol{\lambda}^{2}+\mathbf{4}\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{4}$ adalah

Penyelesaian :

Berdasarkan polinomial di atas maka dapat dibentuk matriks kompanionnya sebagai berikut :

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 4 & -4 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

Yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=\lambda_4=2$

Vektor eigennya adalah

$$e_1=e(-1)=(1,-1,1,-1)$$

$$e_2 = e(1) = (1,1,1,1)$$

$$e_3 = e(2) = (1,2,4,8)$$

$$e_4' = e(2) = (0,1,4,12)$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

perlu dicatat bahwa e_4' adalah generalized eigenvector. Karena $Ce_1 = -e_1$, $Ce_2 = e_2$, $Ce_3 = 2e_3$, $Ce_4 = 2e_4 + e_3$ maka bentuk normal jordannya adalah

$$B^{-1}CB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Adapun invers dari matriks kompanion C^{-1} dari persamaan diatas adalah

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3/4 & -1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.8 :

Matriks kompanion dari $(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2 = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 8\lambda^2 - 11\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{6}$

Penyelesaian :

Berdasarkan polinomial di atas maka dapat dibentuk matriks kompanionnya sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 11 & 8 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = \lambda_5 = 1$

Vektor eigennya adalah

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 2 \rightarrow e(1) = e(2) = (1, 2, 4, 8, 16)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = -1 \rightarrow e(2) = e(-1) = (1, -1, 1 - 1, 1)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3 = 3 \rightarrow e(3) = e(3) = (1, 3, 9, 27, 81)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_4 = 1 \rightarrow e(4) = e(1) = (1, 1, 1, 1, 1)}$$

$$\boldsymbol{\lambda_5 = 1 \rightarrow e'(5) = e(1) = (0, 1, 2, 3, 4)}$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 27 & 1 & 3 \\ 16 & 11 & 81 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

perlu dicatat bahwa e_4' adalah vektor eigen generalized. Karena $Ce_1 = -2$, $Ce_2 = -e_2$, $Ce_3 = 3e_3$, $Ce_4 = e_4, Ce_5 = e_5 + e_4$ maka bentuk normal jordannya adalah

$$B^{-1}CB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adapun invers dari matriks kompanion C^{-1} dari persamaan diatas adalah

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 11/6 & 8/6 & -1 & -4/6 & -1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BAB V

PENUTUP

Bab penutup ini berisikan kesimpulan dari hasil yang diperoleh pada Bab IV dan berisikan saran-saran untuk pembaca.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya maka dapat diambil kesimpulan, yaitu:

1. Matriks kompanion terbentuk dari suatu polinomial $f(\lambda)$.
2. Bila suatu matriks kompanion ukuran *n x n* mempunyai *k* nilai eigen yang sama, maka terdapat k-1 vektor eigen generalized yang bersesuaian dengan nilai eigen yang sama.
3. Untuk mencari invers matriks kompanion sama halnya dengan matriks biasa.

5.2 Saran

Pada penulisan ini penulis hanya membahas tentang matriks kompanion. Bagi yang tertarik untuk melanjutkan penulisan ini dapat mencari determinan matriks kompanion.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. *Dasar-dasar Aljabar Linier*. Edisi ketujuh. Penerbit Interaksara. 2000.

Anton, H. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kelima. Penerbit Erlangga. 1987.

Brand, L. *The Companion Matriks and Its Properties*. The American Math. Monthly, 71 : 629-634, 1964.

Jacob,B. *Linier Algebra*. W.H.Freeman and Company, New York. 1990.

Jain, S, K. *Linier Algebra An Interactive Approach*. Thomson. 2002.

Lipschutz, S. *Aljabar Linier*. Edisi Ketiga. Penerbit Erlangga.

Supranto, J. *Pengantar Matrix*. Edisi Revisi. Penerbit Rineka Cipta, Jakara. 1997.