

JURNAL MATEMATIKA UNAND

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Andalas

Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163

Telp. 0751-73224, Hp. 0852-64652866

<http://jmua.fmipa.unand.ac.id>

DAFTAR ISI VOLUME VII No 1

NO	PENULIS	JUDUL	HAL
1	Elva Rahimah, Lyra Yulianti, Des Welyyanti	Penentuan Bilangan Kromatik Lokasi Graf <i>Thorn</i> Dari Graf Roda W_3	1 – 8
2	Annisa Maula Zakiya, Yanita, Nova Noliza Bakar	Menentukan Invers Moore-Penrose Dengan Metode Ben Noble	9 – 18
3	Chintia Deva Rianti, Narwen, Lyra Yulianti	Bilangan Kromatik Lokasi Dari Graf <i>Spinner</i>	19 – 23
4	Citra Ariadini Chairunnisa, Hazmira Yoza, Dodi Devianto	Pengukuran Nilai Risiko Portofolio Berdasarkan Mean-Var	24 – 32
5	Dian Yosefanny, Hazmira Yoza, Izzati Rahmi H.G	Model Spline Kuadratik Untuk Merancang Kurva Pertumbuhan Balita di Kota Padang	33 – 42
6	Dilla Oktavia	Solusi Asimtotik Pada Persamaan Difusi Dengan Waktu Singkat	43 – 51
7	Dwi Novri Asmara, Syafrizal Sy, Effendi	Bilangan <i>Rainbow Connection</i> dan <i>Strong Rainbow Connection</i> Pada Graf Jahangir $J_{2,m}$	52 – 58
8	Hary Wahyudi, Narwen	Penentuan Bilangan <i>Rainbow Connection</i> Dari Amalgamasi Graf Roda	59 – 63
9	Haves Derindo, Lyra Yulianti, Syafrizal Sy	Bilangan <i>Strong Rainbow Connection</i> Pada Graf <i>Beaded Wheel</i>	64 – 69
10	Inda Silvia Afni, Yanita, Nova Noliza Bakar	Operator VEC dan VECH pada Matriks	70 – 75
11	Indah Citra Apsari, Mahdhivan Syafwan, Ahmad Iqbal Baqi	Penyelesaian Persamaan Adveksi Nonlokal Dalam Kasus Domain Satu Dimensi Dengan Menggunakan Metode Karakteristik	76 – 84
12	Iswahyuli, Hazmira Yoza, Dodi Devianto	Peramalan Curah Hujan Bulanan Desa Sungai Ipuh Solok Selatan Dengan Model <i>Autoregressive Integrated</i>	85 – 92

		<i>Moving Average</i>	
13	Karina Foresti, Maiyastri, Yudiantri Asdi	Penerapan Metode Six Sigma Pada Pengendalian Kualitas Air Kemasan Di PT. Gunung Naga Mas	93 – 102
14	Khairannisa Al Azizu	Pelabelan Total Sisi Ajaib Super Pada Graf Prisma Bercabang $(C_5 \times P_2) \circ \overline{K_2}$	103 – 108
15	Nessa	Bilangan <i>Rainbow Connection</i> Untuk Graf Kubik $C_{n,2n,n}$	109 – 114
16	Ridha Khairiyah, Maiyastri, Rita Diana	Perbandingan Metode Kuadrat Terkecil Dan Metode Bayes Pada Model Regresi Linier Dengan Galat Yang Autokorelasi	115 – 124
17	Sarifah Aulia, Hazmira Yoza, Maiyastri	Perhitungan Iuran Pensiun Untuk Pensiun Normal Berdasarkan Metode <i>Benefite Prorate Tipe Constant Dollar</i>	125 – 135
18	Shelli Fitrianda, Lyra Yulianti, Narwen	<i>Rainbow Connection Number</i> dan <i>Strong Rainbow Connection Number</i> Pada Graf Tangga Segitiga Diperumum Tr_4	136 – 142
19	Suciana Budi Aryani, Lyra Yulianti, Syafrizal Sy	Batas Atas Bilangan <i>Rainbow Connection</i> untuk Graf Kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$	143 – 148
20	Zul Hazizah, Ferra Yanuar, Riri Lestari	Analisis Tingkat Kepuasan Masyarakat Terhadap Kualitas Pelayanan Jasa RSUD Dr. Rasidin Padang	149 – 158
21	Zalfa Ahmad Syauqi, Mahdhivan Syafwan	Penjadwalan Matakuliah Menggunakan Pewarnaan Titik Pada Graf	159 – 163

RAINBOW CONNECTION NUMBER DAN STRONG RAINBOW CONNECTION NUMBER PADA GRAF TANGGA SEGITIGA YANG DIPERUMUM

SHELLI FITRIANDA, LYRA YULIANTI, NARWEN

*Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : shellifitrianda@gmail.com*

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung tak *trivial* dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, untuk sisi dari G , dimana sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Misal terdapat titik u dan v di G , sebuah lintasan P di G adalah *rainbow path* jika tidak ada dua sisi dari titik u dan v di P memiliki warna yang sama. Graf G adalah *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memiliki *rainbow path* untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$. *Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*.

Untuk dua titik u dan v dari G , sebuah *rainbow geodesic* (u, v) di G adalah *rainbow path* (u, v) dengan panjang $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ adalah jarak diantara u dan v (panjang *path* (u, v) terpendek di G). Graf G adalah *strongly rainbow connected* jika G memiliki sebuah *rainbow geodesic* (u, v) untuk setiap dua titik u dan v di G . Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dari sisi G sedemikian sehingga G *strongly rainbow connected* dinamakan *strong rainbow connection number*, $src(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf tangga segitiga yang diperumum Tr_4 .

Kata Kunci: Rainbow connection number, Strong rainbow connection number, graf tangga segitiga yang diperumum

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika yang sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang lalu. Paper pertama tentang teori graf muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Leonhard Euler [1]. Saat ini teori graf semakin berkembang pesat karena aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu. Salah satu topik dalam teori graf adalah *rainbow connection* pada graf.

Konsep *rainbow connection number* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 2006 [2]. Misalkan G adalah graf terhubung tak *trivial* dan didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, dengan $k \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu (u, v) -*path* P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi dalam lintasan tersebut memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*.

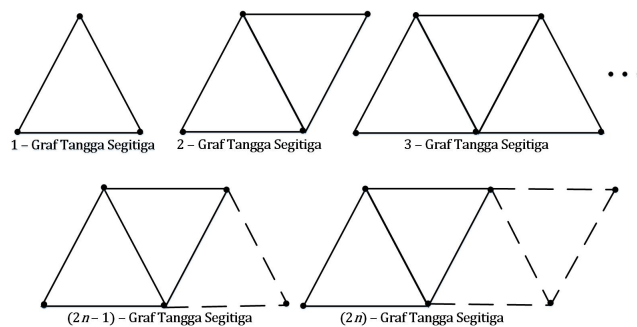
Konsep *rainbow connection number* dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar pemerintah dan agen [6]. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam *rainbow connection number*.

Penelitian terkait *rainbow connection* berkembang cukup pesat, dapat dilihat pada [3], [5], [6], [7], [8], [9], dan [10]. Untuk itu akan dibahas *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf tangga segitiga yang diperumum.

2. Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

2.1. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum

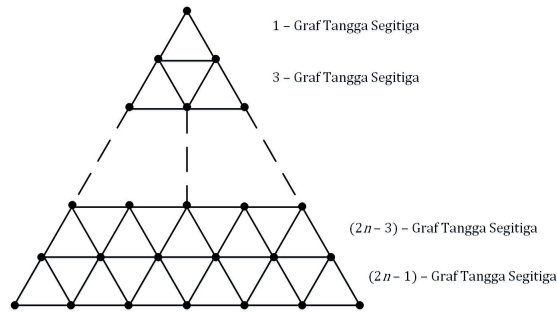
Definisi dan terminologi yang digunakan dalam tulisan ini diambil dari [1] dan [2]. Graf tangga segitiga yang diperumum dapat diperoleh dari beberapa graf dengan cara sebagai berikut. Dua segitiga dikatakan terhubung jika berisikan pada satu sisi. Misalkan T adalah kumpulan segitiga-segitiga terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan siklus terpendek 3 dan masing-masing segitiga berisikan pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut *triomino*. Jadi, T disebut n -*triomino* jika T adalah susunan dari n segitiga yang terhubung. Graf tangga segitiga dengan panjang n adalah n -*triomino* yang disusun secara mendatar, dengan menempatkan n segitiga dengan cara seperti pada Gambar 1 [3], yang dinotasikan dengan n -graf tangga segitiga.



Gambar 1. Graf Tangga Segitiga, $n \geq 1$.

Graf piramida dengan n baris, ditulis Pr_n adalah graf yang dibentuk dengan menempatkan graf tangga segitiga dengan cara sebagai berikut. Pertama-tama terdapat $(2n - 1)$ -graf tangga segitiga, kemudian diletakkan $(2n - 3)$ -graf tangga segitiga di atasnya, seterusnya hingga di bagian puncak terdapat 1-graf tangga segitiga

seperti pada Gambar 2 [4]. Dapat dilihat bahwa terdapat n baris pada graf tersebut. Titik paling atas dari graf piramida dinamakan sebagai titik puncak dan titik paling bawah dari graf piramida dinamakan sebagai titik-titik bawah.



Gambar 2. Graf Piramida dengan n baris.

Berdasarkan Gambar 2, dengan menambahkan satu titik dibawah graf piramida, dinamakan titik dasar (titik utama) dan sebanyak n sisi tertentu yang menghubungkan titik dasar dengan titik-titik bawah pada graf piramida, maka diperoleh graf tangga segitiga yang diperumum yang dinotasikan sebagai Tr_n , untuk $n \geq 2$, dengan n merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik utama dan banyaknya tingkat pada graf tangga segitiga yang diperumum tersebut.

Dengan demikian diperoleh bentuk umum dari graf tangga segitiga yang diperumum adalah sebagai berikut :

$$V(Tr_n) = \{v\} \cup \{v_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i + 1\}, \text{ dan}$$

$$E(Tr_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4, \text{ dengan}$$

$$E_1(Tr_n) = \{vv_{1j} | 1 \leq j \leq n\},$$

$$E_2(Tr_n) = \{v_{ij}v_{i(j+1)} | 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n - i\},$$

$$E_3(Tr_n) = \{v_{ij}v_{(i+1)j} | 1 \leq i \leq n - j, 1 \leq j \leq n - 1\},$$

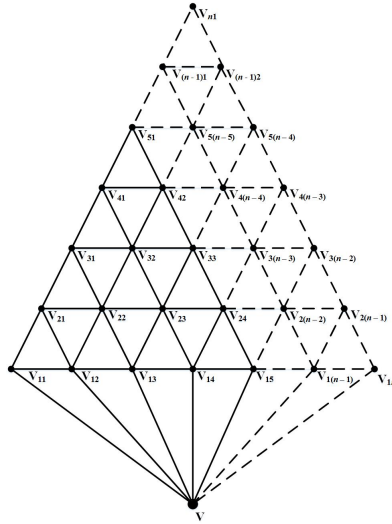
$$E_4(Tr_n) = \{v_{ij}v_{i+1(j-1)} | 1 \leq i \leq n - 1, 2 \leq j \leq n - i + 1\}.$$

Pada Gambar 3 diberikan contoh untuk graf tangga segitiga yang diperumum (Tr_n).

2.2. Rainbow Connection Number dan Strong Rainbow Connection Number

Lintasan *geodesic* antara titik u dan v dari graf G adalah lintasan $u - v$ dengan panjang minimum. Panjang lintasan adalah jumlah sisi yang terdapat di dalam lintasan. Jarak antara u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Diameter adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik di G , dinotasikan dengan $diam(G)$.

Misal terdapat titik u dan v di G , sebuah lintasan P di G adalah *rainbow path* jika tidak ada dua sisi dari titik u dan v di P memiliki warna yang sama.



Gambar 3. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum $Tr_n, n \geq 2$.

Graf G adalah *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memiliki *rainbow path* untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$. Pewarnaan c dikatakan sebuah *rainbow coloring* dari G . Jika k warna digunakan maka c adalah *rainbow k -coloring*. *Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*.

Untuk dua titik u dan v dari G , sebuah *rainbow geodesic* (u, v) di G adalah *rainbow path* (u, v) dengan panjang $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang *path* (u, v) terpendek di G). Graf G adalah *strongly rainbow connected* jika G memiliki sebuah *rainbow geodesic* (u, v) untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$. Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan sebuah *strong rainbow coloring* dari G . Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dari sisi G sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow-connected* adalah *strong rainbow connection number*, $src(G)$ dari G .

Chartrand dkk. (2006) telah memberikan teorema dasar *rainbow connection number* suatu graf, seperti dituliskan pada Teorema 2.1 dan Teorema 2.2 berikut.

Teorema 2.1. [2] *Jika G adalah graf tak trivial terhubung berukuran m yang mempunyai diameter $diam(G)$, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $diam(G) \leq rc(G)$. Perhatikan bahwa $diam(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$. Karena $rc(G)$ berlaku pada lintasan sebarang yang menghubungkan u ke v dimana $u, v \in V(G)$, maka berdasarkan definisi diameter G , $diam(G) \leq rc(G)$. Misalkan P_g adalah lintasan *geodesic* yang menghubungkan sebarang dua titik u ke v di G dengan $d(u, v) = s$ dan P adalah lintasan sebarang

yang menghubungkan u ke v dengan panjang lintasan adalah t . Karena jarak adalah banyak sisi pada lintasan *geodesic*, maka $s \leq t$. Perhatikan bahwa $rc(G)$ berlaku pada lintasan sebarang dari u ke v dimana $u, v \in V(G)$. Akibatnya $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung G . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $src(G) \leq m$. Karena m adalah banyak sisi pada G , jelas bahwa $src(G) \leq m$. \square

Teorema 2.2. [2] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial yang berukuran m , maka:*

- (a) $rc(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap,
- (b) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$,
- (c) $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

Bukti.

- (a) Jika G adalah graf lengkap, maka pewarnaan yang memberikan warna 1 untuk setiap sisi di G adalah *strong rainbow 1-coloring* dari G dan juga $rc(G) = src(G) = 1$. Di sisi lain, jika G adalah bukan graf lengkap, maka G mengandung paling sedikit dua titik yang tidak bertetangga, namakan u dan v , sedemikian sehingga setiap lintasan *geodesic* (u, v) di G mempunyai panjang minimal 2, jadi $src(G) \geq 2$.
- (b) Misalkan $rc(G) = 2$ maka haruslah $src(G) \geq 2$. Karena $rc(G) = 2$, berarti G memiliki *rainbow 2-coloring*, yang mengakibatkan setiap dua titik yang tidak bertetangga terhubung oleh suatu *rainbow path* dengan panjang 2. Karena lintasan tersebut adalah lintasan *geodesic*, maka tidak mungkin $src(G) > 2$. Maka haruslah $src(G) = 2$. Di sisi lain, asumsikan $src(G) = 2$. Berdasarkan (a) haruslah $rc(G) \leq 2$. Karena G bukan graf lengkap, maka haruslah $rc(G) = 2$.
- (c) Andaikan G bukan graf pohon. Maka G memiliki suatu *cycle* $C : v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ dimana $k \geq 3$. Berikan $(m-1)$ -*coloring* terhadap sisi-sisi di G , yaitu dengan memberikan warna 1 untuk sisi v_1v_2 dan v_2v_3 , serta $(m-2)$ buah warna berbeda dari himpunan warna $\{2, 3, \dots, m-1\}$ untuk $m-2$ sisi tersisa di G . Pewarnaan ini adalah *rainbow coloring*. Jadi, $rc(G) \leq m-1$. Selanjutnya, misalkan G adalah graf pohon dengan ukuran m . Asumsikan bahwa $rc(G) \leq m-1$. Misalkan c adalah suatu *minimum rainbow coloring* di G . Maka terdapat sisi e dan f sehingga $c(e) = c(f)$. Asumsikan, tanpa mengurangi perumuman, bahwa $e = uv$ dan $f = xy$ dan G memiliki suatu (u, v) -*path*, yaitu u, v, \dots, x, y . Maka tidak terdapat *rainbow path* (u, v) di G . Ini kontradiksi dengan G adalah *rainbow connected*. Jadi, haruslah G adalah graf pohon dengan ukuran m . \square

3. Rainbow Connection Number dan Strong Rainbow Connection Number pada Graf Tangga Segitiga yang Diperumum

Diameter dari graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$ diperoleh dengan menghitung jarak dari titik dasar ke titik puncak. Panjang lintasan terpendek dari titik dasar ke titik puncak adalah 4. Sehingga diperoleh bahwa diameter dari graf

tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$ adalah

$$diam(Tr_4) = 4.$$

Teorema 3.1. \diamond *Rainbow connection number untuk graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$, Tr_4 adalah*

$$rc(Tr_4) = 4.$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.1 dan $diam(Tr_4) = 4$, maka $4 \leq rc(Tr_4)$.

Akan ditunjukkan bahwa $rc(Tr_4) \leq 4$. Didefinisikan pewarnaan $c : E(Tr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut.

$$c(vv_{11}) = 1,$$

$$c(vv_{1j}) = 4 - k, \text{ untuk } k = j - 2, 2 \leq j \leq 4 - 1,$$

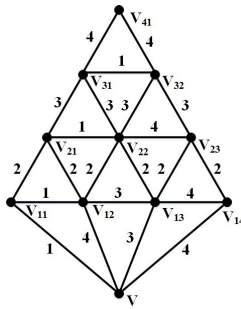
$$c(vv_{14}) = 4,$$

$$c(v_{ij}v_{(i+1)j}) = i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 4 - j, 1 \leq j \leq 4 - 1,$$

$$c(v_{ij}v_{(i+1)(j-1)}) = i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 4 - 1, 2 \leq j \leq 4 - i + 1,$$

$$c(v_{ij}v_{i(j+1)}) = [1, 4] - \bigcup_{i=1}^4 c(v_{i1}v_{(i+1)1}) \text{ untuk } 1 \leq i \leq 4 - 1, 1 \leq j \leq 4 - i,$$

dimana notasi $[1, 4]$ menyatakan bilangan bulat dari 1 sampai 4.



Gambar 4. Graf Tr_4

Pada pewarnaan tersebut, dapat dilihat bahwa untuk setiap dua titik u dan v di Tr_4 , terdapat lintasan rainbow di antara keduanya. Sehingga diperoleh bahwa $rc(Tr_4) = 4$. □

Teorema 3.2. \diamond *Strong rainbow connection number untuk graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$, Tr_4 adalah*

$$src(Tr_4) = rc(Tr_4) = 4.$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.1, jelas bahwa $src(Tr_4) \geq rc(Tr_4)$, sehingga diperoleh bahwa $src(Tr_4) \geq 4$. Selanjutnya, dengan pewarnaan yang sama seperti pada

pembuktian Teorema 3.1, dapat dilihat bahwa pewarnaan tersebut adalah *strong rainbow coloring*, karena untuk setiap dua titik u, v di Tr_4 , lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut adalah lintasan geodesic. Jadi, $src(Tr_4) \leq 4$. \square

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah diperoleh *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* untuk graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$, yang dinotasikan dengan Tr_4 , dimana diperoleh bahwa

$$rc(Tr_4) = src(Tr_4) = 4.$$

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, bapak Dr. Dodi Devianto, dan bapak Syafruddin M.Si selaku dosen penguji, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J. A. and U. S. R Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London
- [2] Chartrand, G., Kalamazoo, G. L. Johns, S Valley, and K. A McKeon. 2008. Rainbow connection in graph. *Mathematica Bohemica*, **133** (1) : 85 – 89
- [3] Shulhany, M.A dan A. N. M Salman. 2015. Bilangan terhubung pelangi graf berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMS 2015*. **1** : 916 – 924
- [4] Yanti, Helma. 2014. Analisis Graf Piramida, Graf Berlian, dan Graf Bintang Sebagai Graf Perfect. *Tesis S-2, unpublished*. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
- [5] Arnasyitha, Yulianti dan Dafik. 2014. Rainbow connection number pada operasi graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014*. **1**(1): 83 – 87
- [6] Mahmudah, Muhlisatul dan Dafik. 2014. Rainbow connection hasil operasi graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014*. **1**(1): 174 – 183
- [7] Sy. Syafrizal, G.H. Medika, L. Yulianti. 2013. The rainbow connection of fan and sun. *Applied Mathematical Sciences*. **7**(64) : 3155 – 3159
- [8] X. Li dan Y. Shi. 2010. Rainbow connection in 3 - connected graphs. *Graphs and Combinatorics*. **29**(5) : 1471 – 1475
- [9] X. Li dan Y. Sun. 2010. Rainbow connection numbers of complementary graphs. *Utilitas Math*. **86**(2011) : 23 – 32
- [10] X. Li dan Y. Sun. 2011. Rainbow connection of graphs - a survey. *Graphs and Combinatorics*. **29**(1)(2013) : 1 – 38