Bidang : Inovasi Sains, Teknologi dan Industri
Kode / Nama Rumpun Ilmu : 121/Matematika

LAPORAN AKHIR

PELAKSANAAN PENELITIAN PENGEMBANGAN
SAINS DASAR DAN MATEMATIKA

SKIM RISET DASAR

KAJIAN EKSISTENSI KEPUTUSAN OPTIMAL MASALAH OPTIMASI DINAMIS KUADRATIK LINIER UNTUK SISTEM DESRIPTOR TERGANGGU

TIM PENGUSUL

1. **Dr. Muhafzan** NIDN. 0002066712 (Ketua)
2. **Zulakmal, M.Si** NIDN. 0008116711 (Anggota)

Dibiayai oleh:
Dana PNBP Fakultas MIPA Universitas Andalas
Sesuai dengan Kontrak Penelitian
Nomor: 01/UN.16.03.D/PP/FMIPA/2017
Tahun Anggaran 2017

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS ANDALAS

Oktober 2017

HALAMAN PENGESAHAN

PENELITIAN PENGEMBANGAN SAINS DASAR DAN MATEMATIKA
SKIM RISET DASAR

Judul Penelitian	: **Kajian Eksistensi Keputusan Optimal Masalah Optimasi Dinamis Kuadratik Linier Untuk Sistem Deskriptor Terganggu**
Kode/Nama Rumpun Ilmu	: 121/Matematika
Ketua Peneliti:	
a. Nama Lengkap	: Dr. Muhafzan
b. NIDN	: 0002066712
c. Jabatan Fungsional	: Lektor Kepala
d. Program Studi	: Matematika
e. Nomor HP	: +628126868108
f. Email	: muhafzan@fmipa.unand.ac.id
Anggota Peneliti:	
a. Nama Lengkap	: Zulakmal, M. Si
b. NIDN	: 0008116711
c. Perguruan Tinggi	: Universitas Andalas
Anggota Peneliti:	
a. Nama Lengkap	: Silfia Suciana Arnel
b. No. BP.	: 1310432023
c. Perguruan Tinggi	: Universitas Andalas
Lama Penelitian Keseluruhan	: 1 tahun
Penelitian Tahun ke	: 1
Biaya Penelitian Keseluruhan	: Rp. 30.000.000,-
Biaya Penelitian	:
- diusulkan ke DRPM	: -
- dana internal PT	: Rp. 30.000.000,-
- dana institusi lain	: -

Padang, 31 Oktober 2017

Diketahui: Ketua Jurusan Matematika,	Peneliti,
Dr. Mahdhivan Syafwan NIP. 198208032006041001	Dr. Muhafzan NIP. 196706021993021001
Diketahui Ketua LPPM - UA	Disetujui Dekan FMIPA - UA,
Dr. Ing. Uyung Gatot S. Dinata, MT NIP. 196607091992031003	Prof. Dr. Mansyurdin, M.S. NIP. 196002131987031005

IDENTITAS DAN URAIAN UMUM

1. Judul Penelitian : Kajian Eksistensi Keputusan Optimal Masalah Optimasi Dinamis Kuadratik Linier Untuk Sistem Deskriptor Terganggu

2. Tim Peneliti

No	Nama	Jabatan	Bidang Keahlian	Instansi Asal	Alokasi Waktu (jam/Minggu)
1	Dr. Muhafzan	Ketua	Matematika Terapan (Optimasi dan Kontrol)	Universitas Andalas	15
2	Zulakmal, M.Si	Anggota	Matematika Terapan	Universitas Andalas	10
3	Silfia Suciana Arnel	Mahasiswa	Matematika	Universitas Andalas	5

3. Objek Penelitian

Penelitian ini merupakan kajian untuk menghasilkan suatu teori baru dengan mengembangkan hasil-hasil yang sudah diteliti oleh para peneliti terdahulu dalam bidang optimasi dan kontrol, khususnya hasil yang dilaporkan oleh Millan, dkk. (2010), Muhafzan (2010), Muhafzan dan Stephane (2013) dan Wang, dkk. (2014). Objek yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah syarat perlu dan cukup yang menjamin eksistensi dari keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu.

4. Masa Pelaksanaan

Mulai : bulan Maret tahun 2017

Berakhir : bulan Oktober tahun 2017.

5. Usulan Biaya : Rp. 30.000.000,-

6. Lokasi Penelitian : Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Andalas

7. Instansi lain yang terlibat: Tidak ada

8. Temuan yang ditargetkan:

Penelitian ini akan menghasilkan suatu teori baru untuk mengkonstruksi suatu keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu. Rumusan eksplisitnya akan diberikan dalam bentuk suatu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup yang menjamin eksistensi keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu. Selain itu juga akan dihasilkan suatu algoritma untuk menentukan keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu. Algoritma ini dapat digunakan untuk membuat suatu program komputer bagi memudahkan proses konstruksi keputusan optimal tersebut.

9. Kontribusi mendasar pada suatu bidang ilmu

Hasil penelitian ini memberikan suatu kontribusi baru dalam bidang optimasi dan kontrol berupa teorema baru tentang syarat perlu dan cukup yang menjamin eksistensi keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu.

10. Jurnal ilmiah yang menjadi sasaran

- American Journal of Applied Sciences (internasional terindeks).

11. Rencana luaran HKI, buku, purwarupa : tidak ada

DAFTAR ISI

RINGKASAN

Pada penelitian ini dikaji eksistensi keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu, baik secara analitik maupun secara numerik. Penelitian ini merupakan pengembangan terhadap studi yang telah dilakukan oleh Millan, dkk. (2010), Muhafzan (2010), Muhafzan dan Stephane (2013) dan Wang, dkk. (2014) dengan asumsi ketidakstabilan pada konstrain model dinamis. Kajian analitik untuk mendapatkan keputusan optimal bagi masalah optimasi kuadratik linier tersebut menggunakan metoda transformasi, yaitu dengan mentransformasikan sistem deskriptor menjadi sistem standar. Sedangkan kajian numerik menggunakan metode Runge Kutta. Hasil-hasil analitik yang diperoleh nantinya akan dibandingkan dan divalidasi dengan hasil-hasil numerik.

Kajian tentang topik ini menjadi penting dan menarik untuk dipelajari, mengingat potensi aplikasi yang dimiliki oleh model optimasi ini. Beberapa studi melaporkan bahwa model optimasi dinamis ini sangat baik dalam mendeskripsikan berbagai fenomena nyata yang saat ini menjadi topik hangat, di antaranya model pertumbuhan ekonomi, model penyebaran wabah penyakit dan model-model dalam keteknikan.

Luaran yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah makalah yang dapat diseminasikan dalam forum ilmiah nasional dan suatu artikel yang dipublikasikan dalam jurnal internasional terindeks, yaitu ***Archives in Control Sciences***. Jurnal ini khusus mempublikasikan hasil-hasil terbaru dalam bidang kontrol, baik kajian secara matematis maupun kajian aplikasi dalam keteknikan. Luaran berupa publikasi dalam jurnal internasional pada penelitian ini dinilai cukup wajar dan sangat potensial, mengingat penelitian terdahulu yang masih berhubungan dengan topik ini pernah dilakukan oleh ketua peneliti dan hasilnya telah dipublikasikan dalam jurnal internasional bereputasi. Tentu saja hasil-hasil yang dipublikasikan nantinya diharapkan dapat mengundang peneliti lain untuk merancang implementasi dari teori yang dikembangkan sehingga memiliki kontribusi pada perkembangan sains dan teknologi.

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah optimasi dinamis merupakan suatu model optimasi dimana pengambilan keputusan sangat bergantung secara kontinu kepada variabel waktu. Model optimasi dinamis ini sering muncul dalam berbagai aplikasi penting, beberapa diantaranya dapat dijumpai pada model pertumbuhan ekonomi berkelanjutan (Dawid dan Day, 2007), model ekonomi multi sektor (Jin, 2011), model predator-prey dalam biologi (Allegrettoa, dkk., 2011) dan model penyebaran penyakit TBC seperti yang dilaporkan oleh Athithan dan Mini (2015).

Masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor merupakan suatu varian dari masalah optimasi dinamis dimana index performance berbentuk integral dari suatu fungsi kuadratik dan konstrainnya berbentuk sistem deskriptor. Secara teoritis, masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor adalah masalah penentuan variabel keputusan optimal yang memenuhi konstrain dinamis berbentuk sistem deskriptor dan mengoptimumkan *performance index* kuadratik. Dewasa ini, aplikasi dari model optimasi dinamis kuadratik linier juga telah meluas ke berbagai bidang, terutama dalam bidang ekonomi (Engwerda dan Salmah, 2009; Hiraguchi, 2011) dan keteknikan (Bartek dan Edward, 2014).

Mengingat aplikasi yang menjanjikan tersebut, masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor menjadi salah satu topik terpopuler yang masih hangat dikaji oleh para peneliti sampai sekarang, baik dalam kerangka teoritis maupun aplikatif. Dalam perkembangannya, objek kajian terhadap model yang awalnya bersifat komplikatif ini, kemudian diperluas kepada kasus-kasus yang lebih realistik, di antaranya adalah dengan memperkenalkan berbagai varian baru atau penambahan konstrain-konstrain baru. Dalam penelitian ini varian baru yang dimaksud adalah penambahan variabel gangggguan yang dengan adanya gangguan tersebut dapat mengakibatkan ketidakstabilan dari konstrain dan bahkan mungkin dapat mengakibatkan ketiadaan keputusan optimal.

Masalah optimasi dinamis kuadratik linier ini menjadi menarik untuk dikaji karena ia memiliki karakter khusus pada *performance index* dan konstrainnya. Kefleksibilitas dari *performance index* dan konstrainnya yang berupa perumuman dari sistem persamaan diferensial linier orde satu tersebut menjadikannya sebagai abstraksi model matematika yang lebih realistis dari berbagai persoalan nyata. Fenomena ini sangat penting dalam pengembangan ilmu ekonomi, keteknikan dan bidang lainnya, khususnya untuk pengambilan keputusan.

1.2 Masalah yang Akan Diteliti

Eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu merupakan objek masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini. Secara matematis, permasalahan yang akan diteliti adalah bagaimanakah rumusan syarat perlu dan cukup bagi eksistensi keputusan optimal $\omega \in \mathbb{R}^m$ yang memenuhi sistem deskriptor terganggu berikut:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\dot{\phi}(t) = A\phi(t) + B\omega(t) + D\zeta(t),\ \phi(0) = \phi_0,\ t \geq 0 \\ &\psi(t) = C\phi(t) + E\zeta(t), \end{aligned} \tag{1}$$

dan meminimumkan fungsi objektif berikut:

$$J(\omega) = \int_0^\infty (\psi^T(t)\psi(t) + \omega^T(t)R\omega(t))dt. \tag{2}$$

Dalam persamaan (1) dan (2), $\mathcal{E}, A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{n\times r}, E \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $\phi \in \mathbb{R}^n$ adalah variable keadaan, $\zeta \in \mathbb{R}^r$ adalah variabel pengganggu (disturbance), $\psi \in \mathbb{R}^p$ adalah variabel output, t menyatakan waktu dan $\operatorname{rank}(\mathcal{E}) < n.$ Selain itu, akan dikaji juga mengenai bagaimana bentuk rumusan algoritma untuk mendapatkan keputusan optimal $\omega \in \mathbb{R}^m$ tersebut. Dalam hal ini diasumsikan bahwa sistem deskriptor (1) adalah tidak stabil. Penelitian ini merupakan pengembangan dari hasil-hasil penelitian terdahulu yang sudah dilakukan oleh Muhafzan (2010), Millan, dkk. (2010), Muhafzan dan Stephene (2013) dan Wang, dkk. (2014). Ruang lingkup kajian meliputi pendekatan analitik dan numerik dari eksistensi keputusan optimal.

1.3 Tujuan Khusus Penelitian

Tujuan khusus dari penelitian ini adalah:

1. Mengkaji syarat perlu dan syarat cukup yang menjamin eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu.
2. Mengembangkan pendekatan analitik dan pendekatan numerik terhadap perilaku keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor terganggu tersebut.

1.4 Urgensi Penelitian

Penelitian yang diusulkan ini berperan penting dalam memberikan penjelasan teoritis tentang eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor yang melibatkan variabel gangguan. Disamping itu, penelitian ini juga penting dalam tinjauan aplikatif mengingat potensi realisasinya sebagai alat bantu pengambilan keputusan dalam berbagai bidang, salah satunya bidang pertumbuhan ekonomi.

1.5 Temuan yang Ditargetkan

Temuan yang ditargetkan pada penelitian ini adalah suatu teori baru yang menjelaskan syarat perlu dan syarat cukup yang menjamin eksistensi keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor dengan asumsi adanya variabel gangguan pada konstrain sistem deskriptor. Hasil ini nantinya merupakan generalisasi dari hasil yang diperoleh oleh Millan, dkk. (2010), Muhafzan (2010), Muhafzan dan Stephane (2013) dan Wang, dkk. (2014). Lebih lanjut, temuan dari penelitian ini memberikan kontribusi baru dalam bidang matematika, khususnya bidang kajian optimasi dan kontrol, yang dapat mendukung pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Hasil-hasil tersebut diharapkan dapat diseminasikan dalam forum ilmiah nasional dan internasioanl serta dipublikasikan pada jurnal internasional bereputasi. Rencana capaian tahunan dari penelitian ini diperlihatkan dalam Tabel 1.1 berikut ini.

Tabel 1.1 Rencana Target Capaian

No	Jenis Luaran		Indikator Capaian
1	Publikasi Ilmiah	Internasional	Sudah dilaksanakan
2	Pemakalah dalam temu ilmiah	Nasional	Sudah dilaksanakan

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Model Optimasi Kuadratik Linier

Diberikan model dinamis berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\dot{\phi}(t) &= A\phi(t) + B\omega(t),\ \phi(0) = \phi_0,\ t \geq 0 \\ \psi(t) &= C\phi(t) \end{aligned} \tag{3}$$

dimana $\mathcal{E}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\phi \in \mathbb{R}^n$ adalah variable keadaan, $\omega \in \mathbb{R}^m$ adalah variabel keputusan (input), $\psi \in \mathbb{R}^p$ adalah variabel output, t menyatakan waktu dan $\text{rank}(\mathcal{E}) < n$. Dalam hal ini simbol $\mathbb{R}^{n\times m}$ menyatakan himpunan matriks-matriks riil berukuran $n \times m$, dan $\mathbb{R}^n$ menyatakan himpunan vektor-vektor riil yang terdiri atas n komponen. Model dinamis (1) disebut sebagai sistem deskriptor (Virnik, 2008). Yang menarik dari model dinamis (1) adalah bahwa ia mungkin tidak mempunyai solusi untuk suatu matriks $\mathcal{E}$ atau untuk suatu syarat awal ϕ_0, dan ini sangat berbeda dengan sistem dinamis standar berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= A\phi(t) + B\omega(t),\ \phi(0) = \phi_0,\ t \geq 0 \\ \psi(t) &= C\phi(t), \end{aligned} \tag{4}$$

dimana sistem dinamis standar (4) sudah pasti memiliki suatu solusi untuk syarat awal apapun. Sehingga tidak mengherankan jika sistem deskriptor (3) sering disebut sebagai perumuman dari sistem standar (4).

Masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor (3) merupakan masalah penentuan keputusan optimal ω yang memenuhi sistem dinamis (3) dan meminimumkan *performance index* kuadratik berikut:

$$J(u) = \int_0^\infty (\psi^T(t)\psi(t) + \omega^T(t)R\omega(t))dt, \tag{5}$$

dimana R adalah matriks simetris definit positif. Dengan pengertian ini dapat dilihat bahwa dengan batasan-batasan tertentu terdapat tak berhingga banyaknya keputusan ω yang dapat memenuhi sistem dinamis (3) dan setiap keputusan tersebut akan memberikan suatu nilai terhadap *performance index* (5).

2.2 Review dan Perkembangan Studi Sebelumnya

Kepastian solusi dari sistem (4) mengindikasikan kesederhanaan dari model tersebut, sehingga sistem (4) mungkin tidak realistis dalam banyak hal. Kajian mengenai eksistensi keputusan optimal untuk masalah optimasi kuadratik linear untuk sistem dinamis standar (4) dan varian-variannya sudah banyak dilakukan. Penjelesan-penjelasan mengenai hal ini dapat dijumpai dalam Liberzon (2012) sebagai literatur standar. Namun demikian, kajian mengenai eksistensi dari keputusan optimal dari masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor (3) tanpa gangguan merupakan suatu kajian yang masih relatif baru dan masih hangat dikaji oleh para peneliti sampai sekarang, baik dalam kerangka teoritis maupun aplikatif, dan diantara yang terpantau oleh peneliti adalah artikel Muhafzan (2010), Pytlak (2011), Campbell dan Kunkel (2013) dan artikel lainnya. Semua literatur yang disebutkan ini tidak mempertimbangkan keterlibatan variabel gangguan dalam sistem deskriptor (3), padahal variabel gangguan ini sangat berpengaruh dalam memodelkan suatu kejadian sehingga kehadirannya dalam model tidak dapat diabaikan.

Dalam penelitian ini, peneliti memperumum sistem deskriptor (3) dengan menambahkan variabel gangguan $\zeta \in \mathbb{R}^r$ kepada sistem deskriptor (3), sedemikian sehingga sistem deskriptor (3) menjadi:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\dot{\phi}(t) &= A\phi(t) + B\omega(t) + D\zeta(t),\ \phi(0) = \phi_0,\ t \geq 0 \\ \psi(t) &= C\phi(t) + E\zeta(t), \end{aligned} \tag{6}$$

dimana $D \in \mathbb{R}^{n\times r}$ dan $E \in \mathbb{R}^{p\times r}$. Dengan demikian, masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor (6) merupakan masalah penentuan keputusan optimal ω yang memenuhi sistem dinamis (6) dan meminimumkan *performance index* kuadratik berikut:

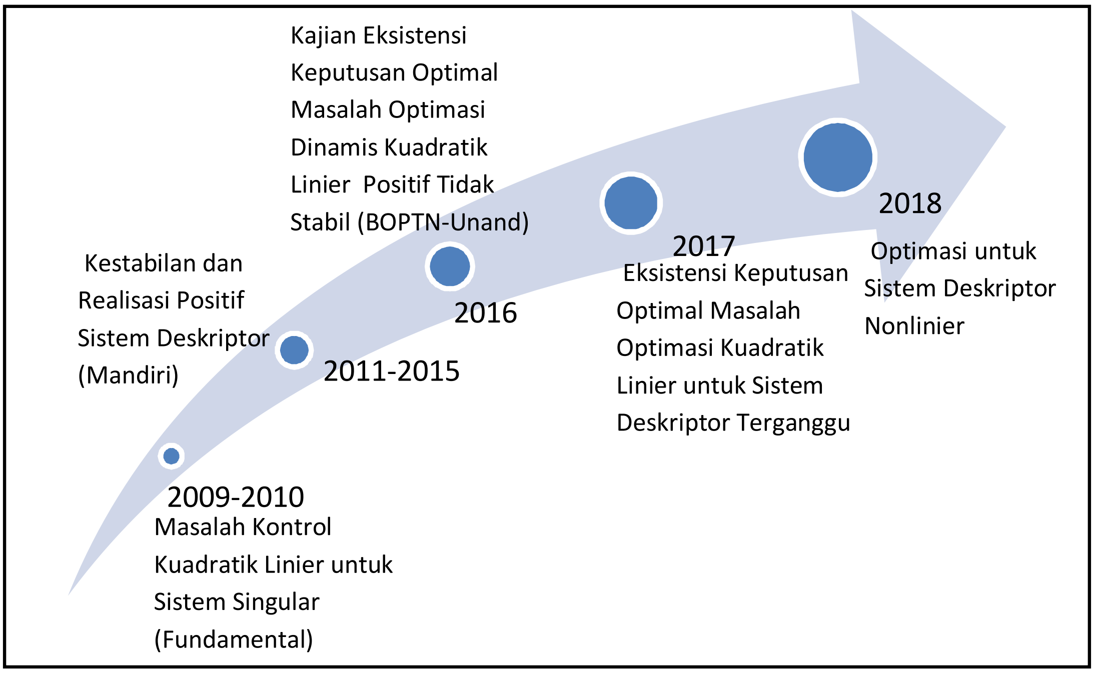
$$J(u) = \int_0^\infty (\psi^T(t)\psi(t) + \omega^T(t)R\omega(t))dt, \tag{7}$$

dimana R adalah matriks simetris definit positif. Dengan perumuman ini terlihat bahwa kajian mengenai eksistensi keputusan optimal menjadi lebih rumit karena harus mempertimbangkan variabel gangguan. Penelitian tentang masalah optimasi dinamis untuk sistem deskriptor yang melibatkan variabel gangguan belum banyak dilakukan sehingga agak terlambat perkembangannya. Keterlambatan ini disebabkan oleh kompleksitas dalam mengkonsruksi keputusan optimal.

Di lain pihak, kajian mengenai eksistensi keputusan optimal masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem standar dengan melibatkan variabel gangguan sudah banyak dilakukan, diantaranya adalah Milan, dkk. (2010) dan Xie dan He (2015). Sepanjang pengetahuan peneliti, penelitian terakhir tentang masalah optimasi dinamis kuadratik linier untuk sistem deskriptor dengan melibatkan variabel gangguan dilaporkan oleh Liu, dkk. (2015). Dalam laporannya, Liu melaporkan suatu syarat cukup untuk mereduksi pengaruh variabel gangguan dalam sistem deskriptor. Beberapa tahun sebelumnya, Chen (2007) melaporkan bahwa untuk menolak pengaruh gangguan dalam sistem deskriptor perlu mentransformasikan sistem deskriptor tersebut menjadi sistem standar. Kedua artikel ini mengasumsikan bahwa sistem deskriptor yang menjadi konstrain dalam masalah optimasi dinamis kuadratik linier adalah stabil.

Dalam penelitian ini, peneliti akan mengkaji syarat perlu dan cukup untuk eksistensi keputusan optimal dengan asumsi ketidakstabilan pada konstrain sistem deskriptor. Persoalan mengenai bagaimana menstabilkan sistem deskriptor sudah pernah peneliti laporkan dalam Muhafzan dan Stephane (2013). Dengan menggunakan metoda yang diusulkan oleh Wang, dkk. (2014) dan Muhafzan dan Stephane (2013), kajian ini nantinya merupakan suatu perluasan dari kajian yang pernah peneliti laporkan dalam Muhafzan (2010).

Gambar 2.1 berikut ini memperlihatkan *road map* peneltian yang sudah dan akan dilakukan hingga tahun 2018.



Gambar 2.1. *Road Map* penelitian

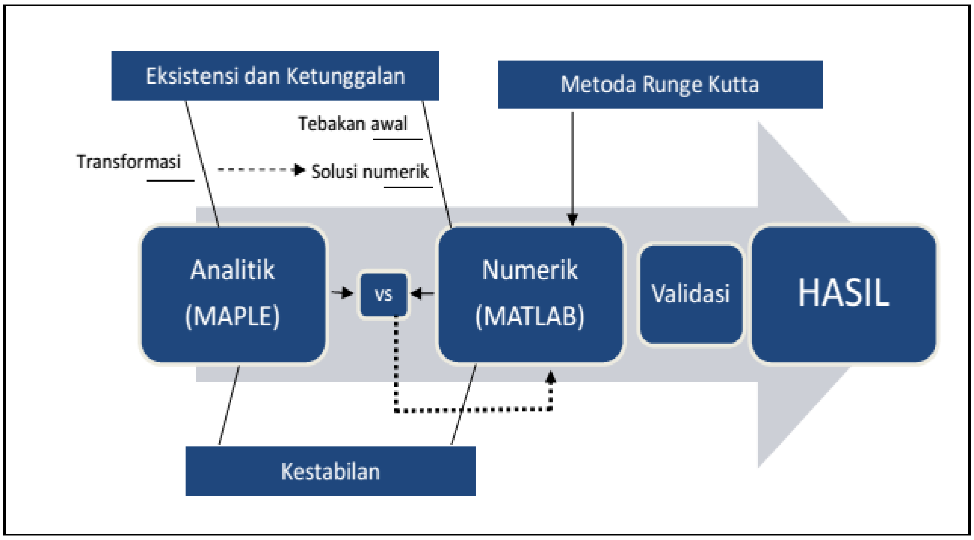
BAB 3

METODE PENELITIAN

Sebagai langkah awal penelitian, sistem deskriptor yang memuat variabel gangguan ditransformasikan menjadi sistem standar. Selanjutnya dilakukan kajian analitik untuk mengkonstruksi syarat perlu dan cukup agar konstrain sistem dinamis (6) dapat distabilkan. Dengan bantuan prinsip maksimum dilakukan pula kajian analitik untuk mendapatkan keputusan optimal bagi masalah optimasi kuadratik linier yang melibatkan variabel gangguan. Dalam analisis ini diperlukan bantuan software MAPLE. Aplikasi tersebut diperlukan karena rumitnya persamaan yang akan diselesaikan nantinya. Langkah selanjutnya adalah mengkaji ketunggalan dari keputusan optimal tersebut. Kajian ini diperlukan agar keputusan optimal hanyalah berupa keputusan tunggal.

Langkah selanjutnya adalah melakukan perhitungan numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta. Hasil-hasil numerik nantinya akan dijadikan sebagai pembanding dalam memeriksa kesahihan keputusan optimal. Untuk perhitungan numerik dilakukan dengan menggunakan aplikasi MATLAB yang memiliki beberapa keunggulan dalam hal visualisasi dan animasi hasil. Tentunya komputer yang memiliki performa yang baik dalam mensupport aplikasi Mapple dan MATLAB tersebut sangat dibutuhkan.

Terakhir, seluruh hasil yang diperoleh pada tahap-tahap sebelumnya disimpulkan secara global. Hal ini termasuk penelaahan dan perbandingan hasil dengan kasus-kasus lain yang sudah dikaji oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Secara keseluruhan, alur penelitian yang diusulkan dalam proposal ini dideskripsikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1. Diagram alir penelitian

BAB IV
PENCAPAIAN

Throughout this manuscript the notations $\mathbb{R}^n$ denotes the set of all real vectors of $n-$dimension, $\mathbb{R}^{n\times m}$ denotes the set of all $n \times m$ real matrices, I_r is the identity matrix of $r \times r$, O is the null matrices of suitable dimension, rank(A) is rank of matrix A and det(A) denotes determinant of matrix A.

Let us consider the following descriptor system

$$\begin{aligned} H\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}+E\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{x}\left(0\right) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} + F\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^q, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ are the state vector, the control input, the disturbance input and the factual output, respectively. $H, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}, D \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $F \in \mathbb{R}^{r\times q}$ and rank$(H) = p < n$. The system (1) is called the descriptor system. It is well-known that the system (1) has a solution if it is regular, i.e. there exists $\gamma \in \mathbb{C}$ such that $\det\left(\gamma H - A\right) \neq 0$. If $p = n$ then the first equation in (1) can be written as the following standard system:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= H^{-1}A\mathbf{x}(t) + H^{-1}B\mathbf{u}(t)+H^{-1}E\boldsymbol{\omega} \qquad (2) \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} + F\boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

and its solution can be obtained easily.

The dynamical system (1) attracts interest because this kind of system appears in the modelling of many processes in various field, e.g. in biology, chemistry and economics. Recently, Chen discussed the linear quadratic optimization subject to (1) without disturbance input $\boldsymbol{\omega}$. Moreover, some author are also discussed other aspect of the linear quadratic optimization subject to descriptor system with disturbance. The problem that be formulated is to determine a control $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ that satisfy (1) and to minimize the following quadratic performance index:

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{y}\right) dt. \tag{3}$$

In this paper we modify the performance index (3) becomes

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \left(\gamma^2 \boldsymbol{\epsilon}^\top Q \boldsymbol{\epsilon} + \dot{\mathbf{u}}^\top R \dot{\mathbf{u}}\right) dt, \tag{4}$$

where $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\mathrm{d})$, $\mathbf{y}_\mathrm{d}$ is the desire output, Q is $r \times r$ semi-definite positive matrix, R is $m \times m$ definite positive matrix and $\gamma > 0$ is a weighted parameter. This formulated problem is more realistic, because the factual output, in fact, is not always same to the desired output. The problem to be solved is to determine a control $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ that satisfy (1) and to minimize the quadratic performance index (4) such that $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\mathrm{d}) \to \mathbf{0}$ when $t \to \infty$.

In order to find the desired result, let us define a new vector $\boldsymbol{\varphi}$ such that $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\epsilon}$. Using $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_\mathrm{d}$, the system (1) can be written as follows:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} H & O \\ O & I_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}\mathbf{u} + \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega} - \begin{pmatrix} O \\ I_r \end{pmatrix}\mathbf{y}_\mathrm{d}\end{aligned} \tag{5}$$

Since the disturbance $\boldsymbol{\omega}$ and the desire output $\mathbf{y}_\mathrm{d}$ are constant, (5) is equivalent to the following system

$$\begin{pmatrix} H & O \\ O & I_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}. \tag{6}$$

Likewise the problem under consideration becomes to find the control $\mathbf{u}$ that satisfy (6) and to minimize the objective function (4). In another form this optimization problem can be written as follows:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{v}} \quad J(\boldsymbol{v}) = & \int_0^\infty \left(\boldsymbol{\phi}^\top \bar{Q}\, \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}\right) dt \\ \text{s.t.} \quad \bar{H}\, \dot{\boldsymbol{\phi}} = & \bar{A}\, \boldsymbol{\phi} + \bar{B}\boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$\boldsymbol{v} = \dot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix}, \; \bar{H} = \begin{pmatrix} H & O \\ O & I_r \end{pmatrix}, \; \bar{A} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix}, \; \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$$

and

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \gamma^2 Q \end{pmatrix}.$$

It is obvious that $\text{rank}\left(\bar{H}\right) = p + r < n + r$. Since the system (1) is regular, the constraint equation in (7) is also regular, i.e. there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\det\left(\lambda\bar{H} - \bar{A}\right) \neq 0$. It is also obvious that (7) constitute a LQ optimization subject to descriptor system without disturbance input. Therefore, we can use the LQR theory to solve it. Under assumption for which the constraint in (7) is impulse controllable and stabilizable, one can transform the LQ optimization (7) into the standard LQ optimization using a bijective mapping and show that both the optimization problems are restricted equivalent. The procedure of transformation finally give the optimal control as follows:

$$\boldsymbol{v}^* = K^* \boldsymbol{\phi}^*,$$

with

$$K^* = K - (H^T + B^T P) \begin{pmatrix} I & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

and trajectory optimal $\boldsymbol{\phi}^*$ is governed by

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}^* = \left(\bar{A} + \bar{B}K^*\right) \boldsymbol{\phi}^*,$$

which is stable, i.e. $\boldsymbol{\phi}^* \to 0$ if $t \to \infty$, and impulse free. Note that $\boldsymbol{\phi}^* \to 0$ if $t \to \infty$ implies $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\mathrm{d}}) \to \mathbf{0}$ when $t \to \infty$. Furthermore, the minimum value of J is

$$J_{\min} = \boldsymbol{\phi}_0^T \left(P^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I & O \end{pmatrix} P^{-1} \boldsymbol{\phi}_0.$$

Hasil lengkap dari kajian ini telah disusun suatu artikel berjudul "On the LQ regulator control for descriptor system under disturbance" dan telah disubmit ke jurnal internasional terindeks Scopus, yaitu American Journal of Applied Sciences dan hingga saat ini masih under review.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian berjudul Kajian Eksistensi Keputusan Optimal Masalah Optimasi Dinamis Kuadratik Linier Untuk Sistem Deskriptor Terganggu yang didanai oleh Fakultas MIPA Universitas Andalas Tahun Anggaran 2017 dengan Nomor Kontrak 01/UN.16.03.D/PP/FMIPA/2017 telah selesai dilaksanakan.

Sebagai hasil saintifik telah dihasilkan sebuah artikel yang telah diseminarkan dalam forum seminar ilmiah internasional, yaitu International Conference on Science, Technology and Mathematics 2017 pada tanggal 7-9 Oktober 2017 di Universiti Pendidikan Sultan Idris, Perak, Malaysia dengan judul makalah: "On The LQ Control Problem Subject to Singular System under Disturbance".

Selain itu suatu artikel ilmiah berjudul "ON LQ REGULATOR CONTROL FOR DESCRIPTOR SYSTEM UNDER DISTURBANCE" telah disubmit ke suatu jurnal internasional yang terindeks di Scopus, yaitu American Journal of Applied Sciences, dan saat ini dalam status under review.

.

REFERENSI

Allegrettoa, W., Fragnelli, G., Nistri, P. dan Papini, D., (2011), Coexistence and optimal control problems for a degenerate predator–prey model, Journal of mathematical analysis and applications, 378: 528–540.

Athithan, S. dan Mini, G., (2015), Optimal control of tuberculosis with case detection and treatment, World journal of modelling and simulation, vol. 11(2), 111-122.

Bartek, R. dan Edward, J. D., (2014), Optimal complementary control for positive stable LTI systems, Automatica, 50, 1401–1406.

Campbell, S. L. dan Kunkel, P., (2013), On the numerical treatment of linear-quadratic optimal control problems for general linear time-varying differential-algebraic equations, Journal of Computer and applications in mathematics, 242, 213–231.

Chen, L. (2007), Singular linear quadratic performance with the worst disturbance rejection for descriptor systems, Journal of control theory and applications, 3, 277–280.

Dawid, H. dan Day, R. H., (2007), On sustainable growth and collapse: ptimal and adaptive paths, Journal of economic dynamics & control, 31, 2374–2397.

Engwerda, J. C. dan Salmah, (2009), The open-loop linear quadratic differential game for index one descriptor systems, Automatica, 45, 585-592.

Hiraguchi, R., (2011), A two sector endogenous growth model with habit formation, Journal of economic dynamics & control, 35, 430–441.

Jin, Z. S., (2011), The analytical solution of balanced growth of non-linear dynamic multi-sector economic model, Economic modelling, 28: 410–421.

Liberzon, D., (2012), Calculus of variations and optimal control theory, Princeton University Press, New Jersey.

Liu, L., Yan, X., Han. C. dan Sun, D., (2015), Optimal disturbance rejection for descriptor systems based on dynamic output feedback, Proceeding of the 2015 IEEE international conference on information and automation, China, 1316-1321.

Millan, P., Orihuela, L., Vivas, C. dan Rubio, F. R., (2010), An optimal control L_2-gain disturbance rejection design for networked control systems, Proceeding of American Control Conference, Baltimore, 1344-1349.

Muhafzan, (2010), Use of semidefinite programming for solving the LQR problem subject to rectangular descriptor systems, International journal of applied mathematics and computer science, 20, 655–664.

Muhafzan dan Stephane, I., (2013), On stabilization of positive linear systems, Applied mathematical sciences, 37(37), 1819-1824.

Pytlak, R., (2011), Numerical procedure for optimal control of higher index DAEs. Discrete and continuous dynamical systems., 29(2), 647–670.

Virnik, E., (2008), Stability analysis of positive descriptor systems, Linear algebra and its applications, 429, 2640–2659.

Xie, H. dan He, F., (2015), Optimal control for a linear system subject to a general ARIMA disturbance, Mathematical problems in engineering, 2015, 1-10.

Wang, X., Wu, C., Teo, K. L. dan Jiang, L., (2014), Robust optimal control of continuous linear quadratic system subject to disturbances, Optimization and control methods in industrial engineering, 72, 11-34.

LAMPIRAN

Gmail

Muhafzan Muchtar <muhafzan@gmail.com>

American Journal of Applied Sciences - Manuscript Number # 5483-AJAS

1 message

Science Publications <support@scipub.org> Tue, Oct 31, 2017 at 12:03 PM
Reply-To: Science Publications <support@scipub.org>
To: "Dr. Muhafzan Muhafzan" <muhafzan@fmipa.unand.ac.id>

Dear Dr. Muhafzan Muhafzan,

Your manuscript entitled "ON LQ REGULATOR CONTROL FOR DESCRIPTOR SYSTEM UNDER DISTURBANCE" has been successfully submitted online and is presently being given full consideration for publication in American Journal of Applied Sciences.

Your manuscript number is 5483-AJAS. Please mention this number in all future correspondence regarding this submission.

You can view the status of your manuscript at any time by checking your Author Center after logging into http://thescipub.com/es.
You will be able to login to review the manuscript using the following credentials:

Username: muhafzan@fmipa.unand.ac.id
Password: 7WP.f*dl

Thank you for submitting your manuscript to American Journal of Applied Sciences.

Sincerely,

Editorial Office
American Journal of Applied Sciences

Website

ON LQ REGULATOR CONTROL FOR DESCRIPTOR SYSTEM UNDER DISTURBANCE

Muhafzan and Zulakmal

Department of Mathematics, Andalas University, Indonesia
Corresponding author: muhafzan@fmipa.unand.ac.id

Abstract. Study on the LQ control problem subject to singular system constitute an active research field because its application in many area. In this article we deal with the LQ control problem subject to singular with disturbance input. We transform the problem under consideration into the LQ control problem subject to singular system free of disturbance. A sufficient condition that guarantee the existence of the optimal control is discussed.

1. Notations.

$\mathbb{R}^n$	Set of all real vectors of $n-$ dimension.
$\mathbb{Z}_+$	Set of nonnegative integer number.
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Set of all $n\times m$ real matrices.
$\mathbb{R}_+^{n\times m}(\mathbb{R}_-^{n\times m})$	Set of all $n\times m$ real matrices in which all entries are nonnegative (nonpositive).
I_r	The identity matrix of $r\times r$.
O	The null matrices of suitable dimension.
$\text{rank}\,(A)$	Rank of matrix A.
$\det\,(A)$	Determinant of matrix A.

2. Introduction

Given the following descriptor system

$$\begin{aligned} &H\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}+E\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ &\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} + F\boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{u}\in\mathbb{R}^m, \boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^q, \mathbf{y}\in\mathbb{R}^r$ are the state vector, the control input, the disturbance input and the factual output, respectively. $H, A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{r\times n}, D\in\mathbb{R}^{r\times m}$, $E\in\mathbb{R}^{n\times q}$, $F\in\mathbb{R}^{r\times q}$ and $\text{rank}(H) = p < n$. The system (2.1) is called the singular system [**2, 7**]. It is well-known that the system (2.1) has a solution if $\det(\gamma H - A)\neq 0$ for some $\gamma\in\mathbb{C}$ and for any admissible

Key words and phrases. Descriptor system, LQ regulator, disturbance.

initial state $\mathbf{x}_0$. If $p = n$ then the first equation in (2.1) can be written as the following standard system:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= H^{-1}A\mathbf{x}(t) + H^{-1}B\mathbf{u}(t) + H^{-1}E\boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u} + F\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

The system (2.2) is a normal system and its solution can be obtained easily [**1**].

The dynamical system (2.1) attracts interest because this kind of system appears in the modelling of many processes in various field, e.g. in biology, chemistry and economics [**6**]. Recently, Chen in [**2**] discussed the linear quadratic optimization subject to (2.1) without disturbance input $\boldsymbol{\omega}$. Moreover, in [**2**] and [**6**] are also discussed other aspect of the linear quadratic optimization subject to descriptor system with disturbance. The problem that be formulated in [**6**] is to determine a control $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ that satisfy (2.1) and to minimize the following quadratic performance index:

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \left(\mathbf{y}^\top \mathbf{y}\right) dt. \tag{2.3}$$

In this paper we modify the performance index (2.3) becomes

$$J(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \left(\gamma^2 \boldsymbol{\epsilon}^\top Q \boldsymbol{\epsilon} + \dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}}\right) dt, \tag{2.4}$$

where $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\mathrm{d})$, $\mathbf{y}_\mathrm{d}$ is the desire output, Q is $r \times r$ semi-definite positive matrix and $\gamma > 0$ is a weighted parameter. This formulated problem is more realistic than the problem in [**6**], because the factual output, in fact, is not always similar to the desired uotput. The problem to be solved is to determine a control $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ that satisfy (2.1) and to minimize the quadratic performance index (2.4) such that $\boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_\mathrm{d}) \to \mathbf{0}$ when $t \to \infty$.

3. Results

In order to find the desired result, let us define a new vector $\boldsymbol{\varphi}$ such that $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \gamma\boldsymbol{\epsilon}$. Using $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_\mathrm{d}$, the system (2.1) can be written as follows:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H & O \\ O & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \mathbf{u} + \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega} - \begin{pmatrix} O \\ I_r \end{pmatrix} \mathbf{y}_\mathrm{d} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Since the disturbance $\boldsymbol{\omega}$ and the desire output $\mathbf{y}_\mathrm{d}$ are constant, (3.1) can be written as

$$\begin{pmatrix} H & O \\ O & I_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \gamma\boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}. \tag{3.2}$$

Likewise the problem under consideration becomes to find the control $\mathbf{u}$ that satisfy (3.2) and to minimize the objective function (2.4). In other form this optimization problem can be written as follows:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{v}} \quad J(\boldsymbol{v}) = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{\phi}^\top \bar{Q} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{v}\right) dt \\ &\text{s.t.} \qquad \bar{H}\,\dot{\boldsymbol{\phi}} = \bar{A}\boldsymbol{\phi} + \bar{B}\boldsymbol{v}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

where

$$\boldsymbol{v} = \dot{\mathbf{u}},\ \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{pmatrix},\ \bar{H} = \begin{pmatrix} H & O \\ O & I_r \end{pmatrix},\ \bar{A} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix},\ \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$$

and

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \gamma^2 Q \end{pmatrix}.$$

It is obvious that there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\det\big(\lambda\bar{H} - \bar{A}\big) \neq 0$ and $\mathrm{rank}\big(\bar{H}\big) = p+r$. It is also obvious that (3.3) constitute a LQ control problem subject to singular system without disturbance input. Therefore, we can use theory in [**4**] to solve it. We need the condition the impulse controllability and stabilizability of the system (3.3), compare to the result in [**3, 5**].

Theorem 1. *The constrain in (3.3) is impulse controllable and stabilizable.*

Proof. Note that

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \bar{H} & O \\ \bar{A} & \bar{H} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} H & O & O & O \\ O & I & O & O \\ A & O & H & O \\ C & O & O & I \end{pmatrix}.$$

Using the algebraic operation within (3.3) we have

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \bar{H} & O \\ \bar{A} & \bar{H} \end{pmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} H & O & O & O \\ A & O & H & O \\ O & I & O & O \\ O & O & A & H \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} H & O & O & O \\ A & H & O & O \\ O & O & I & O \\ O & A & O & H \end{pmatrix} \\ &= n + 2p + r. \end{aligned}$$

Moreover, in order to prove that the system (2.1) is stabilizable, note that

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}\left(s\bar{H} - \bar{A}\ \bar{B}\right) &= \mathrm{rank}\left(s\begin{pmatrix} H & O \\ O & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} sH - A & O \\ -C & sI \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} sH - A & B \\ -C & D \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} O \\ sI \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} sH - A & B & O \\ -C & D & sI \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\left(sH - A\ B\right) + \mathrm{rank}(sI) \\ &= n + r. \end{aligned}$$

$\square$

Using the results in [**4**] and [**6**], we have the following result.

THEOREM 2. *If the Theorem 1 holds then the optimal control $\boldsymbol{\upsilon}^*$ for the LQ control problem (3.3) is given by*

$$\boldsymbol{\upsilon}^* = K^* \boldsymbol{\phi}^*,$$

with

$$K^* = K - (H^T + B^T P) \begin{pmatrix} I & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

and trajectory optimal $\boldsymbol{\phi}^*$ is governed by

$$\bar{H}\ \dot{\boldsymbol{\phi}}^* = \left(\bar{A} + \bar{B}K^*\right) \boldsymbol{\phi}^*,$$

which is stable and impulse free. Furthermore, the minimum value of J is

$$J_{\min} = \boldsymbol{\phi}_0^T \left(P^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} I \\ O \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I & O \end{pmatrix} P^{-1} \boldsymbol{\phi}_0.$$

4. Conclusion

A sufficient condition for existence of the optimal control of the LQ control problem subject to singular system under disturbance has been established. This result constitute a contribution in the optimal control area.

Acknowledgements

The authors would like to thank to FMIPA Andalas University for supporting through the grant PNBP 01/UN.16.03.D/PP/FMIPA/2017.

References

[1] C. Beauthier and J. J. Winkin (2010), LQ Optimal Control of Positive Linear System, *Optimal Control Application and Methods*, 31:547–566.

[2] Chen, L., 2006, Singular linear quadratic performance with the worst disturbance rejection for descriptor systems, Journal of Control Theory and Applications, 3: 277–280

[3] Muhafzan, 2016, Positive Stabilization of Linear Differential Algebraic Equation System, *International journal of differential equations*, 2016 Article ID 6346780.

[4] Stefanovski, J. 2006. Lq Control of Descriptor Systems by Cancelling Structure at Infinity, *International journal of Control*, 79(3):224–238

[5] Virnik, E., 2008, Stability analysis of positive descriptor systems, *Linear algebra and its Applications,* 429 2640–2659.

[6] C. Wu, X. Wang, K. L. Teo and L. Jiang, (2014), Robust Optimal Control of Continuous Linear Quadratic System Subject to Disturbances, in Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, 11-34.

[7] Antoniou, S., Karempetakis, A. and Vardulakis, A., 1997, A Classification of the Solutions of Nonregular, Discrete Time Descriptor Systems, *Proceeding of 36th Conference Decision& Control,* San Diego, USA.

IPCSM'17
ICSTEM'17

MINISTRY OF EDUCATION MALAYSIA

UNIVERSITI PENDIDIKAN SULTAN IDRIS
SULTAN IDRIS EDUCATION UNIVERSITY

FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
FSM UPSI
NURTURING CREATIVE MINDS

NATIONAL STEM MOVEMENT

Certificate of Participation

Presented to

MUHAFZAN
(ORAL)

For Your Outstanding Contributions in the

5th INTERNATIONAL POSTGRADUATE CONFERENCE ON SCIENCE AND MATHEMATICS 2017
IPCSM'17
&
INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCIENCE, TECHNOLOGY, ENGINEERING AND MATHEMATICS
ICSTEM'17

7 – 9th October 2017
Convention Hall, E-Learning Building,
Universiti Pendidikan Sultan Idris,
Tanjong Malim, Perak, Malaysia

Professor Dato' Dr. Mohammad Shatar Sabran
Vice Chancellor
Universiti Pendidikan Sultan Idris

Tan Sri Dr. Khair Mohamad Yusof
Director General of Education
Ministry of Education Malaysia