View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Analisis Harga Pokok Produksi Rumah Pada

# *SMARANDACHE* RING REGULER

## TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

**Oleh :**

**NUR MAYSURI**
**10654004489**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU**
**PEKANBARU**
**2011**

# *SMARANDACHE* RING REGULER

**NUR MAYSURI**
**10654004489**

Tanggal Sidang: 27 Juni 2011
Periode Wisuda: Oktober 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

## ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang definisi *Smarandache* ring reguler, yaitu dengan cara mengembangkan konsep *Smarandache* ring yang telah diperkenalkan oleh Srinivas T. dengan Sekhar Rao, A.K.S. Candra. *Smarandache* ring mempunyai *proper subset* $A$ yang bersifat *field*, sedangkan suatu Ring $R$ dikatakan reguler jika masing-masing elemen $R$ adalah reguler. Berdasarkan hal itu akan diperoleh suatu definisi tentang *Smarandache* ring reguler, yaitu diberikan suatu ring $R$, $R$ didefinisikan sebagai *Smarandache* ring reguler (*S*-ring reguler) jika di $R$ terdapat *proper subset* $A$, sedemikian hingga $A$ merupakan semigrup atas perkalian, terdapat elemen $e \in A$ sedemikian hingga $a \cdot e = a$ untuk setiap $a \in A$, dan untuk setiap $a \in A$ terdapat $x \in A$ sedemikian hingga $a \cdot x \cdot a = a$.

**Kata Kunci:** Ring, Ring Reguler, *Smarandache* ring, *Smarandache* ring reguler.

# KATA PENGANTAR

*Alhamdulillah* penulis ucapkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **"*Smarandache* Ring Reguler"** tepat pada waktunya.

Kemudian shalawat beserta salam senantiasa kita hadiahkan kepada junjungan alam yakni Nabi besar Muhammad SAW, yang telah membawa ajaran agama Islam serta tuntunan yang lurus bagi seluruh umatnya, dan semoga kita mendapat syafa'atnya.

Pada penulisan, penyusunan, dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis telah banyak menerima petunjuk, motivasi, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak, baik secara moril maupun secara materil. Terima kasih yang tak terhingga penulis sampaikan kepada Ayahanda Yusrial, A.Md (alm) dan Ibunda Siti Rohani dengan tulus ikhlas telah melimpahkan perhatian dan kasih sayang juga materi yang tak mungkin bisa terbalaskan. Untuk seseorang yang selalu ada dihati yaitu M. Elizar yang mau berbagi di saat sulit, memberi arahan, kasih sayang, dan dukungan dan Cahaya hidup penulis Rizky Ramadhany. Serta untuk semua keluarga, Abang Agus, Kakak Ita, Adik Tika, Adik Rina, Adik Reni, Paman Mashuri, M.A, Nenek, Masfar Ahmad, Abang Ipar Hendra, Adik Ipar Bakri, Adik Ipar Hendri dan Mertua, yang selalu memberikan semangat, bimbingan, motivasi dan do'a kepada penulis.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberi bimbingan, arahan, masukan, nasehat supaya tugas akhir ini selesai dengan baik. Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Karim sebagai Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si. sebagai Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc. sebagai Ketua Jurusan Matematika sekaligus Dosen pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu,

mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini dari awal proses hingga laporan ini selesai.

4. Ibu Fitri Aryani, M.Si. sebagai koordinator tugas akhir yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak M.Nizam Muhaijir, S.Si. sebagai penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas akhir ini.
6. Ibu Sri Basriati, M.Sc. sebagai penguji II yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas akhir ini.
7. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
8. Sahabat-sahabatku Muliati, M. Yunus, Rodiatul Adwiyah, dan Siti Habibah, yang selalu memberikan semangat dan motivasi selama di bangku perkuliahan.
9. Sahabat-sahabatku alumni SMU Negeri 2 Bangkinang, Melda Kurniati, Maslinda, Sri Wahyuni, Tika Andani, dan Eti Linsiana.
10. Teman-teman KKN Desa Kusau Makmur Kecamatan Tapung Hulu Kabupaten Kampar Angkatan XXXIII.
11. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2006, terutama Laina dan Devi Safitri.
12. Untuk Kakak-kakak senior dan Adik-adik Jurusan Matematika.
13. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Semoga semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT.

Penyusunan dan penulisan tugas akhir ini, penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan, baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak lain yang memerlukannya.

Pekanbaru, 27 Juni 2011

Penulis

**NUR MAYSURI**
**10654004489**

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# BAB I

# PENDAHULUAN

Bab I ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

## 1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi pada saat sekarang ini sangatlah pesat. Hal ini mengakibatkan persaingan global berlangsung ketat, baik didunia politik, ekonomi, maupun didunia kebudayaan. Untuk menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi tidak hanya dengan penguasaan satu ilmu saja, tetapi harus menguasai ilmu-ilmu dasar yang dapat menunjang seperti Matematika. Oleh sebab itu, Matematika sangat penting untuk dipelajari. Karena ilmu Matematika merupakan bagian dari ilmu pengetahuan yang turut menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu bidang ilmu dalam matematika yang mempunyai peranan penting adalah struktur aljabar. karena struktur aljabar sangat erat hubungannya dengan ilmu matematika.

Struktur aljabar yang termasuk dalam pembahasan Matematika adalah Ring, yaitu suatu himpunan $R$ dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian, yang dinotasikan dengan $(+)$ dan $(\cdot)$. Dimana operasi penjumlahan $(+)$ di $R$ merupakan suatu grup abelian (komutatif). Sedangkan operasi perkalian $(\cdot)$ di $R$ bersifat tertutup dan assosiatif. Terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ pada $R$ bersifat distributif kanan dan distributif kiri.

Masalah ring telah banyak dibahas dalam ilmu Matematika dan semakin berkembang. Tahun 1936 Neumann John V. memperkenalkan konsep tentang reguler untuk element-element ring dalam jurnalnya " *On Regular Rings*". Neumann menjelaskan bahwa suatu ring $R$ dikatakan reguler jika dan hanya jika masing-masing element $R$ adalah reguler. $R$ adalah reguler jika untuk setiap element $a \in R$ terdapat $x$ di $R$ sedemikian hingga $axa = a$.

Pengembangan ilmu struktur aljabar salah satunya adalah Raul Padilla pada tahun 1998 dalam sebuah jurnal yaitu tentang Struktur Aljabar *Smarandache.* Padilla melanjutkan penelitian yang ditulis oleh Florentin Smarandache yang dikenal dengan judul "*Special Algebraic Structures*". Padilla menjelaskan mengenai konsep Struktur Aljabar *Smarandache* yang sebagian besarnya tentang assosiatif operasi biner.

Sekarang ini, konsep tentang *Smarandache* telah banyak dibahas dalam sebuah jurnal. Tahun 2009 Sekhar Rao, A.K.S.Chandra memperkenalkan penelitiannya dengan Srinivas, T. yang berjudul "*On Smarandache Rings*". Suatu Smarandache ring (S-ring) didefinisikan dengan ring $A$, sedemikian hingga *proper subset* $A$ merupakan field terhadap operasi yang sama.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk mengembangkan jurnal dari India yang ditulis oleh Srinivas, T. dan Sekhar Rao, A.K.S.Chandra dalam bentuk skripsi dengan judul **" *Smarandache* Ring Reguler"**

## 1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang diangkat dalam tulisan ini adalah bagaimana definisi *Smarandache* Ring Reguler.

## 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini dibatasi pada:

1) Ring yang dibahas adalah Ring Reguler.
2) Ring yang diangkat juga harus *Smarandache* Ring.

## 1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

### 1.4.1 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari definisi *Smarandache* Ring Reguler.

### 1.4.2 Manfaat penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini ada dua, yaitu manfaat khusus dan manfaat umum :

**1) Manfaat Umum**

Manfaat secara umum dari penelitian ini adalah Penulis berharap dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam bidang matematika mengenai ring.

**2) Manfaat Khusus**

Manfaat secara khusus dari penelitian ini adalah Penulis dapat mengetahui lebih banyak materi yang berkaitan dengan *Smarandache* ring.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam pembuatan tulisan ini mencakup 5 bab, yaitu:

**Bab I Pendahuluan**

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

**Bab II Landasan Teori**

Bab ini berisikan informasi tentang teori-teori yang digunakan dalam penulisan ataupun metode/teorema yang dipakai, yaitu ring, reguler ring, dan *field*.

**Bab III Metodelogi Penelitian**

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari skripsi ini.

**Bab IV Pembahasan**

Bab ini berisikan penyelesaian masalah *Smarandache* ring reguler.

**Bab V Penutup**

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

# BAB II
# LANDASAN TEORI

Bab dua ini akan membahas tentang ring, reguler ring, dan *field* yang merupakan teori pendukung untuk membahas tentang *Smarandache* ring reguler.

## 2.1 Ring

Ring adalah salah satu bidang ilmu dalam struktur aljabar yang mempunyai peranan penting. Ring merupakan suatu himpunan $R$ dengan dua operasi biner yang dinotasikan dengan $(+)$ dan $(\cdot)$. Operasi penjumlahan $(+)$ di $R$ merupakan suatu grup abelian (komutatif). Sedangkan operasi perkalian $(\cdot)$ di $R$ bersifat tertutup dan assosiatif. Terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ pada $R$ bersifat distributif kanan dan distributif kiri. Sebagaimana dinyatakan pada definisi berikut ini:

**Definisi 2.1 (Gilbert, Jimmie., dan Gilbert, Linda., 1991)** Diberikan $R$ suatu himpunan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian, yang dinotasikan dengan $(+)$ dan $(\cdot)$. Maka $R$ dikatakan suatu Ring jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi:

1. $R$ tertutup pada penjumlahan yaitu: $a+b\in R$, $\forall a,b\in R$.
2. Penjumlahan di $R$ adalah assosiatif yaitu: $a+(b+c)=(a+b)+c$, $\forall a,b,c\in R$.
3. $R$ merupakan identitas penjumlahan yaitu terdapat elemen $0\in R$ sehingga $a+0=0+a=a$, $\forall a\in R$.
4. Untuk setiap $a\in R$ terdapat suatu elemen $(-a)\in R$ sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$, ( $(-a)$ disebut penjumlahan invers dari $a$ ).
5. Penjumlahan di $R$ adalah komutatif yaitu $a+b=b+a$, $\forall a,b\in R$.
6. $R$ tertutup pada perkalian yaitu $a\cdot b\in R$, $\forall a,b\in R$.

7. Perkalian di $R$ adalah assosiatif yaitu $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall a, b, c \in R$
8. Distributif perkalian terhadap penjumlahan yaitu:

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall a, b, c \in R$ (distributif kiri)

   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in R$ (distributif kanan).

Dapat dilihat bahwa dari aksioma (1) sampai aksioma (5) membentuk suatu grup abelian (komutatif) pada penjumlahan dan aksioma (6) dengan aksioma (7) membentuk suatu semigrup terhadap perkalian. Secara ringkas definisi 2.1 dapat ditulis dengan:

**Definisi 2.2 (Gilbert, Jimmie., dan Gilbert, Linda., 1991)** Diberikan $R$ suatu himpunan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian, yang dinotasikan dengan $(+)$ dan $(\cdot)$. Maka $R$ dikatakan suatu Ring jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi:

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif (Abelian).
2. $(R, \cdot)$ bersifat tertutup dan assosiatif.
3. Distributif perkalian terhadap penjumlahan yaitu:
   - Hukum distributif kiri, yaitu $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .
   - Hukum distributif kanan, yaitu $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

**Contoh 2.1**

Tunjukkan bahwa $Z_4$ adalah merupakan suatu ring.

***Penyelesaian :***

**Tabel 2.1 Penjumlahan himpunan bilangan bulat modulo 4 $(Z_4, +)$**

| $(+)$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 0 | 1 | 2 |

**Tabel 2.2 Perkalian himpunan bilangan bulat modulo 4 $(Z_4, \cdot)$**

| $\cdot$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **2** | 0 | 2 | 0 | 2 |
| **3** | 0 | 3 | 2 | 1 |

Berdasarkan Tabel 2.1 dan Tabel 2.2, akan ditunjukkan bahwa $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan suatu Ring bila memenuhi:

**1) Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(Z_4, +)$**

- Tertutup

  Diambil sebarang nilai dari $Z_4$

  Misalkan $0,1,2,3 \in Z_4$

  $1 + 0 = 1$

  $1 + 1 = 2$

  $1 + 2 = 3$

  $1 + 3 = 0$

  Karena hasilnya $0,1,2,3 \in Z_4$, maka tertutup terhadap $Z_4$.

- Assosiatif

  Diambil sebarang nilai dari $Z_4$

  Misalkan $a = 2, b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$

  $a + (b + c) = 2 + (1 + 3) = 2$

  $(a + b) + c = (2 + 1) + 3 = 2$

  Sehingga $a + (b + c) = (a + b) + c = 2$.

- Adanya unsur satuan atau identitas.

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$

  Misalkan $a = 2 \in Z_4$

$a + 0 = 0 + a = a$

$2 + 0 = 2 + 0 = 2$

Maka $a = 2 \in Z_4$ adalah unsur satuan atau identitas.

- Adanya unsur balikan atau invers

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$

  Misalkan $a = 3 \in Z_4$

  $a + (-a) = (-a) + a = 0$

  $3 + (-a) = (-a) + 3 = 0$

  $3 + 1 = 1 + 3 = 0$

  Maka $(-a) = 1$.

  Sehingga $Z_4$ adalah unsur balikan atau invers.

- Komutatif

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$

  Misalkan $a = 2, b = 3 \in Z_4$

  $(a + b) = (2 + 3) = 1$

  $(b + a) = (3 + 2) = 1$

  Sehingga : $(a + b) = (b + a) = 1$

  Maka $Z_4$ komutatif.

Jadi, $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan $(Z_4,+)$.

**2) Semigrup terhadap perkalian $(Z_4,\cdot)$**

- Tertutup

  Ambil sebarang nilai $Z_4$

  Misalkan $0,1,2,3 \in Z_4$

  $1 \cdot 0 = 0$

  $1 \cdot 1 = 1$

  $1 \cdot 2 = 2$

  $1 \cdot 3 = 3$

- Assosiatif

  Ambil sebarang nilai dari $Z_4$

  Misalkan $a = 2, b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$

  $a \cdot (b \cdot c) = 2 \cdot (1 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 2$

  $(a \cdot b) c = (2 \cdot 1) 3 = 2 \cdot 3 = 2$

  Sehingga $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) c = 2$ , maka $Z_4$ assosiatif.

Jadi, $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan semigrup terhadap perkalian $(Z_4, \cdot)$.

**3) Distributif perkalian terhadap pejumlahan $(Z_4, +, \cdot)$**

Diambil sebarang nilai dari $Z_4$

Misalkan $a = 2, b = 1$ dan $c = 3 \in Z_4$

- $a \cdot (b + c) = 2 \cdot (1 + 3)$

  $= 2 \cdot (0)$

  $= 0$

  $(a \cdot b) + (a \cdot c) = (2 \cdot 1) + (2 \cdot 3)$

  $= 2 + 6$

  $= 0$

  Maka, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = 0$

- $(a + b) c = (2 + 1) 3$

  $= (3) 3$

  $= 1$

  $(a \cdot c) + (b \cdot c) = (2 \cdot 3) + (1 \cdot 3)$

  $= 2 + 3$

  $= 1$

  Maka, $(a + b) c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = 1$.

Jadi, $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan distributif perkalian terhadap pejumlahan.

Karena $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka $Z_4$ adalah suatu **Ring** $(Z_4,+,\cdot)$.

**Contoh 2.2**

Misalkan $M_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \Re \right\}$ Apakah $M_{2\times 2}$ merupakan suatu ring atau tidak?

***Penyelesaian:***

Diambil sebarang $A, B \in M_{2\times 2}$ yaitu: $A = \begin{bmatrix} a_1 & -1 \\ 2 & b_1 \end{bmatrix}$ dengan $a_1, b_1 \in \Re$, dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & -1 \\ 2 & b_2 \end{bmatrix}$ dengan $a_2, b_2 \in \Re$. Akan ditunjukkan bahwa $M_{2\times 2}$ memenuhi atau tidak, aksioma-aksioma pada ring, yaitu:

- Tertutup pada penjumlahan $M_{2\times 2}(\Re)$

  Maka:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & -1 \\ 2 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -1 \\ 2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -1 + (-1) \\ 2 + 2 & b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -2 \\ 4 & b_1 + b_2 \end{bmatrix} \notin M_{2\times 2}(\Re).$$

  Jadi, $M_{2\times 2}(\Re)$ tidak tertutup terhadap penjumlahan bilangan real.

Karena $M_{2\times 2}(\Re)$ tidak tertutup terhadap penjumlahan bilangan real, maka $M_{2\times 2}(\Re)$ bukanlah suatu ring.

**Definisi 2.3 (Khanna, Vijay K. dan Bhambri, S.K., 1993)** Suatu ring $R$ dikatakan ring komutatif (abelian) jika $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in R$.

**Contoh 2.3**

Tunjukkan bahwa $(Z_4,+,\cdot)$ merupakan suatu ring komutatif.

***Penyelesaian :***

Ambil sebarang nilai dari $Z_4$, misalkan 2 dan 3 $\in Z_4$

$$a \cdot b = 2 \cdot 3 = 2$$

$$b \cdot a = 3 \cdot 2 = 2$$

Sehingga $a \cdot b = b \cdot a = 2$

Karena ring $(Z_4,+,\cdot)$ tersebut memenuhi sifat komutatif, maka ring $(Z_4,+,\cdot)$ merupakan **Ring Komutatif (Abelian).**

Berdasarkan definisi 2.1 dan definisi 2.3 tentang Ring komutatif, hal ini menyatakan bahwa ring mempunyai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan $(+)$ yaitu $0$ (nol), dan elemen identitas untuk operasi perkalian $(\cdot)$ yang disebut *unity* yaitu $(1)$. Sehingga perlu diberikan definisi dan teorema tentang *unity* yang akan dijabarkan berikut ini.

**Definisi 2.4 (Khanna, Vijay K. dan Bhambri, S.K., 1993)** Diketahui $R$ ring. Jika terdapat elemen $e \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $ae = ea = a$, maka $e$ disebut *unity* dan $R$ adalah ring dengan *unity*.

**Definisi 2.5 (Khanna, Vijay K. dan Bhambri, S.K., 1993)** Suatu elemen $a$ di ring $R$ dengan *unity*, disebut unit jika mempunyai perkalian invers, yaitu terdapat $b \in R$ sedemikian hingga $ab = 1 = ba$ .

**Teorema 2.1 (Fraleigh, John B., 1994)** Jika $R$ ring dengan *unity*, maka *unity* $1$ merupakan identitas perkalian yang tunggal di $R$ .

***Bukti:***

Diandaikan ada elemen $1' \in R$ sebagai identitas perkalian di ring $R$ . Karena $1$ merupakan identitas perkalian di ring $R$ , maka diperoleh $(1)(1') = 1'$ . Karena $1'$

juga merupakan identitas perkalian di ring $R$, maka diperoleh $(1')(1) = 1$. Jadi, diperoleh $1' = 1$. Maka terbukti $1$ adalah elemen yang tunggal di $R$.

**Definisi 2.6 (Gilbert, Jimmie., dan Gilbert, Linda., 1991)** Jika setiap elemen pada himpunan $A$ adalah elemen himpunan $B$, maka $A$ disebut *subset* $B$ dan ditulis dengan $A \subseteq B$.

Berdasarkan definisi tersebut, dapat diketahui bahwa setiap elemen-elemen yang terdapat pada himpunan $A$ juga merupakan elemen-elemen pada himpunan $B$.

**Contoh 2.4**

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$

Maka $A \subseteq B$, yaitu setiap elemen-elemen dari himpunan $A$ juga merupakan elemen-elemen dari himpunan $B$.

**Definisi 2.7 (Gilbert, Jimmie., dan Gilbert, Linda., 1991)** Jika $A$ dan $B$ adalah suatu himpunan sedemikian hingga $A \subseteq B$ dan $A \neq B$, maka $A$ adalah *proper subset* $B$ $(A \subset B)$.

**Contoh 2.5**

Misalkan $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ dan $A = \{0, 2, 3\}$ maka $A \subset Z_4$, artinya "$A$ merupakan himpunan bagian dari himpunan $B$".

Misalkan $R$ ring dan $S$ merupakan suatu himpunan bagian tak kosong dari ring. Jika $S$ merupakan ring terhadap operasi yang sama pada $R$, maka dapat dikatakan bahwa $S$ merupakan subring dari $R$. Sebagaimana didefinisikan oleh Khanna, V.K bersama Bhambri, S.K

**Definisi 2.8 (Khanna, Vijay K. dan Bhambri, S.K., 1993)** Suatu himpunan bagian tak kosong $S$ dari ring disebut subring dari $R$ jika $S$ merupakan ring terhadap operasi yang sama pada $R$.

**Teorema 2.2 (Khanna, Vijay K. dan Bhambri, S.K., 1993)** Suatu himpunan bagian tak kosong $S$ dari ring $R$ merupakan subring dari $R$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $ab \in S$ dan $a - b \in S$.

***Bukti:***

$(\Rightarrow)$ Akan ditunjukkan jika $S$ merupakan subring dari $R$, maka menurut definisi 2.1 $S$ merupakan grup komutatif (abelian) terhadap operasi penjumlahan yaitu untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a + b \in S$, $b \in S$ maka $(-b) \in S$ sedemikian hingga $a + b = a + (-b) = a - b \in S$. Selanjutnya, karena $S$ merupakan subring dari $R$, maka operasi perkalian pada $R$ juga merupakan operasi biner pada $S$, yaitu operasi perkalian bersifat tertutup dan akibatnya $ab \in S$ untuk setiap $a, b \in S$.

$(\Leftarrow)$ Akan ditunjukkan jika $a - b \in S$ dan $ab \in S$ untuk setiap $a, b \in S$, maka $S$ merupakan subring dari $R$.

- untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $ab \in S$, maka $S$ tertutup terhadap operasi perkalian.
- Ambil $a \in S$, maka $(0 - a) \in S$, $a - a = a + (-a) = 0$. $(-a) \in S$ hal ini berarti setiap elemen $S$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan.
- Ambil $b \in S$ dan $e \in S$, maka $e - b \in S$ dan $e - b = e + (-b) = (-b) \in S$. $\forall (-b) \in S$ sehingga $S$ memuat elemen nol.
- Ambil $a \in S$ dan $(-b) \in S$ maka $a - (-b) \in S$ dan $a - (-b) = a + b \in S$ karena $(-b) \in S$ maka $b \in S$. Hal ini menunjukkan bahwa $S$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Selanjutnya karena $S \subseteq R$, maka untuk sebarang $a \in S$ berlaku $a \in R$. Jadi sifat assosiatif dan distributif (kanan dan kiri) juga berlaku pada setiap elemen $S$.

Jadi semua aksioma ring dipenuhi oleh $S$, maka $S$ merupakan suatu ring $R$. $S \subseteq R$ dan $S$ suatu ring dengan operasi yang sama pada $R$, maka $S$ adalah subring dari $R$.

**Definisi 2.9 (Khanna, Vijay K. dan Bhambri, S.K., 1993)** Suatu elemen $a$ di ring $R$ disebut idempoten jika $a^2 = a$. Suatu elemen $a \in R$ disebut nilpoten jika $a^n = 0$ untuk semua bilangan bulat positif n.

**Contoh 2.6**

Carilah semua elemen idempoten dan nilpoten suatu ring di $Z_4$.

***Penyelesaian:***

Misalkan diambil $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ mod 4.

Karena $0 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 2 = 0$, $3 \cdot 3 = 1$

Maka dapat diketahui bahwa 0 dan 1 adalah idempoten.

Dan karena $2^2 = 2 \cdot 2 = 0$, maka 2 adalah nilpoten, serta 0 adalah nilpoten.

**Contoh 2.7**

Matriks $M_{2\times 2}(R) \ni A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ adalah idempoten.

***Penyelesaian:***

Berdasarkan definisi 2.9 Suatu elemen $A$ di $M_{2\times 2}(R)$ disebut idempoten jika $A^2 = A$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedemikian hingga terbukti bahwa $A^2 = A$.

## 2.2 Ring Reguler

Suatu ring $R$ dikatakan reguler jika dan hanya jika masing-masing elemen di $R$ adalah reguler. Suatu elemen di $R$ dikatakan reguler jika untuk setiap elemen $a$ di ring $R$ terdapat elemen $x$ di $R$.

**Definisi 2.10 (Krishnaswamy, D. dan Kumaresan, N., 2010)** Suatu elemen $a$ di ring $R$ disebut reguler jika dan hanya jika terdapat $x$ di $R$ sehingga berlaku $axa = a$. Ring $R$ adalah reguler jika dan hanya jika masing-masing elemen $R$ adalah reguler.

Berdasarkan definisi di atas dapat diketahui bahwa elemen $a$ di $R$ merupakan elemen ring yang reguler jika terdapat $x \in R$. Dan berdasarkan definisi 2.5 jika terdapat $x \in R$ untuk setiap $a \in R$, maka elemen $a$ di ring $R$ mempunyai perkalian invers. Dimana $x$ merupakan invers dari elemen $a$, yaitu $a \cdot x = 1 \; (x = a^{-1})$.

**Contoh 2.8**

Tunjukkan bahwa $Z_4$ merupakan suatu ring reguler.

***Penyelesaian:***

Misalkan $A = \{0,1,2,3\} \in Z_4$.

Diambil sebarang $a \in Z_4$

- Misalkan $1 \in Z_4$

  Maka $axa = a$, $\forall \; x \in R$. Sebelumya akan dicari dulu bahwa $ax = xa = 1$, yaitu:

  $$1 \cdot x = 1$$

  $$1 \cdot 1 = 1, \qquad (x = a^{-1} = 1).$$

  Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $axa = a$, yaitu:

  $$axa = a$$

  $$(ax)a = a$$

$(1 \cdot 1)1 = 1$

$1 \cdot 1 = 1$

$1 = 1$

- Misalkan $3 \in Z_4$

  Maka $axa = a$, $\forall x \in R$, dengan cara yang sama akan ditunjukkan bahwa $ax = xa = 1$, yaitu:

  $3 \cdot x = 1$

  $3 \cdot 3 = 1$, $(x = 3 = a^{-1})$.

  Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $axa = a$, yaitu:

  $axa = a$

  $(ax)a = a$

  $(3 \cdot 3)3 = 3$

  $1 \cdot 3 = 3$

  $3 = 3$

Karena $a \in Z_4$ adalah sebarang, maka $Z_4$ adalah ring reguler pada element $1$ dan $3 \in Z_4$.

**Contoh 2.9**

Diberikan $M_{2\times 2}(\Re)$ himpunan semua matriks $2 \times 2$ atas $\Re$. Akan ditunjukkan bahwa $M_{2\times 2}(\Re)$ ring reguler berdasarkan operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

***Penyelesaian:***

$M_{2\times 2}(\Re)$ adalah reguler, sebab $M_{2\times 2}(\Re) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \Re \right\}$ adalah ring.

Berdasarkan definisi 2.10, $M_{2\times 2}(\Re)$ adalah ring reguler jika untuk setiap $A \in M_{2\times 2}(\Re)$ terdapat $X \in M_{2\times 2}(\Re)$ maka $A$ adalah elemen reguler sehingga berlaku $AXA = A$.

Ambil $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\Re)$ dan ada $X \in M_{2\times 2}(\Re)$ dengan $X$ adalah invers dari $A$, yaitu:

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - cb} & \dfrac{-b}{ad - cb} \\ \\ \dfrac{-c}{ad - cb} & \dfrac{a}{ad - cb} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\Re).$$

Maka:

$$AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{ad}{ad - bc} + \left(\dfrac{-bc}{ad - bc}\right) & \dfrac{-ab}{ad - bc} + \dfrac{ab}{ad - bc} \\ \\ \dfrac{cd}{ad - bc} + \left(\dfrac{-cd}{ad - bc}\right) & \dfrac{-bc}{ad - bc} + \dfrac{ad}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{ad - bc}{ad - bc} & \dfrac{-ab + ab}{ad - bc} \\ \\ \dfrac{cd - cd}{ad - bc} & \dfrac{-bc + ad}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{ad - bc}{ad - bc} & \dfrac{ab - ab}{ad - bc} \\ \\ \dfrac{cd - cd}{ad - bc} & \dfrac{ad - ac}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga:

$$AXA = \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \cdot a) + 0 & (1 \cdot b) + 0 \\ 0 + (1 \cdot c) & 0 + (1 \cdot d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Karena $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ adalah reguler dan terdapat $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ merupakan invers dari $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sehingga terbukti bahwa $AXA = A$.

## 2.3 *Field*

Sub bab ini penulis akan menjelaskan tentang *field*, dimana elemen-elemen pada *field* selain elemen nol membentuk suatu grup yang komutatif (abelian) terhadap perkalian.

**Definisi 2.11 (Fraleigh, John B., 1994)** Diketahui $F$ ring komutatif dengan elemen *unity*. Jika setiap elemen pada $F$ selain elemen 0 merupakan unit, maka $F$ disebut *field*. Dengan kata lain himpunan $F$ disebut *field* jika dan hanya jika memenuhi ketiga aksioma berikut:

1. $(F, +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(F - \{0\}, \cdot)$ merupakan grup komutatif.
3. Pada $F$ berlaku sifat distributif kanan dan distributif kiri.

**Contoh 2.10**

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 7 dengan $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ dan 1 merupakan elemen unit pada perkalian. Tunjukkanlah bahwa $Z_7$ merupakan *field*.

***Penyelesaian:***

**Tabel 2.3 Penjumlahan himpunan bilangan bulat modulo 7 $(Z_7,+)$.**

| $(+)$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **5** | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **6** | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**Tabel 2.4 Perkalian himpunan bilangan bulat modulo 7 $(Z_7,\cdot)$.**

| $(\cdot)$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| **4** | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| **5** | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| **6** | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Berdasarkan Tabel 2.3 dan Tabel 2.4, akan ditunjukkan bahwa $Z_7$ merupakan *field* bila memenuhi aksioma-aksioma pada *field,* yaitu:

**1. $(Z_7,+)$ merupakan grup komutatif**

a) $\forall\ a,b \in Z_7$ berlaku $a+b=b+a$

- Ambil sebarang nilai dari $Z_7$.

  Misalkan $a=2$, dan $b=4 \in Z_7$

  Maka :

  $$2+4=4+2=6 \in Z_7.$$

b) $\forall\ a,b,c \in Z_7$ berlaku $a+(b+c)=(a+b)+c$

- Ambil sebarang nilai dari $Z_7$.

  Misalkan $a=2$, $b=4$, dan $c=1 \in Z_7$.

  Maka:

  $$2+(4+1)=(2+4)+1$$
  $$2+5=6+1$$
  $$0=0 \in Z_7.$$

c) $\exists\ e \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in Z_7$ berlaku $a+e=e+a=a$

- Misalkan diambil sebarang nilai $a=2 \in Z_7$.

  Maka:

  $$2+e=e+2=2$$
  $$e=0.$$

d) $\exists\ (-a) \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in Z_7$ berlaku $a+(-a)=(-a)+a=0$

- Misalkan diambil sebarang nilai $a=2 \in Z_7$.

  Sehingga:

  $$2+(-a)=(-a)+2=0$$
  $$2+5=5+2=0$$

  Maka:

  $$(-a)=5 \in Z_7.$$

**2. $(Z_7 - \{0\}, \cdot)$ merupakan grup komutatif**

a) $\forall\ a, b \in Z_7$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a \in Z_7$

- Ambil sebarang nilai dari $Z_7$.

  Misalkan $a = 2$, dan $b = 4 \in Z_7$ maka $4 \cdot 8 = 8 \cdot 4 = 8 \ \in Z_7$.

b) $\forall\ a, b, c \in Z_7$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

- Ambil sebarang nilai dari $Z_7$.

  Misalkan $a = 2$, $b = 4$, dan $c = 1 \in Z_7$.

  Maka:

$$2 \cdot (4 \cdot 1) = (2 \cdot 4) \cdot 1$$

$$2 \cdot 4 = 1 \cdot 1$$

$$1 = 1 \ \in Z_7 .$$

c) $\exists\ e \in Z_7$ sedemikian hingga $\forall\ a \in Z_7$ berlaku $a \cdot e = e \cdot a = a$

- Misalkan diambil sebarang nilai $a = 4 \in Z_7$ sehingga:

$$4 \cdot e = e \cdot 4 = 4$$

$$4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$$

$$e = 1 .$$

d) $\exists\ a^{-1} \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in Z_7$ berlaku $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

- Misalkan diambil sebarang nilai $a = 4 \in Z_7$.

  Sehingga:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} + a = e$$

$$4 \cdot a^{-1} = a^{-1} + 4 = e$$

$$4 \cdot 2 = 2 \cdot 4 = 1$$

  Maka:

$$a^{-1} = 2 \in Z_7 .$$

**3.** $Z_7$ **merupakan distributif kanan dan distributif kiri**

a) $\forall \ a,b,c \in A$ berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributif kiri)

- Ambil sebarang nilai dari $Z_7$.

  Misalkan $a = 2$, $b = 4$, dan $c = 1 \in Z_7$.

  Maka $2 \cdot (4 + 1) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1$

  $2 \cdot 5 = 1 + 2$

  $3 = 3 \quad \in Z_7$.

b) $\forall \ a,b,c \in A$ berlaku $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributif kanan)

- Ambil sebarang nilai dari $Z_7$.

  Misalkan $a = 2$, $b = 4$, dan $c = 1 \in Z_7$.

  Maka $(2 + 4)1 = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1$

  $6 \cdot 1 = 2 + 4$

  $6 = 6 \quad \in Z_7$.

Karena $Z_7$ memenuhi aksioma-aksioma pada *field.* Maka terbukti bahwa $Z_7$ merupakan suatu *field.*

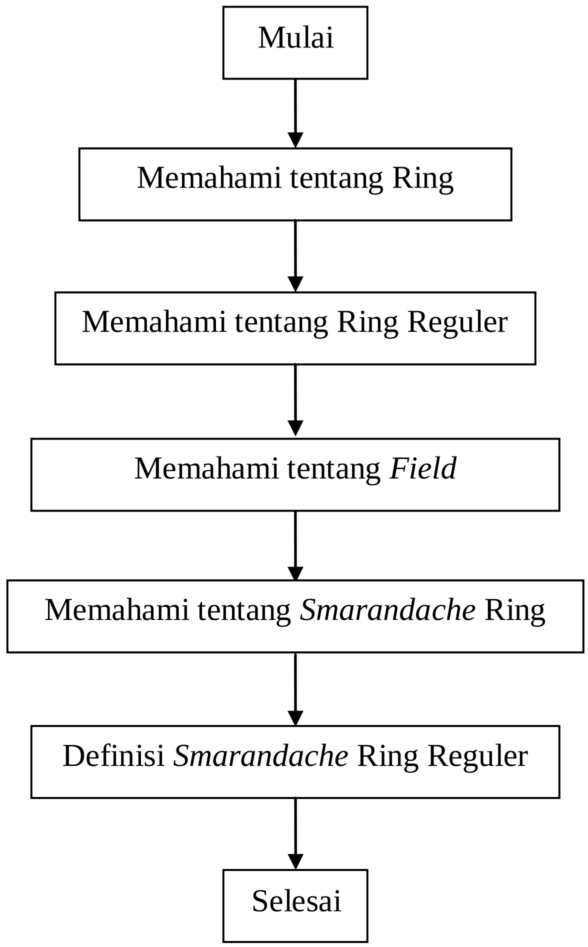
# BAB III

# METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang penulis pakai pada skripsi ini adalah metodologi studi literatur terhadap referensi-referensi yang berkaitan dengan ring, ring reguler, *field*, *smarandache* ring, dan *smarandache* ring reguler yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Memahami tentang ring dan kemudian memberikan contoh dari ring tersebut.
2. Memahami tentang ring reguler dan kemudian memberikan contoh dari ring reguler tersebut.
3. Memahami tentang *field* dan kemudian memberikan contoh dari *field* tersebut.
4. Memahami tentang *smarandache* ring dan kemudian memberikan contoh dari *smarandache* ring tersebut.
5. Mencari definisi *smarandache* ring reguler yang merupakan hasil yang akan dicapai dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Mengambil kesimpulan.

Langkah-langkah metodologi penelitian di atas dapat digambarkan dalam bentuk *flow chart* di bawah ini:




***Gambar 3.1 Flow Chart metodologi penelitian***

# BAB IV
# PEMBAHASAN

Berdasarkan landasan teori telah dibahas mengenai konsep ring, ring reguler, dan *field*. Maka pada bagian ini akan dibahas mengenai konsep *Smarandache* ring reguler. Tapi sebelum membahas *Smarandache* ring reguler, akan dijelaskan dulu tentang *Smarandache* ring.

## 4.1 *Smarandache* Ring

*Smarandache* ring diperkenalkan oleh Florentin Smarandache dan Padilla Raul pada tahun 1998. Ring Smarandach merupakan konsep paling dasar yang selanjutnya digunakan untuk mempelajari tentang *Smarandache* ring reguler. Pada sub bab ini akan dijelaskan beberapa definisi yang berkaitan dengan *Smarandache* ring beserta contohnya.

**Definisi 4.1 (Srinivas T. dan Sekhar Rao, A.K.S. Chandra, 2009)** Suatu *Smarandache* ring (S-ring) didefinisikan dengan ring $A$, sedemikian hingga *proper subset* $A$ merupakan *field* terhadap operasi yang sama.

Berdasarkan definisi di atas, dapat disimpulkan bahwa *Smarandache* ring tidak bersifat field. Tetapi hanya *proper subset* dari ring yang harus bersifat *field*.

**Contoh 4.1**

Misal $Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ adalah ring. Maka akan ditunjukkan bahwa *proper subset* $A$ dari $Z_{12}$, dengan anggota $A = \{0,4,8\}$ adalah *field* dan 4 merupakan elemen unit sehingga $Z_{12}$ merupakan *Smarandache* ring.

***Penyelesaian:***

**Tabel 4.1 Penjumlahan himpunan bilangan bulat modulo 12 $(Z_{12}, +)$**

| $(+)$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **10** | 10 | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **11** | 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

**Tabel 4.2 Perkalian himpunan bilangan bulat modulo 12 $(Z_{12}, \cdot)$**

| $(\cdot)$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 0 | 3 | 6 | 9 | 0 | 3 | 6 | 9 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 | 0 | 4 | 8 |
| **5** | 0 | 5 | 10 | 3 | 8 | 1 | 6 | 11 | 4 | 9 | 2 | 7 |
| **6** | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 |
| **7** | 0 | 7 | 2 | 9 | 4 | 11 | 6 | 1 | 8 | 3 | 10 | 5 |
| **8** | 0 | 8 | 4 | 0 | 8 | 4 | 0 | 8 | 4 | 0 | 8 | 4 |
| **9** | 0 | 9 | 6 | 3 | 0 | 9 | 6 | 3 | 0 | 9 | 6 | 3 |
| **10** | 0 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| **11** | 0 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Berdasarkan Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 akan ditunjukkan bahwa $A = \{0,4,8\}$ merupakan *field* bila memenuhi sifat *field*, yaitu:

**1. $(A,+)$ merupakan grup komutatif**

a) $\forall\ a,b \in A$ berlaku $a + b = b + a$

- $\forall\ 4,8 \in A$ maka $4 + 8 = 8 + 4 = 0 \in A$ .

b) $\exists\ e \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in A$ berlaku $e + a = a$

- $\forall\ 4 \in A$ sehingga $e + 4 = 4$

  $e = 0$

- $\forall\ 8 \in A$ sehingga $e + 8 = 8$

  $e = 0$ .

c) $\exists\ (-a) \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in A$ berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$

- $\forall\ 4 \in A$ sehingga $4 + (-a) = (-a) + 4 = 0$

  $4 + 8 = 8 + 4 = 0$

  Maka $(-a) = 8 \in A$ .

- $\forall\ 8 \in A$ sehingga $8 + (-a) = (-a) + 8 = 0$

  $8 + 4 = 4 + 8 = 0$

  Maka $(-a) = 4 \in A$

**2. $(A - \{0\},\cdot)$ merupakan grup komutatif**

a) $\forall\ a,b \in A$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a \in A$

- $\forall\ 4,8 \in A$ maka $4 \cdot 8 = 8 \cdot 4 = 8 \in A$ .

b) $\exists\ e \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in A$ berlaku $a \cdot e = a$

- $\forall\ 4 \in A$ sehingga $4 \cdot e = 4$

  $e = 4$ .

- $\forall\ 8 \in A$ sehingga $8 \cdot e = 8$

  $e = 4$ .

c) $\exists\ a^{-1} \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in A$ berlaku $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

- $\forall\ 4 \in A$ sehingga $4 \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot 4 = 4$

  $4 \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 4$

  Maka $a^{-1} = 4 \in A$.

- $\forall\ 8 \in A$ sehingga $8 \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot 8 = 4$

  $8 \cdot 8 = 8 \cdot 8 = 4$

  Maka $a^{-1} = 8 \in A$.

**3. *A* distributif kanan dan distributif kiri**

a) $\forall\ a,b,c \in A$ berlaku $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributif kiri)

- $\forall\ 0,4,8 \in A$ maka $0 \cdot (4 + 8) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 = 0 \in A$.

b) $\forall\ a,b,c \in A$ berlaku $(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributif kanan)

- $\forall\ 0,4,8 \in A$ maka $(0 + 8)4 = 0 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 0 \in A$.

Karena *proper subset* $A = \{0,4,8\}$ merupakan *field*. Maka terbukti bahwa $Z_{12}$ merupakan *Smarandache* ring.

**Definisi 4.2 (Srinivas T. dan Sekhar Rao, A.K.S. Chandra, 2009)** Diberikan $R$ suatu ring. $R$ dikatakan *Smarandache* ring pada tingkatan II (*S*-ring II) jika di $R$ terdapat proper subset $A$ $(A \neq \phi)$ sehingga berlaku:

1. $A$ penjumlahan grup abelian.
2. $A$ semigrup atas perkalian.
3. Untuk $a,b \in A$; $ab = 0$, jika dan hanya jika $a = 0$ atau $b = 0$.

**Contoh 4.2**

Misal $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ adalah ring. Tunjukkanlah bahwa $Z_6$ merupakan *Smarandache* ring tingkat II (*S*-ring II) dengan anggota $A = \{0,2,4\}$.

***Penyelesaian:***

**Tabel 4.3 Penjumlahan himpunan bilangan bulat modulo 6 $(Z_6,+)$.**

| **(+)** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **5** | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

**Tabel 4.4 Perkalian himpunan bilangan bulat modulo 6 $(Z_6,\cdot)$.**

| **$(\cdot)$** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 0 | 2 | 4 |
| **3** | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| **4** | 0 | 4 | 2 | 0 | 4 | 2 |
| **5** | 0 | 5 | 3 | 3 | 2 | 1 |

Berdasarkan Tabel 4.3 dan Tabel 4.4 akan ditunjukkan bahwa $Z_6$ merupakan *Smarandache* ring tingkat II (*S*-ring II) jika *proper subset* $A = \{0,2,4\}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

**1) $A$ penjumlahan grup abelian.**

a) $\forall\ a,b \in A$ berlaku $a + b \in A$ (Tertutup)

➢ $\forall\ 0,2,4 \in A$ maka $0 + 2 = 2 \in A$

$0 + 4 = 4 \in A$

$2 + 4 = 0 \in A$

b) $\forall\ a,b,c \in A$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assosiatif)

- $\forall\ 0,2,4 \in A$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$

$$0 + (2 + 4) = (0 + 2) + 4$$

$$0 + 0 = 2 + 4$$

$$0 = 0 \in A$$

c) $\forall\ a,b \in A$ berlaku $a + b = b + a$ (Komutatif)

- $\forall\ 0,2,4 \in A$ maka $0 + 2 = 2 + 0 = 2 \in A$

$$0 + 4 = 4 + 0 = 4 \in A$$

$$2 + 4 = 2 + 4 = 0 \in A$$

d) $\exists\ e \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in A$ berlaku $e + a = a$ (Elemen Identitas)

- $\forall\ 4 \in A$ sehingga $e + 4 = 4$

$$e = 0$$

- $\forall\ 8 \in A$ sehingga $e + 8 = 8$

$$e = 0\ .$$

e) $\exists\ (-a) \in A$ sedemikian hingga $\forall\ a \in A$ berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (Elemen Invers)

- $\forall\ 4 \in A$ sehingga $4 + (-a) = (-a) + 4 = 0$

$$4 + 8 = 8 + 4 = 0$$

Maka $(-a) = 8 \in A$.

- $\forall\ 8 \in A$ sehingga $8 + (-a) = (-a) + 8 = 0$

$$8 + 4 = 4 + 8 = 0$$

Maka $(-a) = 4 \in A$

**2) $A$ semigrup atas perkalian.**

a) $\forall\ a,b \in A$ berlaku $a \cdot b \in A$ (Tertutup)

- $\forall\ 0,2,4 \in A$ maka $0 \cdot 2 = 0 \in A$

$$0 \cdot 4 = 0 \in A$$

$$2 \cdot 4 = 2 \in A$$

b) $\forall\ a,b,c \in A$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

- $\forall\ 0,2,4 \in A$ maka $0 \cdot (2 \cdot 4) = (0 \cdot 2) \cdot 4$

$$0 \cdot 2 = 0 \cdot 4$$

$$0 = 0 \in A.$$

**3)** $\forall\ a,b \in A$ **;** $ab = 0$**, jika dan hanya jika** $a = 0$ **atau** $b = 0$ **.**

- $\forall\ 0,2 \in A$ maka $0 \cdot 2 = 0$
- $\forall\ 4,0 \in A$ maka $4 \cdot 0 = 0$

Karena *proper subset* $A = \{0,2,4\}$ memenuhi sifat-sifat pada *Smarandache* ring tingkat II . Maka terbukti bahwa $Z_6$ merupakan *S*-ring II.

**Definisi 4.3 (Kandasamy, W.B. Vasantha, 2002)** Diberikan $R$ suatu ring dengan unit. Dikatakan $x \in R \setminus \{1\}$ adalah *Smarandache* unit (*S*-unit) jika terdapat $y \in R$ sedemikian hingga:

1. $xy = 1$
2. Ada $a,b$ di $R \setminus \{x, y, 1\}$.
   i. $xa = y$ atau $ax = y$ atau
   ii. $yb = x$ atau $by = x$ dan
   iii. $ab = 1$.

**Contoh 4.3**

Diberikan $Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ merupakan ring pada perkalian modulo 5. Buktikan bahwa $Z_5$ merupakan suatu *Smarandache* unit (*S*-unit).

***Penyelesaian:***

**Tabel 4.5 Perkalian himpunan bilangan bulat modulo** 5 $(Z_5, \cdot)$.

| $\cdot$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| **3** | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| **4** | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Diambil sebarang $x \in Z_5 \setminus \{1\}$ yaitu 2, maka:

1. $x \cdot y = 1$

   $2 \cdot y = 1$

   $2 \cdot 3 = 1$, Maka diperoleh $y = 3$.

2. Terdapat $a, b \in Z_5 \setminus \{x, y, 1\}$.

   i. $x \cdot a = y$ atau $a \cdot x = y$

   $2 \cdot a = 3$

   $a \cdot 2 = 3$

   $2 \cdot 4 = 3$ $4 \cdot 2 = 3$, Maka diperoleh $a = 4$.

   ii. $y \cdot b = x$ atau $b \cdot y = x$

   $3 \cdot b = 2$ $b \cdot 3 = 2$

   $3 \cdot 4 = 2$ $4 \cdot 3 = 2$, Maka diperoleh $b = 4$.

   iii. $a \cdot b = 1$

   $4 \cdot 4 = 1$.

Karena sifat-sifat *Smarandache* unit (*S*-unit) terpenuhi oleh $Z_5$, maka $(Z_5, \cdot)$ merupakan suatu *Smarandache* unit (*S*-unit).

**Definisi 4.4 (Kandasamy, W.B. Vasantha, 2002)** Diberikan $R$ suatu ring. Suatu element $0 \neq x \in R$ merupakan *Smarandache* idempoten (*S*-idempoten) $R$ jika:

1. $x^2 = x$.
2. ada $a \in R \setminus \{x, 1, 0\}$.
   i. $a^2 = x$
   ii. $xa = a$ atau $ax = x$.

**Contoh 4.4**

Diberikan himpunan bilangan bulat modulo 6 dengan $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Apakah $Z_6$ merupakan suatu *S*-idempoten atau tidak?

***Penyelesaian:***

Diambil sebarang $x \in Z_6$ yaitu $x = 4 \in Z_6$

1. $4^2 = 4$ (mod 6).
2. Dan $2 \in Z_6 \setminus \{4\}$ sedemikian hingga:
   i. $2^2 = 4$ (mod 6),
   ii. $4 \cdot 2 = 2$ $(2 \cdot 4 = 2)$.

Karena $x = 4$ memenuhi aksioma – aksioma pada *S*-idempoten, maka $x = 4$ merupakan *S*-idempoten di $Z_6$.

Sekarang $3 \in Z_2$ sedemikian hingga $3^2 = 3$ (mod 6). 3 adalah suatu idempoten di $Z_6$ tetapi bukan merupakan *S*-idempoten di $Z_6$.

**Definisi 4.5 (Kandasamy, W.B. Vasantha, 2002)** Diberikan $R$ suatu ring. Suatu elemen nilpoten $0 \neq x \in R$ dikatakan *Smarandache* elemen nilpoten (*S*-elemen nilpoten) jika $x^n = 0$ dan terdapat $y \in R \setminus \{0, x\}$ sedemikian hingga $x^r y = 0$ atau $yx^s = 0$, $r, s > 0$ dan $y^m \neq 0$ untuk semua bilangan bulat $m > 1$.

**Contoh 4.5**

Diberikan $Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ suatu ring pada himpunan bilangan bulat modulo 12. Apakah $Z_{12}$ merupakan suatu *S*-elemen nilpoten atau tidak?

***Penyelesaian:***

Diambil sebarang $x \in Z_{12}$ yaitu $x = 6 \in Z_{12}$

1. $x^n = 0 \Rightarrow 6^2 = 0$.
2. Terdapat $y \in Z_{12} \setminus \{0, x\}$ sedemikian hingga:
   - i. $x^r y = 0$ atau $yx^s = 0$

     $6^2 \cdot y = 0$ atau $y \cdot 6^2 = 0$

     $6^2 \cdot 8 = 0$ atau $8 \cdot 6^2 = 0$ (mod 12).
   - ii. $y^m \neq 0 \Rightarrow 8^3 = 8$ (mod 12).

Karena sifat-sifat *S*-elemen nilpoten terpenuhi, maka $Z_{12}$ merupakan *S*-elemen nilpoten.

## 4.2 *Smarandache* Ring Reguler

Berdasarkan bab II telah dijelaskan beberapa definisi tentang ring, ring reguler dan *field*, serta dari pembahasan telah dijabarkan beberapa definisi yang berkaitan dengan *Smarandache* ring. Berdasarkan hal itu penulis membuat suatu definisi tentang *Smarandache* ring reguler (*S*-ring reguler) yang akan dipaparkan pada definisi berikut ini.

**Definisi 4.6:** Diberikan suatu ring $R$, $R$ didefinisikan sebagai *Smarandache* ring reguler (*S*-ring reguler) jika di $R$ terdapat *proper subset* $A$, sedemikian hingga:

1. $A$ merupakan semigrup atas perkalian.
2. Terdapat elemen $e \in A$ sedemikian hingga $a \cdot e = a$, $\forall\ a \in A$.
3. Untuk setiap $a \in A$ terdapat $x \in A$, sedemikian hingga $a \cdot x \cdot a = a$.

Berdasarkan definisi tersebut, dapat diketahui bahwa *proper subset* $A$ bersifat tertutup dan assosiatif, serta mempunyai *unity* 1 pada elemen identitas terhadap perkalian, dan juga mempunyai perkalian invers.

**Contoh 4.6**

Misalkan $Z_{10}$ adalah suatu ring. Maka akan ditunjukkan $Z_{10}$ merupakan *Smarandache* ring reguler jika *proper subset* $A$ dari $Z_{10}$, dengan anggota $A = \{1,3,7\}$ memenuhi sifat-sifat pada definisi *Smarandache* ring reguler.

***Penyelesaian:***

**Table 4.6 Penjumlahan himpunan bilangan bulat modulo 10 $(Z_{10},+)$.**

| $(+)$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **8** | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **9** | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

**Table 4.7 Perkalian himpunan bilangan bulat modulo 10 $(Z_{10}, \cdot)$**

| $\cdot$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 9 | 2 | 5 | 8 | 1 | 4 | 7 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 2 | 6 | 0 | 4 | 8 | 2 | 6 |
| **5** | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| **6** | 0 | 6 | 2 | 8 | 4 | 0 | 6 | 2 | 8 | 4 |
| **7** | 0 | 7 | 4 | 1 | 8 | 5 | 2 | 9 | 6 | 3 |
| **8** | 0 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| **9** | 0 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Berdasarkan Tabel 4.6 dan Tabel 4.7, $Z_{10}$ merupakan *Smarandache* ring reguler jika *proper subset* $A = \{1,3,7\}$ memenuhi sifat-sifat yang terdapat pada definisi 4.6. Tapi sebelumnya akan kita tunjukkan dulu bahwa $Z_{10}$ merupakan suatu ring bila memenuhi:

**1) Grup Komutatif terhadap penjumlahan $(Z_{10}, +)$**

- Tertutup

  Diambil sebarang nilai dari $Z_{10}$, misalkan $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \in Z_{10}$

  $1 + 0 = 1$

  $1 + 1 = 2$

  $1 + 2 = 3$

  $1 + 3 = 4$

  $1 + 4 = 5$

$1 + 5 = 6$

$1 + 6 = 7$

$1 + 7 = 8$

$1 + 8 = 9$

$1 + 9 = 0$

Karena hasilnya $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \in Z_{10}$, maka tertutup terhadap $Z_{10}$ .

- Assosiatif

  Diambil sebarang nilai dari $Z_{10}$

  Misalkan $a = 3, b = 1$ dan $c = 7 \in Z_{10}$

  $a + (b + c) = 3 + (1 + 7) = 1$

  $(a + b) + c = (3 + 1) + 7 = 1$

  Sehingga $a + (b + c) = (a + b) + c = 1$.

- Komutatif

  Ambil sebarang nilai dari $Z_{10}$

  Misalkan $a = 7, b = 3 \in Z_{10}$

  $(a + b) = (7 + 3) = 0$

  $(b + a) = (3 + 7) = 0$

  Sehingga : $(a + b) = (b + a) = 0$

  Maka $Z_{10}$ merupakan komutatif.

- Adanya unsur satuan atau identitas.

  Ambil sebarang nilai dari $Z_{10}$

  Misalkan $a = 3 \in Z_{10}$

  $a + 0 = 0 + a = a$

  $3 + 0 = 3 + 0 = 3$

  Maka $Z_{10}$ adalah unsur satuan atau identitas.

- Adanya unsur balikan atau invers

  Ambil sebarang nilai dari $Z_{10}$

  Misalkan $a = 3 \in Z_{10}$

  $a + (-a) = (-a) + a = 0$

  $3 + (-a) = (-a) + 3 = 0$

  $3 + 7 = 3 + 7 = 0$

  Maka $(-a) = 7$ .

Jadi, $Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan $(Z_{10},+)$.

**2) Semigrup terhadap perkalian $(Z_{10},\cdot)$**

- Tertutup

  Ambil sebarang nilai $Z_{10}$

  Misalkan $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \in Z_{10}$

  $1 \cdot 0 = 0$

  $1 \cdot 1 = 1$

  $1 \cdot 2 = 2$

  $1 \cdot 3 = 3$

  $1 \cdot 4 = 4$

  $1 \cdot 5 = 5$

  $1 \cdot 6 = 6$

  $1 \cdot 7 = 7$

  $1 \cdot 8 = 8$

  $1 \cdot 9 = 9$

  Karena hasilnya $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \in Z_{10}$ , maka tertutup terhadap $Z_{10}$ .

- Assosiatif

  Ambil sebarang nilai dari $Z_{10}$

  Misalkan $a = 6, b = 1$ dan $c = 5 \in Z_{10}$ , maka:

  $a \cdot (b \cdot c) = 6 \cdot (1 \cdot 5) = 6 \cdot 5 = 0$

$(a \cdot b)c = (6 \cdot 1)5 = 6 \cdot 5 = 0$

Sehingga $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c = 0$ , maka $Z_{10}$ assosiatif.

Jadi, $Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ merupakan semigrup terhadap perkalian $(Z_{10}, \cdot)$.

**3) Distributif perkalian terhadap pejumlahan $(Z_{10}, +, \cdot)$**

Diambil sebarang nilai dari $Z_{10}$

Misalkan $a = 1, b = 3$ dan $c = 7 \in Z_{10}$

- $a \cdot (b + c) = 1 \cdot (3 + 7)$

  $= 1 \cdot (0)$

  $= 0$

  $(a \cdot b) + (a \cdot c) = (1 \cdot 3) + (1 \cdot 7)$

  $= 3 + 7$

  $= 0$

  Maka, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = 0$ .

- $(a + b)c = (1 + 3)7$

  $= (4)7$

  $= 8$

  $(a \cdot c) + (b \cdot c) = (1 \cdot 7) + (3 \cdot 7)$

  $= 7 + 1$

  $= 8$

  Maka, $(a + b)c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = 8$

Jadi, $Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ merupakan distributif perkalian terhadap pejumlahan himpunan bilangan bulat modulo 10.

Karena $Z_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ memenuhi semua aksioma-aksioma yang ada, maka $Z_{10}$ adalah suatu **Ring $(Z_{10}, +, \cdot)$.**

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $Z_{10}$ merupakan *Smarandache* ring reguler jika *proper subset* $A = \{1,3,7\}$ berlaku:

**1) $A$ merupakan semigrup atas perkalian.**

- Tertutup
  - $\forall\ a,b \in A$ berlaku $a \cdot b \in A$

    $\forall\ 1,3 \in A$ berlaku $1 \cdot 3 = 3 \in A$.

    $\forall\ 1,7 \in A$ berlaku $1 \cdot 7 = 7 \in A$.

    $\forall\ 3,7 \in A$ berlaku $3 \cdot 7 = 1 \in A$.

- Assosiatif
  - $\forall\ a,b,c \in A$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) \in A$

    $\forall\ 1,3,7 \in A$ berlaku $1 \cdot (3 \cdot 7) = 1 \cdot 1 = 1 \in A$.
  - $\forall\ a,b,c \in A$ berlaku $(a \cdot b) c \in A$

    $\forall\ 1,3,7 \in A$ berlaku $(1 \cdot 3) 7 = 3 \cdot 7 = 1 \in A$.

**2) Terdapat elemen $e \in A$ sedemikian hingga $a \cdot e = a$, $\forall\ a \in A$.**

- $\forall\ a \in A$, $\exists\ e \in A$ sedemikian hingga $a \cdot e = a$
  - $\forall\ a = 1 \in A$, maka $1 \cdot e = 1$

    $1 \cdot 1 = 1 \in A$.
  - $\forall\ a = 3 \in A$, maka $3 \cdot e = 1$

    $3 \cdot 1 = 3 \in A$.
  - $\forall\ a = 7 \in A$, maka $7 \cdot e = 7$.

    $7 \cdot 1 = 7 \in A$.

**3) Untuk setiap $a \in A$ terdapat $x \in A$, sedemikian hingga $a \cdot x \cdot a = a$.**

Berdasarkan definisi 2.5 untuk setiap $a \in A$, maka terdapat $x \in A$ dimana $x$ merupakan perkalian invers dari $a$, yaitu: $a \cdot x = 1$.

- $a = 1 \in A$, maka:

$$1 \cdot x = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1 \qquad (x = a^{-1} = 1 \in A).$$

Selanjutnya: $a \cdot x \cdot a = a$

$$(a \cdot x)a = a$$

$$(1 \cdot 1)1 = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 = 1 \in A.$$

- $a = 3 \in A$, maka:

$$3 \cdot x = 1$$

$$3 \cdot 7 = 1 \qquad (x = a^{-1} = 7 \in A).$$

Selanjutnya: $a \cdot x \cdot a = a$

$$(a \cdot x)a = a$$

$$(3 \cdot 7)3 = 3$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$3 = 3.$$

- $a = 7 \in A$, maka:

$$7 \cdot x = 1$$

$$7 \cdot 3 = 1 \qquad (x = a^{-1} = 3 \in A).$$

Selanjutnya: $a \cdot x \cdot a = a$

$$(a \cdot x)a = a$$

$$(7 \cdot 3)7 = 7$$

$$1 \cdot 7 = 7$$

$$7 = 7.$$

Karena kondisi-kondisi pada *Smarandache* ring reguler terpenuhi oleh *proper subset* $A = \{1,3,7\} \subseteq Z_{10}$. Maka himpunan bilangan bulat modulo 10 merupakan suatu *Smarandache* ring reguler.

# BAB V

# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari tugas akhir ini diperoleh kesimpulan bahwa *Smarandache* ring merupakan suatu himpunan yang memiliki *proper subset* $A$ yang bersifat *field*, yaitu:

1. $(A,+)$ merupakan grup komutatif.
2. $(A-\{0\},\cdot)$ merupakan grup komutatif.
3. $A$ distributif kanan dan distributif kiri.

Sedangkan *Smarandache* ring reguler memiliki *proper subset A,* sedemikian hingga:

1. $A$ merupakan semigrup atas perkalian
2. Terdapat elemen $e \in A$ sedemikian hingga $a \cdot e = a$, $\forall a \in A$.
3. Untuk setiap $a \in A$ terdapat $x \in A$, sedemikian hingga $a \cdot x \cdot a = a$.

## 5.2 Saran

Penelitian ini membahas mengenai konsep dasar dalam pengenalan *Smarandache* ring reguler dan menentukan sifat-sifat dari *proper subset* pada *Smarandache* ring reguler. Bagi pembaca yang tertarik dapat melanjutkan penelitian ini dengan mengembangkan konsep *Smarandache* pada *Smarandache* Module reguler.

# DAFTAR PUSTAKA

Azadi, M. Doostie H., dan Pourfaraj L., "Certain Rings and Semigroups Examining the Regularity Property", *Jurnal of Mathematics, Statistics and Allied Fields, Iran*, Vol. 2, Issue 1, 2008.

Durbin, John R*., "Modern Algebra An Introduction"*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.

Fraleigh, John B., " *A First Course in Absract Algebra*". Fourth Edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

Gilbert, Jimmie., dan Gilbert, Linda., "*Elements of Modern Algebra*". Third Edition. Boston: PWS – KENT Publishing Company, 1991.

Kandasamy, W.B. Vasantha, **"***Smarandache Rings"*. India: American Research Press, Rehoboth, N. M., 2002.

Khanna, Vijay K., Bhambri, S.K., "*A Course in Abstract Algebra"*. Delhi: Vikas Publishing House PVT LTD, 1993.

Krishnaswamy, D., Kumaresan N., "On the Generalised Derivation in Regular Ring", *International Journal of Algebra, India*, Vol. 4, no. 19, 913-918, 2010.

Neumann, Jhon V., "On Reguler Rings", *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* Vol. 22 pp, 707-713, 1936.

Srinivas T., dan Sekhar Rao, A.K.S. Chandra, "On Smarandache Rings", *Scientia Magna, India,* Vol. 5, No. 4, 117-124, 2009.

Yuliza, Evi, "Ring Regular yang memenuhi Ring Stabil Diperumum (Generalized Stable Rings)", *Jurnal Penelitian Sains,Universitas Sriwijaya-Sumatera Selatan,* 2010.