PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DENGAN MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE LIMA

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

DARMIYANTI
10954006780

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DENGAN MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE LIMA

DARMIYANTI
10954006780

Tanggal Sidang : 28 Oktober 2013
Periode Wisuda : 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima. Sistem persamaan Lotka-Volterra merupakan salah satu model matematika tentang interaksi dua spesies antara mangsa dan pemangsa yang berbentuk sistem persamaaan diferensial non linear. Sehingga sistem persamaan Lotka-Volterra tidak mendapatkan solusi eksaknya atau hanya mendapatkan solusi hampirannya. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan solusi numerik dari sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima serta titik keseimbangan dari sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan bantuan Matlab dan Maple. Metode Runge-Kutta orde lima merupakan salah satu metode numerik. Namun sebelum itu, kita harus menentukkan koefisien-koefisien yang terdapat pada sistem persamaan Lotka-Volterra, nilai awal populasi mangsa dan pemangsa dan waktu. Berdasarkan hasil dan pembahasan didapatkan solusi numerik dari sistem persamaan Lotka-Volterra dengan koefisien-koefisien a = 1.5; α = 0.03; c = 0.5; γ = 0.01, dengan bantuan Matlab didapatkan hasil perhitungan saat t = 50 dan = 0.5 yaitu x 50 = 31.92502175354165 dan y 50 = 33.22062987731075. Sehingga dapat diartikan bahwa jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 32 ekor dan 34 ekor. Diperoleh pula titik ekuilibrium (kritis) dari sistem persamaan Lotka-Volterra pada titik (50,50) yang berarti bahwa keseimbangan bagi populasi mangsa dan pemangsa yaitu 50 ekor dan 50 ekor di suatu daerah. Jika setiap koefisien-koefisien dari sistem persamaan Lotka-Volterra diubah maka akan mempengaruhi jumlah populasi mangsa dan pemangsa.

Kata kunci : *sistem persamaan Lotka-Volterra, metode Runge-Kutta orde lima, titik Ekuilibrium.*

SOLUTION OF SYSTEM OF LOTKA-VOLTERRA EQUATIONS WITH USING RUNGE-KUTTA METHOD OF ORDER FIFTH

DARMIYANTI
10954006780

Date of Final Exam : 28 October 2013
Graduation Cremony Priod : 2014

Department of Mathematics
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final assignment discuss about system of Lotka - Volterra equations by using the Runge - Kutta method of order five. Lotka - Volterra equations system is one of the mathematical models of the interaction between the two species of prey and predators in the form of system of non- linear differential equations. So the Lotka - Volterra system of equations does not get exact solution or just getting hampirannya solution. This study aimed to obtain the numerical solution of the system of Lotka - Volterra of equations using the Runge - Kutta method of order five and the balance point of the system of Lotka - Volterra equations with the help of Matlab and Maple. Runge - Kutta method of order five is one of the numerical methods. But before that , we must menentukkan coefficients contained in the system of Lotka - Volterra equations , initial value of prey and predator populations and time . Based on the results obtained and the discussion of the numerical solution of the system of Lotka - Volterra equations with coefficients $a = 1.5$; $\alpha = 0{:}03$, $c = 0.5$; $\gamma = 0{:}01$ *, with the help of Matlab calculation results obtained at* $t = 50$ *and* $h = 0.5$, $x(50) = 31.92502175354165$ *and* $y(50) = 33.22062987731075$*. So that could mean that the number of prey and predator species in a population after 50 days in a row is 32 tails and 34 tails. Also obtained the equilibrium point (critical) of the Lotka - Volterra equations system at the point (50,50) which means that the balance of prey and predator populations are 50 heads and 50 tails in a region. If all of the coefficients of the system of Lotka - Volterra equations changed it will affect the number of prey and predator populations.*

Keywords*: system of Lotka-Volterra equations, Runge-Kutta method of order five, the point of equilibrium.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **“Penyelesaian Sistem Persamaan Lotka-Volterra dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Lima”.** Shalawat beserta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua mendapat syafa’atnya kelak.

Dalam penyusunan dan penyelesian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, perhatian serta semangat dari berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama kali penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tuaku yang ku sayangi semoga Allah SWT selalu merahmati beliau, serta memberikan kebahagian dunia dan akhirat, Amin. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj.Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau.
4. Bapak Wartono, M.Sc selaku Pembimbing tugas akhir yang senantiasa ada dan memberi bimbingan serta arahan kepada penulis sehingga laporan ini dapat diselesaikan.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Penguji I yang telah membantu memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Bapak M. Soleh, M.Sc selaku Penguji II yang telah membantu memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku Penasehat Akademis yang memberi bimbingan serta arahan kepada penulis selama berkuliah Jurusan Matematika.

8. Semua dosen jurusan Matematika yang banyak memberi masukan dan motivasi.
9. Sahabat-sahabatku (Nurfadhli, Iswanti, Mirna, Rayna, Lyly dan Tri) yang selalu memberi dukungan.
10. Teman-teman jurusan Matematika angkatan 2009, kakak dan adik tingkat jurusan matematika angkatan pertama sampai terakhir, serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.

Dalam penulisan tugas akhir ini penulis sadar masih banyak kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukannya.

Pekanbaru, 28 Oktober 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, biologi, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa (*engineering)*. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang rumit atau tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik untuk mendapatkan solusi sejatinya (*exact solution*). Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (Munir, 2008).

Salah satu model matematika yang muncul dalam cabang ilmu biologi yaitu ilmu ekologi yang tidak dapat diselesaikan oleh dengan metode analitik adalah system persamaan Lotka-Volterra. Ilmu ekologi adalah ilmu yang membahas tentang interaksi antar makhluk hidup atau makhluk hidup terhadap lingkungannya. .

Sistem Persamaan Lotka-Volterra adalah model matematika mengenai interaksi antara dua populasi yaitu mangsa pemangsa yang diperkenalkan secara terpisah oleh Alferd J. Lotka dan Vito Volterra pada sekitar tahun 1920, yang memformulasikan model matematika tersebut dalam sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra termasuk sistem persamaan differensial nonlinier, yang secara matematik dirumuskan (Boyce dkk, 2001):

$$\frac{dx}{dt} = a\,x - \alpha\,xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -c\,y + \gamma\,xy \qquad (1.1)$$

dengan x dan y adalah banyaknya mangsa dan pemangsa pada t, a sebagai koefisien laju kelahiran mangsa, $-c$ sebagai koefisien laju kematian pemangsa. Sedangkan α adalah koefisien pemangsa saat memakan mangsa dan γ menunjukkan koefisien pertumbuhan pemangsa setelah memakan mangsa.

Penyelesaian sistem persamaan differensial pada persamaan (1.1) tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak. sistem persamaan diferensial tersebut dapat diselesaikan, yang tentunya hanya menghasilkan solusi numerik (solusi aproksimasi atau hampiran). Sehingga dapat dikatakan bahwa metode numerik merupakan alternatif dari metode analitik.

Ada berbagai macam metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan dalam bentuk sistem persamaan persamaan (1.1). Salah satu metode yang dapat digunakan yaitu metode Runge-Kutta, metode ini banyak digunakan dalam software matematika seperti Maple atau Matlab. Metode Runge-Kutta mempunyai banyak bentuk seperti Runge-Kutta Orde 4, Runge-Kutta Fehleberg (45) dan lain sebagainya.

Penelitian terhadap penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra telah dilakukan oleh para peneliti diantaranya "Penyelesaian Numerik Persamaan *Competitive* Lotka-Volterra dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4" yang telah dilakukan oleh Bidayasari (2009), "Penyelesaian Persamaan Lotka-Volterra Secara Numerik dengan Metode Runge-Kutta Berorde 4" yang telah dilakukan oleh Aisyah (2006), "Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka-Volterra dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun" yang dilakukan oleh Urifah (2008), *A Lotka-Volterra Three-Species Food Chain* yang dilakukan oleh Chauvet, dkk (2002), Analisis Sistem Persamaan Differensial Model Predator-Prey dengan Perambatan oleh Fitria (2011) dan *The Lotka-Volterra Model : An Approach by The Cas* oleh Hossain, dkk (2007).

Sehingga penulis merasa tertarik untuk mengetahui tentang metode Runge-Kutta orde lima dan melanjutkan penelitian dalam menyelesaikan sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima, sehingga penulis mengambil judul tugas akhir **"Penyelesaian Sistem Persamaan Lotka-Volterra dengan Menggunakan metode Runge-Kutta Orde Lima"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka penulis mengangkat rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis akan membatasi pembahasan pada sistem persamaan Lotka-Volterra pada interaksi dua populasi (model mangsa pemangsa) yang sederhana dan metode Runge-Kutta orde lima.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Mendapatkan penyelesaian numerik dari sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima.
b. Menggunakan *software* Matlab untuk mendapatkan nilai hampiran dari sistem persamaan Lotka-Volterra.
c. Mendapatkan titik keseimbangan dari sistem persamaan Lotka-Volterra denga menggunakan *software* Maple.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini disusun atas lima bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini berisikan latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dari penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang teori-teori yang menunjang untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir diantaranya sistem persamaan diferensial, metode deret Taylor, metode Runge-Kutta orde lima dan sistem persamaan Lotka-Volterra.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metodologi yang digunakan penulis dalam tugas akhir untuk memperoleh hasilnya.

BAB IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisi tentang bagaimana langkah-langkah dan hasil dari penyelesaian numerik dari sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-5, titik keseimbangan dari sistem persamaan Lotka-Volterra serta simulasi numerik.

BAB V Penutup

Pada bab ini berisikan kesimpulan dari tugas akhir dan saran

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam penelitian ini memuat penjelasan dari teori yang mendukung penyelesaian tugas akhir ini, diantaranya ialah sistem persamaan diferensial, metode deret Taylor, metode Runge-Kutta orde lima dan sistem persamaan Lotka-Volterra.

2.1 Sistem Persamaan Differensial

Definisi 2.1: (Munir, 2008) Sistem Persamaan diferensial adalah kumpulan dari $n \geq 2$ buah persamaan diferensial. Bentuk umum dari sistem persamaan diferensial orde satu adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan nilai awalnya $y_1(t_0) = y_{10}, y_2(t_0) = y_{20}, \dots, y_n(t_0) = y_{n0}$, $\frac{dy_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi y_n terhadap t, dan f_i adalah fungsi yang tergantung pada $y_1, y_2, \dots, y_n$ dan t.

Variabel bebas pada sistem persamaan pada persamaan (2.1) adalah $y_1, y_2, \dots, y_n$ dan t adalah variabel terikat, sehingga $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t), \dots, y_n = y_n(t)$.

Definisi 2.2: (Boyce & Diprima, 2001) Sistem persamaan differensial linear adalah suatu sistem yang terdiri dari satu atau lebih persamaan differensial linear. Bentuk umum dari sistem persamaan differensial linear adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots a_{nn}$ adalah koefisien dan $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ semua merupakan fungsi t pada selang interval $I: \alpha < t < \beta$. Jika $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t) = 0$, maka sistem persamaan (2.2) disebut sistem persamaan diferensial homogen. Sistem persamaan (2.2) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$y' = Ay + f$$

dengan,

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Contoh 2.1:

Berikanlah contoh sistem persamaan differensial linear!

Penyelesaian:

a. Sistem persamaan Paralel LCR merupakan sistem persamaan differensial orde satu, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}.$$

b. Sistem persamaan gaya pegas merupakan sistem persamaan differensial orde dua yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t)$$

$$= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 + F_2(t)$$

$$= -(k_2 + k_3)x_2 + k_2 x_1 + F_2(t).$$

Sistem persamaan differensial nonlinear adalah suatu sistem yang terdiri dari $n \geq 2$ persamaan differensial nonlinear. Jika sistem persamaan differensial tidak dapat dibentuk dalam persamaan (2.2) dapat disebut sistem persamaan differensial nonlinear. Sistem dari dua persamaan differensial nonlinear dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \square_1(y_1, y_2)$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \square_2(y_1, y_2)$$

dengan $\square_1(y_1, y_2)$ dan $\square_2(y_1, y_2)$ adalah fungsi terhadap y_1 dan y_2, dengan y_1 dan y_2 bervariabel t.

Contoh 2.2:

Berikanlah contoh sistem persamaan differensial nonlinear!

Penyelesaian:

Salah satu contoh sistem persamaan differensial nonlinear adalah sistem persamaan Lotka-Volterra atau sistem mangsa pemangsa yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d\mu}{dt} = a\,\mu - \alpha\,\mu y$$
$$\frac{dy}{dt} = -c\,y + \gamma\,\mu y$$

2.2 Metode Deret Taylor

Deret Taylor merupakan sebuah deret yang berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi yang rumit dan persamaan differensial.

Teorema 2.1:(Munir, 2008) Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \ldots$, kontinu pada selang [a,b], maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke deret taylor, sehingga :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2.3)$$

Apabila $a = x_0$ atau $b = x$ maka persamaan dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$
$$+ \frac{(b - a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2.4)$$

Bukti : Teorema dasar kalkulus

Berdasarkan teorema dasar kalkulus diperoleh persamaan :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

atau

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx \qquad (2.5)$$

dan bentuk integral parsial

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

dengan menerapkan integral parsial pada suku kedua ruas kanan dari persamaan (2.5) dengan memisalkan :

$$u = f'(x) \rightarrow du = f''(x)\,dx, \qquad dv = dx \rightarrow v = x$$

sehingga diperoleh:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f'(x)\,x\,|_a^b - \int_a^b (x) f''(x)\,dx$$

atau

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \left(bf'(b) - af'(a)\right) - \int_a^b (x) f''(x)\,dx. \qquad (2.6)$$

Subsitusikan persamaan (2.6) kedalam persamaan (2.5) sehingga menjadi :

$$\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \left(bf'(b) - af'(a)\right) - \int_a^b (x) f''(x)\,dx \\
&= f(a) + \int_a^b bf''(x)\,dx + bf'(a) - af'(a) - \int_a^b (x) f''(x)\,dx \\
&= f(a) + \int_a^b bf''(x)\,dx + (b - a) f'(a) - \int_a^b (x) f''(x)\,dx \\
&= f(a) + (b - a) f'(a) + \int_a^b (b - x) f''(x)\,dx. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

persamaan (2.7) diperoleh dari :

$$\int_a^b bf''(x)\,dx = bf'(b) - bf'(a)$$

$$bf'(b) = \int_a^b bf''(x)dx + bf'(a)$$

Selanjutnya, dengan menerapkan kembali integral parsial pada bentuk

$\int_a^b (b-x)f''(x)\,dx$ maka :

$$u = f''(x) \rightarrow du = f'''(x)\,dx, \qquad dv = (b-x) \rightarrow v = -\frac{(b-x)^2}{2}$$

maka diperoleh :

$$\int_a^b (b-x)f''(x)\,dx = f''(x)\left(-\frac{(b-x)^2}{2}\right)\Big|_a^b - \int_a^b \left(-\frac{(b-x)^2}{2}\right) f'''(x)\,dx$$

atau

$$\int_a^b (b-x)f''(x)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2}f'''(x)\,dx. \qquad (2.8)$$

dan mensubsitusikan kembali persamaan (2.8) ke persamaan (2.7) sehingga diperoleh :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2$$
$$+ \int_a^b \left(\frac{(b-x)^2}{2}\right) f'''(x)\,dx \qquad (2.9)$$

Apabila proses tersebut dilakukan secara terus-menerus sebanyak n kali, maka akan diperoleh suatu deret yang disebut **deret Taylor**.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n$$
$$+ R_n(b) \qquad (2.10)$$

dengan,

$$R_n(b) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

disebut galat atau *eror*. ■

Jika kita memisalkan pada persamaan (2.10), $a = x_0$, $b = x_0 + h$ dan $R_n(b) = O(h^{n+1})$, untuk $k = 0,1,2,\ldots,n$ maka ekspansi $f(x_0 + h)$ disekitar x_0, diberikan oleh :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}h^n + O(h^{n+1}) \qquad (2.11)$$

Persamaan (2.11) dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}h^k + O(h^{n+1})\,. \qquad (2.12)$$

Contoh 2.3:

Hampirilah fungsi $f(x) = e^x - 1$ kedalam deret Taylor disekitar $x_0 = 0$ kemudian hampirilah $f(0.01)$!

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x - 1 \rightarrow f(0) = 0\\
f'(x) &= e^x \rightarrow f(0) = 1\\
f''(x) &= e^x \rightarrow f(0) = 1\\
f'''(x) &= e^x \rightarrow f(0) = 1\\
f^{(4)}(x) &= e^x \rightarrow f(0) = 1\\
f^{(5)}(x) &= e^x \rightarrow f(0) = 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.10), $f(x) = e^x - 1$ yang dihampiri deret Taylor adalah sebagai berikut :

$$f(x) = e^x - 1 = f(0) + \frac{(x-0)}{1!}f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}f'''(0) + \frac{(x-0)^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{(x-0)^5}{5!}f^{(5)}(0) + \cdots$$

Untuk $h = x - 0$, maka :

$$f(x) = e^x - 1 = f(0) + \frac{h}{1!}f'(0) + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \frac{h^3}{3!}f'''(0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{h^5}{5!}f^{(5)}(0) + \cdots$$

Dengan $x = 0.01$, sehingga $h = 0.01 - 0 = 0.01$ dan nilai hampirannya adalah :

$$f(x) = e^{0.01} - 1 \approx 0 + \frac{0.01}{1!}(1) + \frac{(0.01)^2}{2!}(1) + \frac{(0.01)^3}{3!}(1)$$

$$+\frac{0.01^{4}}{4!}(1)+\frac{0.01)^{5}}{5!}(1)+\cdots$$

$$\approx 0+\ 0.01\ +\ 0.00005\ +\ 0.00000017$$

$$+\ 0.000000000417\ +\ 0.00000000000083\ +\cdots$$

$$f\ x\ = e^{0.01}-1\approx 0.01005017.$$

Pada penyelesaian persamaan differensial biasa dengan menggunakan deret taylor sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ \text{ atau }\ y'=f$$

Bentuk turunan persamaan differensial dalam bentuk f untuk orde-orde yang lebih tinggi dapat ditulis sebagai berikut :

$$y^{(k)}=P^{\,k-1}f(x,y)$$

dengan, P adalah operator turunan

$$P\ =\ \frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\ f(x,y)$$

$$=\ \frac{\partial f\ x,y}{\partial x}+f\frac{\partial f\ x,y}{\partial y}$$

$$P^{2}=\ \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+y'\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y}+y'\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\ f(x,y)$$

$$=\ \frac{\partial^{2}f(x,y)}{\partial x^{2}}+f\ \frac{\partial^{2}f(x,y)}{\partial x\partial y}+y''\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+f\frac{\partial^{2}f(x,y)}{\partial y^{2}}$$

Sehingga diperoleh:

$$y'\ =f\ x,y\ =f$$

$$y''\ =f'=P^{\,1}f\ x,y\ =\ \frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\ f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$=f_x+y'f_y=f_x+ff_y \qquad (2.13)$$

$$y'''=f''=P^{\,2}f\ x,y\ =\ \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+y'\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y}+y'\frac{\partial^{2}}{\partial^{2}y}\ f\ x,y$$

$$=\frac{\partial f\ x,y}{\partial^{2}x}+f\frac{\partial f\ x,y}{\partial x\partial y}+y''\frac{\partial f\ x,y}{\partial y}$$

$$+f\ \frac{\partial f\ x,y}{\partial x\partial y}+f\frac{\partial f\ x,y}{\partial^{2}y}$$

$$= f_{xx} + ff_{xy} + \quad f_x + ff_y \ \ f_y + f \ \ f_{xy} + ff_{yy}$$

$$= f_{xx} + 2ff_{xy} + f_xf_y + ff_y^2 + f^2f_{yy} \tag{2.14}$$

$$y^{(4)} = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_xf_{xy} + 5ff_yf_{xy} + 3f^2f_{xyy} + 3ff_xf_{yy}$$

$$+ 4f^2f_yf_{yy} + f^3f_{yyy} + f_{xx}f_y + f_y^2 \ \ f_x + ff_y \tag{2.15}$$

$$y^{\ 5} = f_{xxxx} + 4ff_{xxxy} + 6f_xf^2f_{yyy} + 7f_yf^3f_{yyy} + 9f_{xxy}ff_y$$

$$+ 11f^2f_y^2f_{yy} + 12f_{xy}f^2f_{yy} + 6f_{xxy}f_x + 6f^2f_{xxyy} + 4f_{xy}f_{xx}$$

$$+ 8ff_{xy}^2 + 4f^3f_{xyyy} + f_yf_{xxx} + f_y^2f_{xx} + f_y^3f_x + f_y^4f + 4f^3f_{yy}^2$$

$$+ 3f_{yy}f_x^2 + 7f_{xy}f_yf_x + 4f_{xx}ff_{yy} + 9f_{xy}ff_y^2 + 15f^2f_yf_{xyy}$$

$$+ 12ff_xf_{xyy} + 13ff_xf_yf_{yy} + f^4f_{yyyy} \tag{2.16}$$

$$y^{\ 6} = f_{xxxxx} + 5ff_{xxxxy} + 34f_yf^3f_{xyyy} + 55f^2f_{xy}f_{xyy} + 34f^3f_{yy}^2f_y$$

$$+ 30ff_xf_{xxyy} + 20ff_{xx}f_{xyy} + 62ff_xf_yf_{xyy} + 19ff_yf_{xx}f_{yy} + 3ff_y^2f_{xx}f_{yy}$$

$$+ 50ff_xf_{xy}f_{yy} + 35ff_xf_y^2f_{yy} + 46f^2f_xf_yf_{yyy} + 77f^2f_yf_{xy}f_{yy}$$

$$+ 16f_xf_yf_{xxy} + 10f^3f_xf_{yyyy} + 14ff_yf_{xxxy} + 11f^4f_yf_{yyyy} + 10f_xf_{xx}f_{yy}$$

$$+ 26f^2f_y^3f_{yy} + 33ff_yf_{xy}^2 + 25f^2f_{yy}f_{xxy} + 9f_yf_{xx}f_{xy} + 10f^2f_{xx}f_{yyy}$$

$$+ 25f^3f_{xy}f_{yyy} + 15f^4f_{yy}f_{yyy} + 9f_xf_y^2f_{xy} + 30f^2f_xf_{xyyy} + 5ff_{yy}f_{xxx}$$

$$+ 35ff_{xy}f_{xxy} + 3f_y^2f_{xx}f_{xy} + 25f^2f_xf_{yy}^2 + 14ff_y^3f_{xy} + 13f_x^2f_yf_{yy}$$

$$+ 50f^2f_y^2f_{xyy} + 35f^3f_{yy}f_{xyy} + 19ff_y^2f_{xxy} + 32f^3f_y^2f_{yyy} + 36f^2f_yf_{xxyy}$$

$$+ 15ff_x^2f_{yyy} + 15f_xf_{xy}^2 + 10f^3f_{xxyyy} + 5f^4f_{xyyyy} + 10f_{xx}f_{xxy}$$

$$+ 5f_{xy}f_{xxx} + 15f_x^2f_{xyy} + 10f_xf_{xxxy} + 10f^2f_{xxxyy} + f_yf_{xxxx}$$

$$+ f_y^2f_{xxx} + f_y^3f_{xx} + f_y^4f_x + ff_y^5 + f^5f_{yyyyy}). \tag{2.17}$$

Deret Taylor untuk hampiran $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ yang diekspansi disekitar x_i dapat ditulis sebagai berikut:

$$y \ x_{i+1} = y \ x_i + \ x_{i+1} - x_i \ y' \ x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} y'' \ x_i$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} y''' \ x_i + \cdots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} y^{(n)} \ x_i$$

jika memisalkan □ = $x_{i+1} - x_i$, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$y \ x_{i+1} = y \ x_i + \ □ \ y' \ x_i + \frac{□^2}{2!} y'' \ x_i + \frac{□^3}{3!} y''' \ x_i + \cdots$$

$$+ \frac{□^n}{n!} y^{(n)} \ x_i \tag{2.18}$$

Sehingga deret Taylor hampiran $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ yang diekspansi disekitar x_i untuk orde 6 dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \frac{h^3}{3!}y_i^{(3)} + \frac{h^4}{4!}y_i^{(4)} + \frac{h^5}{5!}y_i^{(5)} + \frac{h^6}{6!}y_i^{(6)} \qquad (2.19)$$

Selanjutnya persamaan (2.13) – (2.17) disubsitusikan kedalam persamaan (2.19) sehingga deret Taylor-nya menjadi :

$$\begin{aligned}
y_{i+1} = {} & y_i + hf + \frac{h^2}{2!}\ f_x + ff_y\ + \frac{h^3}{3!}\ f_{xx} + 2ff_{xy} + f_xf_y + ff_y{}^2 + f_{yy}f^2 \\
& + \frac{h^4}{4!}(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_xf_{xy} + 5ff_yf_{xy} + 3f^2f_{xyy} + 3ff_xf_{yy} \\
& + 4f^2f_yf_{yy} + f^3f_{yyy} + f_{xx}f_y + f_y^2\ f_x + ff_y\ + \frac{h^5}{5!}(f_{xxxx} \\
& + 4ff_{xxxy} + 6f_xf^2f_{yyy} + 7f_yf^3f_{yyy} + 9f_{xxy}ff_y + 11f^2f_y^2f_{yy} \\
& + 12f_{xy}f^2f_{yy} + 6f_{xxy}f_x + 6f^2f_{xxyy} + 4f_{xy}f_{xx} + 8ff_{xy}^2 + 4f^3f_{xyyy} \\
& + f_yf_{xxx} + f_y^2f_{xx} + f_y^3f_x + f_y^4f + 4f^3f_{yy}^2 + 3f_{yy}f_x^2 + 7f_{xy}f_yf_x \\
& + 4f_{xx}ff_{yy} + 9f_{xy}ff_y^2 + 15f^2f_yf_{xyy} + 12ff_xf_{xyy} + 13ff_xf_yf_{yy} \\
& + f^4f_{yyyy}) + \frac{h^6}{6!}(f_{xxxxx} + 5ff_{xxxxy} + 34f_yf^3f_{xyyy} + 55f^2f_{xy}f_{xyy} \\
& + 34f^3f_{yy}^2f_y + 30ff_xf_{xxyy} + 20ff_{xx}f_{xyy} + 62ff_xf_yf_{xyy} \\
& + 19ff_yf_{xx}f_{yy} + 3ff_y^2f_{xx}f_{yy} + 50ff_xf_{xy}f_{yy} + 35ff_xf_y^2f_{yy} \\
& + 46f^2f_xf_yf_{yyy} + 77f^2f_yf_{xy}f_{yy} + 16f_xf_yf_{xxy} + 10f^3f_xf_{yyyy} \\
& + 14ff_yf_{xxxy} + 11f^4f_yf_{yyyy} + 10f_xf_{xx}f_{yy} + 26f^2f_y^3f_{yy} \\
& + 33ff_yf_{xy}^2 + 25f^2f_{yy}f_{xxy} + 9f_yf_{xx}f_{xy} + 10f^2f_{xx}f_{yyy} \\
& + 25f^3f_{xy}f_{yyy} + 15f^4f_{yy}f_{yyy} + 9f_xf_y^2f_{xy} + 30f^2f_xf_{xyyy} + 5ff_{yy}f_{xxx} \\
& + 35ff_{xy}f_{xxy} + 3f_y^2f_{xx}f_{xy} + 25f^2f_xf_{yy}^2 + 14ff_y^3f_{xy} + 13f_x^2f_yf_{yy} \\
& + 50f^2f_y^2f_{xyy} + 35f^3f_{yy}f_{xyy} + 19ff_y^2f_{xxy} + 32f^3f_y^2f_{yyy} \\
& + 36f^2f_yf_{xxyy} + 15ff_x^2f_{yyy} + 15f_xf_{xy}^2 + 10f^3f_{xxyyy} + 5f^4f_{xyyyy} \\
& + 10f_{xx}f_{xxy} + 5f_{xy}f_{xxx} + 15f_x^2f_{xyy} + 10f_xf_{xxxy} + 10f^2f_{xxxyy} + f_yf_{xxxx} \\
& + f_y^2f_{xxx} + f_y^3f_{xx} + f_y^4f_x + ff_y^5 + f^5f_{yyyyy} + \cdots \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Setelah itu dengan hanya mengambil turunan terhadap y pada persamaan (2.19) sehingga diperoleh :

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!} f f_y + \frac{h^3}{3!} \left(f f_y{}^2 + f_{yy} f^2 \right) + \frac{h^4}{4!} (f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy}$$
$$+ f f_y^3 + \frac{h^5}{5!} (f^4 f_{yyyy} + 11 f^2 f_y{}^2 f_{yy} + 4 f^3 f_{yy}^2 + 7 f^3 f_y f_{yyy} + f f_y{}^4)$$
$$+ \frac{h^6}{6!} (15 f^4 f_{yy} f_{yyy} + 34 f^3 f_y f_{yy}^2 + 32 f_y^2 f^3 f_{yyy} + 11 f^4 f_y f_{yyyy} + f f_y^5$$
$$+ 26 f_y^2 f^2 f_{yy} + f^5 f_{yyyyy}) . \tag{2.21}$$

Contoh 2.4:

Diketahui persamaan differensial : $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ dengan $y(0) = 1$. Tentukan nilai $y(0.5)$ dengan metode deret Taylor! ($h = 0.25$)

Penyelesaian:

Diketahui: $x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = 1$

$x_1 = 0.25 \quad \rightarrow \quad y_1 = ?$

$$y(x_1) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \cdots + \frac{h^{(n)}}{n!} y^{(n)}(x_0) \tag{2.22}$$

Jika kita hanya misalkan menghitung $y(x_1)$ sampai orde 4 saja

$$y'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

$$y''(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$$

$$y'''(x) = -\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y$$

$$y^{(4)}(x) = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}y$$

Sehingga diperoleh:

$$y(x_0) = y(0) = 1$$

$$y'(x_0) = y'(0) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1) = -1/2$$

$$y''(x_0) = y''(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) = 3/4$$

$$y'''(x_0) = y'''(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}y = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(0) - \frac{1}{8}(1) = -3/8$$

$$y^{(4)}(x_0) = y^{(4)}(0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}x + \frac{1}{16}y = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(0) + \frac{1}{16}(1) = 3/16$$

Selanjutnya memasukkan $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$ dan $y^{(4)}(x_0)$ ke dalam persamaan (2.22) maka diperoleh:

$$y(x_1) = 1 + (0.25)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(0.25)^2}{2!}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{(0.25)^3}{3!} + \frac{(0.25)^4}{4!}\left(\frac{3}{16}\right)$$

$$= 0.8974915.$$

$x_2 = 0.5 \quad \rightarrow \quad y_1 = ?$

$$y(x_2) = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2!}y''(x_1) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_1) + \cdots + \frac{h^{(n)}}{n!}y^{(n)}(x_1) \quad (2.23)$$

diperoleh:

$$y(x_2) = 0.8974915$$

$$y'(x_2) = y'(0) = \frac{1}{2}(0.25) - \frac{1}{2}(0.8974915) = -0.3237458$$

$$y''(x_2) = y''(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(0.25) + \frac{1}{4}(0.8974915) = 0.6618729$$

$$y'''(x_2) = y'''(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(0.25) - \frac{1}{8}(0.8974915) = -0.3309634$$

$$y^{(4)}(x_2) = y^{(4)}(0) = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(0.25) + \frac{1}{16}(0.8974915) = 0.1654682$$

Sehingga didapatkan :

$$y(x_2) = 0.8974915 + (0.25)(-0.3237458) + \frac{(0.25)^2}{2!}(0.6618729)$$

$$+ \frac{(0.25)^3}{3!}(-0.3309634) + \frac{(0.25)^4}{4!}(0.1654682)$$

$$= 0.8364037.$$

Jadi diperoleh $y(0.50) \approx 0.8364037$.

2.3 Metode Runge-Kutta Orde Lima

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor dan tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi (Munir, 2008).

Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama, adalah :

1. Metodenya satu langkah, ialah untuk mencapai y_{n+1} hanya memerlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_n , y_n
2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde-n adalah :

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + \cdots + w_n k_n \qquad 2.24$$

dengan $w_1, w_2, \ldots, w_n$ adalah tetapan, dan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + hc_2, y_n + a_{21}k_1)$$
$$k_3 = hf(x_n + hc_3, y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$
$$k_4 = hf(x_n + hc_4, y_n + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)$$
$$\vdots$$
$$k_n = hf(x_n + hc_n, y_n + a_{n,1}k_1 + a_{n,2}k_2 + \cdots + a_{n,n}k_{n-1})$$

Metode Runge-Kutta dengan n langkah dapat ditunjukkan kedalam sebuah tabel yang dikenal sebagai Tabel Butcher.

Tabel 2.1 Tabel Butcher untuk Runge-Kutta Orde-*n*

$$\begin{array}{c|ccccc}
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & q_{32} & & & \\
c_4 & a_{41} & q_{42} & a_{43} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
c_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & \\
\hline
 & w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_n
\end{array}$$

Tabel Butcher ini berbentuk matriks segitiga bawah, tabel ini menunjukkan hasil aproksimasi sama dengan bentuk berikut :

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{i=1}^{n} w_i k_i$$

dengan $k_i = f(x_i + hc_i, y_i + h\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} k_j)$

Bentuk umum dari persamaan metode Runge-Kutta orde lima dengan 6 langkah :

$$y_{n+1} = y_n + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 + w_5k_5 + w_6k_6 \qquad 2.25$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + c_2h, y_n + a_{21}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + c_3h, y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + c_4h, y_n + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_n + c_5h, y_n + a_{51}k_1 + a_{52}k_2 + a_{53}k_3 + a_{54}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_n + c_6h, y_n + a_{61}k_1 + a_{6,2}k_2 + a_{63}k_2 + a_{64}k_2 + a_{65}k_5)$$

Untuk mendapatkan nilai parameter $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{61}, a_{62}, a_{63,} a_{64}, a_{65}$ adalah dengan cara menguraikan k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, dan k_6 kedalam deret Taylor untuk fungsi dua variabel yang didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x + h, y + k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x, y) \qquad (2.26)$$

dengan menjabarkan k_i kedalam ruas kanan pada persamaan (2.26) maka dapat diperoleh :

$$k_1 = hf \qquad (2.27)$$

$$k_2 = hf(y_n + a_{21}k_1)$$

$$= hf + h^2a_{21}ff_y + \frac{h^3}{2}a_{21}^2f^2f_{yy} + \frac{h^4}{6}a_{21}^3f^3f_{yyy} + \cdots \qquad (2.28)$$

$$k_3 = hf(y_n + a_{31}k_1 + a_{32}k_2)$$

$$= hf + h^2c_3ff_y + h^3\left(a_{21}a_{32}ff_y^2 + \frac{1}{2}c_3^2f^2f_{yy}\right)$$

$$+ h^4\left(\frac{1}{2}a_{21}^2a_{32}f^2f_yf_{yy} + a_{21}c_3a_{32}f^2f_yf_y + \frac{1}{6}c_3^3f^3f_{yyy}\right)$$

$$+ \cdots \qquad (2.29)$$

$$k_4 = hf(y_n + a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)$$

$$= hf + h^2c_4ff_y + h^3\left(a_{21}a_{32}ff_y^2 + c_3a_{33}ff_y^2 + \frac{1}{2}c_4^2f^2f_{yy}\right.$$

$$+ h^4\left(\frac{1}{2} a_{21}^2 a_{32} c_4 f^2 f_y f_{yy} + q_{33} \frac{c_3^2}{2} f^2 f_y f_{yy}\right.$$

$$+ B\ q_{11} q_{32} + q_{33} c_3\ f^2 f_y f_{yy} + q_{33} q_{22} q_{11} f f_y^3 + \left.\frac{1}{6} c_4^3 f^3 f_{yyy}\right)$$

$$+ \cdots \qquad (2.31)$$

$$k_5 = hf\ y_n + a_{51} k_1 + a_{52} k_2 + a_{53} k_3 + a_{54} k_4$$

$$= hf + h^2 c_5 f f_y + h^3 (a_{21} a_{52} f f_y^2 + c_3 a_{53} f f_y^2 + c_4 a_{54} f f_y^2$$

$$+ \frac{1}{2} c_5^2 f^2 f_{yy} + h^4 (\frac{1}{2} a_{21}^2 a_{52} B_4 f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{2} a_{53} c_3^2 f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ \frac{1}{2} a_{53} c_4^2 f^2 f_y f_{yy} + a_{21} a_{52} c_5 f^2 f_y f_{yy} + a_{53} c_3 c_5\ f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ a_{54} c_4 c_5 f^2 f_y f_{yy} + a_{21} a_{43} a_{54} f f_y^3 + c_3 a_{54} a_{43} f f_y^3 + a_{53} a_{32} a_{21} f_y^3$$

$$+ \frac{1}{6} c_5^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \qquad (2.32)$$

$$k_6 = hf\ y_n + a_{61} k_1 + a_{6,2} k_2 + a_{63} k_2 + a_{64} k_2 + a_{65} k_5$$

$$= hf + h^2 c_6 f f_y + h^3 (a_{21} a_{62} f f_y^2 + c_3 a_{63} f f_y^2 + c_4 a_{64} f f_y^2$$

$$+ c_5 a_{65} f f_y^2 + \frac{1}{2} c_6^2 f^2 f_{yy}) + h^4 (\frac{1}{2} a_{21}^2 a_{62} c_4 f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ \frac{1}{2} a_{63} c_3^2\ f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{2} a_{64} c_4^2 f^2 f_y f_{yy} + a_{63} \frac{c_5^2}{2} f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ \cdots + a_{21} a_{43} a_{64} f f_y^3 + \frac{1}{6} c_6^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \qquad (2.33)$$

Untuk mendapatkan nilai dari parameter $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, a_{21}, a_{31}, a_{32} a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{61}, a_{62}, a_{63,} a_{64}, a_{65}$ adalah dengan cara memasukkan persamaan (2.27) sampai (2.33) dengan $c_3 = a_{31} + a_{32}$, $c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43}$, $c_5 = a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54}$ dan $c_6 = a_{61} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{65}$ ke dalam deret Taylor untuk memperoleh nilai parameter tersebut sehingga diperoleh :

$$a_{21} = c_2$$

$$a_{31} + a_{32} = c_3$$

$$a_{41} + a_{42} + a_{43} = c_4$$

$$a_{51} + a_{52} + a_{53} + a_{54} = c_5$$

$$a_{61} + a_{62} + a_{63} + a_{64} + a_{65} = c_6$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 1$$

$$w_2c_2 + w_3c_3 + w_4c_4 + w_5c_5 + w_6c_6 = \frac{1}{2}$$

$$w_2c_2^2 + w_3c_3^2 + w_4c_4^2 + w_5c_5^2 + w_6c_6^2 = \frac{1}{3}$$

$$w_2c_2^3 + w_3c_3^3 + w_4c_4^3 + w_5c_5^3 + w_6c_6^3 = \frac{1}{4}$$

$$w_2c_2^4 + w_3c_3^4 + w_4c_4^4 + w_5c_5^4 + w_6c_6^4 = \frac{1}{5}$$

$$a_{32}c_2 = \frac{1}{2}c_3^2$$

$$a_{42}c_2 + a_{43}c_3 = \frac{1}{2}c_4^2$$

$$a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4 = \frac{1}{2}c_5^2$$

$$w_5\ 1 - w_5c_5\ a_{54}c_4\ c_4 - c_5 = \frac{1}{60} - \frac{c_3}{24}$$

$$w_3\ 1 - c_3\ a_{32} + w_4\ 1 - c_4\ a_{42} + w_5\ 1 - c_5\ a_{52} = 0$$

$$w_2a_{21} + w_3a_{31} + w_4a_{41} + w_5a_{51} + w_6a_{61} = w_1$$

$$w_3a_{32} + w_4a_{42} + w_5a_{52} + w_6a_{62} = w_2(1 - c_2)$$

$$w_4a_{43} + w_5a_{53} + w_6a_{63} = w_3(1 - c_3)$$

$$w_5a_{54} + w_6a_{64} = w_4(1 - c_4)$$

$$w_6a_{65} = w_5\ 1 - c_5 \qquad (2.34)$$

Persamaan (2.28) yang terdiri dari 20 persamaan dengan 26 parameter sehingga dapat diambil parameter 3 parameter bebasnya misalnya:

$$c_6 = 1, \qquad c_2 = \frac{1}{4} \qquad \text{dan} \qquad a_{42} = 1/2 \qquad (2.35)$$

Subsitusikan ketiga parameter tersebut kedalam persamaan (2.34) sehingga didapatkan :

$$a_{21} = \frac{1}{8}, a_{31} = 0, a_{32} = \frac{1}{4}, a_{41} = \frac{1}{2}, a_{42} = -1, a_{43} = 1, a_{51} = \frac{3}{16}, a_{52} = 0$$

$$a_{53} = 0, a_{54} = \frac{9}{16}, a_{61} = -\frac{5}{7}, a_{62} = \frac{4}{7}, a_{63} = \frac{12}{7}, a_{64} = -\frac{12}{7}, a_{65} = 8/7$$

$$c_2 = \frac{1}{8}, c_3 = \frac{1}{4}, c_4 = \frac{1}{2}, c_5 = \frac{3}{4}, c_6 = 1$$

$$w_1 = \frac{7}{90}, w_2 = 0, w_3 = \frac{32}{90}, w_4 = \frac{12}{90}, w_5 = \frac{32}{90}, w_6 = \frac{7}{90}. \qquad (2.36)$$

Kemudian subsitusikan parameter pada persamaan (2.35) dan (2.36) kedalam persamaan (2.25) sehingga akan diperoleh rumus Runge-Kutta Orde 5 sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6 \qquad 2.37$$

dengan

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + h, y_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_2 - \frac{12}{7}k_2 + \frac{8}{7}k_5\right).$$

Metode Runge-Kuta orde 5 dapat di masukkan kedalam tabel Buthcer sebagai berikut:

Table 2.2 Tabel Butcher Runge-Kutta orde-5

0						
1/4	1/4					
1/8	1/8	1/8				
1/2	0	0	1/2			
3/4	3/16	− 3/8	3/8	9/16		
1	− 3/7	8/7	6/7	− 12/7	8/7	
	7/90	0	32/90	12/90	32/90	7/90

Selain bentuk di atas Metode Runge-Kutta orde 5 juga mempunyai bentuk lain. Hal ini karena metode Runge-Kutta orde 5 memiliki banyak bentuk dikarenakan mempunyai 26 parameter bebas.

Jika dimisalkan $c_2 = 1, c_6 = 3/4$ dan $a_{42} = 1/2$, maka akan terbentuk metode Runge-Kutta orde 5 *Newton-Cotes Family* Sebagai berikut (Lapidus dkk, 1971) :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{7}{90}k_1 + \frac{7}{90}k_3 + \frac{32}{90}k_4 + \frac{12}{90}k_5 + \frac{32}{90}k_6 \qquad 2.38$$

dengan

$$k_1 = hf\ \ x_n, y_n$$

$$k_2 = hf\ \ x_n + h, y_n + k_1$$

$$k_3 = hf\ \ x_n + h, y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$k_4 = hf\ \ x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{14}{64}k_1 + \frac{5}{64}k_2 - \frac{3}{64}k_3$$

$$k_5 = hf\ \ x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{12}{96}k_1 - \frac{12}{96}k_2 + \frac{8}{96}k_3 + \frac{64}{96}k_4$$

$$k_6 = hf\ \ x_n + \frac{3}{4}h, y_n - \frac{9}{64}k_2 + \frac{5}{64}k_3 + \frac{16}{64}k_2 + \frac{36}{64}k_5\ .$$

Penerapan metode RK5 pada persamaan (2.34) pada bentuk umum dari sistem persamaan :

$$\frac{dx_n}{dt} = f_1\ \ t, x, y$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_2\ \ t, x, y$$

Sehingga dapat ditulis sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{7}{90}m_1 + \frac{32}{90}m_3 + \frac{12}{90}m_4 + \frac{32}{90}m_5 + \frac{7}{90}m_6$$

dengan,

$$k_1 = hf_1\ \ t_n, x_n, y_n$$

$$m_1 = hf_2\ \ t_n, x_n, y_n$$

$$k_2 = hf_1\ \ t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1, y_n + \frac{1}{4}m_1$$

$$m_2 = hf_2\ \ t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1, y_n + \frac{1}{4}m_1$$

$$k_3 = hf_1\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2\right)$$

$$m_3 = hf_2\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2\right)$$

$$k_4 = hf_1\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_3, y_n + \frac{1}{2}m_3\right)$$

$$m_4 = hf_2\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_3, y_n + \frac{1}{2}m_3\right)$$

$$k_5 = hf_1\left(t_n + \frac{3}{4}h, x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y_n + \frac{3}{16}m_1 - \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4\right)$$

$$m_5 = hf_2\left(t_n + \frac{3}{4}h, x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y_n + \frac{3}{16}m_1 - \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4\right)$$

$$k_6 = hf_1\left(t_n + h, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5\right)$$

$$m_6 = hf_2\left(t_n + h, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5\right).$$

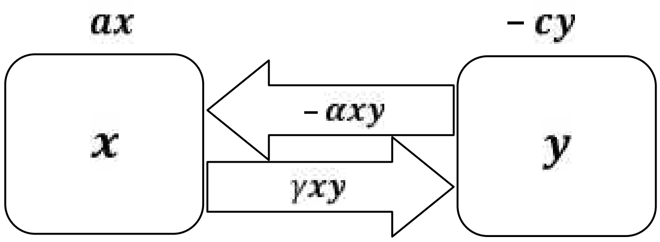
2.4 Sistem Persamaan Lotka-Volterra

Sistem persamaan difrerensial Lotka-Volterra merupakan gabungan dari 2 persamaan diferensial nonlinier. Dalam bidang biologi, khususnya ekologi, sistem persamaan diferensial ini dipergunakan untuk memodelkan interaksi dua populasi, dalam hal ini interaksinya adalah interaksi predasi yang merupakan interaksi yang terjadi antara mangsa (*prey*) yang mempunyai persediaan makanan berlebih dengan pemangsa (*predator*) yang diberi makan oleh mangsa.

Secara matematis, model interaksi dua populasi ini diperkenalkan oleh seorang ahli biofisika Amerika yaitu Alferd J. Lotka (1880-1949) dan ahli matematika terkemuka dari Italia yaitu Vito Volterra (1860-1940). Keduanya mengembangkan kajian matematis ini secara terpisah, Lotka mengembangkannya pada tahun 1925 sedangkan Volterra pada tahun 1926 (Boyce & Diprima, 2008).

Jika didefinisikan x sebagai banyaknya populasi mangsa (*Prey*) dan y sebagai banyaknya populasi pemangsa (*Predator*) yang berinteraksi pada suatu daerah pada saat t. Berikut ini asumsi-asumsi yang membangun model interaksi dua spesies, berdasarkan Lotka-Volterra adalah:

1. Jika populasi pemangsa diabaikan, maka laju pertumbuhan populasi mangsa akan mendekati eksponensial dan tidak terbatas, sehingga diperoleh: $\frac{d\mu}{dt} = ax, a > 0$ ketika $y = 0$.
2. Jika populasi mangsa diabaikan, maka laju pertumbuhan populasi pemangsa akan menurun, sehingga diperoleh: $\frac{dy}{dt} = -cy, c > 0$ ketika $\mu = 0$.
3. Setiap interaksi kedua populasi, akan meningkatkan pertumbuhan populasi pemangsa dan menghalangi pertumbuhan populasi mangsa. Oleh karena itu, pertumbuhan populasi pemangsa bertambah sebanyak γxy sedangkan pertumbuhan populasi mangsa akan berkurang sebanyak $-\alpha xy$, dengan α dan γ adalah konstanta positif.



Gambar 2.1 Sketsa Sistem Persamaan Lotka-Volterra

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas sehingga dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \quad (2.39)$$

dengan,

$x(t)$ adalah jumlah populasi mangsa pada saat t

$y(t)$ adalah jumlah populasi pemangsa pada saat t

a adalah laju pertumbuhan mangsa

$-c$ adalah koefisien laju kematian pemangsa.

α dan γ adalah koefisien interaksi antar mangsa dengan mangsa

Koefisien a, c, α dan γ semuanya adalah positif. a menunjukkan laju kelahiran mangsa, $-c$ adalah koefisien laju kematian pemangsa, sedangkan α adalah koefisien pemangsa saat memakan mangsa dan γ menunjukkan koefisien pertumbuhan pemangsa setelah mendapatkan memakan mangsa.

Sistem persamaan (2.39) dapat dianalisa dengan titik keseimbangan. Jika mengasumsikan $\mu > 0$ dan $y > 0$, sehingga:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

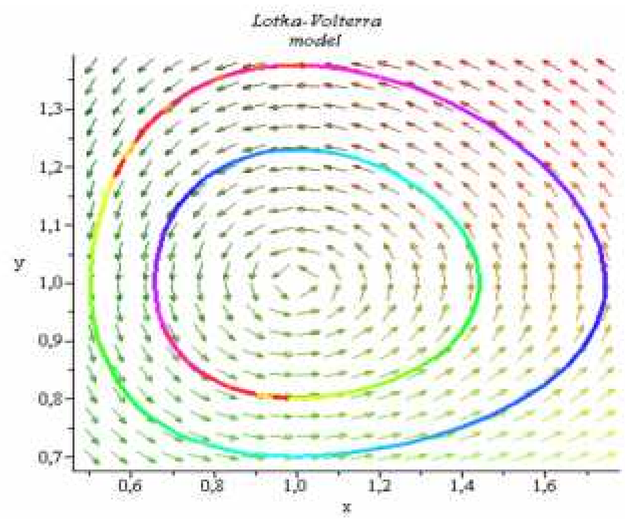
$$ax - \alpha xy = 0 \qquad -cy + \gamma xy = 0$$

$$(a - \alpha y)x = 0 \qquad (-c + \gamma x)y = 0$$

$$a - \alpha y = 0 \qquad -c + \gamma x = 0$$

$$y^* = a/\alpha \qquad x^* = c/\gamma$$

Sehingga didapatkan titik keseimbangan $\left({}^{c}/_{\gamma}, {}^{a}/_{\alpha}\right)$ untuk sistem persamaan pada persamaan (2.36). Titik keseimbangan tersebut dapat mengetahui keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa serta dapat digambarkan ke dalam *Phase Plane* sebagai berikut:



Gambar 2.2 *Phase Plane* Sistem Persamaan Lotka-Volterra.

Gambar 2.2 menjelaskan bahwa sistem persamaan Lotka-Volterra dengan akan menuju ke satu titik yaitu titik keseimbangan yang tergantung pada koefisien-koefisien yang membentuk sistem persamaan Lotka-Volterra. Penerapan sistem persamaan Lotka-Volterra pada metode Runge-Kutta Fehleberg (RKF 45) dapat dilihat dari contoh di bawah ini :

Contoh 2.5:

Diberikan sistem persamaan Lotka-Volterra dengan koefisien-koefisien yaitu $a = 0.2, \alpha = 0.005, c = 0.5$ dan $\gamma = 0.01$, dengan jumlah awal populasi mangsa $\mu(0) = 60$ dan jumlah awal populasi pemangsa $y(0) = 30$. Hitunglah $\mu(t)$ dan $y(t)$ pada persamaan (2.32) dengan metode Runge-Kutta Fehleberg (RKF 45) pada saat $t = 50$ hari dengan ukuran waktu interval $h = 0.5$! (Urifah, 2008)

Penyelesaian:

Diketahui sistem persamaan Lotka-Volterra dengan koefisien-koefisien yaitu $a = 0.2, \alpha = 0.005, c = 0.5$ dan $\gamma = 0.01$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$f_1(t,x,y) = \frac{d\mu}{dt} = 0.2\,x - 0.005\,xy$$

$$f_2(t,x,y) = \frac{dy}{dt} = -0.5\,y + 0.01\,xy \qquad (2.40)$$

Bentuk umum untuk metode Runge-Kutta Fehleberg (RKF 45) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

dengan,

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf \quad x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5 \quad .$$

Kemudian RKF 45 dimasukkan ke dalam sistem persamaan pada persamaan (2.40) maka akan menjadi sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4101}m_4 - \frac{1}{5}m_5$$

dengan,

$$k_1 = hf_1 \; t_n, x_n, y_n$$

$$m_1 = hf_2 \; t_n, x_n, y_n$$

$$k_2 = hf_1 \quad x_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1, y_n + \frac{1}{4}m_1$$

$$m_2 = hf_2 \quad t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1, y_n + \frac{1}{4}m_1$$

$$k_3 = hf_1 \quad t_n + \frac{3}{8}h, x_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_n + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2$$

$$m_3 = hf_2 \quad t_n + \frac{3}{8}h, x_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_n + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2$$

$$k_4 = hf_1 \quad t_n + \frac{12}{13}h, x_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_n + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3$$

$$m_4 = hf_2 \quad t_n + \frac{12}{13}h, x_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_n + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3$$

$$k_5 = hf_1 \quad t_n + h, x_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_n + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4$$

$$m_5 = hf_2 \quad t_n + h, x_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_n + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3680}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4$$

$$k_6 = h f_1\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_n - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5\right)$$

$$m_6 = h f_2\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_n - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5\right)$$

Untuk iterasi pertama ($t = 0.5$) dengan $t_n = t_0 = 0.5, x_n = x_0 = 60$ dan $y_n = y_0 = 30$ maka didapat:

$k_1 = 1.5$ $\qquad$ $m_1 = 1.5$

$k_2 = 1.4527734375$ $\qquad$ $m_2 = 1.57570312$

$k_3 = 1.42536014132798$ $\qquad$ $m_3 = 1.61317534722684$

$k_4 = 1.30055009826244$ $\qquad$ $m_4 = 1.77911171056844$

$k_5 = 1.28156843915443$ $\qquad$ $m_5 = 1.80136095034631$

$k_6 = 1.39848539823091$ $\qquad$ $m_6 = 1.65156130118756$

Berdasarkan parameter-parameter di atas maka besarnya x_{n+1} dan y_{n+1} adalah:

$$x_{n+1} = \mu_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$x_{0+1} = \mu_0 + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$x_1 = 60 + \frac{25}{216}\ 1.5\ + \frac{1408}{2565}\ 1.42536014132798 + \frac{2197}{4101}(1.30055009826244) - \frac{1}{5}(1.28156843915443)$$

$$= 61.39594262120085$$

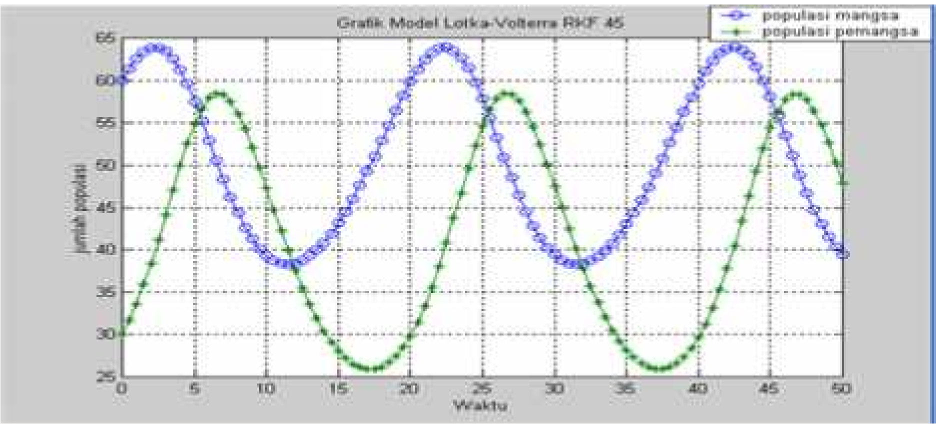
$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4101}m_4 - \frac{1}{5}m_5$$

$$y_{0+1} = y_0 + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4101}m_4 - \frac{1}{5}m_5$$

$$y_1 = 30 + \frac{25}{216}\ 1.5\ + \frac{1408}{2565}\ 1.61317534722684 + \frac{2197}{4101}(1.77911171056844) - \frac{1}{5}(1.80136095034631)$$

$$= 31.65127017112750$$

Jadi, pada saat $t = 0.5$ besarnya x atau banyaknya mangsa adalah 61.39594262120085 dan y atau banyaknya pemangsa adalah 31.65127017112750.



Gambar 2.3 Grafik Sistem Persamaan Lotka-Volterra dengan RKF 45

Pada gambar 2.3, menjelaskan bahwa jika iterasi dilakukan secara berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke-101, maka pada akhirnya akan memperoleh penyelesaian $x(50) = 39.46862153379923$ dan $y(50) = 47.87357967576552$. Dengan kata lain jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 40 ekor dan 48 ekor. Secara keseluruhan penyelesaian numerik dari sistem persamaan Lotka-Volterra dikerjakan oleh program Matlab.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Tugas akhir ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang berguna untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari literatur yang ada hubungannya dengan penulisan yang akan diuraikan.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Memperlihatkan kembali bentuk metode Runge Kutta orde lima yaitu pada persamaan (2.37) :

$$y_{n+1} = y_i + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6$$

dengan,

$$k_1 = hf \; x_n, y_n$$
$$k_2 = hf \; x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1$$
$$k_3 = hf \; x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2$$
$$k_4 = hf \; x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_3$$
$$k_5 = hf \; x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4$$
$$k_6 = hf \; x_n + h, y_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_2 - \frac{12}{7}k_2 + \frac{8}{7}k_5$$

2. Mendefinisikan persamaan Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy$$

dengan,

$x(t)$ adalah jumlah populasi mangsa pada saat t

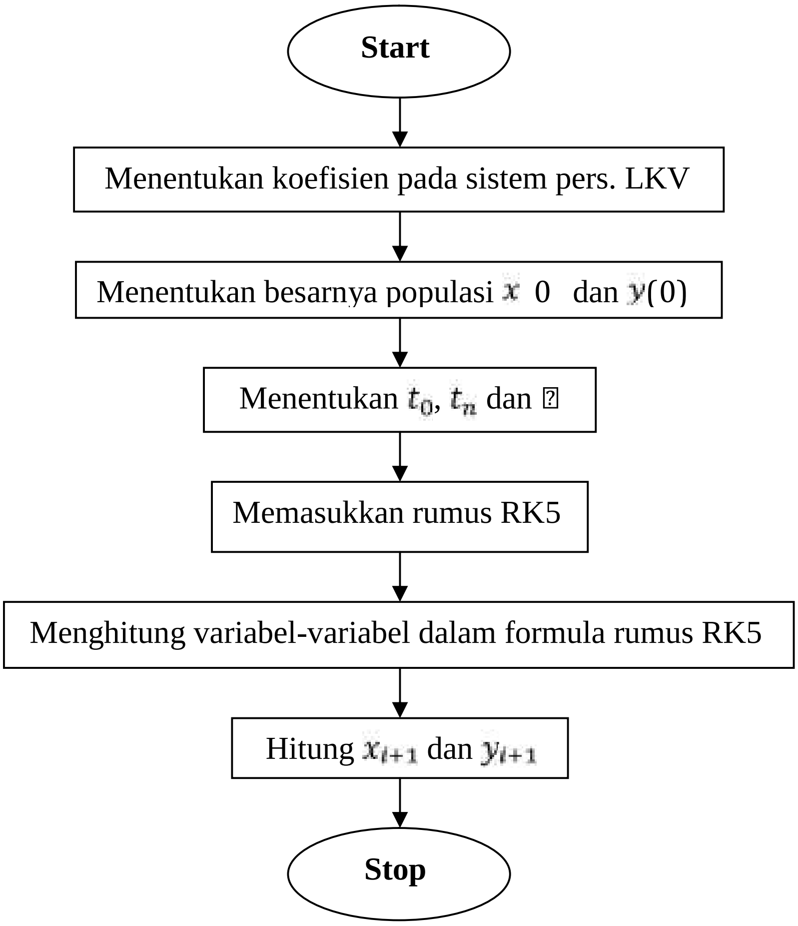
$y(t)$ adalah jumlah populasi pemangsa pada saat t

a adalah laju pemangsa mangsa

$-c$ adalah koefisien laju kematian pemangsa

α dan γ adalah koefisien saling makan memakan mangsa dan pemangsa

3. Menyelesaikan dengan sistem persamaan Lotka-Volterra sesuai dengan algoritma sebagai berikut:



4. Menentukan koefisien-koefisien yang terdapat dalam sistem persamaan diferensial Lotka-Volterra.
5. Mengaplikasikan metode Runge-Kutta orde lima dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial Lotka Volterra dengan *software* Matlab.
6. Menentukan titik keseimbangan dari sistem persamaan Lotka-Volterra dan mengambarkan *Phase Plane* untuk sistem persamaan LKV dengan *software* Maple.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan membahas penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra pada interaksi sederhana dua populasi (model mangsa pemangsa) secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima. Penyelesaian sistem persamaan ini akan dibantu dengan program Matlab 5.3.

4.1 Sistem Persamaan Lotka-Volterra

Sistem persamaan Lotka-Volterra merupakan suatu sistem persamaan differensial nonlinear. Sistem persamaan Lotka-Volterra merupakan interaksi yang terjadi antara mangsa (*prey*) yang mempunyai persediaan makanan berlebih dengan pemangsa (*predator*) yang diberi makan oleh mangsa.

Sistem persamaan Lotka-Volterra dua populasi dapat dinyatakan dalam rumus sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \qquad (4.1)$$

dengan,

$x\ t$ adalah jumlah populasi mangsa pada saat t

$y\ t$ adalah jumlah populasi pemangsa pada saat t

a adalah laju pemangsa mangsa

$-c$ adalah koefisien laju kematian pemangsa

α, γ adalah koefisien interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa

Koefisien a, c, α dan γ pada persamaan (4.1) adalah positif. Sedangkan α adalah koefisien interaksi pemangsa saat memakan mangsa dan γ menunjukkan koefisien interaksi pertumbuhan pemangsa setelah mendpatkan memakan mangsa.

4.2 Penerapan Sistem Persamaan Lotka-Volterra dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 5

Persamaan (2.37) adalah bentuk metode Runge-Kutta orde 5 yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan baik linear maupun nonlinear, salah satunya adalah sistem persamaan Lotka-Volterra pada persamaan (4.1).

Berikut ini adalah bentuk umum sistem persamaan Lotka-Volterra pada persamaan (4.1) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima (2.37). Pertama akan menentukan nilai $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ dan kemudian akan ditentukan penyelesaian dari μ_{n+1} dan y_{n+1}.

$$x_{n+1} = \mu_n + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6 \qquad (4.2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{7}{90}m_1 + \frac{32}{90}m_3 + \frac{12}{90}m_4 + \frac{32}{90}m_5 + \frac{7}{90}m_6$$

dengan,

$$k_1 = h f_1\left(t_n, x_n, y_n\right)$$

$$k_1 = h(a x_n - \alpha x_n y_n)$$

$$m_1 = h f_2\left(t_n, x_n, y_n\right)$$

$$m_1 = h(-c y_n + \gamma x_n y_n)$$

$$k_2 = h f_1\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1, y_n + \frac{1}{4}m_1\right)$$

$$k_2 = h\left(a\left(x_n + \frac{1}{4}k_1\right) - \alpha\left(x_n + \frac{1}{4}k_1\right)\left(y_n + \frac{1}{4}m_1\right)\right)$$

$$m_2 = h f_2\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{4}k_1, y_n + \frac{1}{4}m_1\right)$$

$$m_2 = h\left(-c\left(y_n + \frac{1}{4}m_1\right) + \gamma\left(x_n + \frac{1}{4}k_1\right)\left(y_n + \frac{1}{4}m_1\right)\right)$$

$$k_3 = h f_1\left(t_n + \frac{1}{4}h, x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2\right)$$

$$k_3 = \square \quad a \quad x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2$$

$$- \; \alpha \quad x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2 \quad y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$

$$m_3 = \square f_2 \quad t_n + \frac{1}{4}\square, x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$

$$m_3 = \square \quad -c \quad y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2 \quad + \gamma \quad x_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2 \quad y_n + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$

$$k_4 = \square f_1 \quad t_n + \frac{1}{2}\square, x_n + \frac{1}{2}k_3, y_n + \frac{1}{2}m_3$$

$$k_4 = \square \quad a \quad x_n + \frac{1}{2}k_3 \quad - \alpha \quad x_n + \frac{1}{2}k_3 \quad y_n + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_4 = \square f_2 \quad t_n + \frac{1}{2}\square, x_n + \frac{1}{2}k_3, y_n + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_4 = \square \quad -c \quad y_n + \frac{1}{2}m_3 \quad + \gamma \quad x_n + \frac{1}{2}k_3 \quad y_n + \frac{1}{2}m_3$$

$$k_5 = \square f_1 \quad t_n + \frac{3}{4}\square, x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y_n + \frac{3}{16}m_1$$

$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$

$$k_5 = \square \quad a \quad x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4$$

$$- \; \alpha \quad x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4 \quad y_n + \frac{3}{16}m_1$$

$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$

$$m_5 = \square f_2 \quad t_n + \frac{3}{4}\square, x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y_n + \frac{3}{16}m_1$$

$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$

$$m_5 = \square\ -c\ \ y_n + \frac{3}{16}m_1 - \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$
$$+ \gamma\ \ x_n + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4\ \ \ y_n + \frac{3}{16}m_1$$
$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$

$$k_6 = \square f_1\ \ t_n + \square, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}m_1$$
$$+ \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5$$

$$k_6 = \square\ \ a\ \ x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5$$
$$- \alpha\ \ x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5\ \ \ y_n - \frac{3}{7}m_1$$
$$+ \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5$$

$$m_6 = \square f_2\ \ t_n + \square, x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y_n - \frac{3}{7}m_1$$
$$+ \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5$$

$$m_6 = \square\ -c\ \ y_n - \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5$$
$$+ \gamma\ \ x_n - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5\ \ \ y_n - \frac{3}{7}m_1$$
$$+ \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5\ \ .$$

Pada metode Runge-Kutta orde lima panjang langkah iterasi waktu $\square$ adalah tetap dan untuk mendapatkan ketelitian yang tinggi panjang iterasi waktu $\square$ harus diambil sekecil mungkin. Perhitungan dengan metode Rung-Kutta orde 5 dapat dilakukan dengan bantuan suatu program komputer. Apabila program komputer telah ditulis suatu persoalan untuk mendapatkan suatu penyelesaian dengan sembarang nilai awalnya.

4.3 Algoritma Metode Runge-Kutta Orde 5 untuk Sistem Persamaan Lotka-Volterra

Algoritma metode Runge-Kutta orde 5 untuk menyelesaikan sistem persamaan (4.1) dengan menggunakan program Matlab 5.3

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \quad \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy, \qquad x\ t_0 = x\ n\ , \ y\ t_0 = y\ n\ , [t_0, t_n]$$

a. **Input** : Koefisien-koefisien yang terdapat pada sistem persamaan Lotka-Volterra, banyaknya populasi awal x_0 dan y_0, batas bawah interval waktu (t_0), batas atas interval waktu (t_n), dan jarak interval h, fungsi

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \qquad \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy$$

b. **Output** : Banyaknya iterasi (n), t, $x\ n$ dan $y\ n$ sebagai penyelesaian pendekatan dari sistem persamaan Lotka-Volterra.

c. **Algoritma** :

1. Set $n = \ b - a\ /h,\ t = \ 0 : h : n * h$
2. Definisikan $x\ 1\ = x_0,\ y\ 1\ = y_0$
3. For $i = 1 : n$

$$k_1 = hf_1\ t\ i\ , x\ i\ , y\ i$$
$$m_1 = hf_2\ t(i), x(i), y(i)$$

$$k_2 = hf_1\ \ t(i) + \frac{1}{4}h, x(i) + \frac{1}{4}k_1, y(i) + \frac{1}{4}m_1$$

$$m_2 = hf_2\ \ t(i) + \frac{1}{4}h, x(i) + \frac{1}{4}k_1, y(i) + \frac{1}{4}m_1$$

$$k_3 = hf_1\ \ t(i) + \frac{1}{4}h, x(i) + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y(i) + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$

$$m_3 = hf_2\ \ t(i) + \frac{1}{4}h, x(i) + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y(i) + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$

$$k_4 = hf_1\ \ t(i) + \frac{1}{2}h, x(i) + \frac{1}{2}k_3, y(i) + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_4 = hf_2\ \ t(i) + \frac{1}{2}h, x(i) + \frac{1}{2}k_3, y(i) + \frac{1}{2}m_3$$

$$k_5 = \square f_1(t(i) + \frac{3}{4}\square, x(i) + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y\ i$$

$$+ \frac{3}{16}m_1 - \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4)$$

$$m_5 = \square f_2(t(i) + \frac{3}{4}\square, x(i) + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y(i)$$

$$+ \frac{3}{16}m_1 - \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$

$$k_6 = \square f_1(t(i) + \square, x(i) - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5,$$

$$y(i) - \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5)$$

$$m_6 = \square f_2(t(i) + \square, x(i) - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5,$$

$$y(i) - \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5$$

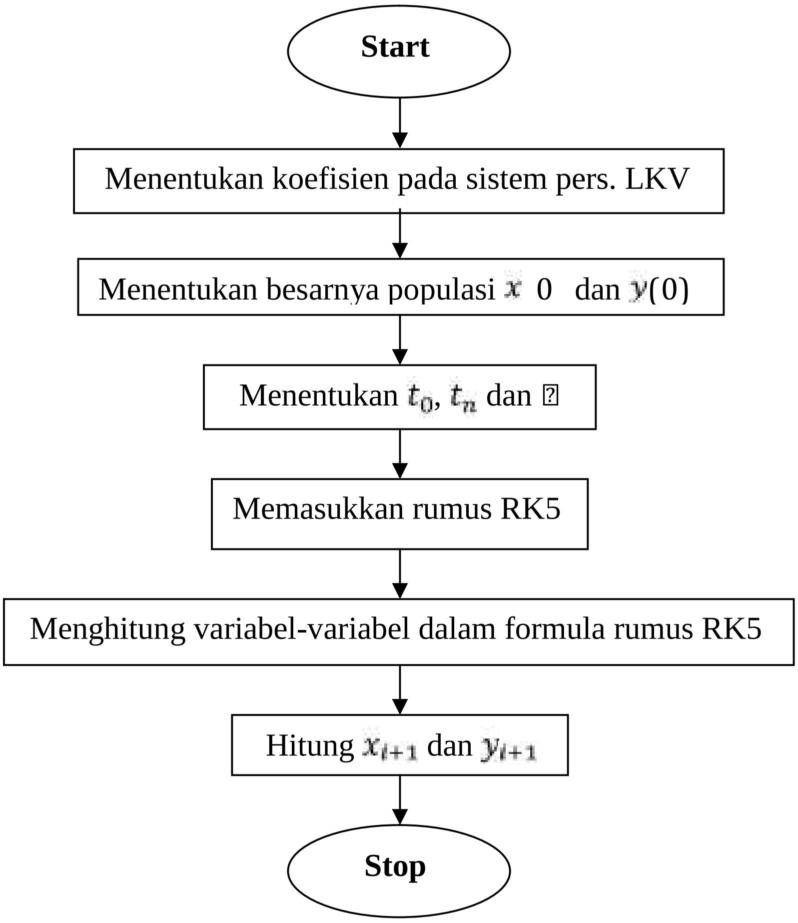
$$x(i+1) = x(i) + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6$$

$$x(i+1) = x(i) + \frac{7}{90}m_1 + \frac{32}{90}m_3 + \frac{12}{90}m_4 + \frac{32}{90}m_5 + \frac{7}{90}m_6$$

d. nilai n, t, x, y

e. **End**.

Algoritma metode Runge-Kutta orde lima untuk sistem persamaan LKV di atas dapat digambarkan kedalam *flow chart* di bawah ini:



Gambar 4.1 ***Flow Chart*** **Algoritma Metode RK5 untuk Sistem Persamaan Lotka-Volterra.**

Berikut ini adalah beberapa contoh penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima.

Contoh 4.1

Diberikan sistem persamaan LKV yang mempunyai koefisien-koefisien yaitu $a = 1.5$; $\alpha = 0.03$; $c = 0.5$; $\gamma = 0.01$, dengan jumlah awal populasi mangsa $x(0) = 100$ dan jumlah awal populasi pemangsa $y(0) = 50$. Hitunglah $x(t)$ dan $y(t)$ pada persamaan (2.32) dengan metode Runge-Kutta orde Lima (RK5) pada saat $t = 50$ hari dengan ukuran langkah waktu $h = 0.5$!

Penyelesaian :

Bentuk sistem persamaan Lotka-Volterra dengan koefisien-koefisien $a = 1.5$; $\alpha = 0.03$; $c = 0.5$ dan $\gamma = 0.01$ sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 1.5x - 0.03xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.5y + 0.01xy. \tag{4.3}$$

Setelah itu persamaan (4.3) dimasukkan ke dalam metode Runge-Kutta orde lima dengan waktu interval atau $\square = 0,5$, $x\ 0 = 100$ dan $y\ 0 = 50$ sehingga menjadi:

Iterasi Pertama:

$$k_1 = \square f_1\ t\ 0\ , x\ 0\ , y\ 0$$
$$k_1 = 0,5\ \ 1,5\ 100\ - 0,03\ 100\ \ 50\ = \ 0,5\ \ 150 - 150\ = 0$$
$$m_1 = \square f_2\ t(0), x(0), y(0)$$
$$m_1 = 0,5\ [-0,5\ \ 50\ + \ 0,01\ \ 100\ \ 50\ = \ 0,5\ \ -25 + 50\ = 12,5$$
$$k_2 = \square f_1\ \ t(0) + \frac{1}{4}\square, x(0) + \frac{1}{4}k_1, y(0) + \frac{1}{4}m_1$$
$$k_2 = 0,5\ \ 1,5\ \ 100 + \frac{1}{4}\ 0$$
$$- \ 0,03\ \ 100 + \frac{1}{4}\ 0\ \ 50 + \frac{1}{4}\ 12,5$$
$$= 0,5\ [150 - 159,375] = -4,6875$$
$$m_2 = \square f_2\ \ t\ 0\ + \frac{1}{4}\square, x\ 0\ + \frac{1}{4}k_1, y\ 0\ + \frac{1}{4}m_1$$
$$m_2 = 0,5\ \ -0,5\ \ 50 + \frac{1}{4}\ 12,5$$
$$+ \ 0,01\ \ 100 + \frac{1}{4}\ 0\ \ 50 + \frac{1}{4}\ 12,5$$
$$= 0,5\ \ -26,5625 + 53,125\ = 13,28125$$
$$k_3 = \square f_1\ \ t(0) + \frac{1}{4}\square, x(0) + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y(0) + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$
$$k_3 = 0,5\ \ 1,5\ \ 100 + \frac{1}{8}\ 0\ + \frac{1}{8}\ -4,6875$$
$$- \ 0,03\ \ 100 + \frac{1}{8}\ 0\ + \frac{1}{8}\ -4,6875\ \ 50 + \frac{1}{8}\ 12,5$$
$$+ \frac{1}{8}\ 13,28125$$
$$= 0,5\ \ 149,12109375 - 158,73241424560547$$
$$= -4,80566024780273$$

$$m_3 = \quad 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 50 + \frac{1}{8}\ 12{,}5 \ + \frac{1}{8}\ 13{,}28125$$

$$+ \quad 0{,}01 \quad 100 + \frac{1}{8}\ 0 \ + \frac{1}{8}\ -4{,}6875 \qquad 50 + \frac{1}{8}\ 12{,}5$$

$$+ \frac{1}{8}\ 13{,}281255$$

$$= \quad 0{,}5 \quad -26{,}611328125 + \ 52{,}91080474853516$$

$$= \ 13{,}14973831176758$$

$$k_4 = \ \square f_1 \quad t(0) + \frac{1}{2}\square, x(0) + \frac{1}{2}k_3, y(0) + \frac{1}{2}m_3$$

$$k_4 = \quad 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 100 + \frac{1}{2}(-4{,}8056602)$$

$$- \quad 0{,}03 \quad 100 + \frac{1}{2}(-4{,}80566024780273) \quad 50$$

$$+ \frac{1}{2}(13{,}14973832)$$

$$= \quad 0{,}5 \quad 146{,}39575481414795 - \ 165{,}64641347174530$$

$$= -9{,}62532932879867$$

$$m_4 = \ \square f_2 \quad t(0) + \frac{1}{2}\square, x(0) + \frac{1}{2}k_3, y(0) + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_4 = \quad 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 50 + \frac{1}{2}\ 13{,}14973832$$

$$+ \quad 0{,}01 \quad 100 + \frac{1}{2}\ -4{,}8056602 \qquad 50$$

$$+ \frac{1}{2}\ 13{,}14973832$$

$$= \quad 0{,}5 \quad -28{,}28743457794189 + \ 55{,}21547115724843$$

$$= \ 13{,}46401828965327$$

$$k_5 = \ \square f_1(t(0) + \frac{3}{4}\square, x(0) + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y\ \ 0 \ + \frac{3}{16}m_1$$
$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4)$$

$$k_5 = \quad 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 100 + \frac{3}{16}\ 0 \ - \frac{3}{8}\ -4{,}6875 \ + \frac{3}{8}\ -4{,}8056602$$

$$+ \frac{9}{16}\ -9{,}38766414$$

$$- \quad 0{,}03 \quad 100 + \frac{3}{16}\ 0 \ - \frac{3}{8}\ -4{,}6875$$

$$+ \frac{3}{8}\ -4{,}8056602 \ + \frac{9}{16}\ -9{,}38766414 \quad 50$$

$$+ \frac{3}{16}\ 12{,}5 \ - \frac{3}{8}\ 13{,}28125 \ + \frac{3}{8}\ 13{,}14973832$$

$$+ \frac{9}{16}\ 12.78233793$$

$$= \quad 0{,}5 \quad 141{,}81216323943709 - 169{,}80005125873898$$

$$= -13{,}99394400965095$$

$$m_5 = \ ?f_2(t(0) + \frac{3}{4}?, x(0) + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y(0) + \frac{3}{16}m_1$$

$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$

$$m_5 = \quad 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 50 + \frac{3}{16}\ 12{,}5 \ - \frac{3}{8}\ 13{,}28125$$

$$+ \frac{3}{8}\ 13{,}14973832 \ + \frac{9}{16}\ 12{,}78233793$$

$$+ \quad 0.01 \quad 100 + \frac{3}{16}\ 0 \ - \frac{3}{8}\ -4{,}6875$$

$$+ \frac{3}{8}\ -4{,}8056602 \ + \frac{9}{16}\ -9{,}38766414 \quad 50$$

$$+ \frac{3}{16}\ 12{,}5 \ - \frac{3}{8}\ 13{,}28125 \ + \frac{3}{8}\ 13{,}14973832$$

$$+ \frac{9}{16}\ 12{,}78233793$$

$$= \quad 0{,}5 \quad -29{,}93397170242140 + 56{,}60001708624633$$

$$= 13{,}33302269191246$$

$$k_6 = \ ?f_1(t(0) + \ ?, \mu(0) - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y\ 0$$

$$- \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5)$$

$$k_6 = 0{,}5 \quad 1.5 \quad 100 - \frac{3}{7}\ 0 \ + \frac{8}{7}\ -4{,}6875 \ + \frac{6}{7}\ -4{,}8056602$$
$$- \frac{12}{7}\ -9{,}38766414 \ + \frac{8}{7}\ -13{,}21206053$$
$$- \ 0.03 \quad 100 - \frac{3}{7}(0) + \frac{8}{7}(-4{,}6875) + \frac{6}{7}\ -4{,}8056602$$
$$- \frac{12}{7}\ -9{,}38766414 \ + \frac{8}{7}(-13{,}21206053) \quad 50$$
$$- \frac{3}{7}\ 12{,}5 \ + \frac{8}{7}(13{,}28125) + \frac{6}{7}\ 13{,}14973832$$
$$- \frac{12}{7}\ 12{,}78233793 \ + \frac{8}{7}(12{,}74983386)$$
$$= \ 0{,}5 \quad 136{,}54680822462001 - 172{,}72952450685918$$
$$= -18{,}091358141119585$$

$$m_6 = \ ?f_2(t(0) + \ ?, x(0) - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y\ 0$$
$$- \frac{3}{7}m_1 + \frac{8}{7}m_2 + \frac{6}{7}m_3 - \frac{12}{7}m_4 + \frac{8}{7}m_5$$

$$m_6 = \ 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 50 - \frac{3}{7}\ 12{,}5 \ + \frac{8}{7}\ 13{,}28125 \ + \frac{6}{7}\ 13{,}14973832$$
$$- \frac{12}{7}\ 12{,}78233793 \ + \frac{8}{7}\ 20{,}29661939$$
$$+ \ 0{,}01 \quad 100 - \frac{3}{7}(0) + \frac{8}{7}(-4{,}6875) + \frac{6}{7}(-4{,}8056602)$$
$$- \frac{12}{7}(-9{,}38766414) + \frac{8}{7}(-13{,}21206053) \quad 50$$
$$- \frac{3}{7}\ 12{,}5 \ + \frac{8}{7}(13{,}28125) + \frac{6}{7}\ 13{,}14973832$$
$$- \frac{12}{7}\ 12{,}78233793 \ + \frac{8}{7}(12{,}74983386)$$
$$= \ 0{,}5 \quad -31{,}62459942357614 + \ 57{,}57650816895306$$
$$= \ 12{,}97595437268846$$

$$x(0+1) = x(0) + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6$$
$$x\ 1 \quad = 100 + \frac{7}{90}\ 0 \ + \frac{32}{90}\ -4{,}80566024780273 \ + \frac{12}{90}$$
$$-9{,}62532932879867 \ + \frac{32}{90}\ -13{,}99394400965095$$

$$+\frac{7}{90}(-18{,}091358141119585)$$

$$= 90{,}62521338697847$$

$$y(0+1) = \mu(0) + \frac{7}{90}m_1 + \frac{32}{90}m_3 + \frac{12}{90}m_4 + \frac{32}{90}m_5 + \frac{7}{90}m_6$$

$$y(1) = 50 + \frac{7}{90}(12{,}5) + \frac{32}{90}(13{,}14973831176758) + \frac{12}{90}(13{,}46401828965327) + \frac{32}{90}(13{,}33302269191246) + \frac{7}{90}(12{,}97595437268846)$$

$$y(1) = 63{,}19275835780466$$

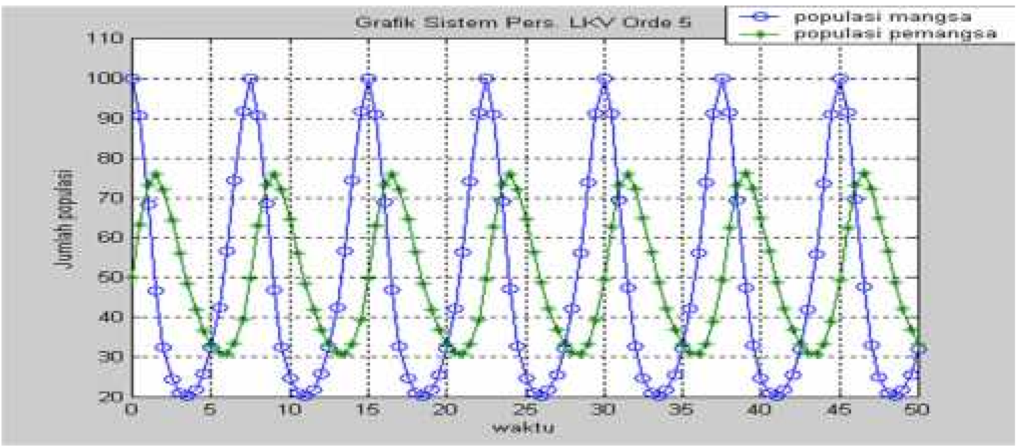
Jadi, pada saat $t = 0.5$ hari besarnya x (mangsa) adalah 90,62521338697847 dan y atau (pemangsa) adalah 63,19275835780466.

Jika iterasi metode RK5 pada sistem persamaan LKV akan ditunjukkan ke dalam tabel di bawah ini:

Tabel 4.1 Tabel Iterasi Metode RK5 untuk Sistem Persamaan LKV dengan Nilai Awal $x(0) = 100$ dan $y(0) = 50$.

Iterasi	t	x (Mangsa)/ekor	y (Pemangsa)/ekor
1	0	100	50
2	0,5	90,62521338697847	63,19275835780466
3	1	68.33607000817629	73.41401325425494
4	1,5	46.68698866939928	76.03430773551663
⋮	⋮	⋮	⋮
101	50	31.92502175354165	33.22062987731075

Iterasi untuk penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan metode RK5 dapat juga digambarkan dalam grafik dibawah ini:



Gambar 4.2 Grafik Sistem Persamaan Lotka-Volterra pada Metode Runge-Kutta Orde 5 dengan Nilai Awal $x(0) = 100$ dan $y(0) = 50$.

Pada gambar 4.2, dapat dilihat jika iterasi dilakukan secara berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke-101, maka pada akhirnya akan memperoleh penyelesaian $x(50) = 31{,}92502175354165$ dan $y(50) = 33{,}22062987731075$. Dengan kata lain jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 32 ekor dan 34 ekor.

Secara keseluruhan penyelesaian numerik dari sistem persamaan Lotka-Volterra dikerjakan oleh program Matlab. Pada gambar 4.2, menjelaskan bahwa populasi mangsa pada awalnya 100 ekor menurun menuju populasi minimal yaitu 20 ekor tapi pada saat yang sama populasi mangsa adalah 48 ekor. Kemudian pada saat yang sama populasi mangsa menuju populasi maksimalnya yaitu 100 ekor tapi pada saat yang sama populasi adalah 50 ekor.

Sedangkan populasi pemangsa pada awalnya adalah 50 ekor, naik menuju populasi maksimalnya yaitu 76 ekor namun pada saat yang sama populasi mangsa adalah 47 ekor. Kemudian pada saat populasi pemangsa menuju populasi minimalnya yaitu 30 ekor namun pada saat yang sama populasi mangsa adalah 56 ekor. Demikian pula populasinya akan menurun dan naik secara periodik.

Penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan metode Runge-Kutta orde lima yang mempunyai koefisien-koefisien $a = 1{,}5$; $\alpha = 0{,}03$; $c = 0{,}5$ dan $\gamma = 0{,}01$ dengan jumlah awal populasi mangsa lebih kecil dari jumlah awal pemangsa $x(0) < y(0)$.

Contoh 4.2

Diberikan sistem persamaan LKV yang mempunyai koefisien-koefisien yaitu $a = 1{,}5$; $\alpha = 0{,}03$; $c = 0{,}5$ dan $\gamma = 0{,}01$, dengan jumlah awal populasi mangsa $x(0) = 50$ ekor dan jumlah awal populasi pemangsa $y(0) = 100$ ekor. Hitunglah $x(t)$ dan $y(t)$ pada persamaan (2.32) dengan metode Runge-Kutta orde Lima (RK5) pada saat $t = 50$ hari dengan ukuran langkah waktu $h = 0{,}5$!

Penyelesaian:

Bentuk sistem persamaan Lotka-Volterra dengan koefisien-koefisien $a = 1{,}5$; $\alpha = 0{,}03$; $c = 0{,}5$ dan $\gamma = 0{,}01$ sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 1{,}5x - 0{,}03xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0{,}5y + 0{,}01xy \qquad (4.4)$$

Setelah itu persamaan (4.4) dimasukkan ke dalam metode Runge-Kutta orde lima dengan waktu interval atau $\square = 0{,}5$; $x\ 0 = 100$ dan $y\ 0 = 50$ sehingga didapatkan:

Iterasi Pertama:

$$k_1 = \square f_1\ t\ 0\ , x\ 0\ , y\ 0$$
$$k_1 = \ 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 50 \ - \ 0{,}03 \quad 50 \quad 100 \quad = \quad 0{,}5 \quad 75 - 150 \ = -37{,}5$$
$$m_1 = \square f_2\ t(0), x(0), y(0)$$
$$m_1 = \ 0{,}5\ [\ -0{,}5 \quad 100 \ + \ (0{,}01)\ 50 \quad 100 \ = \ 0{,}5 \quad -50 + 50 \ = \ 0$$
$$k_2 = \square f_1 \quad t(0) + \frac{1}{4}\square, x(0) + \frac{1}{4}k_1, y(0) + \frac{1}{4}m_1$$
$$k_2 = \ 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 50 + \frac{1}{4} \ -37{,}5$$
$$- \ 0{,}03 \quad 50 + \frac{1}{4} \ -37{,}5 \quad 100 + \frac{1}{4} \ 0$$
$$= \ 0{,}5\ [60{,}9375 - 121{,}875] = -30{,}46875$$
$$m_2 = \square f_2 \quad t\ 0 \ + \frac{1}{4}\square, x\ 0 \ + \frac{1}{4}k_1, y\ 0 \ + \frac{1}{4}m_1$$
$$m_2 = \ 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 100 + \frac{1}{4} \ 0$$
$$+ \ (0{,}01) \quad 50 + \frac{1}{4} \ -37{,}5 \quad 100 + \frac{1}{4} \ 0$$
$$= \ 0{,}5 \ -50 + 40{,}625 \ = -4.6875$$
$$k_3 = \square f_1 \quad t(0) + \frac{1}{4}\square, x(0) + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, y(0) + \frac{1}{8}m_1 + \frac{1}{8}m_2$$
$$k_3 = \ 0{,}5 \quad 1.5 \quad 50 + \frac{1}{8} \ -37{,}5 \ + \frac{1}{8} \ -30{,}46875$$
$$- \ 0{,}03 \quad 50 + \frac{1}{8} \ -37{,}5 \ + \frac{1}{8} \ -30{,}46875 \quad 100 + \frac{1}{8} \ 0$$
$$+ \frac{1}{8} \ -4{,}6875$$
$$= \ 0{,}5 \quad 62{,}255859375 - 123{,}78215789794922$$
$$= -30{,}76314926147461$$

$$m_3 = 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 100 + \frac{1}{8}\ 0 \ + \frac{1}{8}\ -4{,}6875$$

$$+ \quad 0{,}01 \quad 50 + \frac{1}{8}\ -37{,}5 \ + \frac{1}{8}\ -30{,}46875 \qquad 100 + \frac{1}{8}\ 0$$

$$+ \frac{1}{8}\ -4{,}6875$$

$$= \ 0{,}5 \ -49{,}70703125 + \ 41{,}26071929931641$$

$$= -4{,}22315597534180$$

$$k_4 = \square f_1 \ t(0) + \frac{1}{2}\square, x(0) + \frac{1}{2}k_3, y(0) + \frac{1}{2}m_3$$

$$k_4 = \ 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 50 + \frac{1}{2}(-30{,}76314926147461)$$

$$- \quad 0{,}03 \quad 50 + \frac{1}{2}(-30{,}76314926147461) \quad 100$$

$$+ \frac{1}{2}(-4{,}22315597534180)$$

$$= \ 0{,}5 \ 51{,}92763805389405 - \ 101{,}66229095846121$$

$$= -24{,}86732645228358$$

$$m_4 = \square f_2 \ t(0) + \frac{1}{2}\square, x(0) + \frac{1}{2}k_3, y(0) + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_4 = \ 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 100 + \frac{1}{2}(-4{,}22315597534179)$$

$$+ \quad 0{,}01 \quad 50 + \frac{1}{2}(-30{,}76314926147461) \quad 100$$

$$+ \frac{1}{2}(-4{,}22315597534179)$$

$$= \ 0{,}5 \ -48{,}94421100616455 + \ 33{,}88743031948707$$

$$= -7{,}52839034333874$$

$$k_5 = \square f_1(t(0) + \frac{3}{4}\square, x(0) + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y\ 0 \ + \frac{3}{16}m_1$$

$$- \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4)$$

$$k_5 = 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 50 + \frac{3}{16} \; -37{,}5 \; - \frac{3}{8} \; -30{,}46875$$
$$+ \frac{3}{8} \; -30{,}76314926147461$$
$$+ \frac{9}{16} \; -24{,}86732645228358$$
$$- \; 0{,}03 \quad 50 + \frac{3}{16} \; -37{,}5 \; - \frac{3}{8} \; -30{,}46875$$
$$+ \frac{3}{8} \; -30{,}76314926147461$$
$$+ \frac{9}{16} \; -24{,}86732645228358 \qquad 100 + \frac{3}{16} \; 0$$
$$- \frac{3}{8} \; -4{,}6875 \; + \frac{3}{8} \; -4{,}22315597534179$$
$$+ \frac{9}{16} \; -7{,}52839034333874$$
$$= 0{,}5 \quad 43{,}30571872130626 - 83{,}09450159090649$$
$$= -19{,}894391434800112$$
$$m_5 = \,f_2(t(0) + \frac{3}{4}\,, x(0) + \frac{3}{16}k_1 - \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{9}{16}k_4, y(0) + \frac{3}{16}m_1 - \frac{3}{8}m_2 + \frac{3}{8}m_3 + \frac{9}{16}m_4$$
$$m_5 = 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 100 + \frac{3}{16} \; 0 \; - \frac{3}{8} \; -4{,}6875$$
$$+ \frac{3}{8} \; -4{,}22315597534179 \; + \frac{9}{16} \; -7{,}52839034333874$$
$$+ \; 0{,}01 \quad 50 + \frac{3}{16} \; -37{,}5 \; - \frac{3}{8} \; -30{,}46875$$
$$+ \frac{3}{8} \; -30{,}76314926147461$$
$$+ \frac{9}{16} \; -24{,}86732645228358 \qquad 100 + \frac{3}{16} \; 0$$
$$- \frac{3}{8} \; -4{,}6875 \; + \frac{3}{8} \; -4{,}22315597534179$$
$$+ \frac{9}{16} \; -7{,}52839034333874$$
$$= 0{,}5 \quad -47{,}96970472055939 + 27{,}69816719696883$$
$$= -10.13576876179528$$
$$k_6 = \,f_1(t(0) + \,, \mu(0) - \frac{3}{7}k_1 + \frac{8}{7}k_2 + \frac{6}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, y \; 0$$

$$-\frac{3}{7}m_1+\frac{8}{7}m_2+\frac{6}{7}m_3-\frac{12}{7}m_4+\frac{8}{7}m_5)$$

$$k_6 = 0{,}5 \quad 1{,}5 \quad 50-\frac{3}{7}\ -37{,}5\ +\frac{8}{7}\ -30{,}46875$$
$$+\frac{6}{7}\ -30{,}76314926147461$$
$$-\frac{12}{7}\ -24{,}867326452283575$$
$$+\frac{8}{7}(-19{,}89439143480012)$$
$$-\ 0.03 \quad 50-\frac{3}{7}\ -37{,}5\ +\frac{8}{7}\ -30{,}46875$$
$$+\frac{6}{7}\ -30{,}76314926147461$$
$$-\frac{12}{7}\ -24{,}867326452283575$$
$$+\frac{8}{7}(-19{,}89439143480012) \quad 100-\frac{3}{7}\ 0\ +\frac{8}{7}\ -4{,}6875$$
$$+\frac{6}{7}\ -4{,}22315597534179\ -\frac{12}{7}\ -7{,}52839034333874$$
$$+\frac{8}{7}(-10{,}13576876179528)$$
$$= 0{,}5 \quad 37{,}16226222431878 - 68{,}63504561491181$$
$$= -15{,}73639169529651$$

$$m_6 = \square f_2(t(0)+\square, x(0)-\frac{3}{7}k_1+\frac{8}{7}k_2+\frac{6}{7}k_3-\frac{12}{7}k_4+\frac{8}{7}k_5, y\ 0$$
$$-\frac{3}{7}m_1+\frac{8}{7}m_2+\frac{6}{7}m_3-\frac{12}{7}m_4+\frac{8}{7}m_5$$

$$m_6 = \quad 0{,}5 \quad -0{,}5 \quad 100 - \frac{3}{7} \; 0 \; + \frac{8}{7} \; -4{,}6875$$

$$+ \frac{6}{7} \; -4{,}22315597534180 \; - \frac{12}{7} \; -7{,}52839034333874$$

$$+ \frac{8}{7}(-10{,}13576876179528)$$

$$+ \quad 0{,}01 \quad 50 - \frac{3}{7} \; -37{,}5 \; + \frac{8}{7} \; -30{,}46875$$

$$+ \frac{6}{7} \; -30{,}76314926147461$$

$$- \frac{12}{7} \; -24{,}867326452283575$$

$$+ \frac{8}{7}(-19{,}89439143480011) \quad 100 - \frac{3}{7} \; 0 \; + \frac{8}{7} \; -4{,}6875$$

$$+ \frac{6}{7} \; -4{,}22315597534180 \; - \frac{12}{7} \; -7{,}52839034333874$$

$$+ \frac{8}{7}(-10{,}13576876179528)$$

$$= \quad 0{,}5 \quad -46{,}17254272668942 + 22{,}87834853830394$$

$$= -11{,}64709709419274$$

$$x(0+1) = x(0) + \frac{7}{90}k_1 + \frac{32}{90}k_3 + \frac{12}{90}k_4 + \frac{32}{90}k_5 + \frac{7}{90}k_6$$

$$x \; 1 \quad = 50 + \frac{7}{90} \; -37.5 \; + \frac{32}{90} \; -30.76314926147461 \; + \frac{12}{90}$$

$$-24.86732645228358 \; + \frac{32}{90} \; -19.89439143480012$$

$$+ \frac{7}{90}(-15.73639169529651)$$

$$x \; 1 \quad = 24.53217820471923$$

$$y(0+1) = y(0) + \frac{7}{90}m_1 + \frac{32}{90}m_3 + \frac{12}{90}m_4 + \frac{32}{90}m_5 + \frac{7}{90}m_6$$

$$y \; 1 \quad = 100 + \frac{7}{90} \; 0 \; + \frac{32}{90} \; -4.22315597534180 \; + \frac{12}{90}$$

$$-7.52839034333874 \; + \frac{32}{90} \; -10.13576876179528$$

$$+ \frac{7}{90}(-11.64709709419274)$$

$$y \; 1 \quad = 92.98493382924666 \, .$$

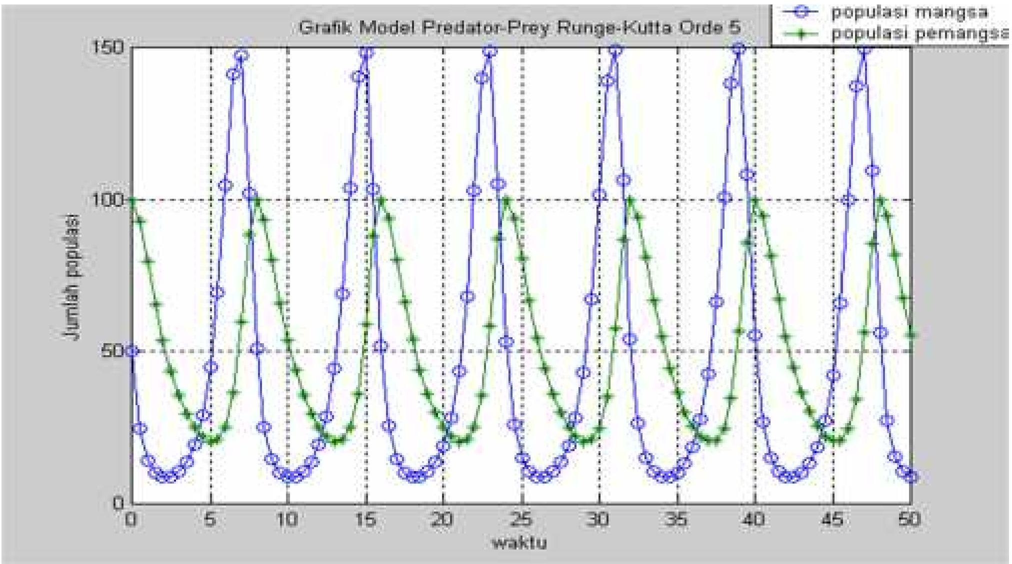
Jadi, pada saat $t = 0{,}5$ hari besarnya x (mangsa) adalah 24,53217820471923 ekor dan y atau (pemangsa) adalah 92,98493382924666 ekor.

Hasil iterasi metode Runge-Kutta orde lima untuk sistem persamaan LKV akan ditunjukkan ke dalam tabel di bawah ini:

Tabel 4.2 Tabel Iterasi Metode RK5 untuk Sistem Persamaan LKV dengan nilai awal $x(0) = 50$ dan $y(0) = 100$.

Iterasi	t	x (Mangsa)/ekor	y (Pemangsa)/ekor
1	0	50	100
2	0,5	24,53217820471923	92,98493382924666
3	1	14,20773378261797	79,46914117809807
4	1,5	10,14250255088922	65,67013434212566
⋮	⋮	⋮	⋮
101	50	8,91349858885115	55,34052975217551

Iterasi untuk penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan metode RK5 dapat juga digambarkan dalam grafik dibawah ini:



Gambar 4.3 Grafik Sistem Persamaan LKV pada Metode RK5 dengan Nilai Awal $x(0) = 50$ dan $y(0) = 100$.

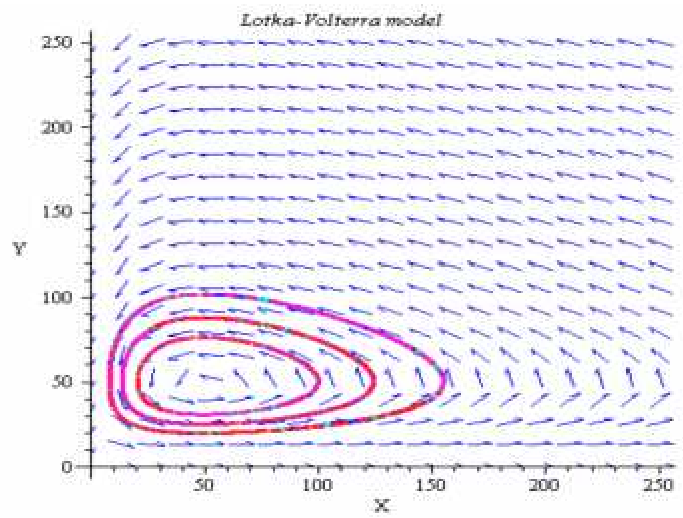
Pada gambar 4.2, dapat dilihat jika iterasi dilakukan secara berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi ke-101, maka pada akhirnya akan memperoleh penyelesaian $x(50) = 8{,}91349858885115$ dan $y(50) = 55{,}34052975217551$. Dengan kata lain jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 9 ekor dan 56 ekor.

Selanjutnya, untuk mencari titik keseimbangan pada sistem persamaan LKV dengan $a = 1{,}5$; $\alpha = 0{,}03$; $c = 0{,}5$ dan $\gamma = 0{,}01$,, kita dapat mengasumsikan jumlah populasi mangsa atau $x > 0$ dan jumlah populasi mangsa atau $y > 0$, sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ 1{,}5x - 0{,}03xy &= 0 \\ (1{,}5 - 0{,}03y)x &= 0 \\ 1{,}5 - 0{,}03y &= 0 \\ y^* = {}^{1{,}5}/_{0{,}03} &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ -0{,}5y + 0.01xy &= 0 \\ (-0{,}5 + 0{,}01x)y &= 0 \\ -0{,}5 + 0{,}01x &= 0 \\ x^* = {}^{0{,}5}/_{0{,}01} &= 50 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan titik keseimbangan yaitu $(50, 50)$ untuk sistem persamaan Lotka-Volterra, titik keseimbangan dapat dilihat juga dari gambar *phase plane* pada gambar 4.3 seperti dibawah ini:



Gambar 4.4 *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV pada Koefisien-Koefisien $a = 1,5$; $\alpha = 0,03$; $c = 0,5$ dan $\gamma = 0,01$.

Pada gambar 4.4, menjelaskan bahwa sistem persamaan Lotka-Volterra mempunyai titik keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa pada titik (50,50) yang berarti bahwa populasi akan seimbang jika jumlah mangsa 50 ekor dan pemangsa 50 ekor.

4.4 Simulasi Numerik

Perbandingan hasil komputasi terhadap sistem persamaan Lotka-Volterra dengan membandingkan hasil penyelesaian dari tiap-tiap koefisien a, α, c dan γ yang terdapat pada sistem persamaan (4.1) dengan metode RK5 pada saat $t = 50$ dan waktu interval □ = 0,5. Perbandingan hasil penyelesaian sistem persamaan LKV dapat dilihat dari tabel di bawah ini:

Tabel 4.3 Hasil Simulasi Penyelesaian Sistem Persamaan Lotka-Volterra untuk $x\ 0 = 100$ dan $y\ 0 = 50$ dengan Koefisien-Koefisien yang Berbeda-beda.

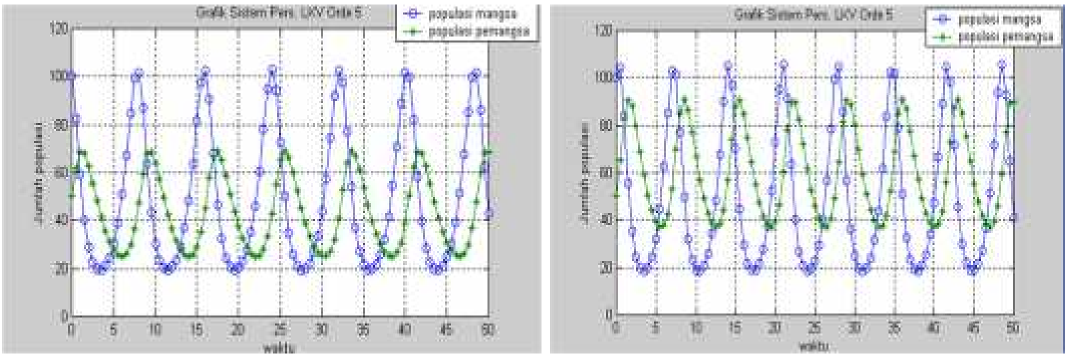
Koef Sistem pers. LKV		Jumlah Populasi Mangsa (μ)	Jumlah Populasi Pemangsa (y)
$a = 1,5; \alpha = 0,03; c = 0,5; \gamma = 0,01$		31,92502175354165	33,22062987731075
$\alpha = 0,03; c = 0,5; \gamma = 0,01$	$a = 1,3$	42,78693152583001	68,67500152868242
	$a = 1,8$	40,98876765740296	90,22308019629965
$a = 1,5; c = 0,5; \gamma = 0,01$	$\alpha = 0,02$	14,64830756532445	78,01610900209668
	$\alpha = 0,04$	24,88396886347283	24,23894417673239
$a = 1,5; \alpha = 0,03; \gamma = 0,01$	$c = 0,3$	26,40643439454421	23,53482932891330
	$c = 0,7$	94,18107762817559	57.74159971238930
$a = 1,5; \alpha = 0,03; c = 0,5$	$\gamma = 0,05$	88,60311185719286	46,51743293660429
	$\gamma = 0,015$	11,43854898704982	84,13546790146670

Berdasarkan tabel 4.3 menjelaskan bahwa penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan metode Runge-Kutta orde lima dapat dengan berbeda-beda dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Jika laju pertumbuhan mangsa (a) lebih besar maka jumlah populasi pemangsa akan lebih besar dari jumlah populasi mangsa.
2. Jika koefisien pemangsa saat memakan mangsa (α) lebih kecil maka jumlah populasi pemangsa lebih besar dari jumlah mangsa.
3. Jika koefisien laju koefisien kematian pemangsa ($-c$) lebih besar maka didapatkan bahwa jumlah populasi mangsa akan lebih besar dari jumlah populasi pemangsa.

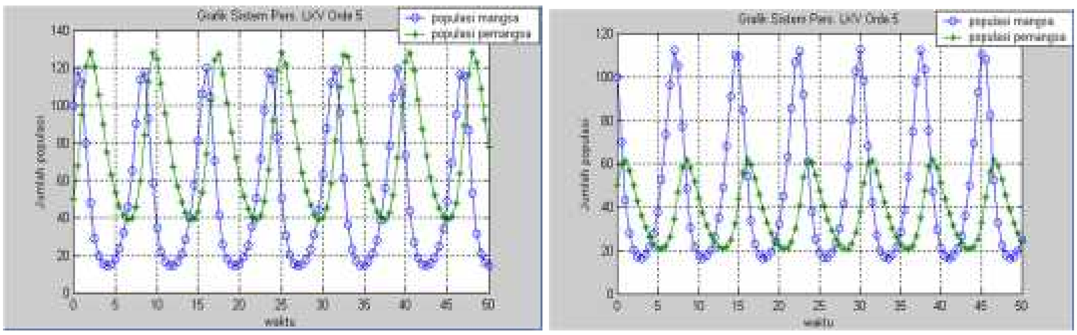
4. Jika koefisien laju pertumbuhan pemangsa setelah mendapat makanan dari mangsa (γ) lebih kecil maka jumlah populasi mangsa akan lebih besar dari jumlah pemangsa. Namun jika γ lebih besar maka jumlah populasi pemangsa akan lebih besar dari jumlah populasi mangsa.

Selain tabel diatas dapat dilihat pula hasil jumlah populasi mangsa dan pemangsa dengan menggunakan metode RK5 dari grafik-grafik di bawah ini:



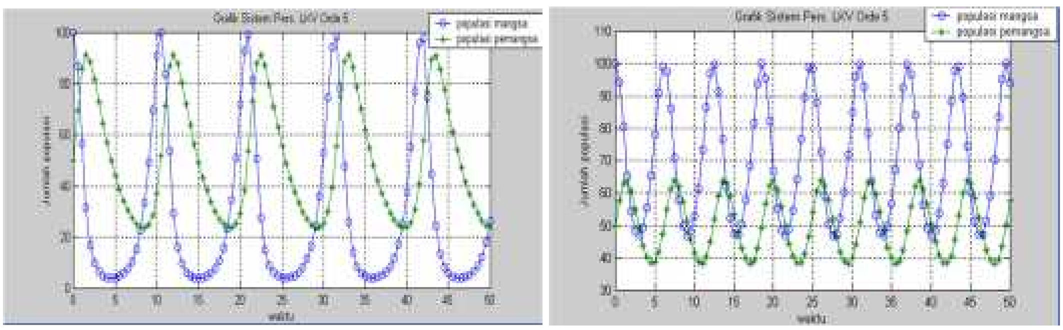
(a) (b)

Gambar 4.5 (a) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $\alpha = 1.3$ dan (b) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $\alpha = 1.8$



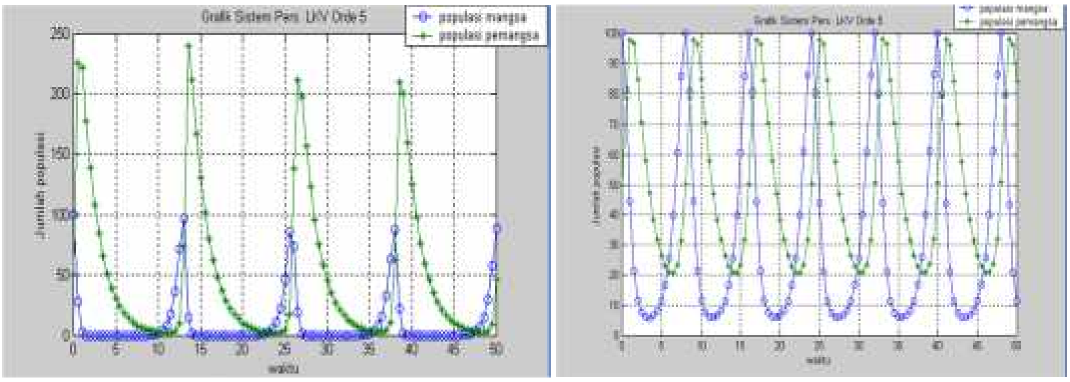
(a) (b)

Gambar 4.6 (a) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $\alpha = 0.02$ dan (b) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $\alpha = 0.04$.



(a) (b)

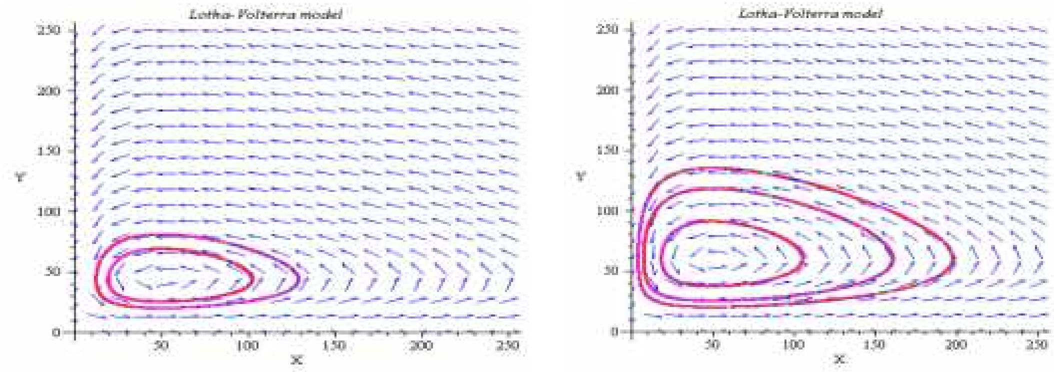
Gambar 4.7 (a) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $c = 0.3$ dan (b) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $c = 0.7$



(a) (b)

Gambar 4.8 (a) Grafik Sistem Pers. LKV dengan $\gamma = 0,05$ dan (b) Grafik Sistem Persamaan LKV dengan $\gamma = 0,015$.

Sistem persamaan Lotka-Volterra yang mempunyai koefisien-koefisien berbeda-beda mempunyai titik keseimbangan yang berbeda pula, seperti yang ditunjukkan pada *phase plane* di bawah ini.

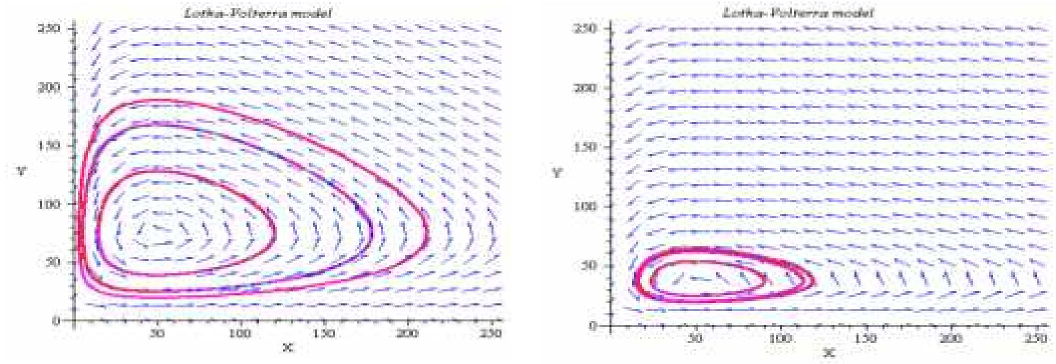


(a) (b)

Gambar 4.9 (a) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $a = 1,3$ dan (b) *Phase Plane* untuk Sistem Persaman LKV dengan $a = 1,8$.

Pada gambar 4.9.(a) menjelaskan bahwa titik ekuilibrium saat mengganti nilai pada koefisien $a = 1.3$ mempunyai titik keseimbangan pada populasi mangsa dan pemangsa pada titik (50,43.33) dan dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 50 ekor dan 43.33 ekor.

Sedangkan pada gambar 4.9.(b) menjelaskan bahwa saat mengganti nilai $a = 1.8$ maka mempunyai titik keseimbangan populasi pada titik (50,60) serta dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 50 ekor dan 60 ekor.

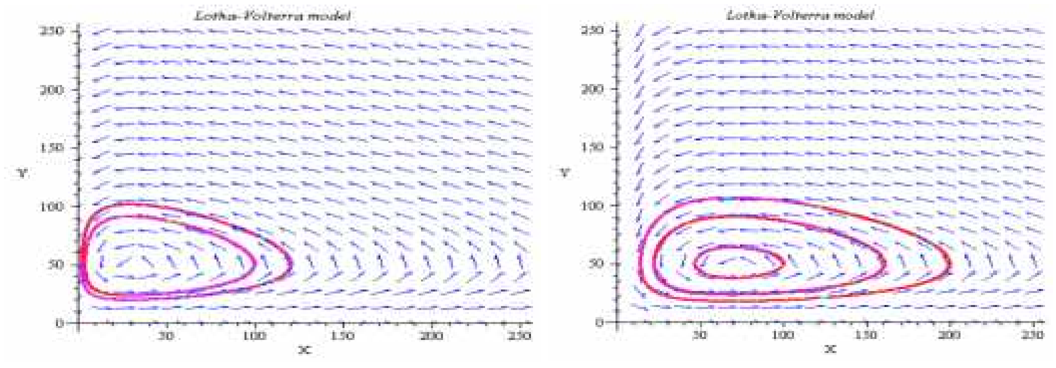


(a) (b)

Gambar 4.10 (a) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $\alpha = 0,02$ dan (b) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $\alpha = 0,04$.

Pada gambar 4.10.(a) menjelaskan bahwa titik ekuilibrium saat mengganti nilai pada koefisien $\alpha = 0{,}02$ mempunyai titik keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa pada titik (50,75) dan dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 50 ekor dan 75 ekor.

Sedangkan pada gambar 4.10.(b) menjelaskan bahwa jika koefisien $\alpha = 0{,}04$ diganti maka mempunyai titik keseimbangan populasi pada titik (50;37,5) serta dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 50 ekor dan 37.5 ekor.

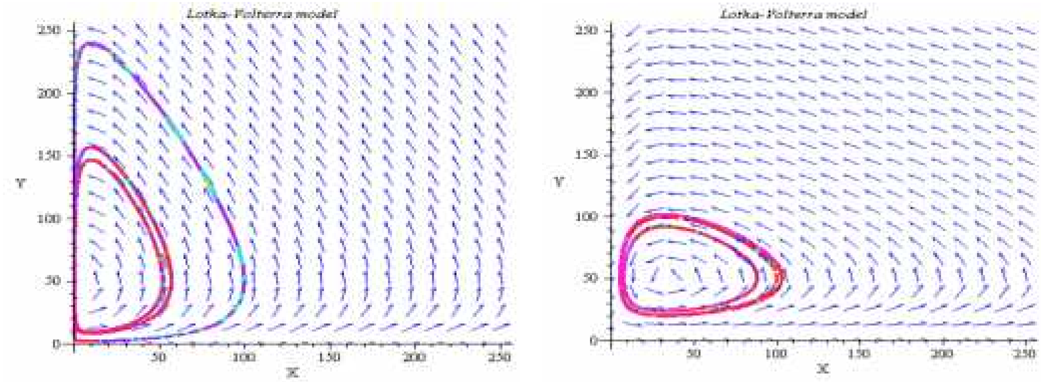


(a) (b)

Gambar 4.11 (a) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $-c = 0,3$ dan (b) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $-c = 0,7$.

Gambar 4.11.(a) menjelaskan bahwa titik ekuilibrium saat mengganti nilai pada koefisien $-c = 0{,}3$ mempunyai titik keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa pada titik (30,50) dan dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 30 ekor dan 50 ekor.

Sedangkan pada gambar 4.11.(b) menjelaskan bahwa jika koefisien $-c = 0{,}7$ diganti pada sistem persamaan LKV maka mempunyai titik keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa pada titik (70,50) serta dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 70 ekor dan 50 ekor.



(a) (b)

Gambar 4.12 (a) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $\gamma = 0{,}05$ dan (b) *Phase Plane* untuk Sistem Persamaan LKV dengan $\gamma = 0{,}015$.

Gambar 4.12.(a), menjelaskan bahwa titik ekuilibrium sistem persamaan LKV saat diganti nilai koefisien $\gamma = 0{,}05$ mempunyai titik keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa pada titik (10,50) dan dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 10 ekor dan 50 ekor.

Sedangkan pada gambar 4.12.(b), jika koefisien $\gamma = 0{,}015$ diganti maka sistem persamaan LKV mempunyai titik keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa pada titik (33,33;50) serta dapat diketahui juga bahwa jumlah populasi akan seimbang jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada 33,33 ekor dan 50 ekor.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab IV dapat disimpulkan bahwa penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy$$

dengan $a = 1.5$; $\alpha = 0.03$; $c = 0.5$ dan $\gamma = 0.01$ yang diselesaikan dengan metode Runge-Kutta orde lima memberikan hasil perhitungan saat nilai awal x 0 = 100; y 0 = 50; $t = 50$ dan waktu interval = 0.5 yaitu x 50 = 31.92502175354165 dan y 50 = 33.22062987731075. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 32 ekor dan 34 ekor.

Sedangkan penyelesaian sistem persamaan LKV dengan nilai awal x 0 = 100; y 0 = 50; $t = 50$ dan waktu interval = 0.5 yaitu x 50 = 8,91349858885115 dan y 50 = 55,34052975217551. Dengan kata lain, jumlah spesies mangsa dan pemangsa dalam suatu populasi setelah 50 hari secara berturut-turut adalah 9 ekor dan 56 ekor.

Selain itu diperoleh juga, titik keseimbangan dari sistem persamaan LKV untuk populasi mangsa dan pemangsa yaitu (50,50) yang berarti bahwa keseimbangan populasi mangsa dan pemangsa di suatu tempat adalah sebanyak 50 ekor dan 50 ekor.

Berdasarkan tabel 4.3 menjelaskan bahwa penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan metode Runge-Kutta orde lima saat $t = 50$ hari dan waktu interval = 0,5 dengan koefisien-koefisien berbeda-beda dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Jika laju pertumbuhan mangsa (a) lebih besar maka jumlah populasi pemangsa akan lebih besar dari jumlah populasi mangsa.
2. Jika koefisien pemangsa saat memakan mangsa (α) lebih kecil maka jumlah populasi pemangsa lebih besar dari jumlah mangsa.
3. Jika koefisien laju koefisien kematian pemangsa ($-c$) lebih besar maka didapatkan bahwa jumlah populasi mangsa akan lebih besar dari jumlah populasi pemangsa.
4. Jika koefisien laju pertumbuhan pemangsa setelah mendapat makanan dari mangsa (γ) lebih kecil maka jumlah populasi mangsa akan lebih besar dari jumlah pemangsa. Namun jika γ lebih besar maka jumlah populasi pemangsa akan lebih besar dari jumlah populasi mangsa.

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis membahas tentang penyelesaian sistem persamaan Lotka-Volterra dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat menyelesaikan lotka-volterra dengan menambahkan parameter lain atau model iteraksinya n populasi atau mencari model matematika lainnya. Dalam menyelesaikan persamaan Lotka-Volterra dapat menggunakan metode *predictor-corrector* banyak langkah yaitu metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson atau Hamming.

DAFTAR PUSTAKA

Aisyah. Penyelesaian persamaan Lotka-Volterra secara numerik Dengan Metode Runge-Kutta Berorde *4 . Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Riau*. 2006

Bidayasari. Penyelesaian Numerik Persamaan Competitive Lotka-Volterra dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau* : 2009.

Boyce, W.E dan Diprima, R.C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*: John Wiley & Sons, Inc : 2001

Bronson, Richard dan Gariel Costa,. *Persamaan Diferensial,* edisi tiga. Erlangga: Jakarta. 2007.

Butcher, J.C. *Numerical methods for ordinarry Differential Equetion*. John Wiley& Sons: England. 2008.

Chauvet. E, Paulet. E. J, Previt, P. J dan Walls. Z. “A Lotka-Volterra Three Species Food Chain”. *Mathematics Magazine*. Vol. 75. No.4, Oktober 2005

Fitria, A.V. ”Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-Prey dengan Perambatan. *Jurnal Cauchy* ”. Volume 2 No.1 November 2011.

Griffiths, D.F. dan Higham J.D. *Numerical Methods for Ordinary Equations : Intial Value Problems.* Springer. London. 2010

Hossain, S.ABM, Thohura. S dan Aktar. S. “The Lotka-Volterra Model: An Approach by The Cas”. *GANIT J. Bangladesh Math. Soc*. Vol. 29. Halaman 87-89. 2009

Kincaid, D. *Numerical Mathematics and Computing, Sixth Edition*. Thomson brooks/cole: United state of America. 2008

Lambert, J.D *Numerical Methods For Ordinarry Differential System,* John Wiley & Sons Ltd : New York. 1991.

Lapidus, L dan Seinfield. H. J. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* .halaman 39-42. Academic Press: New York and London.1971.

Munir, R. *Metode Numerik*, edisi 2 revisi. Informatika: Bandung. 2008.

Prayudi. *Matematika Teknik : Persamaan Diferensial, Transformasi Laplace, dan Deret Fourier*. Graha Ilmu : Yogyakarta. 1994

Shampine, F.L. *Numerical Solution Of Ordinary Differential Equetions*, Champan & Hall Mathematics: New York. 1994.

Urifah, N, S. Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka-Volterra dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Malang*. 2008