

Universidad Carlos III de Madrid
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos



PROYECTO FIN DE CARRERA
Ingeniería Industrial

**Verificación experimental de la analogía de la
emisión estimulada de Hawking con ondas
gravitatorias en un canal**

Autor: María Vázquez Torres

Tutor: Javier Rodríguez Rodríguez

Índice

Resumen	5
Abstract	7
1.Introducción	9
1.1 Teoría de los agujeros negros	9
1.2 Analogías de un agujero negro	13
2. Objetivos y esquema del proyecto.	15
2.1 Objetivos	15
2.2 Esquema del proyecto	16
3. Comportamiento teórico de las ondas de gravedad	17
3.1 Flujo base en un canal abierto	17
3.2 Relación de dispersión	21
4. Instalación experimental	27
5. Procedimiento experimental	30
5.1 Tratamiento digital de imagen y procesado de señal	30
5.2 Obtención de velocidades	40
5.3 Validación instalación experimental	43
6.Resultados y discusión	47
Serie 1	48
Serie 2	53
Sesión 3	63
7. Conclusiones y mejoras.	71
7.1 Conclusiones	71
7.2 Mejoras	74
Bibliografía	77

Resumen

Una de las más fascinante aportaciones de la teoría de la relatividad es la predicción de los agujeros negros. Un agujero negro es una región del espacio-tiempo que debido a la existencia de una gran concentración de masa en su interior impide que nada pueda escapar del mismo, ni siquiera los fotones de la luz. De igual forma se predicen sus opuestos, los agujeros blancos, regiones del espacio-tiempo en las que nada puede penetrar.

Tan fascinantes como su predicción matemática son algunas de las propiedades postuladas teóricamente sobre ambos (las propiedades demostradas para agujeros negros son fácilmente demostrables para agujeros blancos y viceversa). Posiblemente una de las más conocidas, y a su vez objeto de mayor polémica, sea la radiación de Hawking. La radiación de Hawking consiste en la emisión de partículas, posibilitada por las fluctuaciones cuánticas en el vacío y con una distribución idéntica a la de un cuerpo negro, por parte del horizonte de sucesos de un agujero negro. Hecho que permite asociar una temperatura propia al agujero negro, relacionando los conceptos cuánticos con la relatividad general en el estudio de los agujeros negros y estableciendo una relación entre gravedad y termodinámica.

El problema de estas y otras propiedades reside en la dificultad de ser corroboradas experimentalmente, pues desafortunadamente parece improbable que podamos tratar con agujeros negros en el laboratorio. Por este motivo surgen las analogías de agujeros negros (y blancos). En ellas se usan fenómenos que obedecen a ecuaciones de movimiento similares a las de los campos en las proximidades del mismo para así estudiar algunas de las propiedades más singulares de éstos. Existen diferentes propuestas de analogías, aunque en nuestro caso trabajaremos con la analogía de ondas gravitatorias, para ser precisos con la analogía de ondas gravitatorias para un agujero blanco. En concreto nuestro proyecto consistirá en el diseño y puesta a punto de una instalación experimental para el estudio de ondas de gravedad, a la vez que se detallan las técnicas empleadas para su generación y caracterización. En esta instalación se reproducirán los experimentos publicados en el artículo de Weintfurtner y otros, *Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system* [Ref.2]. El objetivo de la publicación es demostrar la naturaleza térmica del proceso así como mostrar la estrecha relación entre las emisiones estimuladas y espontáneas demostrando la generalidad del proceso de Hawking. Para ello se recurre a un canal abierto provisto de un obstáculo fuselado que crea sobre él una región de alta velocidad (flujo supercrítico) donde las ondas largas, que se propagan aguas arriba, serán bloqueadas reflejándose como ondas cortas. El proceso experimental consiste en forzar las fluctuaciones cuánticas a modo de ola incidente (ondas largas) en dicho canal. La ola se propagará hasta llegar a una región donde, como ya hemos dicho, se le impida el paso de forma intencionada, lo que la hará reflejarse transformándose en dos nuevas olas, a las que denominaremos reflejadas. Estas olas son análogas al par partícula-antipartícula creado en las inmediaciones del horizonte de sucesos, causantes de la radiación de Hawking.

La reproducción de dichos resultados no solo nos permite contrastar los mismos, si no que además sirve de ejemplo para enumerar el procedimiento a seguir, tanto en el campo del análisis de imagen como en el de señal, para la correcta caracterización de ondas de gravedad en un canal. Este procedimiento consiste en la metodología para el filmado de las imágenes, en las que se empleará iluminación a contraluz y fluorescencia inducida por láser. También se detallará los algoritmos de umbralización y detección de bordes necesarios para la detección del borde de la superficie libre y finalmente se

aplicarán las técnicas de autocorrelación y periodograma de Welch para el análisis de la señal.

Nuestros resultados mostrarán, a partir del análisis de señal mencionado, las longitudes de onda identificadas para las tres ondas implicadas comentando su adecuación a la relación de dispersión propia de las ondas de gravedad en las citadas condiciones. Desafortunadamente, aunque el propósito inicial del trabajo era reproducir totalmente los resultados de Weintfurtner y otros consiguiendo validar el carácter universal de la radiación de Hawking, debido a las limitaciones del canal, que también se explicarán de forma detallada, esto no ha sido posible. Weintfurtner y otros validan experimentalmente la estrecha relación entre el carácter estimulado y espontáneo de la emisión a partir de normas basadas en la amplitud de las dos ondas reflejadas, en nuestro caso ante la dificultad de caracterizar simultáneamente estas dos ondas no hemos podido proceder al cálculo de las mismas. No obstante se mostrarán las longitudes de onda que sí se han conseguido identificar y se enumerarán las mejoras con el propósito de medir las longitudes de onda restantes de cara a próximos trabajos

Abstract

One of the most fascinating predictions of the theory of general relativity is the potential existence of black holes –i.e. space-time regions from which nothing is able to escape due to the large concentration of mass inside, not even light photons. Similarly, the theory also postulates white holes, space-time region where nothing can penetrate.

As fascinating as their mathematical prediction are some of the properties theoretically postulated (black holes properties are easily translated to white holes and vice versa). Possibly the best known, and most controversial, is Hawking radiation. Hawking radiation is black body radiation predicted to be emitted by black holes, due to quantum effects near the event horizon. This fact allows to define a black hole temperature, that relates quantum concepts to general relativity applied to the study of black holes and to establish a relationship between gravity and thermodynamics.

The problem with these and other properties lie in the difficulty of their experimental verification, because unfortunately it seems unlikely that one can observe black holes in the laboratory. Analogs, which obey similar dynamic field equations of around the black holes, raise the possibility of demonstrating some of the most unusual properties of black holes in the laboratory. There are different proposals for analogies, but in our case we will work with the analogy of gravity waves that, to be precise, is related to white holes. Specifically, we will design and develop an experimental facility for the study of gravity waves, carefully detailing the techniques used for their generation and characterization. In this facility we will aim to reproduce the experiments reported by Weintfurtner and others in Measurement of Stimulated emission in an analogue Hawking system [Ref.2]. The aim of the publication is to demonstrate the thermal nature of the conversion process for this system. Given the close relationship between the stimulated and spontaneous emission, demonstrating this finding supports the generality of Hawking's process. This is done in an open water channel, in which a streamlined obstacle has been placed whose role is to generate a section of high velocity (supercritical flow) where the long waves, propagating upstream towards this region, are blocked and converted into short waves. The experimental process consists of forcing the quantum fluctuations as an incident wave (long wave) in the channel. The wave travels upstream until it reaches a region where, as we have said, it is prevented from passing. At this section it will reflect transformed into two new waves, which we will call reflected waves. These waves are analogous to the particle-antiparticle pair created near the event horizon, causing the Hawking radiation.

The reproduction of these results not only allows us to validate the findings of Ref. 2, but also serves as an application to develop techniques to characterize gravity waves, both in the field of image processing and signal analysis. This procedure involves methodology for the filming of images to be used in backlight and laser induced fluorescence. Also we develop threshold and edge detection algorithms needed to detect the free surface. Finally, we apply the autocorrelation and Welch periodogram methods for signal analysis.

We report the results of our attempts to characterize the three waves interplaying in the theory, and the goodness of the theoretical dispersion relation to accommodate our measurements. Unfortunately, although the initial purpose of the work was to reproduce Weintfurtner & others' results and validate the generality of Hawking process, due to the limitations of the channel, which are explained in detail, this has not been possible. Weintfurtner and others validated experimentally the close relationship between the stimulated and spontaneous emission from standards based on the amplitude of the two

reflected waves. In our case, due to the difficulty of characterizing these two reflected waves simultaneously we could not proceed to the calculation just mentioned. However, we have succeeded in identifying some of the waves predicted by the theory. Furthermore, improvements are listed with the purpose of measuring the remaining wavelengths in future works.

1 .Introducción

1.1 Teoría de los agujeros negros

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo con propiedades únicas, debidas a la existencia de una gran concentración de masa en su interior. La más relevante posiblemente sea la aparición de un enorme aumento de la densidad dentro de sí mismo, lo que genera un campo gravitatorio tal que ninguna partícula material, ni siquiera los fotones de luz, pueden escapar de dicha región. Si bien el término fue acuñado en 1969 por John Wheeler el concepto se barajaba siglos atrás.

Una estrella se forma cuando una gran cantidad de gas, principalmente hidrógeno, se colapsa sobre sí mismo por la atracción gravitatoria. La atracción provoca los choques entre moléculas del gas que calientan el mismo hasta la formación de Helio. El calor generado en la reacción no solo provoca que la estrella brille si no que también aumenta su presión. El aumento de presión compensa la acción de la gravedad de modo que la estrella alcanza el equilibrio. La estrella permanecerá en equilibrio, sin contraerse, mientras tenga combustible para seguir alimentando las reacciones nucleares, pero al acabar el combustible volverá a contraerse.

Cuando se contrae, la estrella puede encontrar un nuevo estado de equilibrio compensando la atracción de la gravedad con la repulsión que surge del principio de exclusión. La fuerza de exclusión tiene un límite y por tanto habrá una masa máxima capaz de alcanzar el equilibrio. Esta masa es conocida como límite de Chandrasekhar. Por encima de esa masa se han planteado muchos escenarios, la explosión, el desprendimiento de masa o la formación de agujeros negros.

Aunque su formación es un proceso complejo, sin duda uno de los aspectos que mayor interés despiertan de los agujeros negros es su predicción matemática en la resolución de las ecuaciones de la relatividad general. En 1915 Schwarzschild obtiene por primera vez una solución exacta de las ecuaciones de Einstein para un cuerpo esférico:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

Dónde:

- τ es el tiempo propio,
- c es la velocidad de la luz,
- t es la coordenada temporal,
- r, θ, φ son el radio, la longitud y la colatitud en coordenada esféricas,
- r_s es el denominado posteriormente radio de Schwarzschild:

$r_s = 2GM/c^2$, donde G es la constante de gravitación universal y M la masa aparente del cuerpo.

Sin profundizar en la resolución de estas ecuaciones podemos observar dos singularidades matemáticas correspondientes a $r = r_s$ y a $r = 0$. La primera, $r = 0$ es una singularidad física, un punto del espacio tiempo en el cual la curvatura del espacio tiempo se hace infinita. Sin embargo, $r = r_s$ es una singularidad de coordenadas, podemos decir que el problema proviene de una mala elección de las mismas que se ha resuelto típicamente cambiando el sistema de referencia.

Aunque en principio no se aceptó el carácter físico de las singularidades, posteriores resoluciones de las ecuaciones de la Relatividad General así como los trabajos de Hawking y Penrose publicados en 1969 y distintas observaciones cosmológicas han logrado cierta unanimidad sobre la existencia de las singularidades espacio-temporales, aunque ésta, hoy en día, todavía no es total.

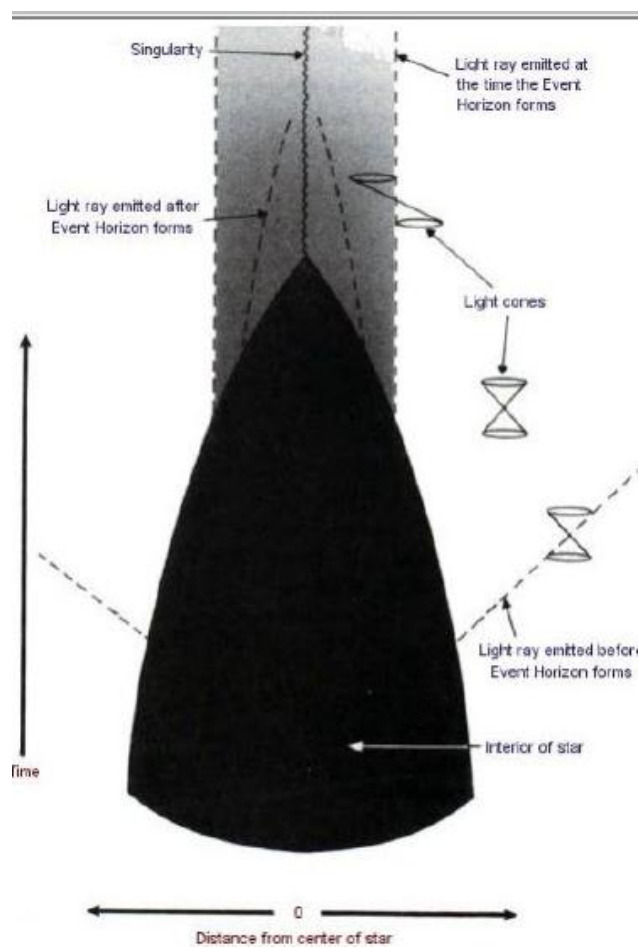


FIG. 1 **Comportamiento de los conos de luz en el horizonte de sucesos.** La imagen publicada por Stephen Hawking en *Historia del tiempo: del big bang a los agujeros negros* muestra la inclinación que sufren los conos de luz cuando se aproximan a un agujero negro.

En 1939 Oppenheimer explica el concepto de formación de los agujeros negros que en esencia mantenemos, de forma simplificada podemos resumirlo así: el campo gravitatorio de una estrella modifica los caminos de los rayos de luz en el espacio-tiempo. Los conos de luz, que indican los caminos seguidos en el espacio y en el tiempo por destellos emitidos desde sus vértices, se inclinan ligeramente hacia dentro cerca de la superficie de la estrella. Al contraerse la estrella, el campo gravitatorio de la superficie es más intenso y los conos se inclinan más hacia dentro, al continuar la reducción llega un punto crítico en el que la luz ya no puede escapar. Al no poder viajar nada por encima de la velocidad de la luz nada podrá escapar del campo gravitatorio. Por lo tanto, se tiene un conjunto de sucesos, una región de espacio-tiempo, desde donde no se puede escapar y alcanzar a un observador lejano. Esta región es a la que llamamos agujero negro y se denomina horizonte de sucesos a su frontera. La velocidad de escape de esta superficie es la velocidad de la luz.

El agujero negro es de por sí un concepto fascinante como lo son muchas de sus propiedades, una de las más destacadas es la Radiación de Hawking que ha originado este proyecto. La radiación de Hawking es en la actualidad objeto de estudio y debate. Parte de esta merecida atención surge de relacionar los conceptos cuánticos con la relatividad general en el estudio de los agujeros negros estableciendo una relación entre la gravedad y la termodinámica.

Uno de los problemas que sufría el concepto de agujero negro era la violación del segundo principio de la termodinámica, ante la imposibilidad del agujero de verificar el cambio de entropía producido tras absorber un cuerpo. Esto es debido a que la entropía no puede expresarse en función de la masa, la carga y el momento angular del agujero, que por el denominado Teorema de la Unicidad de Carter-Robinson, sabemos, son las únicas propiedades que puede tener todo agujero negro.

Bekenstein apoyándose en el teorema del área de Hawking establece que los agujeros negros poseen entropía propia y ésta es función del área del horizonte de sucesos. En 1972, publica su tesis doctoral, donde compara la variación de energía de un sistema termodinámico (2) con la variación de energía de un agujero negro (3), expresadas en unidades de Planck, llegando a la conclusión de que el agujero negro debe tener una temperatura propia.

$$\delta E = T\delta S + \Omega\delta J + \Phi\delta Q \quad (2)$$

Donde E es la energía del sistema, con un potencial Φ y rotando a una velocidad angular Ω .

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H\delta J + \Phi_H\delta Q \quad (3)$$

Y donde κ es le denominada gravedad superficial del agujero negro, Φ_H su potencial eléctrico superficial y Ω_H su velocidad angular.

Esta conclusión, en principio objeto de mucho rechazo, conduciría al cuerpo a radiar para alcanzar el equilibrio termodinámico lo que contradecía una de las características

esenciales del agujero, pues nada puede escapar de él. La solución a esta paradoja fue obtenida por Hawking en 1975 al introducir los efectos cuánticos en la solución de las ecuaciones de la relatividad general. Los agujeros negros radian aún después de haberse desprendido de su momento angular y lo hacen a un ritmo estacionario y con un espectro térmico propio de un cuerpo negro.

La explicación de la emisión de partículas se basa en el principio de incertidumbre por el cual se establece que el vacío total no existe, existe el vacío cuántico donde se producen pequeñas fluctuaciones de energía provocadas por pares de partículas virtuales. Estos pares de partículas denominados partícula y antipartícula tendrán una energía positiva y el otro negativa. Tienen una vida muy corta y se buscan para aniquilarse. Ahora bien, en las inmediaciones de un agujero negro, los fuertes gradientes de gravedad, hacen posible que la partícula de energía negativa sea absorbida por éste convirtiéndose en una partícula real. Su compañera tiene la posibilidad de escapar de las cercanías del horizonte de sucesos también como partícula real, de modo que un observador lejano vería una emisión neta de partículas desde el horizonte del agujero.

En concreto, Hawking consigue la expresión, en unidades de Planck, para el número de partículas creadas en el modo de frecuencia ω y que son capaces de atravesar el horizonte de sucesos:

$$\langle N_w \rangle = \frac{\Gamma_w}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} \pm 1} \quad (4)$$

Puede verse que la expresión obtenida por Hawking se corresponde a una distribución de Bose-Einstein con una temperatura asociada $T = \hbar\omega/2\pi$. Para un agujero de Schwarzschild, con $\kappa = 1/4M$, toma el valor $T = 1/8 \pi M$ siendo M la masa del agujero negro.

En unidades del sistema internacional y en función de la masa solar (M_0) la ecuación resulta:

$$T = 6,171 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_0}{M} \right)$$

1.2 Analogías de un agujero negro

Desafortunadamente parece improbable poder tratar con agujeros negros en el laboratorio. Las analogías de agujeros negros, también blancos, son propuestas por primera vez por Unruh en 1981. En ellas se usan fenómenos que obedecen a ecuaciones de movimiento similares a las de los campos en las proximidades de un agujero negro para estudiar algunas de las propiedades más singulares de éstos.

La analogía sónica establecida en esta primera publicación se basa en la observación de la propagación de las ondas de sonido en un fluido, que bajo las condiciones adecuadas, se rige por la misma ecuación de onda que un campo escalar en un espacio-tiempo curvo. El horizonte acústico, que se produce si la velocidad del fluido supera la velocidad del sonido dentro del líquido, actúa sobre las ondas de sonido del mismo modo que lo hace el horizonte del agujero negro en, por ejemplo, las ondas escalares (como las electromagnéticas).

Tras la propuesta original, las analogías sónicas han sido objeto de varias investigaciones. Pero, aunque la cinemática de las ondas que se propagan dentro de los análogos sónicos de agujeros negros y blancos se rige por las mismas ecuaciones que en un espacio-tiempo curvo, la dinámica del flujo base en los mismos difiere de las leyes de la gravedad de Einstein. En este sentido, durante el trabajo con analogías debemos separar los efectos dinámicos que afectan al flujo base de los fenómenos cinemáticos que experimentan la onda.

Además de las analogías sónicas existen otras propuestas sobre modelado experimental de agujeros negros basado en la propagación de la luz en un dieléctrico y de otros tipos de onda en Helio líquido. Estos escenarios superan algunas de las dificultades propias de las analogías sónicas pero añaden otras distintas.

El reto de conseguir un agujero negro análogo reside en disponer un medio donde las ondas se detengan al alcanzar una determinada región. En las analogías donde el medio es el encargado de arrastrar las ondas hasta la velocidad de onda requerida, se necesita una velocidad lo suficientemente lenta para que el experimento pueda ser contemplado. En el caso del sonido su velocidad depende del estado termodinámico del fluido, en el caso de la luz, la velocidad de los fotones depende de la permitividad y permeabilidad del medio. En ambos casos parámetros difíciles de controlar.

Para superar estos inconvenientes en 2002 Schützhold y Unruh [Ref. 1] sugieren las ondas de gravedad en un canal abierto con agua como unas buenas candidatas. Puede demostrarse que las ondas de gravedad en un flujo también siguen las mismas ecuaciones de onda que un campo escalar en un espacio curvo. Además la velocidad de las ondas es fácilmente ajustable mediante la variación de la profundidad del canal siendo el flujo también fácilmente manipulable. Debido a las bajas velocidades de las ondas de gravedad los efectos cuánticos no serán observables pero si muchas de las características clásicas de los agujeros negros como la coexistencia de ondas con normas definidas positivas y negativas en el horizonte de sucesos, relacionadas estrechamente con la evaporación cuántica. Adicionalmente, la relación de dispersión correspondiente a altos números de onda puede ser manipulada de manera sencilla, lo que permite explorar la influencia de tales cambios en los efectos del horizonte.

Ya en el año 2010 la publicación titulada *Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system* [Ref. 2] plantea la posibilidad de demostrar experimentalmente la

estrecha relación entre las emisiones espontáneas y simuladas, en concreto las referentes a ondas de gravedad, validando el carácter genérico del proceso descrito por Hawking.

El proceso experimental propuesto en este artículo consiste en forzar las fluctuaciones cuánticas a modo de ola incidente en un canal abierto. La ola se propagará hasta llegar a una región donde se le impida el paso de forma intencionada, lo que la hará transformarse en dos nuevas olas, a las que denominaremos reflejadas. Estas olas son análogas al par partícula-antipartícula creado en las inmediaciones del horizonte de sucesos.

La analogía que acabamos de exponer realmente es propia de un agujero blanco. Un agujero blanco se define como el reverso temporal de un agujero negro: el agujero negro absorbe materia, nada escapa de su horizonte de sucesos. En cambio el agujero blanco la expulsa, nada penetra en el horizonte de sucesos. Teóricamente las propiedades demostrables para un agujero blanco pueden extenderse a un agujero negro.

Una de las dificultades que presenta la derivación del efecto Hawking es el papel fundamental que parecen jugar las altas frecuencias, o equivalentemente las longitudes de onda cortas, en los pasos intermedios de la misma. Determinadas integrales se extienden a dichas frecuencias que se encuentran por encima de la escala de Planck y en consecuencia fuera del rango de aplicabilidad de la teoría cuántica de espacios curvos. Este es el conocido como problema trans-planckiano. De hecho, en términos de coeficientes de Bogoliubov, que en nuestro contexto teórico se emplean para cuantificar la amplitud relativa de las ondas reflejadas, no es evidente como introducir un corte en el formalismo para tratar de eliminar la física transplanckiana siendo el resultado térmico el esperado. En el caso de las ondas de gravedad este corte aparece de forma natural, por lo que la verificación experimental obtenida por Weinfurtner y otros [Ref.2], además sugiere la universalidad termodinámica del proceso de Hawking aun enfrentándose adicionalmente a otros fenómenos físicos del sistema tales como turbulencia, viscosidad y no linealidades.

2. Objetivos y esquema del proyecto.

2.1 Objetivos

La motivación de este proyecto es reproducir los resultados del artículo *Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system* publicado en 2010 por Weinfurter y otros [Ref.2]

Como ya citamos en la introducción, en 2002 Unruh muestra una analogía matemática entre el comportamiento de un campo cuántico en las inmediaciones del horizonte de sucesos y el comportamiento de las ondas de gravedad en un canal abierto. Valiéndose de ésta base teórica, Weinfurter y otros se proponen validar experimentalmente la relación entre la amplitud de las normas de los coeficientes de Bogoliubov correspondientes a un par de excitaciones de campo (partículas) creadas a una cierta frecuencia f . Los coeficientes de Bogoliubov son una medida de la energía asociada a estas excitaciones predichas por Hawking. Conviene resaltar que en la analogía de las ondas gravitatorias, las partículas se convierten en paquetes de ondas.

La relación de las normas de los coeficientes de Bogoliubov α_f, β_f cumple la siguiente ecuación a una determinada frecuencia f :

$$\frac{|\beta_f|^2}{|\alpha_f|^2} = \exp\left(\frac{-4\pi^2 f}{g_H}\right) \quad (5)$$

Donde g_H es el valor de la gravedad en la superficie del agujero negro.

El objetivo es demostrar la naturaleza térmica del proceso así como mostrar la estrecha relación entre las emisiones simuladas y espontáneas demostrando la generalidad del proceso de Hawking. Para ello se recurre a un canal abierto provisto de un obstáculo fuselado que crea sobre él una región de alta velocidad donde las ondas largas que se propagan aguas arriba serán bloqueadas reflejándose como ondas cortas. Por el modelo teórico sabemos existe una norma análoga a la norma propia de los coeficientes de Bogoliubov calculada a partir de las amplitudes de las olas que permitirá la verificación experimental a varias frecuencias.

La reproducción de resultados no solo permite contrastar los mismos si no que se adquiere un *know-how* muy valioso durante su realización.

En este sentido ubicamos el segundo objetivo: dotar al Grupo de Mecánica de Fluidos de la Universidad Carlos III de Madrid de una instalación y una metodología para el estudio de ondas de gravedad. Para ello:

- Se diseñará el montaje experimental.
- Se detallarán las técnicas de medida para su caracterización.
- Se implementarán algunas de las técnicas más comunes en el tratamiento de imágenes y señal.

2.2 Esquema del proyecto

Una vez establecidos los objetivos fijamos el esquema de proyecto que nos permita alcanzarlos.

Para comprobar la relación en (5) en primer lugar debemos entender el comportamiento de las ondas de gravedad en un canal abierto ante un obstáculo con especial atención a la relación de dispersión. Todo ello se desarrollará en el capítulo 3.

Una vez entendido el comportamiento de las ondas de gravedad y los parámetros a los que es sensible su curva de dispersión se diseñará la instalación necesaria para su control, Cap.4.

El siguiente capítulo (Cap.5) versará sobre el proceso experimental para establecer la relación entre los coeficientes de Bogoliubov. El proceso experimental persigue medir las longitudes de ondas de la onda incidente y sus dos reflejadas. Con su medida verificar el cumplimiento de la relación de dispersión teórica para posteriormente hallar las amplitudes de las ondas y calcular las normas equivalentes. Este proceso tendrá lugar a varias frecuencias. La medida de las longitudes de onda se obtiene a partir de la grabación de secuencias de imágenes. En concreto se rodarán dos tipos de secuencias, que suponen tres series, con dos tipologías de iluminación distintas, una serie con la primera tipología y dos con la segunda, a las que posteriormente se someterá a un tratamiento de imagen y finalmente de señal como se detalla en el apartado 5.1.

Además el capítulo 5 incluye un apartado de detalle de cálculo del campo base de velocidades en el canal y otro de validación experimental de la instalación.

Finalmente se expondrán los resultados (Cap.6), se obtendrán las conclusiones y por último se propondrán las medidas de mejora de la instalación (Cap.7).

3. Comportamiento teórico de las ondas de gravedad.

3.1 Flujo base en un canal abierto

Una vez propuesta la analogía entre el comportamiento de las partículas implicadas en la radiación de Hawking y el de las ondas de gravedad se hace necesario su validación teórica. El modelo en el que se basa la misma fue publicado en 2002 Schützhold y Unruh [Ref.1] pero la complejidad de la matemática cuántica necesaria excede el propósito de este proyecto, razón por la cual no se expondrá de forma detallada. Sin embargo sí que haremos hincapié en la teoría de ondas gravitatorias más relacionada con el carácter experimental de este proyecto.

Como ya hemos citado, y se tratará con más detalle en los capítulos posteriores, el escenario del proceso experimental es un canal hidrodinámico en el que se genera una onda, a la que denominaremos incidente. La onda viajará a contracorriente hasta llegar a una región de alta velocidad que le impida el paso descomponiéndose en dos nuevas ondas, a las que denominamos reflejadas, que surgen ante la necesidad de propagar en la dirección de la corriente, la misma cantidad de movimiento y energía mecánica que portaba la onda incidente. El propósito de este capítulo es caracterizar el flujo en el que tiene lugar el experimento así como establecer las relaciones entre las ondas incidentes y reflejadas.

En primer lugar abarcaremos la caracterización del flujo base en ausencia de perturbaciones. Como primera aproximación al problema partimos de un flujo, inicialmente uniforme, en un canal horizontal que se enfrenta a un pequeño obstáculo bidimensional.

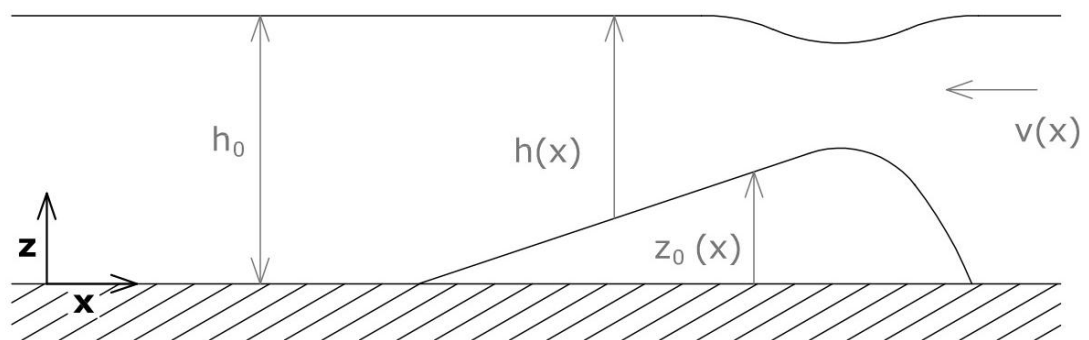


FIG. 2 Esquema del modelo sin perturbación. En primera aproximación describiremos teóricamente el comportamiento del flujo base en un canal abierto ante un obstáculo suave.

Además suponemos que el obstáculo tiene pendientes lo suficientemente pequeñas para considerar que todas las secciones transversales varían lentamente, lo que matemáticamente podemos escribir como:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1 \quad (6)$$

En estas condiciones la ecuación de continuidad resulta:

$$\frac{\partial vh}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad vh = q \quad (7)$$

Siendo q el caudal por longitud de anchura.

Al ser un flujo estacionario con viscosidad despreciable, densidad constante y bajo los efectos de fuerzas másicas derivadas de un potencial podemos plantear la ecuación de cantidad de movimiento en forma de ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}v^2 + g(h + z_0) + \frac{Pa}{\rho} \right) = 0 \quad (8)$$

Resolviendo y particularizando para una sección aguas arriba del obstáculo:

$$\frac{q^2}{2gh} + h + z_0 = \frac{q^2}{2gh_0} + h_0 \quad (9)$$

Podemos rescribir la ecuación como:

$$\frac{q^2}{2gh} + h = \epsilon_0 - z_0 \quad (10)$$

Donde ϵ_0 es un parámetro asociado a la energía total del fluido.

Al representar esta ecuación cúbica hallamos un máximo para z_0 (z_{\max}) en función de la altura:

$$\frac{\partial (\epsilon_0 - z_0)}{\partial h} = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{q^2}{gh_c^3} + 1 = 0 \Rightarrow h_c = (q^2/g)^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

Sustituyendo h_c en (10):

$$z_{max} = \epsilon_0 - \frac{3}{2}h_c \quad (13)$$

La bibliografía suele representar la curva solución adimensionalizada en función de h_c , obteniendo:

$$\frac{\epsilon_0 - z_0}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_c}{h}\right)^2 + \left(\frac{h}{h_c}\right) \quad (14)$$

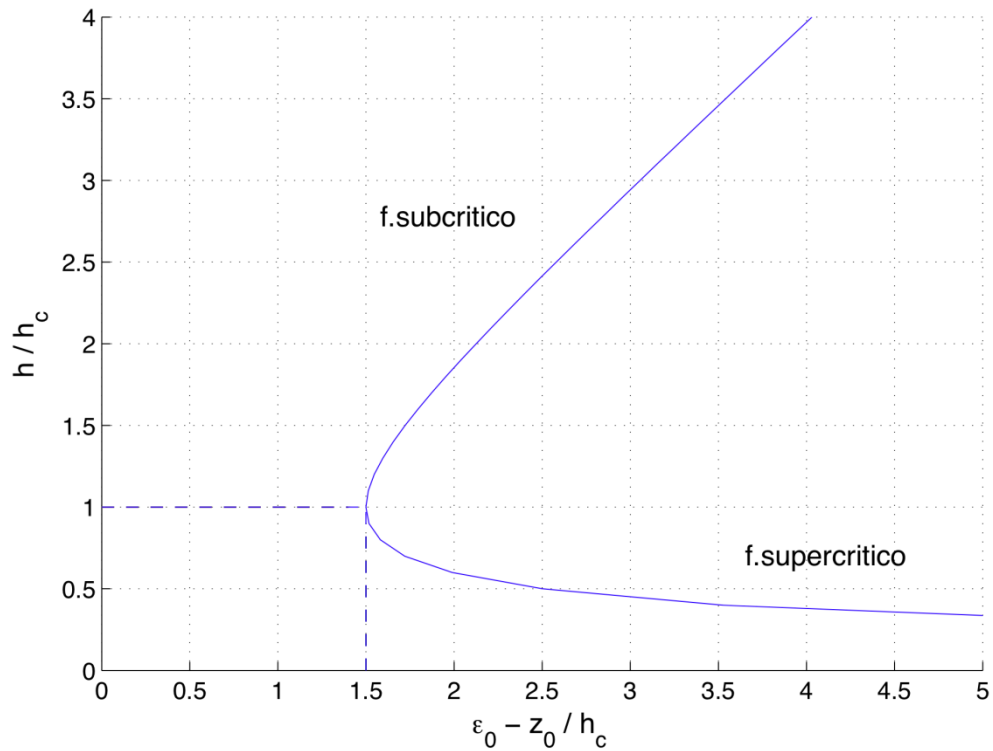


FIG. 3 **Altura de la corriente para distintas altura del fondo en la transición.** Representación gráfica de (14) donde puede apreciarse la rama correspondiente al flujo supercrítico y al subcrítico. Queda marcado el punto de transición entre ambas zonas, en este punto el número de Froude vale 1.

A la vista de la representación podemos destacar 2 puntos,

- En primer lugar hay un valor máximo de z_0 (z_{\max}) para el que las ecuaciones tienen solución. Físicamente esto se traduce como la imposibilidad de hacer pasar un caudal por encima de una elevación del fondo, z_0 . El fluido de forma natural tendería a acumular agua aguas arriba del obstáculo hasta que en la cima del obstáculo se alcance h_c o bien se frenaría la corriente disminuyendo q . Dicha acumulación se propagaría contracorriente dando lugar a un resalto hidráulico.

- Para cada valor de z_0 menor de z_{\max} la curva admite dos valores de h como soluciones de la ecuación (10). La rama superior se corresponde con una corriente subcrítica y la inferior con una corriente supercrítica. En la rama subcrítica al aumentar z_0 disminuye h , es decir, la corriente remonta el obstáculo presentando una depresión mientras que en la rama supercrítica un aumento de z_0 se traduce con un aumento de h , es decir, el flujo remonta en esta ocasión el obstáculo presentando una elevación.

El concepto de supercrítico y subcrítico podrá entenderse con mayor precisión en el siguiente apartado del capítulo.

3.2 Relación de dispersión

Completando el planteamiento del problema añadimos una perturbación al sistema propuesto en la primera aproximación.

La superficie libre de un líquido en presencia de un campo gravitatorio, escenario de nuestro problema, se encuentra animada generalmente por un movimiento de carácter ondulatorio. Una región de la superficie puede almacenar energía potencial elevando su altura cuando el líquido adyacente ejerce un trabajo sobre ella y de igual manera retornarla al fluido al disminuir su elevación. Por tanto, aunque la forma de equilibrio de la interfase gas-líquido sometido a un campo gravitatorio es plana, una pequeña perturbación genera un movimiento ondulatorio a una velocidad determinada.

Consideramos como en el caso anterior un dominio infinito ocupado por un líquido de densidad ρ bajo la acción de la gravedad, limitado inferiormente por una superficie sólida, con altura del fluido h . Además seguimos considerando viscosidad despreciable.

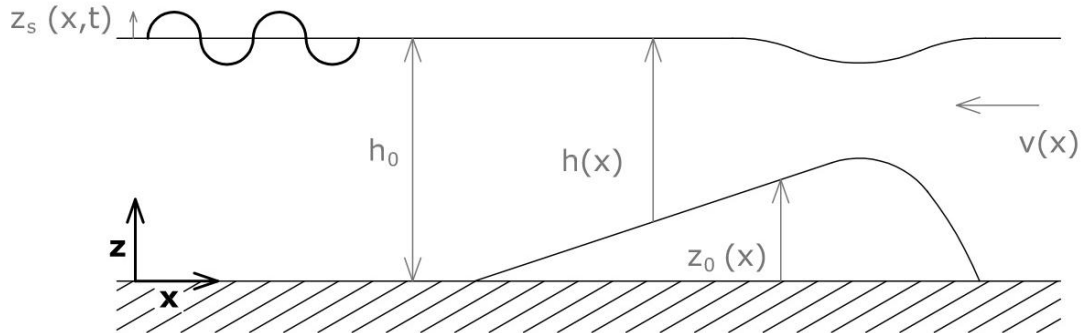


FIG.4 **Esquema del modelo añadiendo una perturbación.** Al estudio del escenario de la primera aproximación se le suma una perturbación de pequeña amplitud

Para la mejor manejabilidad del problema partimos de las siguientes hipótesis:

En primer lugar la perturbación se corresponderá con ondas lineales, es decir:

$$z_s \ll h \quad (Ha)$$

Además entenderemos que los cambios en el flujo se producen en distancias mucho mayores a la longitud de onda de la perturbación. Esto se traduce en que podemos tratar z , h_0 y v como constante en un primer paso. (Hb)

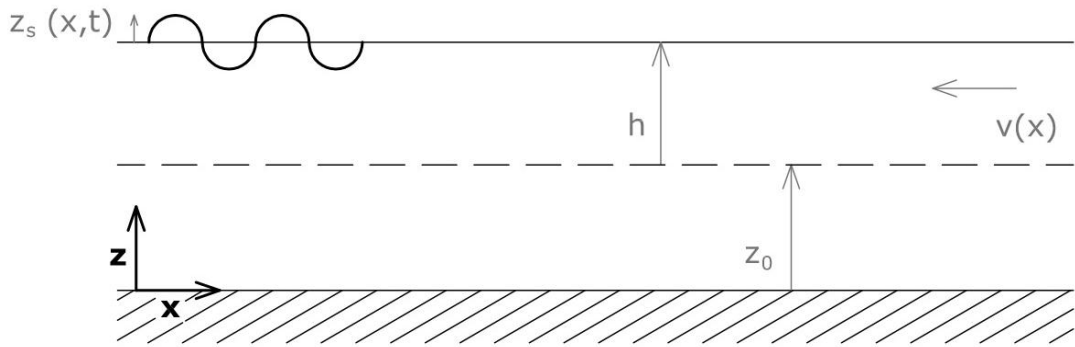


FIG.5 **Esquema del modelo simplificado.** Representación gráfica del modelo representado en fig.4 tras aplicarle las hipótesis Ha y Hb.

El problema queda reducido en consecuencia a un problema de propagación de ondas superficiales lineales en un flujo uniforme cuyo esquema se muestra en fig.5.

Al tratarse de un campo de velocidades irrotacional la velocidad deriva de un potencial y puede escribirse de la forma:

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_x + \nabla \phi \quad (15)$$

Aplicamos la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ para un líquido obteniendo:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (16)$$

Como condiciones de contorno imponemos impermeabilidad en el suelo, $z=0$:

$$v_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_z \phi = 0 \quad (17)$$

Y como condiciones de contorno en la superficie libre, $F(z, x, t) \equiv z - z_s(x, t) - h = 0$ imponemos que la superficie es una superficie fluida:

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = 0 \quad (18)$$

$$\partial_t z_s + v_0 \partial_x z_s + \partial_x \phi \partial_x z_s - \partial_z \phi = 0 \quad (19)$$

Finalmente, como en la primera aproximación del problema escribimos la ecuación de cantidad de movimiento en su forma de Bernoulli evaluada en la superficie, $z = h$ para dos secciones, una en el infinito aguas arriba donde no existe onda, y otra dentro del campo perturbado:

$$\rho gh + \frac{1}{2}\rho v_o^2 = \rho gh + \rho g z_s + \frac{1}{2}\rho(v_o \vec{e}_x + \nabla\phi)^2 + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (20)$$

Simplificando y agrupando términos:

$$g z_s + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + v_o \partial_x \phi + \partial_t \phi = 0 \quad (21)$$

Antes de proceder a la resolución de las ecuaciones apoyándonos en Ha podemos linealizar las mismas. Consideramos despreciable los términos de segundo orden en z_s y ϕ . Pudiendo expresar el problema en su totalidad como:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (22.a)$$

$$\partial_z \phi = 0, \text{ en } z = 0 \quad (22.b)$$

$$\partial_t z_s + v_o \partial_x z_s - \partial_z \phi = 0, \text{ en } z = h_0 \quad (22.c)$$

$$\partial_t \phi + v_o \partial_x \phi + g z_s = 0, \text{ en } z = h_0 \quad (22.d)$$

Al considerar las soluciones como periódicas tanto en el tiempo como en la coordenada longitudinal podemos expresar las soluciones como soluciones de Fourier de la forma:

$$(23)$$

$$\begin{aligned} z_s &= Z_s e^{i(kx - wt)} \\ \phi &= \Phi(z) e^{i(kx - wt)} \end{aligned} \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (16) obtenemos

$$\ddot{\Phi} - k^2 \Phi = 0 \quad (25)$$

(24) es una ecuación diferencial de segundo orden homogénea cuya solución general se expresa como:

$$\Phi = A' e^{kz} + B' e^{-kz} \quad (26)$$

Donde las constantes A' y B' se relacionan mediante la condición de contorno en $z = 0$ (17), resultando:

$$kA' e^0 - kB' e^0 = 0 \Rightarrow A' = B' \quad (27)$$

$$\Phi = A'(e^{kz} + e^{-kz}) = A \cosh(kz)$$

Por otra parte si se sustituye (23) y (24) en las ecuaciones de contorno de la interfase (22.c) y (22.d) se obtiene el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} -i\omega Z_s + v_0 i k Z_s - A k \sinh(kh) & = 0 & (28) \\ g Z_s + i k v_0 A \cosh(kh) - i\omega A \cosh(kh) & = 0 & (29) \end{cases}$$

que podemos escribir matricialmente como:

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} k \sinh(kh) & i(\omega - k v_0) \\ i(\omega - k v_0) \cosh(kh) & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ Z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

El sistema lineal homogéneo posee soluciones distintas de la trivial sólo si el determinante de la matriz del sistema que permitiría obtener los coeficientes es nulo, siendo la relación resultante:

$$g k \tanh kh = (\omega - k v_0)^2 \quad (31)$$

Esta expresión nos da la relación de dispersión de las ondas y suele presentarse adimensionalizada en función del número de Froude.

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= kh \\ \tilde{\omega} &= \omega \sqrt{\frac{h}{g}} \end{aligned} \Rightarrow \tilde{k} \tanh \tilde{k} = (\tilde{\omega} - \tilde{k} Fr)^2 \quad (32)$$

En nuestro caso la relación de dispersión da toda la información necesaria para conseguir los objetivos de nuestro problema, razón por la cual no persistiremos en el cálculo del potencial de velocidades ni en el de la superficie. No obstante para su solución exacta serían necesarias dos condiciones iniciales adicionales.

Sin llegar a la resolución exacta sí que podemos interpretar la solución del problema como una superposición de ondas planas cuya relación de dispersión viene dada por (31). La velocidad de fase de dichas ondas se define como :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} \quad (33)$$

Puede observarse como ondas de longitud de onda diferentes se propagan con diferentes velocidades de fase, son, por tanto, ondas dispersivas.

Otro análisis recurrente en la presentación de la relación de dispersión adimensionalizada (32) es el estudio de los valores extremos del parámetro adimensional kh :

○ Valores de $kh \gg 1$ se corresponden a profundidades del canal mucho mayores a la longitud de onda de la perturbación, la velocidad de las ondas que viene dada por la expresión (33) puede aproximarse como:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (34)$$

○ Por su parte valores de $kh \ll 1$ nos sitúan en el extremo opuesto, en un escenario donde las longitudes de onda de las perturbaciones son mucho mayores que la altura del canal (aguas poco profundas). En este caso la velocidad de fase de la onda viene dada por :

$$c = \sqrt{gh} \quad (35)$$

Cabe reseñar que en este caso las ondas dejan de ser dispersivas al depender únicamente su velocidad de la profundidad del canal. Este tipo de ondas son muchas veces llamadas hiperbólicas.

Otra apreciación destacable en el estudio de (31) surge al relacionar este resultado con la solución obtenida para la caracterización del flujo base al principio del capítulo. Atenderemos a dos aspectos:

○ La velocidad de propagación de las ondas de gravedad (33) toma su valor máximo para el caso de aguas poco profundas $c = (gh)^{1/2}$ [Ref.8].

○ La representación de la altura del fluido frente a la altura del obstáculo en el flujo base (fig.3) ocasiona una curva de dos ramas cuyo valor frontera en altura se corresponde con $h_c = (q^2/g)^{1/3}$, sin más que aplicar la definición de flujo $q = vh$, vemos de manera trivial como en este punto la velocidad del fluido toma en valor $v = (gh)^{1/2}$, el mismo valor que el mencionado en el punto anterior. Esta velocidad que denominaremos también crítica es la cota máxima de velocidad del flujo para la rama superior o subcrítica y la cota mínima en velocidad para la rama inferior o supercrítica.

Como para que una onda pueda propagarse a contracorriente de un flujo su velocidad de propagación debe ser mayor que la velocidad de este flujo base la coincidencia de valores se traduce como la imposibilidad de ninguna onda de gravedad de propagarse por un flujo base caracterizado por la rama supercrítica de la figura 3. Siendo precisamente ésta una de las definiciones de flujo subcrítico y flujo supercrítico. Un flujo subcrítico es aquel en el que una perturbación genera una onda que se propaga tanto aguas arriba como aguas abajo mientras que un flujo supercrítico es aquel en el que la onda generada únicamente se propaga aguas abajo.

En nuestro montaje experimental la necesidad de generar una onda incidente que sea reflejada se traduce en la generación de una perturbación aguas abajo que es capaz de propagarse a contracorriente del flujo base de carácter subcrítico hasta llegar a una región de carácter crítico generada por un obstáculo que impide el avance de la ola.

Es importante remarcar que tal y como está planteada esta aproximación al problema se hace imposible resolver el campo fluido de la onda en las regiones en las que el flujo experimenta una variación abrupta (cambios en distancias más pequeñas que la longitud de onda). Precisamente el escenario que tiene lugar en la sección crítica quedando consiguientemente sin estudiar el mecanismo de dispersión de la onda incidente.

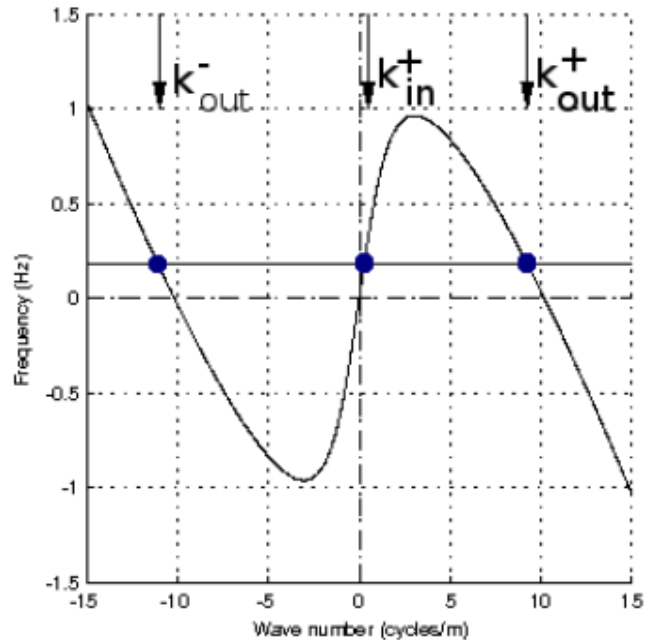


FIG. 4: - **Relación de dispersión.** Representación gráfica de la relación de dispersión de las ondas de gravedad publicada en Ref.2. Aparecen marcadas con puntos azules los números de onda esperables a la frecuencia indicada. Se indica si se trata de ondas incidentes o reflejadas así como el signo de su norma. En este contexto podemos asociar la norma al sentido de propagación relativo de las ondas respecto al flujo base.

Para concluir el capítulo representamos de forma gráfica (Fig. 4) la relación de dispersión obtenida en (31) para valores típicos de nuestros experimentos. Para frecuencias bajas, tal y como esperábamos, existen 3 posibles ondas, que hemos denominado en función de su número de onda. En primer lugar, k_{in}^+ es una onda poco profunda con velocidad de fase y de grupo positivas, que se corresponde con la onda generada en nuestros experimentos. En segundo lugar k_{out}^+ posee velocidad de fase positiva pero velocidad de grupo negativa. Ambas, k_{in}^+ y k_{out}^+ se encuentran en la rama positiva de la relación de dispersión. En tercer lugar k_{out}^- tiene velocidad de fase y grupo negativa y se encuentra situada en la rama negativa de la relación de dispersión. Son k_{out}^+ y k_{out}^- las correspondientes a las ondas reflejadas en nuestro montaje.

4. Instalación experimental

La primera etapa del proyecto en su fase experimental es el diseño de la instalación para el estudio de ondas de gravedad. Para ello se requiere un canal dotado de un mecanismo de generación de olas así como la creación de un campo de alta velocidad, es decir un flujo supercrítico, en una sección del canal que cree una zona no accesible a las olas incidentes.

Como fundamentos del diseño priorizaremos la reutilización del material existente, la flexibilidad ante nuevos usos de los elementos adquiridos o fabricados así como la facilidad de montaje y desmontaje de la instalación. Todo ello conducirá a un ahorro tanto en tiempo como en dinero.

Siguiendo estos preceptos, uno de los condicionantes es adaptar el experimento de Weinfurter y otros (Ref.2) a las posibilidades y dimensiones del canal existente en el departamento. Se trata de un canal hidrodinámico de 150 cm de largo con sección rectangular de 28 cm de ancho y 23 cm de alto con control de altura y velocidad de fluido.

A este canal se le dotará con un generador de olas con movimiento oscilatorio. En su movimiento la pala rectangular empuja al fluido en la dirección de la corriente.

El generador será accionado por un motor paso a paso (RS Amidata 191-8384) de 6 V y 1.8 grados de paso. El motor se comanda desde un software de desarrollo propio que controla en posición y velocidad también disponible en el Grupo de Mecánica de Fluidos de la UC3M. El ángulo de trabajo del motor es pequeño. Para evitar el deterioro del engrane del motor y sobre todo para conseguir un movimiento más suave en la pala, que se traduzca en el mejor control frecuencial de la ola, se añadirá una reductora de relación 1:8 al motor.

La parte mecánica del generador constará de :

- Un eje de diámetro 8 mm acoplado al motor mediante elemento flexible a torsión.
- Un mástil metálico de altura regulable para ajustar la profundidad de batida de la pala.
- La pala propiamente dicha: rectangular, de material plástico flexible y del mismo ancho del canal.

El mástil se encuentra soldado al eje por un casquillo de cobre metálico y atornillado a la pala.

A ambos lados del mástil se dispondrán 2 soportes ópticos como puntos de apoyo del eje evitando sobreesfuerzos en el motor. Se fabricarán piezas metálicas para que el conjunto motor-reductora y los soportes ópticos se anclen a una estructura de perfiles de aluminio (Nikai 45mm y 25mm) que descargará su peso sobre las paredes laterales del canal.

La zona de alta velocidad que simula el horizonte de sucesos se consigue disminuyendo la sección de paso de fluido mediante un obstáculo. Al interesarnos, como hemos mencionado en el capítulo 3 referente al modelo teórico del problema, un flujo con la mayor uniformidad, buscaremos que el obstáculo presente el menor desprendimiento posible, optando por una superficie fuselada. Sin ser crítico para las pretensiones de nuestro trabajo la elección de uno u otro tipo de obstáculo mientras se cumpla esta condición, hemos elegido un perfil NACA de la serie 4.

Los perfiles NACA son aquellos recogidos y tabulados por el *National Advisory Committee for Aeronautics*. En concreto la serie 4 se denomina por 4 valores. La primera cifra indica la máxima flecha de la línea media en % de la cuerda, la segunda cifra indica la

distancia desde el borde de ataque hasta la posición de la máxima flecha de la línea media y las dos últimas cifras el espesor máximo en % de la cuerda (espesor relativo).

Para acelerar el flujo base en el canal, como es nuestro objetivo, solo es necesario medio perfil, luego, lo más lógico, por simplicidad, es escoger un perfil simétrico (00xx). Las dos siguientes cifras surgen de una solución de compromiso entre el obstáculo propuesto en [Ref.2] (en concreto la máxima pendiente presente en el obstáculo empleado) y las dimensiones de nuestro canal, cuanto menor es la pendiente mayor es la cuerda necesaria. Para ello a través de un algoritmo, disponible en internet [Ref.12], se calcularán las coordenadas del perfil que siguen la ecuación:

$$\frac{y}{c} = \pm \frac{t}{0.20} \cdot \left(0.2969 \sqrt{\frac{x}{c}} - 0.126 \frac{x}{c} - 0.3516 \left(\frac{x}{c}\right)^2 + 0.2843 \left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.1015 \left(\frac{x}{c}\right)^4 \right) \quad (36)$$

donde el signo \pm indica que existe simetría respecto al eje x, y donde las variables que intervienen son:

- y: altura según eje de ordenadas
- x: longitud según eje de abscisas
- c: cuerda (longitud máxima del perfil)
- t: $t = \frac{2 \cdot y_{\max}}{c}$; espesor máximo adimensional del perfil.

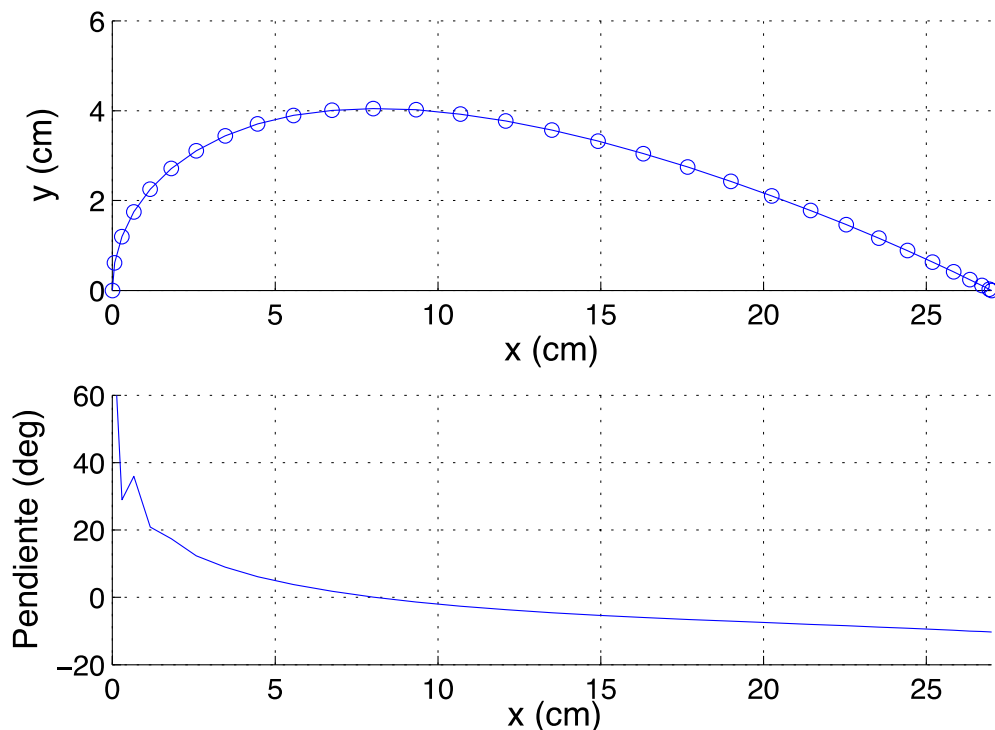


FIG. 5: - **Perfil NACA0015.** **a**, coordenadas del perfil NACA0015 calculadas para la construcción del obstáculo. **b**, pendientes en cada punto. En nuestro caso las pendientes de interés son las del borde de ataque (pendientes negativas) que alcanzan un valor máximo de 10.3° .

Probaremos distintos perfiles de la serie calculando paralelamente su pendiente en cada punto hasta llegar a la citada solución de compromiso (ver fig.5). En concreto el perfil elegido es un NACA0015 de cuerda 27cm.

Tras la elección del obstáculo habríamos finalizado con el diseño de la instalación experimental cuyo resultado puede verse en la figura 6.

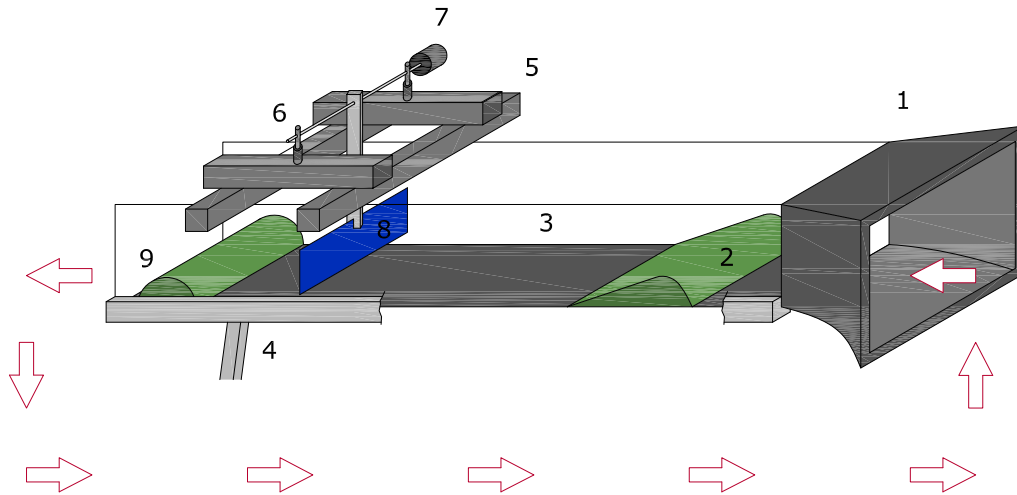


FIG. 6: - **Instalación experimental.** Montaje tras la implementación del canal hidrodinámico inicial. Las partes más destacadas del mismo son: canal hidrodinámico (1), obstáculo (2), pared metacrilato transparente (3), bancada sujeción (4), anclaje generador de olas-canal (5), soporte eje (6), motor paso a paso (7), pala (8), obstáculo para evitar reflejos de ondas (9).

Con motivo de la grabación de las secuencias y su consiguiente iluminación este montaje básico será implementado como se detallará en el capítulo 5.

5. Procedimiento experimental.

5.1 Tratamiento digital de imagen y procesado de señal.

El tratamiento digital de imagen busca la mejora de la información pictórica para la interpretación humana o el procesamiento de los datos de la escena para la percepción autónoma de la máquina, siendo la primera nuestra área de interés.

Los elementos de propósito general para el tratamiento de imagen son adquisición, almacenamiento, procesamiento, comunicación y presentación de imágenes.

Solo mencionaremos nuestra actuación en la primera y tercera etapa por ser éstas en las que hemos intervenido de forma activa resolviéndose el resto de forma estándar por no ser actividades críticas de nuestro trabajo.

El apartado de adquisición consiste por nuestra parte en la captura de dos secuencias distintas de imágenes, si bien, en ambas, el objetivo es visualizar el perfil de la ola para su posterior análisis frecuencial. En la primera secuencia se captará la onda desde su creación hasta la llegada al obstáculo mientras que la segunda es un zoom sobre el obstáculo con una cámara de mayor resolución.

La motivación de la primera serie surge como una aproximación al problema para establecer los primeros resultados preliminares. La segunda es el resultado de intentar clarificar, como explicaremos a continuación, los resultados obtenidos en el análisis de imágenes de esta primera secuencia con menor resolución.

Por su parte en el apartado de procesado de imagen se programará el algoritmo para la detección de la entrefase, a continuación se preprocesará la señal con el estiramiento de la coordenada longitudinal y finalmente se realizará el procesado de señal ejecutando un análisis frecuencial.

El algoritmo de detección y el método de iluminación a elegir para la grabación de las imágenes están estrechamente ligados, así la elección de un tipo de detección condiciona la iluminación o viceversa. Por tanto parece lógico que al tener dos métodos de iluminación, tal y como se detallará a continuación, la detección de la interfase será distinta en cada una de las secuencias.

Las dos siguientes fases, el estiramiento de la coordenada longitudinal y el análisis frecuencial, por su parte, son comunes a las 2 series.

Serie 1:

Adquisición de imágenes

Esta primera serie consiste en vistas frontales a contraluz que abarcan la longitud total del canal adquiridas a 120 fps. Se trata de imágenes RGB con una resolución de 640x480 pix y escala de 0.145cm/pix.

La grabación se inicia cuando la pala llevaba batiendo aproximadamente 10 segundos y finaliza aproximadamente 10 segundos después de que la pala se apague. De este modo, en las últimas imágenes de la secuencia no se apreciarán ya ondas incidentes habiendo sido estas disipadas.

La iluminación a contraluz se emplea cuando queremos separar un objeto del fondo y consiste en iluminar el objeto por detrás de forma que la fuente luminosa, el objeto y la cámara queden alineados (ver figura 7). La iluminación a contraluz es un método recurrente cuando buscamos siluetas, como es nuestro caso. La iluminación puede ser direccional o difusa, en nuestro caso empleamos esta última para evitar quemar la imagen.

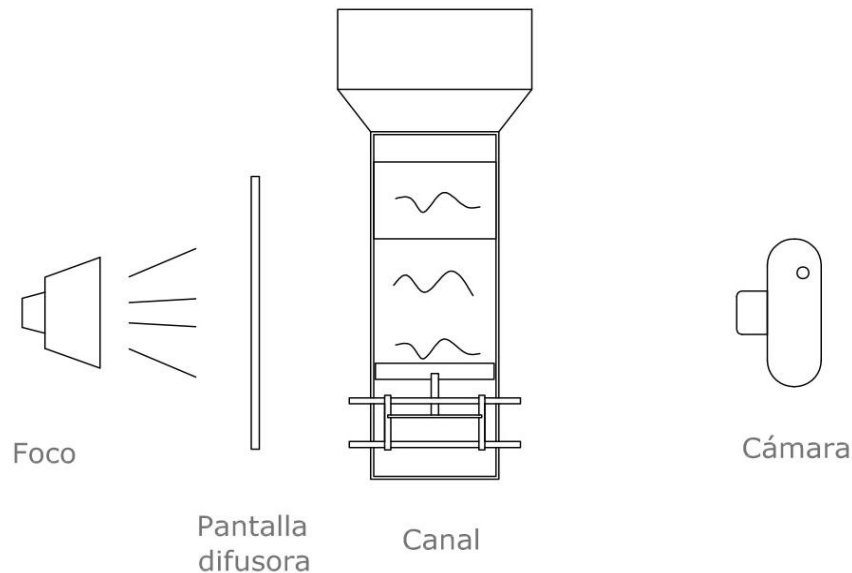


FIG. 7: - **Esquema iluminación a contraluz.** Vista esquemática cenital de la posición de la cámara, el objeto de interés y el foco durante la grabación de la primera serie.

Antes de continuar debemos puntualizar que una de las condiciones que se establecen para trabajar iluminando a contraluz es que el objeto de interés sea opaco, escenario que no tiene lugar en nuestro caso, por lo que no es totalmente correcto hablar de iluminación a contraluz. Es por ello, que para acercarnos al escenario ideal, hemos tintado el líquido. El comportamiento óptico de un material traslúcido es más próximo al de un sólido que al de un material transparente. En la figura 8 se muestra uno de los fotogramas de esta serie antes de su procesamiento.



FIG. 8: - **Fotograma ejemplo de la primera serie.** Imagen de la primera serie tomada mediante iluminación a contraluz. El fluido aparece tintado para potenciar el contraste en la interfase.

Procesado de imagen:

Antes de detallar el algoritmo de detección de interfase expondremos unas nociones básicas sobre la imagen digital.

Una imagen es una función bidimensional de intensidad de luz $f(x, y)$ donde x e y representan las coordenadas espaciales y el valor de f es proporcional al brillo de la imagen en ese punto.

Una imagen digital es una imagen $f(x, y)$ que se ha discretizado tanto espacialmente como en amplitud. La digitalización de las coordenadas espaciales está asociada al concepto de muestreo generando la noción de píxel mientras que la digitalización de la amplitud se asocia a la cuantificación de los niveles de gris.

La imagen en la memoria del computador se comporta como una matriz donde el valor de los elementos es su nivel de gris y la fila y columna su posición en el espacio. Trabajaremos con imágenes discretizadas en 256 niveles de gris, el 0 corresponde a un objeto no iluminado (negro) y el 255 a un objeto muy iluminado que refleja o transmite todos los rayos que inciden sobre él (blanco) y entenderemos el origen de coordenadas de la imagen se sitúa en la esquina superior izquierda.

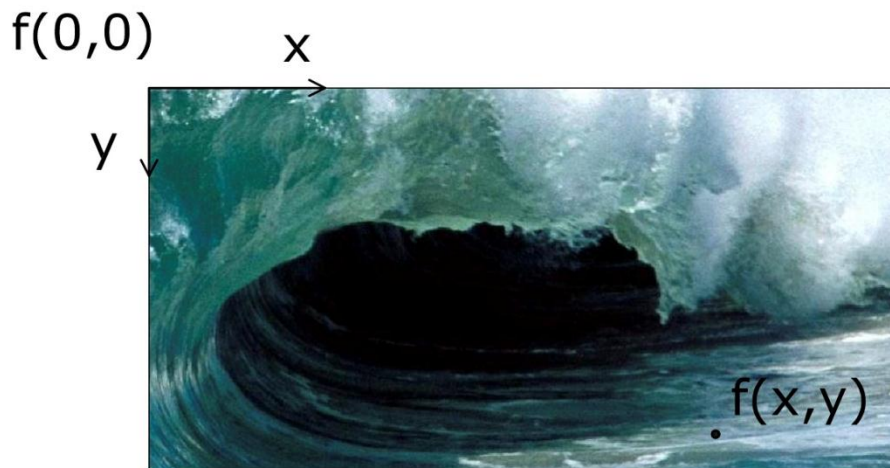


FIG. 9: - **Sistema de coordenadas en una imagen digital.** Las imágenes digitales se almacenan en el ordenador como una matriz cuyo origen de coordenadas se sitúa en la esquina superior izquierda.

Una imagen a color no es más que disponer de una función vectorial en lugar de escalar, propias de las imágenes en blanco y negro.

Para obtener una imagen en color se debe transformar los parámetros cromáticos, luminosidad, tono y saturación en eléctricos de igual forma a como se hizo con una imagen en blanco y negro y representar los colores. Esto puede realizarse de diversas maneras dando lugar a diferentes modelos de color. Podemos decir por tanto que un modelo de color es la especificación de un sistema de coordenadas tridimensional y de un subespacio de este sistema en el que cada color quede representado por un único punto.

Detección de la superficie libre

Como ya comentamos al inicio del capítulo la elección de una determinada iluminación está estrechamente ligada a los algoritmos empleados para su procesamiento. En general se suele optar por cambiar la iluminación antes que añadir complejidad al algoritmo. Siguiendo esta máxima elegimos una iluminación a contraluz que nos permite segmentar con un algoritmo de umbralización básico sin preprocesar la imagen.

La iluminación a contraluz separaba de forma visual el objeto de interés del fondo y la umbralización lo hará de forma matemática.

La umbralización consiste en determinar un valor, al que se denomina umbral (T), que binariza la imagen. Si denotamos nuestra imagen como $f(x, y)$, aquellos puntos que cumplan $f(x, y) > T$ pasarán a ser puntos objeto siendo el resto puntos del fondo.

La umbralización no tiene por qué ser de una única variable si no que puede ser multivariable como a veces sucede con una imagen en color. Al estar ahora el píxel caracterizado por tres valores podríamos determinar un valor umbral para cada uno de éstos y formar el grupo de puntos objeto por operadores lógicos. La segmentación en color puede apoyarse en cualquier modelo de color, en nuestro caso ha sido el modelo de color yuv.

El modelos de color yuv es actualmente utilizado en televisión por el sistema Pal, su elección no ha sido premeditada si no fruto de la mejor tratabilidad de su histograma. El concepto de histograma será expuesto a continuación.

El problema de la umbralización está en encontrar el valor umbral que consiga separar nuestra imagen correctamente, para ello existen numerosas técnicas. Casi todas utilizan el histograma como herramienta básica. El histograma es una representación gráfica del número de píxeles que contienen el mismo nivel de gris. Puede entenderse como la probabilidad de que un valor de gris determinado aparezca en la imagen.

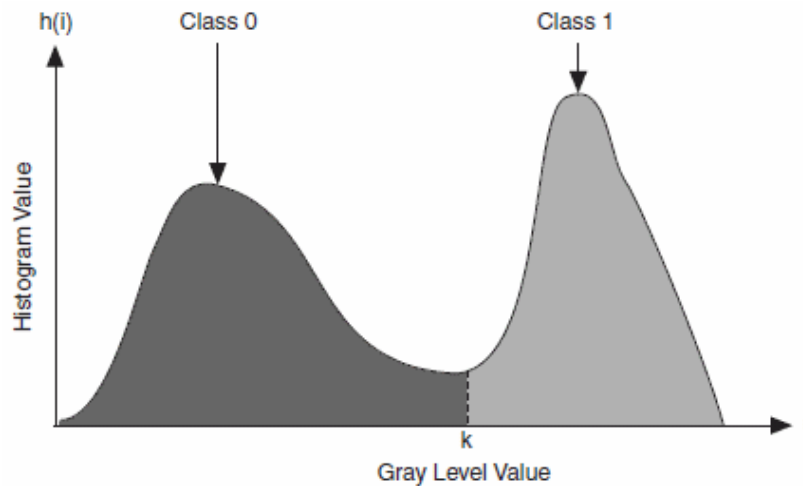


FIG. 10: - **Histograma.** El histograma es una herramienta de uso frecuente en análisis de imagen. En este ejemplo, se muestra el aspecto característico de un histograma que nos sirve para diferenciar dos regiones a partir de su nivel de gris fijando un umbral.

Como ya hemos dicho, cuando iluminamos a contraluz buscamos tener dos regiones con niveles de intensidad lo más separados posibles. Esto se traduce idealmente en un histograma como el de la figura adjunta (fig.10) donde se pueden diferenciar dos picos acusados y un valle entre ellos. En general los algoritmos de detección de umbral buscan detectar este valle. En nuestro caso al ser la separación evidente y apoyándonos en el interfaz de usuario del software ImageJ que permite la elección de coordenadas de color, la selección de umbral y la visualización simultánea de la imagen tratada con controles dinámicos hemos procedido a la selección de umbral de forma manual. Finalmente se comprueba la robustez del valor elegido al ser el umbral poco sensible a pequeñas variaciones del mismo.

Tras la umbralización tendremos una imagen separada en objeto y fondo (figura 11) que el ordenador memoriza como una matriz de unos y ceros. La detección de la interfase se obtiene sin más que recorrer dicha matriz por columnas de arriba a abajo fijando para cada una de ellas como valor de interfase el primer píxel correspondiente al objeto, o lo que es lo mismo el primer 1 de la columna (figura 12).

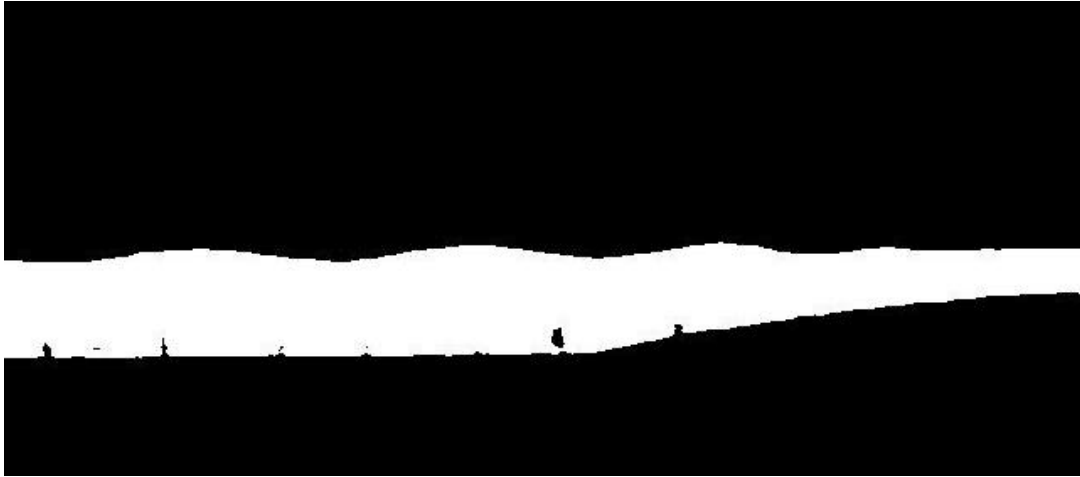


FIG. 11: - **Imagen binarizada.** Tras la umbralización la imagen primaria (fig.8) se encuentra segmentada en dos regiones: fluido y fondo.



FIG. 12: - **Detección de interfase.** El algoritmo de detección permite determinar aquellos puntos que son frontera en la imagen binarizada, estos puntos frontera se corresponden con la interfase líquido-aire.

Procesado de señal:

Estiramiento de la coordenada longitudinal

Tras digitalizar la interfase de cada imagen el siguiente paso es encontrar las longitudes de onda predominantes en la misma, pero antes de proceder al análisis frecuencial se realizará a un cambio de coordenadas.

En concreto se llevará a cabo un estiramiento de la coordenada longitudinal con el objetivo de adecuar cada punto de la ola a la velocidad que realmente experimenta. De este modo se pretende paliar el error cometido al considerar la velocidad como uniforme en el planteamiento teórico.

Matemáticamente el cambio de coordenada se escribe como:

$$\xi = v_0 \int_0^x \frac{ds}{v(s)} \quad (37)$$

El cálculo de velocidades a lo largo de la coordenada longitudinal necesario para el estiramiento de la misma se explicará en el siguiente apartado del capítulo al entender que así se mejora la comprensión del proceso experimental.

La modificación que experimenta la detección de entrefase puede observarse en la siguiente figura (fig.13).



FIG. 13: - **Estiramiento coordenada longitudinal.** Visualización conjunta de la detección de entrefase mostrada en la figura 12 (curva roja) junto a la detección tras el estiramiento de la coordenada longitudinal (curva azul).

Análisis frecuencial

Una vez obtenido el borde de onda en las coordenadas adecuadas pasamos a su análisis frecuencial para obtener las longitudes de onda de las ondas incidentes y reflejadas. Para ello emplearemos dos técnicas: periodograma de Welch y autocorrelación.

El periodograma de Welch es un método de estimación de potencia espectral a partir de la transformada rápida de Fourier. Para ello se divide la señal, se calculan periodogramas modificados de estas secciones y finalmente se promedian los mismos.

En nuestro caso emplearemos el algoritmo implementado en Matlab Pwelch que permite ajustar los siguientes parámetros: longitud de la ventana de análisis, solapamiento entre ventanas, el número de puntos empleados para el cálculo de la transformada rápida de Fourier y la frecuencia de muestreo de la señal

Como segunda técnica emplearemos la autocorrelación. La autocorrelación es una herramienta frecuente en el procesamiento de señal y consiste en la correlación cruzada de una señal consigo misma detectando la repetición de patrones en ésta. La autocorrelación es una técnica que ofrece buenos resultados en señales cortas, sin muchos periodos, como es nuestro caso.

Ambas técnicas se aplican a cada una de las imágenes de la secuencia por separado obteniendo un periodograma y una autocorrelación por fotograma. Posteriormente se promedian obteniendo un periodograma medio y una autocorrelación media de todas las imágenes.

Además cada una de las secuencias descrita en la adquisición de imágenes se divide en dos secuencias de trabajo, la primera correspondiente a 500 fotogramas contiguos con la pala en funcionamiento y la segunda a otros 500 fotogramas también consecutivos en los que se produce el apagado de la pala. La creación de estos dos escenarios de trabajo surge del análisis preliminar de las primeras secuencias. Estas primeras secuencias eran rodadas con la pala en funcionamiento de inicio a fin y en su análisis frecuencial solo se diferenciaba una única frecuencia destacada, en principio asociada a la onda incidente. Con el apagado de la pala se genera un escenario donde la ola incidente finaliza y en el que, por tanto, solo deberíamos ver las ondas reflejadas. Presumiblemente en estas condiciones identificar las longitudes de onda reflejadas debería ser más sencillo.

Serie 2 y 3

Adquisición de imágenes

Los resultados del análisis frecuencial de la primera serie, que se expondrá con detalle en el siguiente capítulo, no mostraron ninguna longitud de onda que pudiese corresponderse a la esperada para las ondas reflejadas. Se pensó que una pequeña amplitud o la rápida atenuación de la onda reflejada podrían estar entre las causas. Para solventarlo surge un segundo montaje con el que se rodará la segunda y tercera serie.

En este segundo montaje se empleará una cámara monocroma de mayor resolución y se aumentará el zoom en la zona del obstáculo. Además la iluminación ya no será a contraluz si no que recurriremos a la técnica de fluorescencia inducida por láser (LIF).

Esta técnica consiste en valerse de la fluorescencia, proceso de emisión de un fotón por parte de una molécula excitada mediante luz, que presentan ciertos materiales al incidir en ellos una determinada longitud de onda. En concreto la longitud de onda provendrá de un láser y se seleccionará aquella sustancia cuya máxima intensidad de fluorescencia emitida se produzca cuando la longitud de onda absorbida coincida con la longitud de onda de emisión del láser.

El LIF es una técnica con múltiples utilidades pero solo nos centraremos en las que nos compete, la detección del borde de ola. Para ello situaremos el láser sobre el canal aguas arriba expandiendo su haz mediante una lente cilíndrica para la formación de un plano láser perpendicular a la superficie del fluido. El plano formado será reflejado por un espejo plano a la misma altura pero aguas abajo del obstáculo con una inclinación de 45° respecto a la horizontal. Finalmente captaremos las imágenes con una cámara con una ligera inclinación respecto a la horizontal desde el frontal de uno de los lados del canal.

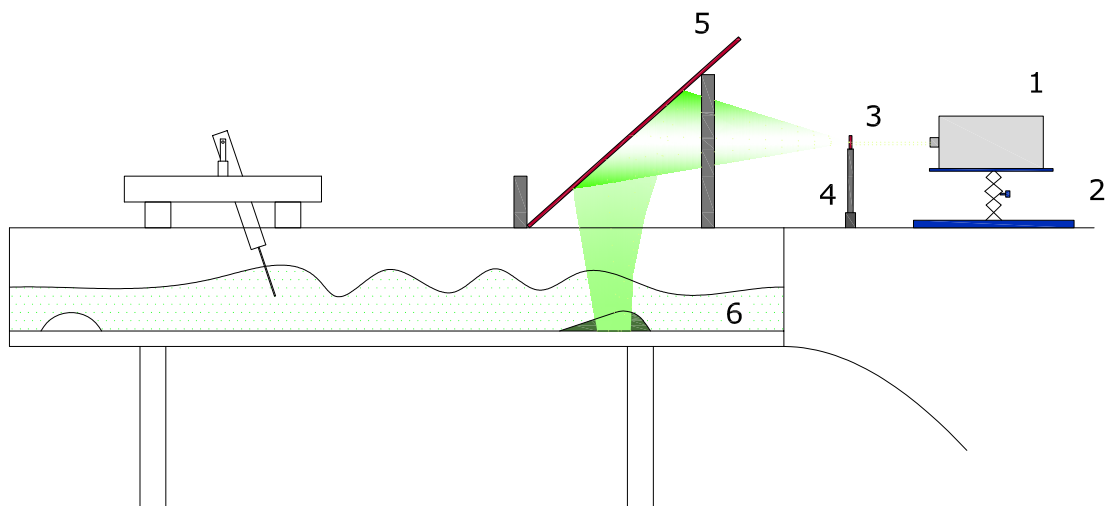


FIG. 14: - **Montaje para la utilización de LIF.** Esquema del segundo montaje de iluminación, donde se implementa la instalación original para poder emplear la fluorescencia inducida por láser. Se emplean: (1) láser de 532nm, (2) mesa de altura ajustable, (3) lente cilíndrica, (4) soporte óptico, (5) espejo plano, (6) fluoresceína.

El escenario ideal es aquel en el que en las imágenes captadas se observará una región negra correspondiente al aire y otra iluminada que se corresponde con el fluido. El límite entre la región oscura superior y la región de luz inferior es el borde de onda formada por su intersección con la luz láser. En nuestro caso, ante la necesidad de evitar la pared lateral del

canal por contener imperfecciones que provocan reflejos combinada con la pequeña amplitud de las ondas hace que el ángulo de inclinación de la cámara sea mayor que el ideal, que provocaría el escenario anterior. En consecuencia lo que puede apreciarse es una región muy iluminada asociada al plano láser que penetra en el fluido y otra más oscura asociada al resto del fluido.

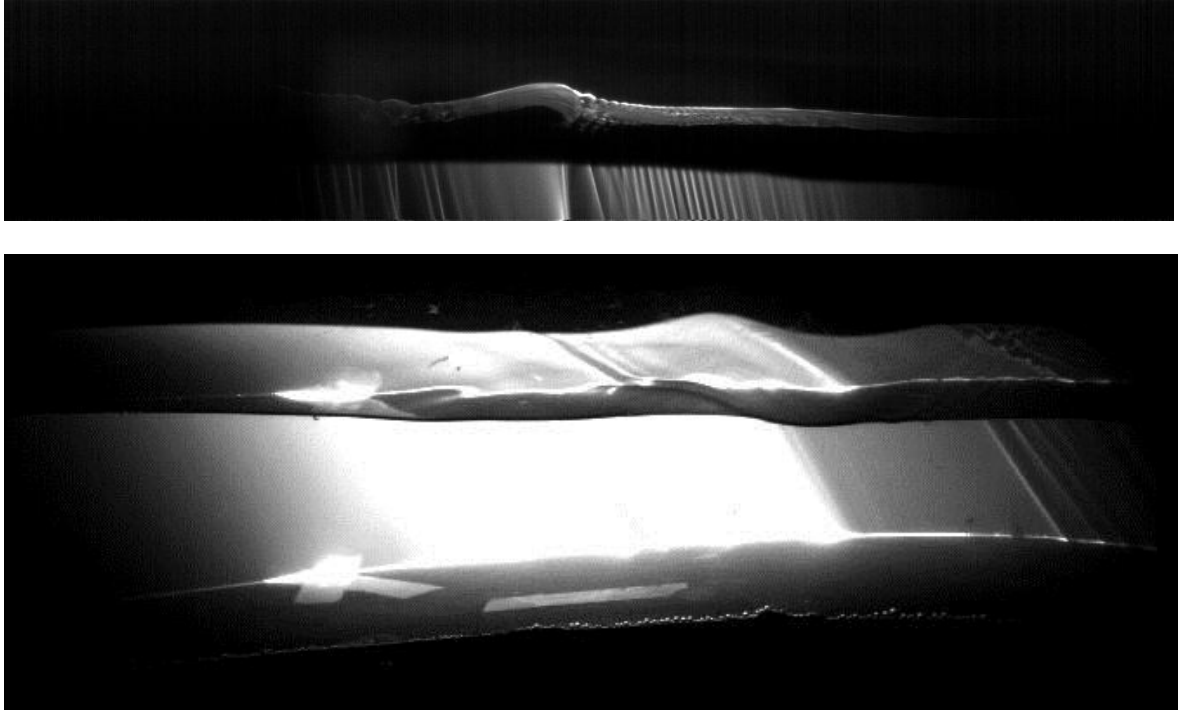


FIG. 15: - **Iluminación por LIF.** **a**, Fotograma característico de la segunda serie donde se emplea fluoresceína excitada por un láser de 488 nm. **b**, Fotograma característico tercera serie, en esta ocasión el fluido es sembrado con leche en polvo y el láser empleado es de 532 nm.

Procesado de imagen:

Detección de la superficie libre

Tras la descripción del método de toma de imágenes podemos pensar que como en la primera serie la umbralización resolvería el problema de la detección del borde de onda, pero no es así y no lo es porque el plano va perdiendo intensidad luminosa con su apertura, no obstante esto no es un problema puesto que la diferencia de nivel de gris aún bajo estas condiciones entre la zona del fluido atravesada por el láser y la que no lo es, es acusada. Por tanto simplemente acudiremos a otro algoritmo de segmentación de la imagen en concreto a un algoritmo de detección de bordes.

La detección de borde tiene por objeto la localización de los puntos en los que se produce una variación de intensidad utilizando para ello métodos basados en los operadores derivada.

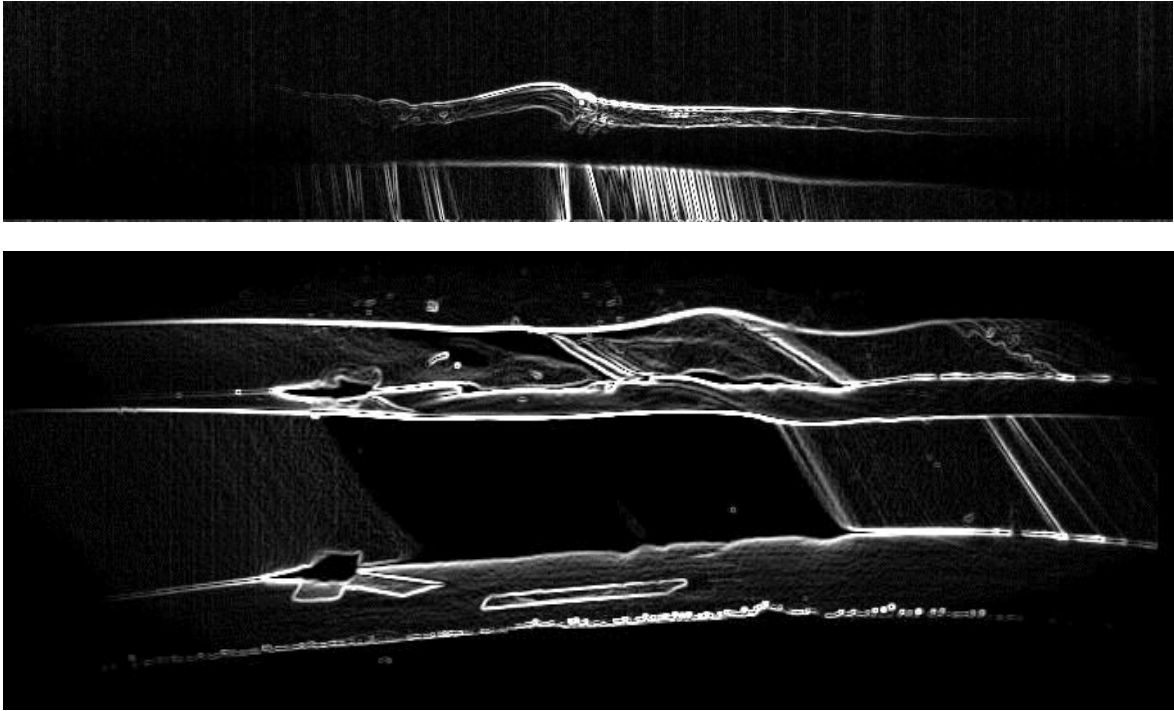


FIG. 16: - **Detección bordes.** Imágenes fig. 15 tras el tratamiento de detección de borde por el algoritmo de Canny-Deryche.

Hay multitud de técnicas para la detección de bordes, en nuestro caso emplearemos el detector de Canny-Derliche implementado por el software ImajeJ. El detector de Canny se obtiene a partir de la optimización de 3 condiciones:

- Error: se deben detectar todos y solo los bordes.
- Localización: La distancia entre el píxel señalado como borde y el borde real debe ser tan pequeña como se pueda.
- Respuesta: No debe identificar varios píxeles como respuesta cuando sólo exista uno.

Con estas 3 condiciones se llega a que el operador óptimo es la derivada de una gaussiana.

Para obtener los bordes los pasos a seguir son:

- Obtener las derivadas unidimensionales de una gaussiana G_x y G_y , convolucionarlas con la imagen obteniendo I_x e I_y .
- A continuación se obtiene M como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados I_x e I_y .
- El siguiente paso es la supresión de aquellos píxeles que no sean máximos. Para ello se compara el valor de la magnitud para cada píxel con la de sus vecinos. Sólo aquellos que sean máximos en sus entornos se dejan como están.

El detector de Canny-Derliche sigue la misma filosofía aunque aplica filtros recursivos para suavizar la imagen en lugar de filtros exponenciales o filtros gaussianos.

Tras el paso por el algoritmo de ImageJ aparecen marcados aquellos bordes más relevantes (fig.16), para seleccionar los propios del borde de onda recorreremos la imagen modificada por columnas seleccionando el elemento de cada columna con el mayor nivel de gris (borde más acentuado).

5.2 Obtención de velocidades

La estimación de la velocidad a lo largo del canal se trata por separado en este subcapítulo para facilitar la comprensión del desarrollo experimental. Creemos que es importante detallar la obtención de velocidades a lo largo del canal, pues como ya se menciona al inicio del capítulo y se discutirá con la presentación de resultados, es uno de los elementos claves durante el desarrollo experimental.

Aunque en un principio, de forma teórica, se trabaja con velocidad constante realmente el flujo se acelera ante la presencia de un obstáculo y por ello, para intentar mejorar la precisión del modelo, se estira la coordenada longitudinal. Esto provoca que no sea suficiente con medir la velocidad en una sección cualquiera del canal si no que es necesario caracterizar la velocidad a lo largo de la coordenada longitudinal.

Para la obtención de la velocidad a lo largo del canal aplicamos la ecuación de conservación de masa en el mismo. Al ser un fluido incompresible y el ancho del canal constante:

$$h(x)v(x) = h_0v_0 \quad (38)$$

Siendo $h(x)$ y $v(x)$ la altura y la velocidad en cada punto a lo largo de la coordenada longitudinal, h_0 la altura y la velocidad en un punto aguas debajo del obstáculo.

h_0 es un dato conocido y v_0 se obtiene como la media del perfil de velocidades de una sección referencia con x constante, como ya hemos dicho establecida aguas arriba del obstáculo, mediante un anemómetro láser (LDA)

El LDA es una técnica extendida para mediciones de velocidad punto a punto en un flujo con trazadores, en nuestro caso los trazadores serán propios del agua corriente sin necesidad de sembrar el fluido. Entre sus ventajas destaca por ser una técnica no invasiva, de alta precisión y de alta resolución tanto espacial como temporal.

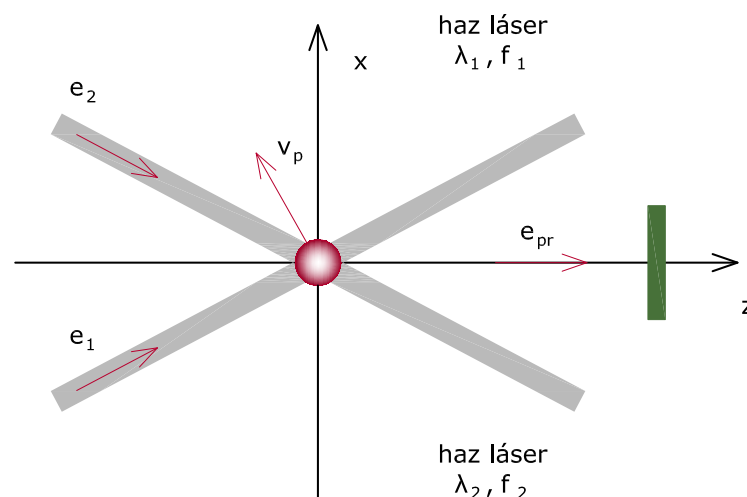


FIG. 17: - **Configuración LDA.** Representación esquemática del funcionamiento de un LDA. Los dos haces incidentes se cruzan formando un volumen de medida en el que puede ser interceptada una partícula. La luz reflejada de dichos haces será captada por el receptor.

Su configuración consta de dos láseres incidentes con un determinado ángulo que se cruzan formando un volumen de medida y cuya luz reflejada es captada por un único receptor. (Ver fig.17).

Esta técnica se basa en el efecto Doppler, tanto cuando la luz láser incide en el trazador en movimiento como cuando ésta es reflejada por el trazador y llega al receptor. El efecto Doppler establece una relación entre frecuencias que puede escribirse como:

$$f_r = f_b \frac{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_p \mathbf{e}_b}{c}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}_p \mathbf{e}_{pr}}{c}\right)} \approx f_b + \frac{\mathbf{v}_p (\mathbf{e}_{pr} - \mathbf{e}_b)}{\lambda_b} \quad (39)$$

El subíndice b hace referencia al haz incidente, el p a la partícula y el r al haz captado en el receptor

Al contar con dos haces podemos obtener la velocidad de la partícula mediante la diferencia de frecuencias de los dos haces reflejados, que se suele denominar frecuencia Doppler. La frecuencia Doppler se relaciona con la velocidad de la partícula como:

$$f_1 = f_b + \frac{\mathbf{v}_p (\mathbf{e}_{pr} - \mathbf{e}_1)}{\lambda_b}, \quad f_2 = f_b + \frac{\mathbf{v}_p (\mathbf{e}_{pr} - \mathbf{e}_2)}{\lambda_b} \quad (40)$$

$$f_D = f_1 - f_2 = \frac{\mathbf{v}_p (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{\lambda_b} = \frac{2 \sin(\Theta/2)}{\lambda_b} |\mathbf{v}_p| \cos \alpha = \frac{2 \sin(\Theta/2)}{\lambda_b} \mathbf{v}_{p\perp} \quad (41)$$

Los parámetros empleados pueden verse en la figura 18:

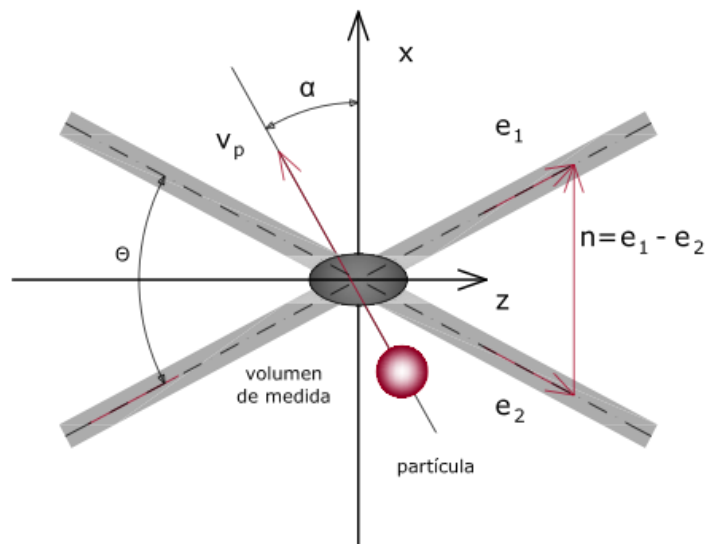


FIG. 18: - **Efecto Doppler.** Esquema de los vectores y magnitudes empleados para el cálculo de la velocidad de la partícula mediante el empleo del efecto Doppler.

De cara a los resultados destacar que tal y como se observa en la figura adjunta (fig.19) el perfil de velocidades no es uniforme como habíamos establecido para los cálculos teóricos. Este es el motivo por el cual trabajamos con una velocidad media.

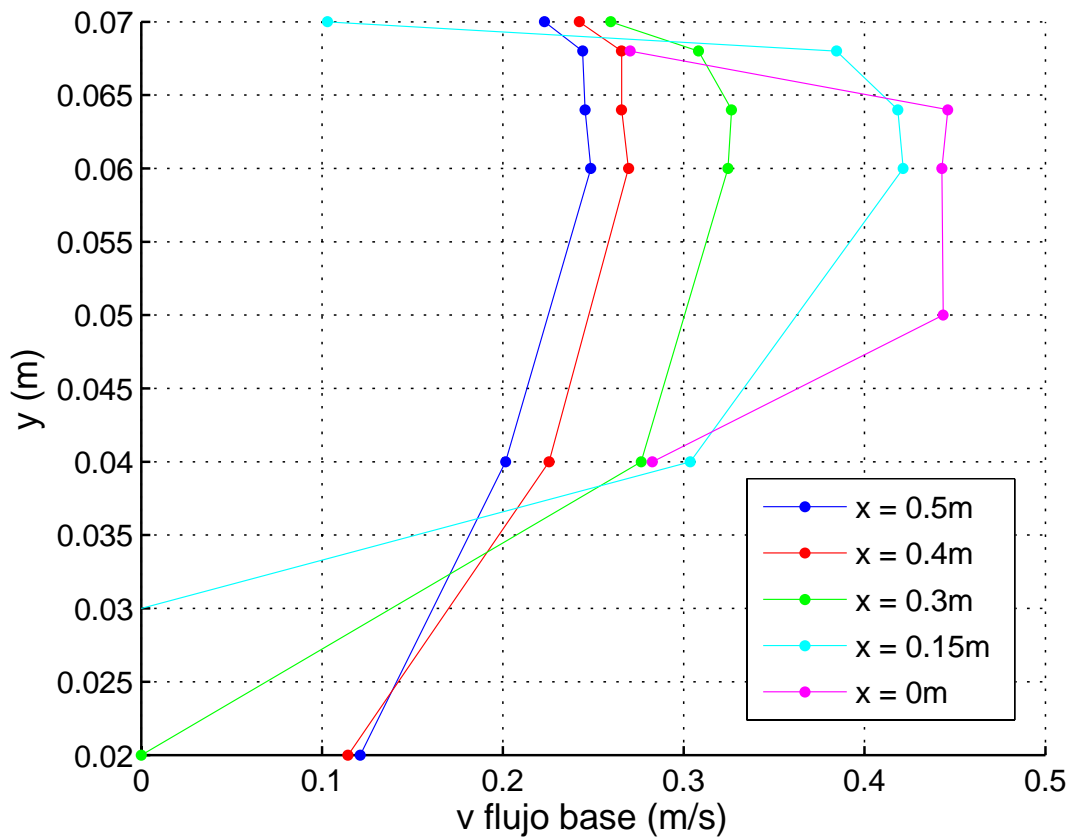


FIG. 19: - **Perfil de velocidad no uniforme.** Representación gráfica del perfil de velocidades para cinco secciones del canal para uno de los montajes experimentales obtenidos mediante medición con LDA. Se muestra a modo de ejemplo para ver el carácter no uniforme del perfil de velocidad para una sección con coordenada longitudinal fija.

Una vez medida una velocidad referencia, solo falta estimar la altura en cada punto, siendo el resultado de restar a la altura aguas abajo del obstáculo, medida con la pala en reposo, la altura del perfil naca. No se ha tenido en cuenta el efecto de la contracción al estimarse despreciable.

Una vez establecida la velocidad en cada punto nos cercioramos de que nuestras aproximaciones sean correctas. Para ello además de medir la velocidad mediante LDA en un punto aguas abajo del obstáculo que nos ha servido de referencia se obtienen las velocidades en distintas secciones aproximándose al obstáculo. Comparar las velocidades en estas secciones mediante el LDA con las obtenidas a partir de (38) añade fiabilidad a las mismas.

5.3 Validación instalación experimental

Otro de los apartados que hemos querido tratar de forma separada es la validación de la instalación experimental. No debemos olvidar que además de la verificación experimental de los coeficientes de Bogoliubov uno de nuestros objetivos es el diseño de una instalación experimental para el estudio de ondas gravitatorias. Por ello debemos cerciorarnos de que la implementación del canal funciona correctamente.

Para la verificación se han fijado distintas velocidades de trabajo en las que se analizará el rango de frecuencias angulares en el que el comportamiento del generador de olas es fiable.

Debemos puntualizar que la verificación realizada está orientada a nuestros experimentos y por tanto se ha comprobado el comportamiento de la instalación para las condiciones de trabajo propias de los mismos cuyos valores veremos en el próximo capítulo. En futuros proyectos, si las condiciones de trabajo difieren mucho de estos valores, sería aconsejable realizar previamente su propia validación.

En concreto, la validación del montaje consistirá en el trazado de forma experimental de la relaciones de dispersión para la onda incidente desde velocidad cero hasta $v = 0.081$ m/s en un rango de frecuencia angular de batida de pala entre 10 y 30 rad/s . Las velocidades mencionadas son la velocidades medias del perfil medidas en una sección aguas abajo del obstáculo.

Las relaciones de dispersión se han obtenido en algunos casos con el obstáculo situado en el canal y en otros sin él como queda especificado en cada una de las curvas. Este hecho es importante, pues como se detallará en la discusión de resultados perteneciente al siguiente capítulo, una de las limitaciones del modelo teórico propuesto es la imposición de ciertas restricciones (hipótesis que deben cumplir) al campo de velocidad. Si se toman las medidas en ausencia de obstáculo, la velocidad del flujo base es constante tal y como se propone en el modelo teórico. Pero al introducir el obstáculo, por conservación de masa, se produce un aumento de la velocidad del fluido sobre el mismo de modo que el tratamiento de la velocidad como constante longitudinalmente deja de ser exacto para convertirse en una aproximación. No obstante no nos extenderemos en esta cuestión, puesto que como ya hemos mencionado se tratará con detalle en el próximo capítulo.

Para cada una de las velocidades se representará la curva de dispersión teórica junto a las longitudes de onda propias de la onda incidente obtenidas de forma experimental. Apareciendo a su lado el perfil de velocidades correspondiente. Para finalizar, para facilitar la comparación de los resultados se trazarán las relaciones de dispersión adimensionalizadas en función del número de Froude.

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda}{h} \\ \tilde{k} &= kh \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \left(\omega + \frac{v}{h}\tilde{k}\right)^2 - g\tilde{k} \tanh \tilde{k} = 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} Fr &= \frac{v}{\sqrt{gh}} \\ \tilde{\omega} &= \omega \sqrt{\frac{h}{g}} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (\tilde{\omega} + Fr\tilde{k})^2 - \tilde{k} \tanh \tilde{k} = 0 \quad (43)$$

Concretamente mostraremos tres curvas de validación, la primera con flujo base en reposo, la segunda sin obstáculo y con una velocidad de flujo base de 0.068 m/s y finalmente incluyendo el obstáculo y con una velocidad 0.081 m/s.

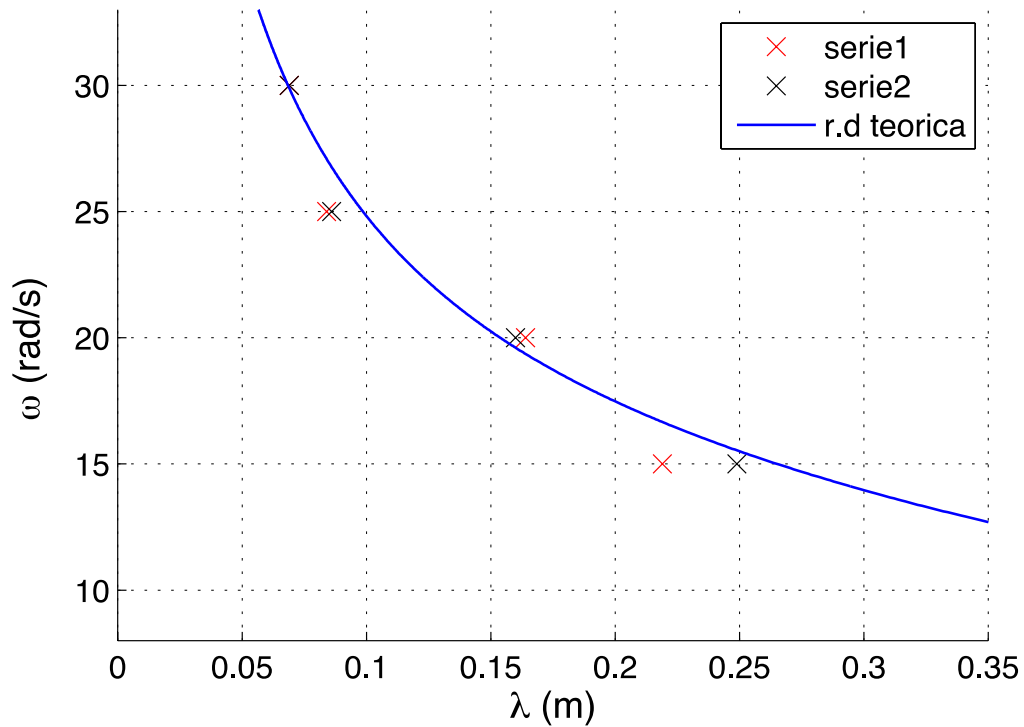


FIG. 20: - **Validación $v=0$ m/s.** Representación gráfica de la relación de dispersión teórica (curva azul) junto a las longitudes de onda de la onda incidente medidas en dos diferentes sesiones (aspas rojas y azules) con las mismas condiciones, velocidad y altura de flujo base, $v=0$ m/s y $h_0=0.087$ m.

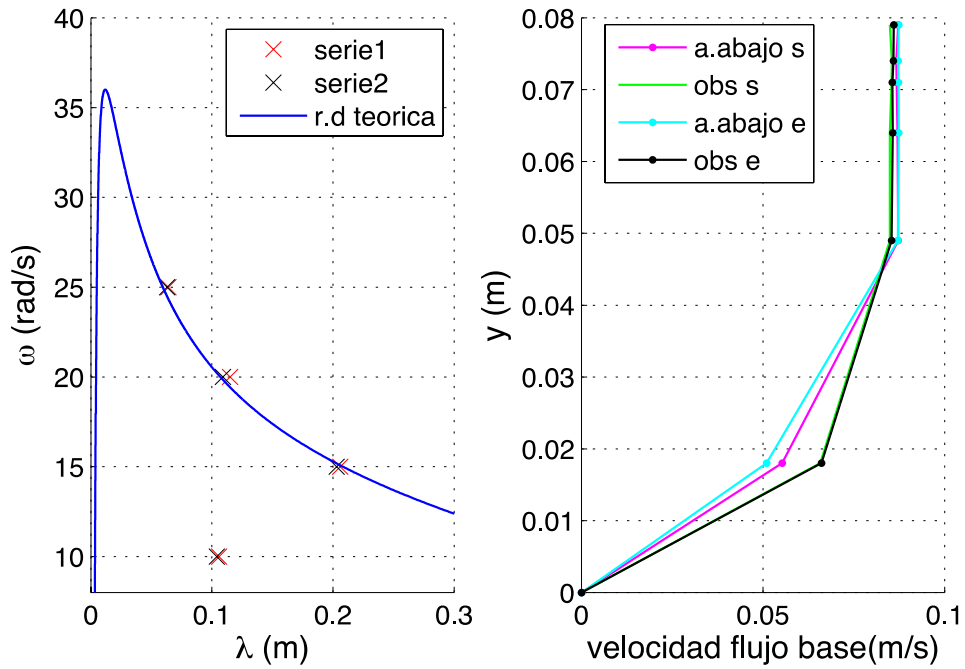


FIG. 21: - **Validación sin obstáculo.** **a**, representación gráfica de la relación de dispersión teórica (curva azul) junto a las longitudes de onda de la onda incidente medidas en dos diferentes sesiones (aspas rojas y azules) sin presencia de obstáculo con las mismas condiciones, velocidad y altura de flujo base, $v=0.068$ m/s y $h_0=0.079$ m. **b**, perfil de velocidad medido con LDA al inicio (s) y a la finalización de la sesión (e), cuyos resultados se muestran en 21a, en dos diferentes secciones (a.abajo y obs). En este escenario la notación aguas abajo y sobre el obstáculo carece de significado físico en esta ocasión.

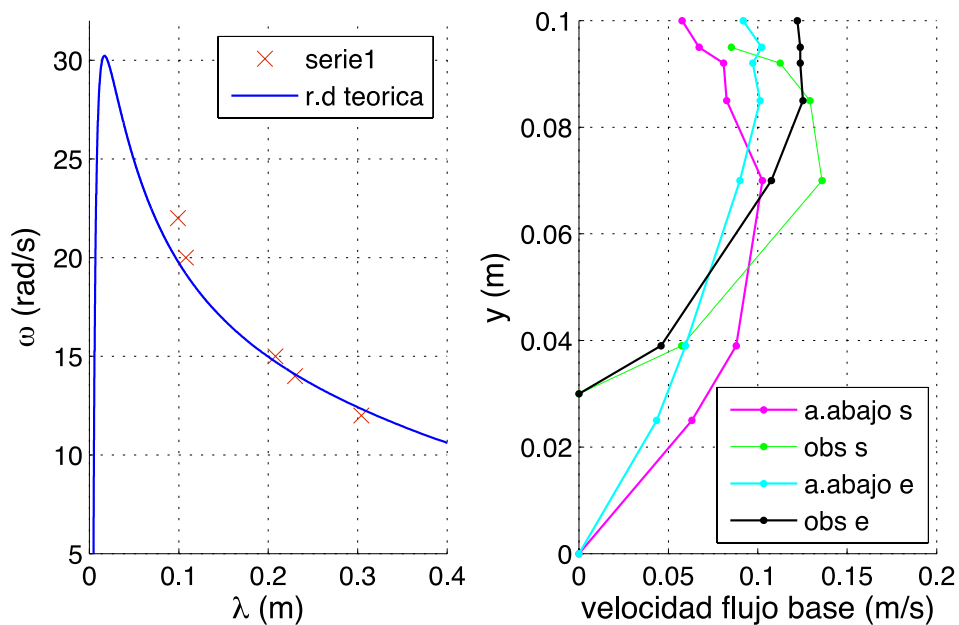


FIG. 22: - **Validación con obstáculo.** **a**, representación gráfica de la relación de dispersión teórica (curva azul) junto a las longitudes de onda de la onda incidente medidas para una única sesión (aspas rojas y azules) a distintas frecuencia de batida con presencia de obstáculo a velocidad y altura de flujo base, $v=0.081$ m/s y $h_0=0.1$ m. **b**, perfil de velocidad medido con LDA al inicio (s) y a la finalización de la sesión (e), cuyos resultados se muestran en 22a, en dos diferentes secciones situadas aguas abajo y sobre el obstáculo (a.abajo y obs).

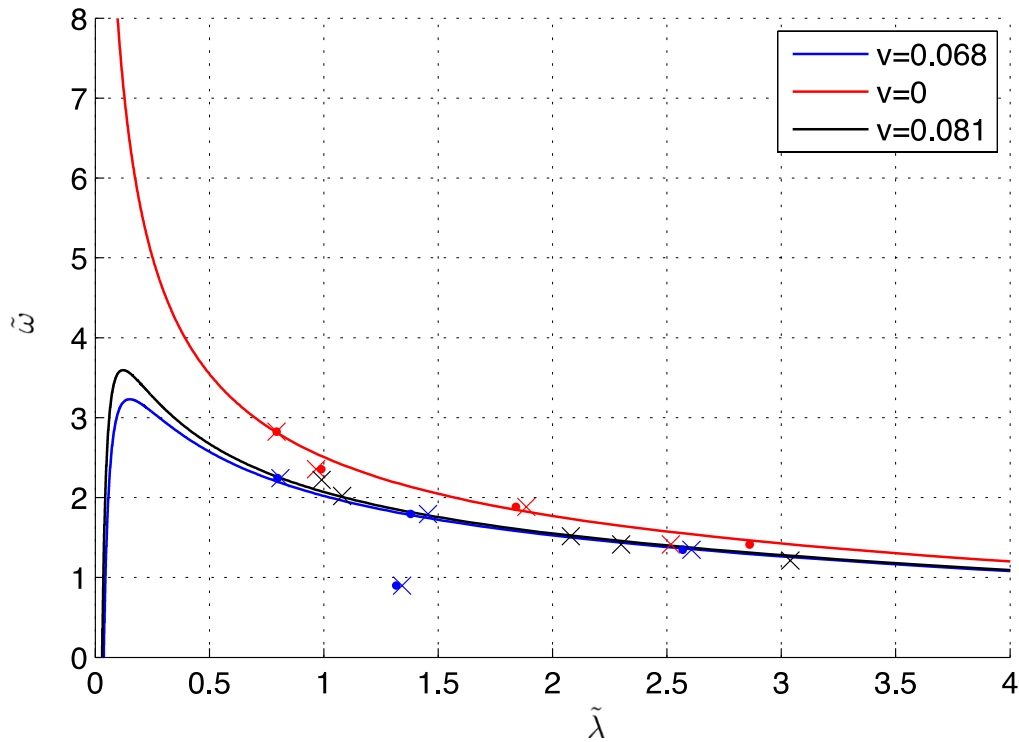


FIG. 23: - **Comparativa.** Representación gráfica conjunta de la relación de dispersión teórica junto a las longitudes de onda experimentales adimensionalizadas mostradas en las figuras 20, 21 y 22.

Tras visualizar las curvas de validación, podemos concluir que el comportamiento de la instalación es correcto en cualquiera de los 3 escenarios. Solo observamos un punto realmente alejado de la predicción teórica visible en la figura B. Este punto es ocasionado por un deslizamiento entre dientes de la reductora que generaba una frecuencia de batida de pala distinta de la programada en el control. Este problema se solventó con un cambio de la reductora y en cualquier caso es fácil de identificar en caso de volver a producirse el fallo con un análisis temporal de la señal que nos muestre si la frecuencia programada y la medida se corresponden.

Es importante destacar que el comportamiento de la instalación es igualmente positivo tanto con obstáculo como sin él. Esto se traduce en que la onda incidente no se ve fuertemente afectada por la aceleración del fluido. Caso diferente será el de las ondas reflejadas como veremos en el siguiente capítulo.

6. Resultados y discusión

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos tras el análisis de imagen y posterior análisis de señal descrito en el capítulo anterior. En concreto se expondrán y discutirán una selección con los tres experimentos más representativos.

Para cada una de las series de imágenes se mostrarán los resultados de forma similar. Para cada serie, en primer lugar se facilitará el perfil de velocidades de al menos dos secciones del canal (una aguas arriba y otra aguas abajo). A continuación se mostrará la evolución temporal de la onda en el período de tiempo de análisis junto a su periodograma para confirmar que la frecuencia angular medida de la misma coincide con la impuesta en el generador de olas. A partir de las velocidades medidas y siguiendo la expresión teórica obtenida en el capítulo 3 (31), se trazará la relación de dispersión en función de la longitud de onda que facilitará en su corte con la frecuencia angular las longitudes de onda esperadas para la onda incidente y las reflejadas. Finalmente para cada una de las series se presentarán los análisis frecuenciales que mejor describan el experimento.

Serie 1

La primera serie consta de 800 fotogramas, analizados en dos subsecuencias de 400 fotogramas cada una, tomados a 120 fotogramas/segundo con una resolución de 640x480 píxeles abarcando la longitud total del canal y con iluminación a contraluz. La primera subserie muestra la evolución de la onda con la pala en funcionamiento (ON) y en la segunda se produce el apagado de la misma (OFF).

La frecuencia de batida de la pala es de 12 rad/s. Tal y como podemos observar en la figura 24, que representa la evolución temporal de la altura de la superficie en puntos fijos para cada una de las subseries (pala encendida y pala apagada) junto con su análisis frecuencial, la frecuencia real de la onda difiere ligeramente de la programada de la batida. Este hecho, que puede deberse a un deslizamiento entre dientes, no tiene consecuencias remarcables y simplemente lo citamos para indicar que es la frecuencia angular obtenida en el periodograma la que utilizaremos como frecuencia referencia para el cálculo de las longitudes de onda teóricas.

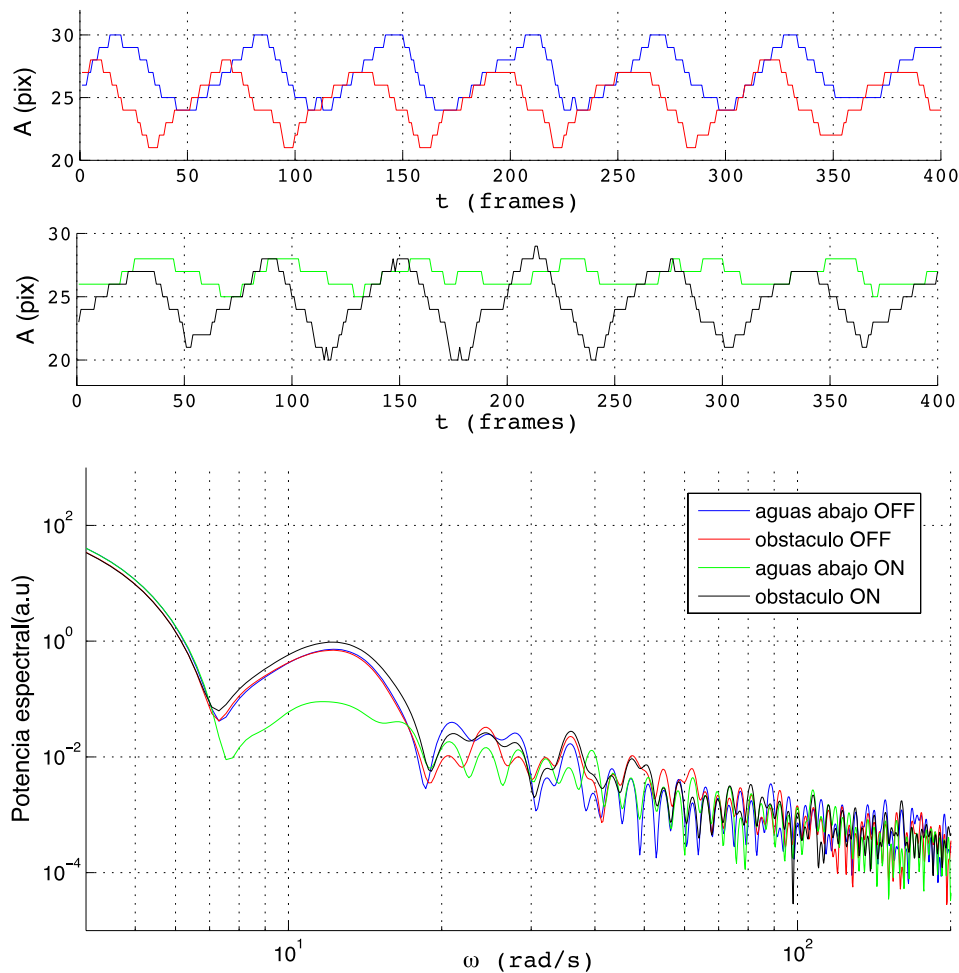


FIG. 24: - **Comportamiento temporal 1.** **a**, Amplitud de la superficie libre con el transcurso de los fotogramas (*frames*) para una coordenada longitudinal de la detección constante. En rojo se muestra la evolución para un punto situado sobre el obstáculo y en azul para un punto situado aguas abajo del obstáculo antes de apagar la pala. **b**, El mismo análisis pero ahora la curva verde y negra han sido medidas en la segunda subserie donde se produce el apagado de la pala. **c**, Análisis frecuencial de la evolución temporal a pixel fijo mostrado en las figuras 24a y 24b.

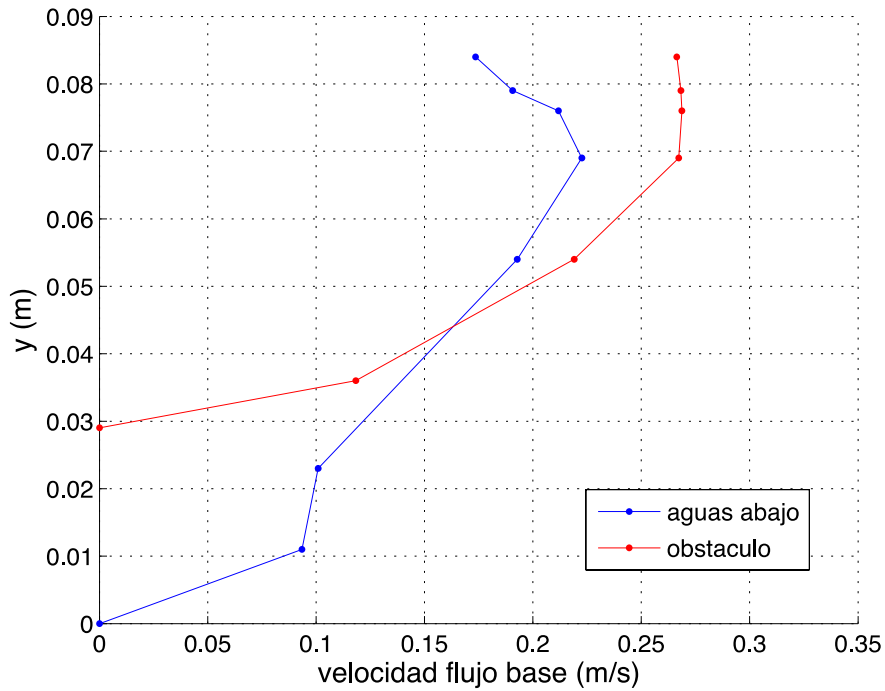


FIG. 25: - **Perfil velocidad 1.** Velocidad medida mediante LDA en dos secciones del canal situadas aguas abajo (azul) y sobre el obstáculo (rojo).

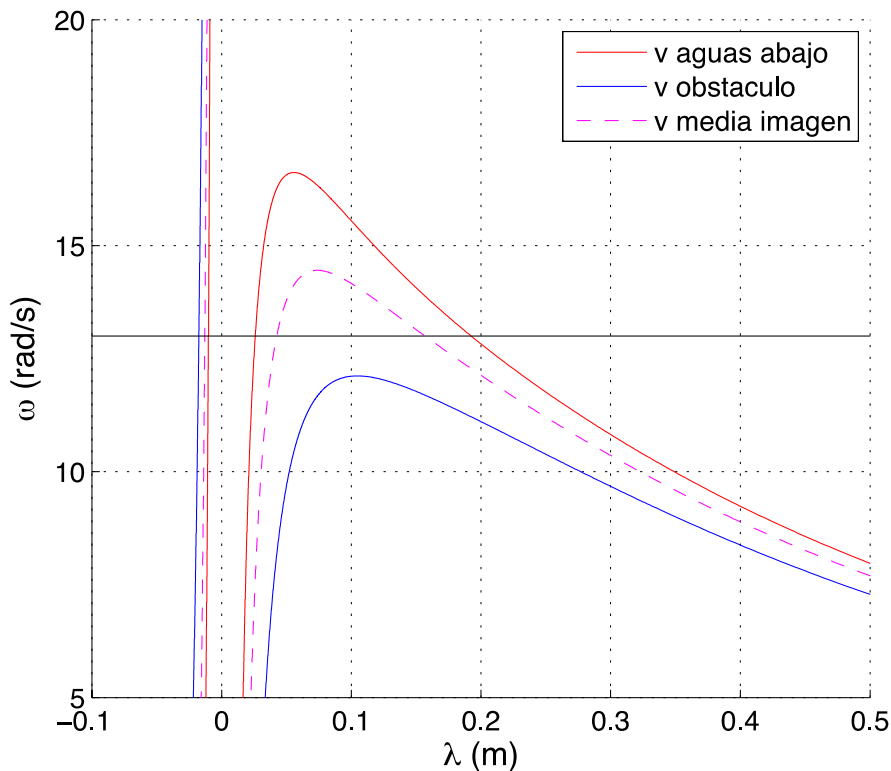


FIG. 26: - **Relación de dispersión 1.** Relación de dispersión calculada de forma teórica trazada para tres velocidades siguiendo la ecuación, $gk \tanh kh = (w - kv_0)^2$, siendo la velocidad aguas abajo (curva roja) la velocidad referencia. Las otras dos velocidades nos dan idea del error cometido al no contar con una velocidad uniforme en el canal. Del corte entre la relación de dispersión calculada con la velocidad media aguas abajo y la velocidad angular de batida de la pala obtenemos las longitudes de onda esperables teóricamente.

Precisamente las longitudes de onda teóricas pueden observarse en la figura 26, donde se encuentran indicadas en el corte entre la curva de dispersión y la recta horizontal que marca la frecuencia angular a la que bate la pala.

El gráfico no muestra una única curva de dispersión si no 3. La diferencia entre ellas radica en la velocidad empleada para su cálculo. Si bien en el escenario planteado para los cálculos teóricos el perfil de velocidad era homogéneo en cada una de las secciones del canal, tal como podemos observar en la figura 25, en la realidad desafortunadamente difiere de ser así. Por esta razón, con el fin de acotar el escenario existente, se emplean 3 velocidades para la obtención de las longitudes de onda. Mientras que la curva roja y azul se corresponden con las relaciones de dispersión en función de las velocidades medias medidas aguas abajo y sobre el obstáculo respectivamente (ver perfil velocidades fig.25), la curva discontinua magenta se ha calculado como la media, en toda la longitud espacial analizada, de la velocidad para cada punto calculada a partir de la altura del perfil (ver capítulo obtención de velocidades).

Una vez puntualizado el empleo de distintas velocidades para caracterizar el problema hay que remarcar que, tal y como se ha efectuado el estiramiento de la coordenada longitudinal (ver cap.5.1), la velocidad aguas abajo del obstáculo es la velocidad de referencia para la obtención de las longitudes de ondas, siendo el resto de velocidades aproximaciones para intentar paliar el posible error introducido por la no homogeneidad del perfil de velocidades.

Tras describir la problemática de las velocidades pasamos a comentar los análisis frecuenciales de la interfase.

En la figura 27 se muestra el periodograma medio de la detección de entrefase de 400 imágenes. Los puntos magentas representan los numero de onda esperados teóricamente, la curva azul es el periodograma medio a lo largo de toda la detección mientras que la roja lo es solo de la zona cercana al obstáculo. Como puede observarse la curva azul presenta un pico relativamente nítido que se corresponde a una longitud de onda de 19 cm, un valor de longitud de onda dentro de los límites esperados para la longitud de onda propia de la onda incidente. El problema reside en que ninguna otra longitud de onda parece distinguirse. Ante la posibilidad de que la no visualización de un número de onda atribuible a ninguna de las dos ondas reflejadas se deba a la rápida atenuación de éstas en el espacio se ha analizado frecuentemente la entrefase centrándose solo en la zona próxima al obstáculo. El resultado, representado mediante la curva roja, ofrece por el contrario resultados similares a los del análisis en toda la longitud de la entrefase, curva azul.

De forma paralela al análisis mediante periodogramas se realiza el análisis frecuencial mediante autocorrelación obteniendo resultados similares tal y como puede verse en la figura 28.

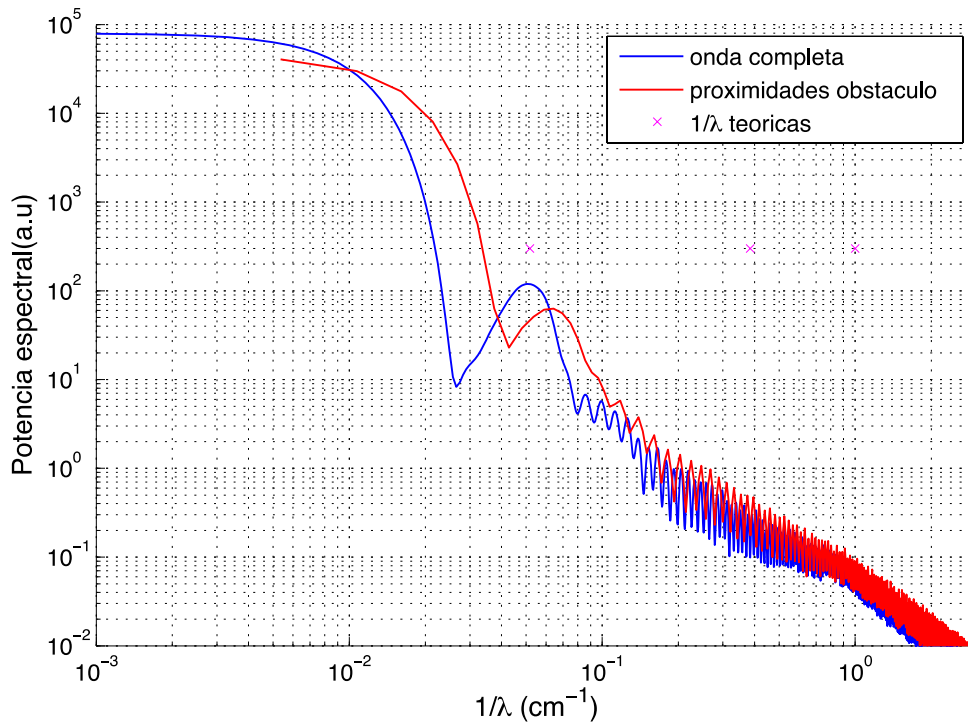


FIG. 27: - **Periodograma de Welch superficie libre 1.** Análisis frecuencial por periodograma de Welch de la superficie libre detectada para toda la longitud del canal (curva azul) y para solo una región próxima al obstáculo (curva roja). Además se marcan mediante aspas magenta las tres longitudes de onda esperables teóricamente.

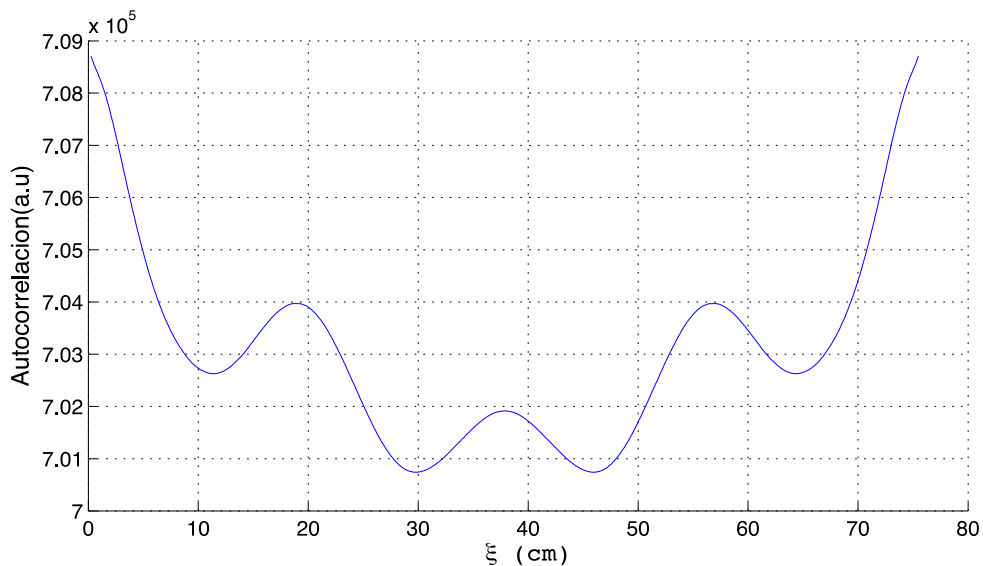


FIG. 28: - **Autocorrelación de la superficie libre 1.** La autocorrelación de la señal muestra una longitud de onda destacada de aproximadamente 19cm confirmando el resultado visible en fig.27.

Las gráficas expuestas hasta el momento son de los primeros 400 fotogramas. Al ser los resultados obtenidos para los siguientes 400 fotogramas bastante similares solo se mostrará una comparativa de los periodogramas. A continuación se trazará el periodograma medio de la figura 27 correspondiente a la totalidad del canal (curva azul fig.27) conjuntamente con sus periodograma homólogo de las 400 imágenes finales. En dicha figura (fig.29) se puede apreciar que los resultados de las dos subsecuencias de 400 fotogramas cada una son similares. Aunque, si bien es cierto, se observa una disminución de la longitud de onda medible para la subserie con la pala apagada. Este efecto se estudiará con detalle en la tercera serie.

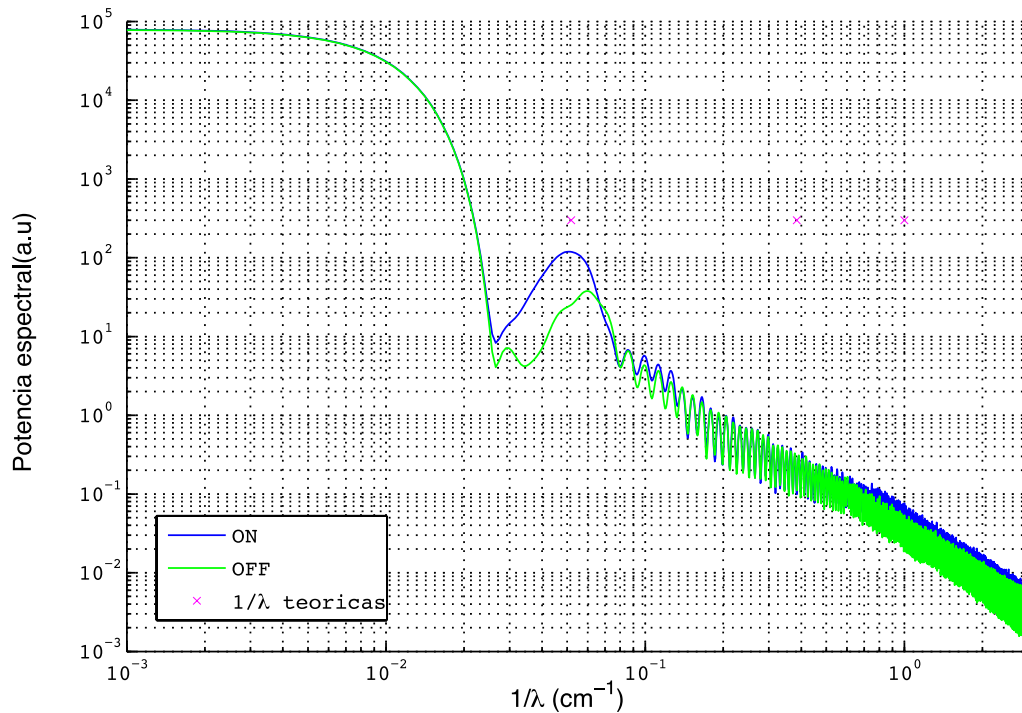


FIG. 29: - **Comparativa subseries.** Periodograma de la detección completa obtenido para cada una de las subseries de 400 fotogramas.

Tras la presentación de resultados podemos sacar las primeras conclusiones sobre ésta primera serie. En primer lugar cabía destacar que a pesar de un perfil de velocidades no homogéneo somos capaces de caracterizar la longitud de onda de la onda incidente mediante las dos técnicas de análisis frecuencial empleadas, correspondiéndose este valor con el calculado teóricamente.

En segundo lugar remarcaremos la imposibilidad de obtener un valor que pueda corresponderse con la longitud de onda de las ondas reflejadas. Una de las explicaciones a este hecho puede proceder de la falta de resolución de las imágenes para captar las amplitudes de las ondas reflejadas. Si acudimos a la figura 24 podemos observar como la amplitud de la onda detectada es de solo 5 píxeles.

Con motivo de esta problemática surgen los cambios que ocasionarán las siguientes sesiones, donde se cambiará el sistema de iluminación y se introducirá una cámara de mayor resolución.

Serie 2

Como ya adelantamos en la anterior serie, el objetivo de esta nueva secuencia es detectar las longitudes de onda correspondientes a las ondas reflejadas que no pudimos obtener en la anterior sesión. Para ello nos valdremos de 1000 fotogramas con una resolución de 912x172 píxeles tomados a 60 fps cuya interfase, a lo largo de 26 cm sobre el obstáculo, se muestra visible gracias a la técnica de fluorescencia inducida por láser.

Antes de proceder a la exposición de resultados propios de esta sesión se hace conveniente la puntualización de un par de aspectos en el tratamiento de la señal que difieren de los realizados en la serie anterior. Son pequeñas puntualizaciones que no afectan a la filosofía general de análisis de señal descrito en el capítulo 5.1, que surgen por las particularidades de cada sesión y que entendemos que deben tenerse en consideración a la hora de comparar resultados entre sesiones.

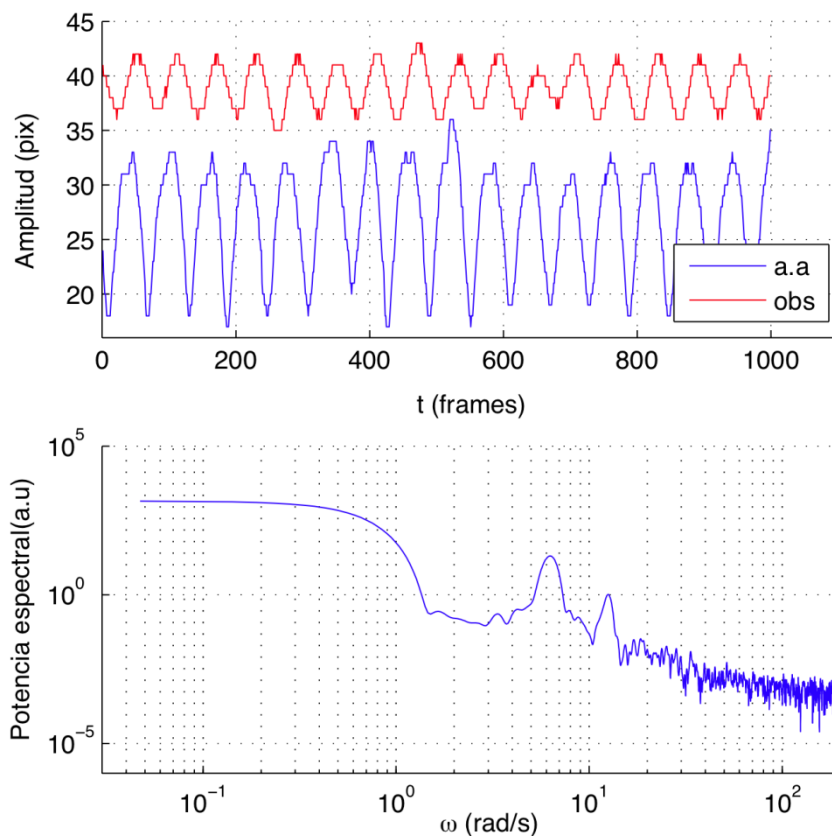


FIG. 30: - **Comportamiento temporal 2.** **a**, Amplitud de la superficie libre con el transcurso de los fotogramas (*frames*) para una coordenada longitudinal de la detección constante. En rojo se muestra la evolución para un punto situado sobre el obstáculo y en azul para un punto situado aguas abajo del obstáculo antes de apagar la pala. **b**, Análisis frecuencial de la evolución temporal a pixel fijo mostrado en la figuras 30a y 30b.

En primer lugar el análisis temporal de la señal, siguiendo el mismo procedimiento que en la anterior secuencia, muestra una frecuencia angular, con valor de $\omega = 12.5 \text{ rad/s}$ mucho más nítida que en el caso anterior. Este hecho hace que consideremos beneficioso un filtrado por *phase average*. El *phase average* es una técnica de promediado de señales en fase, de modo que se obtiene un periodo característico. Como cualquier técnica de promediado colabora con la eliminación de las altas frecuencias espaciales. En el caso anterior no se optó por este procedimiento al entender que sin un periodo claramente marcado el promediado no sería exacto y podría distorsionar la señal siendo más los perjuicios que los beneficios añadidos en su utilización.

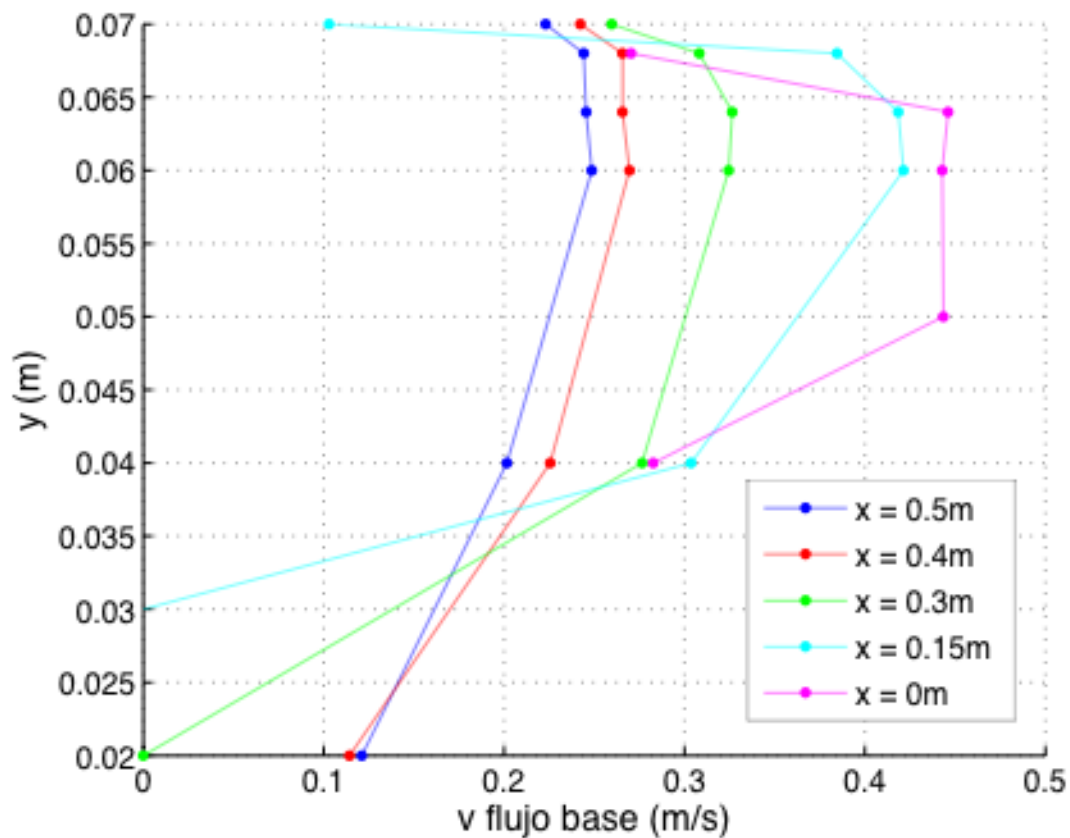


FIG. 31: - **Perfil de velocidad 2.** Representación gráfica del perfil de velocidades para cinco secciones del canal obtenidas mediante LDA para las condiciones de la segunda sesión. La curva magenta se corresponde al perfil de velocidad tomado sobre el obstáculo, la cian, verde, roja y azul a los perfiles de velocidad medidos a 0.15m y 0.3 m 0.4m y 0.5m respectivamente aguas abajo del obstáculo. Los marcadores representan las velocidades obtenidas experimentalmente y la curva continua la tendencia.

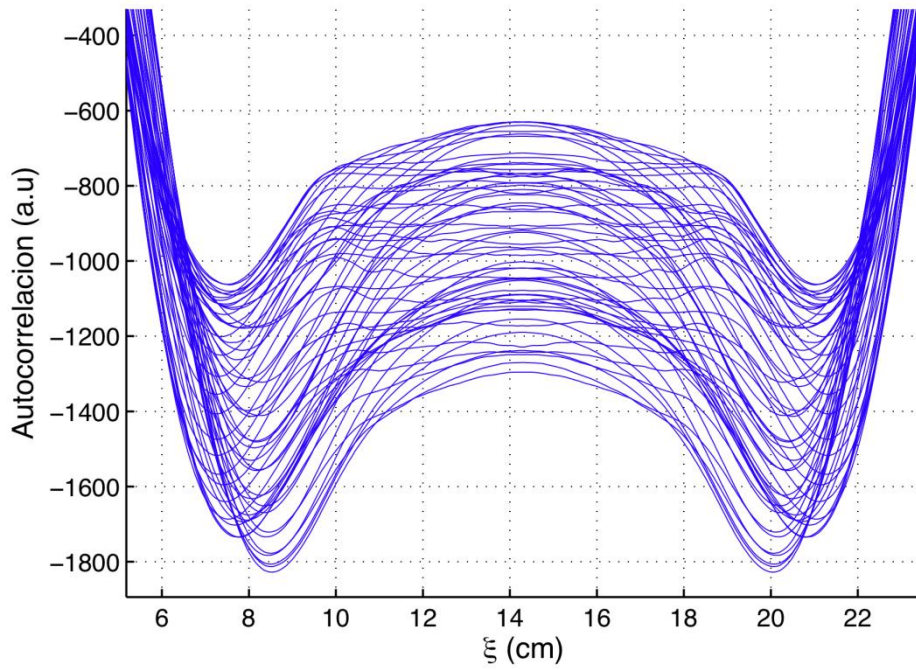


FIG. 32: - **Autocorrelación superficie libre 2.** Superposición de los análisis frecuenciales por autocorrelación para el periodo característico obtenido mediante promediado en fase. Diferentes curvas corresponden a diferentes instantes del periodo característico. El promediado se ha efectuado tras restar a la señal detectada la media de todas las detecciones.

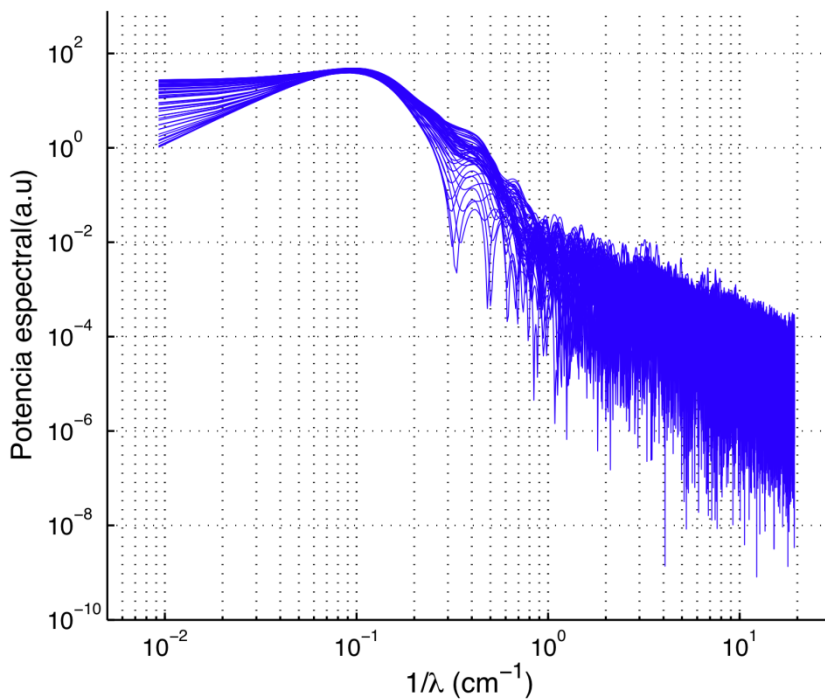


FIG. 33: - **Periodograma Welch superficie libre 2.** Superposición de los análisis frecuenciales por periodograma de Welch del periodo característico obtenido mediante promediado en fase. El promediado se ha efectuado tras restar a la señal detectada la media de todas las detecciones.

Además de esta primera particularidad de efecto beneficioso para nuestro análisis de señal, desafortunadamente contamos con un segundo efecto, en este caso, de carácter perjudicial. La observación de la superficie libre sin generación de ondas presenta un aspecto irregular, el análisis de la entrefase en ausencia de ondas generadas parece caracterizarse con una onda estacionaria muy posiblemente ocasionada por el propio obstáculo. Como es lógico pensar, se hace necesario sustraer estos efectos a los ocasionados por la generación de nuestras ondas, para ello se procede del siguiente modo: como las irregularidades en la superficie libre son permanentes en el tiempo, se realizara la media entre las entrefases detectadas de todos los fotogramas y se restará a cada uno de ellos. El problema es que aunque conseguimos suprimir en su mayor parte este efecto estacionario, la supresión de la media resta potencia a nuestra señal, hecho que agrava uno de los principales *hándicap* de nuestros experimentos, los pocos periodos medibles de la interfase.

Estas dos particularidades que acabamos de detallar provocan que la presentación de resultados difiera ligeramente de lo expuesto en la sesión anterior tal y como puede verse en la figura 32 y 33. Como se puede observar ya no contamos con una única curva, que se correspondía con la media de los análisis frecuenciales, ya fuese con la técnica del periodograma o de la autocorrelación, de cada fotograma. Ahora se visualizan conjuntamente cada uno de los análisis frecuenciales de todo el periodo característico.

En la figura 33 se muestra el periodograma de la entrefase detectada para el periodo característico tras el filtrado por *phase average* ofreciendo una frecuencia espacial destacada correspondiente a una longitud de onda de 11,1 cm. Como puede verse el pico del análisis frecuencial no es todo lo preciso que sería deseable, aunque este resultado era el esperado considerando que estamos obteniendo una longitud de onda de 11,1 cm en 28 cm analizables de señal, es decir, no llegamos a analizar 3 periodos completos. A lo que sumamos, como hemos citado con anterioridad, la pérdida de potencia de la señal por la supresión de su media.

Si acudimos a la figura 32 observamos un análisis frecuencial análogo pero en esta ocasión mediante la técnica de la autocorrelación. Si bien la autocorrelación también parece mostrar una longitud de onda destacada en torno a 10 cm, solo se entiende como frecuencia destacadas en la autocorrelación aquellos máximos relativos distintos de la mitad de la longitud analizable al no ser ésta un valor real representativo. En esta ocasión es más complicado encontrar una longitud de onda concreta destacable si no, más bien, observamos un entorno sensible. Por ello es más preciso obtener un resultado estadístico. A tal fin se han detectado todos los máximos relativos del entorno sensible obteniendo como resultado una media de 10.4 cm con una desviación típica de 0.4.

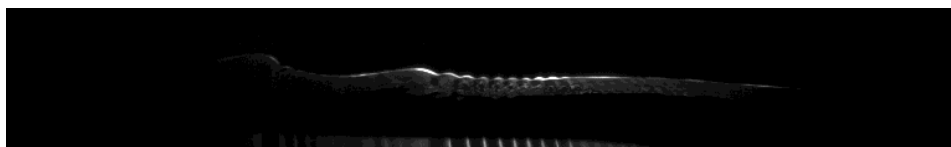


FIG. 34: - **Ruptura onda incidente.** Imagen que muestra la aparición de longitudes de onda cortas con la ruptura de la onda incidente

Estos primeros resultados explican las altas longitudes de onda que muestra la detección pero no parecen representar un fenómeno claramente visible, que caracteriza y por el que se ha escogido esta sesión, la aparición de longitudes de onda mucho más cortas, en torno al centímetro, en la ruptura de la onda incidente (ver fig.34).

Al entender que estas frecuencias pueden aportar información relevante para la comprensión de la secuencia se realizará su estudio de forma separada. Para ello se ha seleccionado un fotograma donde la detección es clara y, dentro de este, a su vez se ha escogido para su posterior análisis frecuencial solo la longitud donde el fenómeno es predominante, lo que da lugar a una región de aproximadamente 4,5 cm. Se analizará de forma independiente el fotograma seleccionado junto a sus 3 precedentes y contiguos, para atender a su evolución temporal con su correspondiente atenuación, así como todos los fotogramas en fase con los anteriores para confirmar el sometimiento a la frecuencia angular impuesta por la pala.

La escasez de periodos sumada en esta ocasión a la poca amplitud detectada hace que únicamente el análisis por autocorrelación nos aporte resultados fiables, por lo que solo se expondrá los resultados obtenidos por este método. La forma de proceder será análoga al estudio por autocorrelación de esta misma sesión para la señal en su totalidad, se obtendrá la longitud de onda de los máximos relativos en el entorno sensible realizando posteriormente un estudio estadístico.

En la figura 35a y 35b se muestra a modo de ejemplo una de las señales estudiadas junto a su análisis frecuencia por autocorrelación y la correspondiente detección de su longitud de onda asociada destacada. La figura 35 además de mostrar la nitidez en el resultado obtenido nos permite visualizar la señal de partida para contrastar estos resultados y ser críticos con su obtención. Tal y como puede verse en la fig.35a la detección a analizar cuenta tan solo con 3 píxeles de amplitud presentando un aspecto más irregular y no tan cercano al propio de una onda senosoidal como, por ejemplo, la mostradas en el capítulo 5 referentes a la primera sesión(fig.21). Estas limitaciones no impiden que el análisis frecuencial marque de forma clara su carácter periódico (fig. 35.b) pero si hace comprensible que no fuesen detectadas en el estudio de la señal al completo. Sobre todo teniendo en cuenta que el filtrado por promediado en fase atenúa las altas frecuencias espaciales siendo todavía más perjudicial en un caso como el nuestro donde la detección es compleja.

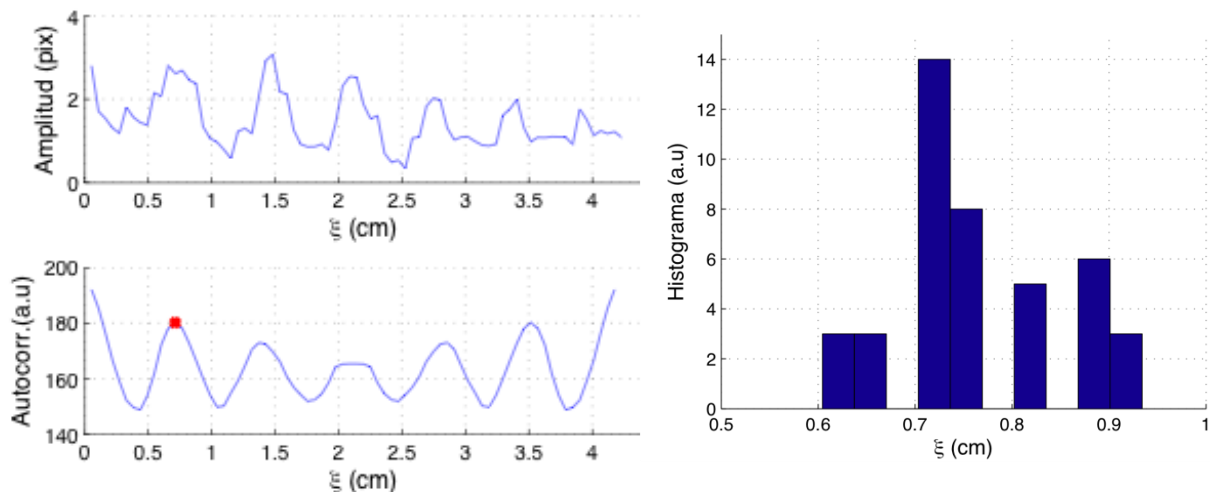


FIG. 35: - **Pequeñas longitudes de onda.** **a**, Ejemplo de una de las zonas de interés dentro de la entrefase detectada en la que se visualizan ondas cortas. **b**, Análisis frecuencial por autocorrelación de la señal mostrada en 35a. La marca roja se corresponde con el máximo relativo detectado para la autocorrelación en la región de interés. **c**, Histograma representativo de los máximos relativos detectados en la autocorrelación para todas los fotogramas analizados que marcan la frecuencia asociada a la onda visible en la zona de interés.

Tras estas puntualizaciones en la figura 35c se muestra la distribución de longitudes ondas fruto del análisis estadístico mencionado con anterioridad y que tiene como resultados una media para dichas longitudes de onda de 0.76 cm con una desviación típica de 0.09.

Debemos ser muy críticos a la hora de asociar el fenómeno estudiado con anterioridad a una de las ondas reflejadas ya que podríamos encontrarnos ante un fenómeno de capilaridad. La tensión superficial, que no hemos incluido en el cálculo de nuestra relación de dispersión, impide a las ondas reflejadas adoptar la curvatura que debiesen tener de no considerarse la misma. Por ello se forman ondas de menor longitud de onda. De hecho si calculamos el número de Weber (44), un número adimensional que marca la importancia de la inercia del fluido respecto a su tensión superficial, obtenemos un valor cercano a la unidad no pudiendo despreciar ninguno de los dos efectos.

$$We = \frac{\rho\omega^2}{\sigma}\lambda^3 \quad (44)$$

Finalmente, tras obtener las diferentes longitudes de onda y puntualizar las objeciones en su interpretación, en la figura 36 se presentan los valores de las mismas, representados por aspas magentas, junto a la relación de dispersión propia de esta serie. Recordamos que las curvas rojas se corresponden con la relación de dispersión calculada a partir de las velocidades aguas abajo del obstáculo mientras que las azules lo son a partir de las velocidades medidas sobre el obstáculo. De igual forma las curvas continuas se asocian a las velocidades medias de una sección mientras que las discontinuas generarán las relaciones de dispersión a partir de la velocidad máxima tomada en dicha sección. Además conjuntamente a las longitudes de onda obtenidas experimentalmente se ha añadido otra relación de dispersión asociada a la velocidad que haría corresponder los resultados experimentales con los esperables teóricamente.

Tras mostrar los resultados podemos enunciar las primeras conclusiones. En concreto nos centraremos en torno a tres puntos, en primer lugar se hará una valoración de los resultados en sí mismos enfocada a la correspondencia o no de los resultados experimentales con los teóricos para a continuación detallar dos dificultades experimentales, que son especialmente patentes en esta sesión, con el propósito de acotar sus efectos en la obtención de resultados o incluso disminuir sus efectos en sesiones posteriores cuando esto sea posible.

Como acabamos de citar comenzaremos por la valoración de resultados para lo que nos centraremos en la figura 35 explicada un par de párrafos atrás. En ella, como ya dijimos, se presentan las longitudes de onda obtenidas experimentalmente junto a la relación de dispersión a distintas velocidades con el objetivo de comparar los resultados experimentales con los esperables teóricamente.

Como también se explicó con anterioridad, aunque por no contar con un perfil de velocidades uniforme, se trazan distintas relaciones de dispersión calculadas a partir de distintas velocidades, nuestra curva referencia, por la definición del estiramiento de la coordenada longitudinal, será la asociada a la relación de dispersión calculada con la velocidad media del perfil aguas abajo del obstáculo (curva roja). De este modo destaca que las longitudes de ondas encontradas experimentalmente, en primer lugar, solo son dos de las tres esperadas y en segundo no coinciden con los valores esperados, los correspondientes a la curva roja.

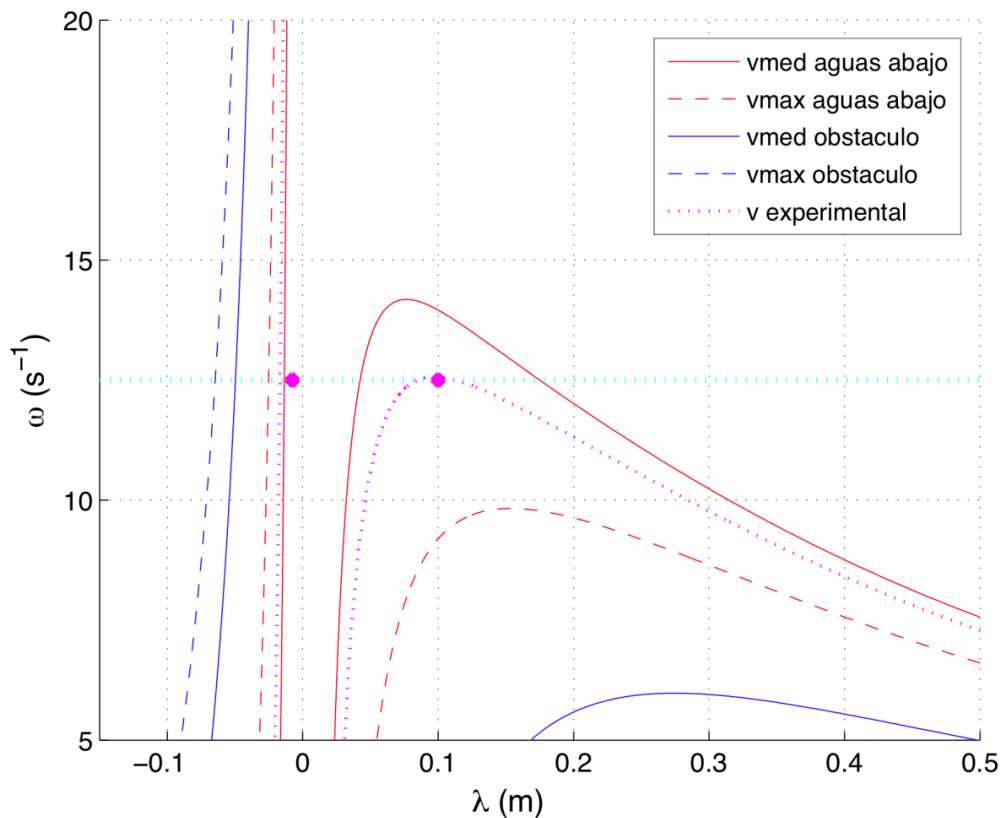


FIG. 36: - **Resultados 2.** Relación de dispersión en las condiciones de la segunda sesión junto a las longitudes de onda obtenidas experimentalmente tras el análisis frecuencial de la detección. Las relaciones de dispersión con trazo continuo se han calculado a partir de las velocidades medias de los perfiles, mientras que las de trazo discontinuo se han calculado a partir de las velocidades máximas obtenidas en los mismos perfiles. Por su parte el color azul se asocia a los perfiles tomados sobre el obstáculo mientras que el color rojo lo hace con los perfiles aguas abajo del obstáculo. Finalmente la curva magenta es aquella relación de dispersión que mejor ajusta a los resultados experimentales que se muestran por puntos magenta a la relación de dispersión teórica. La longitud de onda experimental negativa ha sido situada en el plano negativo de forma arbitraria ya que nuestros análisis no permiten determinar el signo de las longitudes de onda.

No obstante sí podemos encontrar una velocidad a la cual las longitudes de onda experimentales se corresponderían con las longitudes de onda teóricas. La relación de dispersión a dicha velocidad, que denominaremos velocidad experimental a partir de ahora, se representa en la misma figura mediante una curva punteada color magenta.

Esta velocidad no solo asemejan las dos longitudes de onda experimentales con las esperables teóricamente si no que también explicaría porque son dos y no tres las longitudes de onda detectadas. Como puede verse en la figura 36 la relación de dispersión para la velocidad experimental tiene su máximo próximo al corte con la frecuencia angular impuesta por el generador. El corte ocasionado, que se corresponde con las longitudes de onda esperadas teóricamente, muestra por tanto valores de las longitudes de onda muy próximos entre sí. Esta proximidad, con nuestra resolución y la incertidumbre en la medida equivale a la imposibilidad de diferenciar estas dos longitudes de onda entre sí.

Además la velocidad experimental no dista en exceso de la velocidad media aguas abajo del obstáculo y de hecho se encuentra comprendida entre ésta y la velocidad máxima en el mismo perfil. No nos excedemos en esta explicación puesto que la problemática referente a la no uniformidad en los perfiles de velocidades se tratará de forma detallada en esta misma sección más adelante.

Con el anterior párrafo finalizaríamos la valoración de resultados y proseguiremos con las dificultades experimentales visibles durante esta sesión.

Comenzaremos con la problemática referente a ondas capilares. Como ya hemos anticipado este fenómeno tiene cabida a longitudes de onda cortas y aparece motivado por las fuerzas de tensión superficial. Si hacemos memoria, en el apartado 3.2, despreciábamos las fuerzas de tensión superficial para el cálculo de la relación de dispersión. Aunque en su momento no se mencionó, por exceder las pretensiones de este trabajo, el hecho es que la demostración teórica de las analogías por ondas de gravedad (Ref.1), está supeditada precisamente al hecho de que se trabaje con ondas de gravedad y no con ondas capilares.

El número adimensional de Weber nos orienta sobre qué tipo de ondas superficiales son las dominantes. Números de Weber mucho menores de la unidad nos sitúan en la región con predominancia de las ondas capilares, mientras que números mucho mayores, en la región dominada por las ondas gravitatorias. En números próximos a la unidad las fuerzas gravitatorias y las propias de la tensión superficial tienen un peso comparable por lo que ondas capilares y de gravedad conviven.

Como ya comentamos, el número de Weber de esta sesión se encuentra próximo a la unidad. Este hecho supone no poder asegurar que la longitud de onda detectada sea propia de una onda capilar o de una onda de gravedad y por tanto no poder asegurarse que la longitud de onda medida experimentalmente es un valor correcto a la hora de validar la relación entre coeficientes de Bogoliubov (ec.5) que se exponía como uno de los objetivos del proyecto.

Nuestro propósito sería, por tanto, encontrar las condiciones de trabajo que atenuasen los efectos capilares, o lo que es equivalente, aquellas condiciones que llevan asociadas números de Weber más elevados. El problema es que al estudiar los rangos de trabajo tanto del generador de olas como del canal apenas podríamos lograr condiciones experimentales con Weber próximos a la decena.

No obstante, al profundizar en esta limitación y acudir a valores propios de nuestra publicación referencia (Ref. 2) observamos condiciones de trabajo en principio no exentas de los fenómenos capilares. Según lo expuesto en tal fig. 4c de la misma referencia, podemos tomar un valor aproximado para longitud de onda de una de las ondas reflejadas de $\lambda=6.6\text{cm}$ con una frecuencia angular de $\omega= 1.16\text{rad/s}$ con lo que tomando la densidad del agua como $\rho= 1\text{ g/cm}^3$ y la tensión superficial aire agua como $\sigma=0.072\text{ J/m}^2$ obtendríamos un Weber de 5.4 que como ya anticipábamos no permite obviar los efectos capilares.

Además del problema asociado a la capilaridad otra dificultad añadida para la fiabilidad de los resultados es la no homogeneidad del perfil de velocidades en una sección dada. Este problema ya era visible en la sesión anterior aunque se ha optado por explicarlo en esta al ser más críticos sus efectos.

Si volvemos a hacer memoria sobre la obtención de la relación de dispersión (cap.3) podemos recordar como para hacer el problema tratable supusimos cambios infinitamente suaves en la pendiente del obstáculo pudiendo expresar la velocidad del

fluido como constante. Pero en la realidad no es así, siendo visible, en por ejemplo la figura 36 la diferencia de resultados teóricos si tomamos la velocidad media aguas abajo del obstáculo para calcular la relación de dispersión o si la calculásemos a partir de la velocidad media sobre el obstáculo. Es decir, aunque los perfiles de velocidad fuesen uniformes y su valor fuese el que ahora medimos como velocidad media, la ambigüedad en los valores de longitud de onda esperables teóricamente sería grande. No obstante, lo anteriormente expuesto no es totalmente cierto, lo sería en caso de comparar nuestros resultados experimentales sin estirar previamente la coordenada longitudinal. El estiramiento de la coordenada longitudinal tiene precisamente por objetivo disminuir esta deficiencia adecuando cada punto de la interfase detectada a la velocidad que realmente experimenta. En concreto el estiramiento se ejecuta de una manera en la que, para conservar las unidades espaciales de la coordenada longitudinal, se recurre a la velocidad media aguas abajo del obstáculo. Motivo por el cual, como ya hemos repetido en multitud de ocasiones, es la relación de dispersión calculada a partir de la velocidad media aguas abajo del obstáculo la relación de dispersión referencia para la obtención de las longitudes de ondas teóricas.

Lo anteriormente expuesto nos sirve para contextualizar la problemática de la no uniformidad en el perfil de velocidades, pues como acabamos de explicar, el no trabajar a una velocidad concreta añade la dificultad de elegir una velocidad referencia y encontrar un intervalo alrededor que marque el error admisible para la misma.

La no uniformidad en el perfil supone además una doble dificultad, pues no solo nos obliga a trabajar en un rango de velocidades factibles que ocasiona un intervalo de valores factibles para la longitud de onda teórica en lugar de un único valor concreto, si no que además perjudica la validez de la teoría potencial.

Acerca de la dificultad de elegir una velocidad de referencia para el cálculo de la relación de dispersión, el error cometido es complejo de acotar. En nuestro caso hemos optado por fijar la velocidad media del perfil aguas abajo del obstáculo como valor de referencia, fijando un intervalo admisible establecido por la velocidad máxima propia de ese mismo perfil. Se entiende que la velocidad máxima del perfil es un valor significativo al obtenerse en la zona próxima a la superficie, ya que de alguna manera la velocidad próxima a la superficie es la que en mayor grado afecta a las ondas en estudio. No obstante, el error cometido al usar dicha velocidad de referencia es complicado de estimar. El principal problema radica en que no se dispone de ecuaciones exactas que describan el comportamiento de las olas cuando la velocidad no es uniforme, por lo que dicho efecto sólo podría estudiarse numéricamente o usando técnicas aproximadas como la WKB, que se sugiere en la sección de mejoras. Sin embargo ambos estudios caen fuera del alcance de este proyecto.

Como es lógico pensar, cuanto más disminuyamos la no uniformidad del perfil de velocidades, más reducida será la zona de incertidumbre en la medida.

Al contrario de lo que sucedía con los fenómenos capilares, en este caso, tenemos mayor maniobrabilidad a la hora de disminuir los efectos negativos asociados al perfil de velocidades. No se calculará de forma teórica unas condiciones de trabajo óptimas, si no que se seguirá un proceso iterativo de ajuste de caudal hasta llegar a unas condiciones favorables. El resultado de este procedimiento de ajuste que minimiza la no homogeneidad del perfil de velocidades es una de las mejoras visibles en la próxima sesión.

Además la siguiente serie también contará con grabaciones a dos frecuencias distintas de excitación con el propósito de demostrar si a pesar de las problemáticas descritas, las longitudes de onda responden a la tendencia esperable.

Sesión 3

Esta tercera sesión se ha rodado en condiciones y bajo técnicas similares a la sesión 2. Aunque en este caso la serie estará compuesta por cuatro, y no por tan solo una, secuencias, pues como ya adelantábamos en la serie anterior nuestra pretensión es evaluar si ante cambios en la frecuencia angular de batida de la pala se observa en las longitudes de onda medidas experimentalmente la misma tendencia que en las longitudes de onda teóricas.

Las condiciones de las cuatro secuencias que componen la serie son muy similares entre sí, la primera secuencia se compone de 999 fotogramas con una resolución de 1152x396 pix que se corresponde con una longitud de análisis en coordenadas estiradas de 40,6cm, en el caso de la segunda serie hablamos de 800 fotogramas de resolución 1136x364 pix correspondientes a 40,7 cm analizables, la tercera se corresponde con 850 fotogramas de resolución 852x200 pix que suponen 35,5 cm analizables y finalmente la cuarta serie se compone de 999 fotogramas de resolución 112x400 pix que suponen 26,9 cm analizables. Las cuatro secuencias se rodaron a 50 fps.

Como puede verse, la longitud analizable en esta ocasión se encuentra comprendida entre las longitudes analizables de las dos anteriores sesiones por querer en esta tercera encontrar una solución de compromiso para la detección tanto de la onda incidente como de las dos reflejadas. Una mayor longitud analizable permite la visualización de un mayor número de periodos de la señal, más significativo a la hora de detectar la longitud de onda incidente de mayor longitud y menor atenuación que las reflejadas. Mientras que una longitud analizable menor equivale en nuestros experimentos a mayor resolución y por tanto favorece la detección de las ondas reflejadas de menor amplitud y que se atenúan más rápidamente.

Además, como también se adelantó en la sesión anterior, en esta tercera se pretende paliar los posibles problemas de precisión en la detección de las longitudes de onda experimentales asociados a la no uniformidad del perfil de velocidad trabajando en todas las secuencias de esta serie con un perfil de velocidades mucho más uniforme.

La última diferencia reseñable que presenta esta sesión es la recuperación de la parada del generador de olas que describimos en la primera sesión pero que no tuvo lugar durante la segunda.

Tras establecer las anteriores puntualizaciones se procederá a la exposición de resultados. Al contar esta sesión con cuatro secuencias, con el fin de no extendernos en la muestra de resultados, solo se presentará de forma gráfica los resultados de una de las secuencias citando únicamente los resultados del resto de sesiones así como las puntualizaciones que se consideren necesarias. En concreto se mostrarán los resultados correspondientes a la segunda secuencia.

El orden y la motivación en la exposición de resultados son los mismos que en anteriores sesiones por lo que para agilizar la lectura solo nos detendremos en los aspectos novedosos de los mismos.

Las figuras 37 y 38 muestran respectivamente el análisis temporal obtenido a partir del valor en un punto fijo de la detección con el transcurso de los fotogramas junto a su análisis frecuencial y el perfil de velocidades en 3 secciones del canal. La figura 37 nos sitúa en los rangos de amplitud de las ondas analizadas y nos confirma la frecuencia angular de trabajo, en este caso, $\omega = 11 \text{ rad/s}$, así como su nitidez. La figura 38 por su

parte confirma las condiciones de uniformidad en el perfil de velocidades que ya anunciábamos.

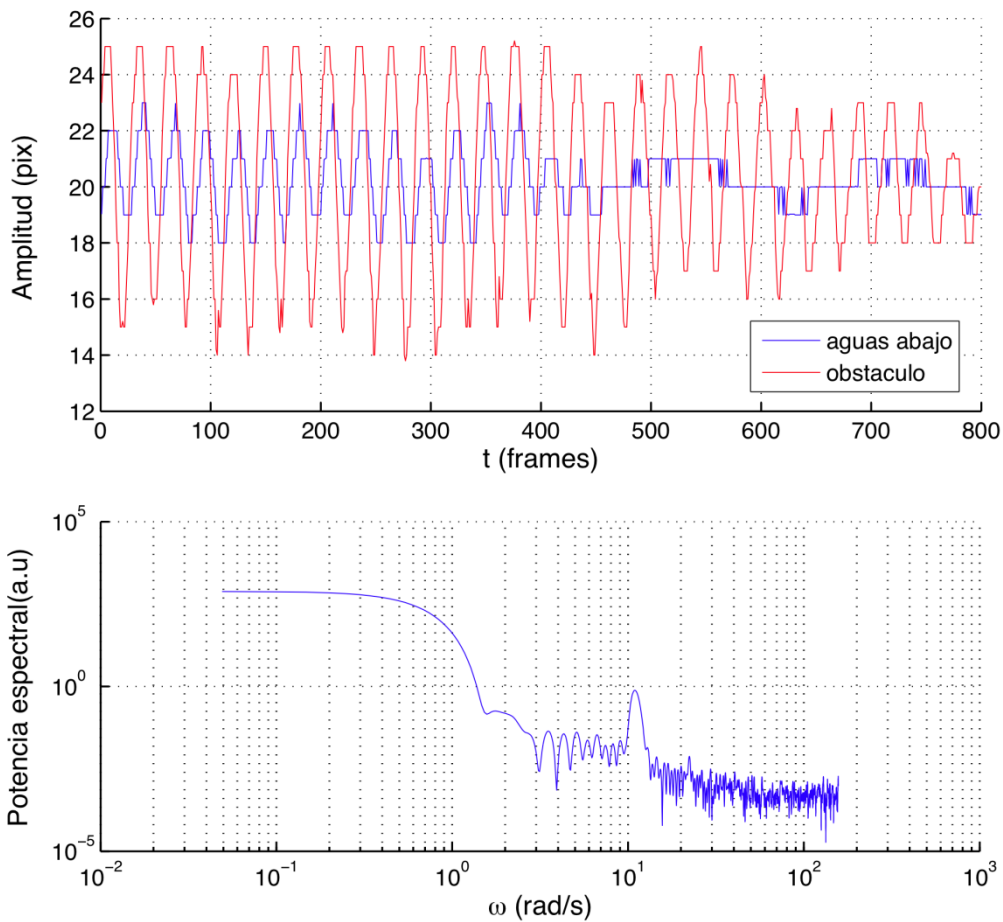


FIG. 37: - **Comportamiento temporal 2C.** **a**, Amplitud de la superficie libre con el transcurso de los fotogramas (*frames*) para una coordenada longitudinal de la detección constante. En rojo se muestra la evolución para un punto situado sobre el obstáculo y en azul para un punto situado aguas abajo del obstáculo. Entorno al fotograma 450 la tendencia de la amplitud cambia posiblemente motivada por la parada del generador. **b**, Análisis frecuencial de la evolución temporal a pixel fijo mostrado en la figura 37a.

El siguiente paso en la presentación de resultados, siguiendo el esquema de la sesión anterior, es la muestra del análisis frecuencial efectuado a un periodo característico, obtenido tras el promediado en fase de la detección. Aunque si bien esta presentación se realizará posteriormente, antes es conveniente comentar y analizar una particularidad de esta sesión.

Al visualizar la secuencia en su totalidad se observa como la longitud de onda visible disminuye de forma ostensible con el transcurso del tiempo. Únicamente mediante la visualización de la interfase no podemos afirmar que la longitud de onda que disminuye drásticamente pertenezca a la onda incidente o a las reflejadas ya que lo que observamos es la superposición de las tres ondas. Es por ello que hablamos de longitud de onda visible, aunque no sea formalmente correcto, apelando a la connotación de longitud de onda como medida de repetición espacial de un patrón.

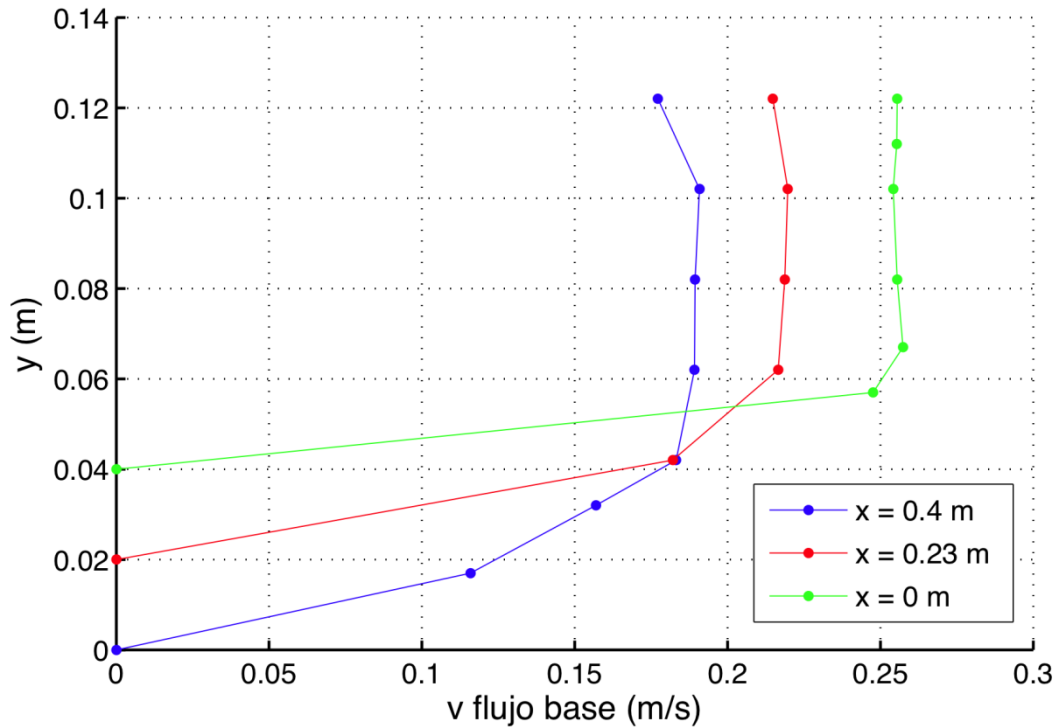


FIG. 38: - **Perfil de velocidad 2C.** Representación gráfica del perfil de velocidades para tres secciones del canal obtenida mediante LDA para la segunda secuencia de la tercera sesión. La curva verde se corresponde al perfil de velocidad medido sobre el obstáculo, la curva roja y azul son los perfiles de velocidad tomados a 0.23m y 0.4m aguas abajo del obstáculo respectivamente. Los marcadores representan las velocidades obtenidas experimentalmente y la línea continua marca la tendencia.

Al establecer la parada de la pala esperábamos ver un acortamiento de las longitudes de ondas observables, pero provocado por la desaparición de la longitud de onda incidente. Idealmente la última onda incidente producida en el generador llegaría al obstáculo y a continuación solo veríamos las ondas reflejadas provocadas por ésta, de menor longitud de onda que la incidente. El efecto observado no parece responder a este fenómeno puesto que el acortamiento perceptible en la longitud de onda visible es progresivo en el tiempo y además parece, en toda su evolución, producido por ondas que viajan a contracorriente del flujo base. Para confirmar estas impresiones procedentes de la observación y caracterizar con mayor exactitud este fenómeno se procederá a al análisis frecuencial de la detección por los dos métodos que venimos empleando: autocorrelación y periodograma de Welch. Se realizará el periodograma y la autocorrelación de la interfase detectada, con el correspondiente estiramiento de la coordenada longitudinal, en cada uno de los fotogramas. A continuación se promediarán en intervalos de 100 fotogramas obteniendo los resultados de la figura 39a y 39b que muestran un acortamiento progresivo de la longitud de onda detectada. Los primeros 400 fotogramas se representan promediados en conjunto para facilitar la lectura de la gráfica pues sus respectivos intervalos promediados de 100 en 100 (intervalos de 1 a 100, de 101 a 200, etc...) ofrecían la misma curva.

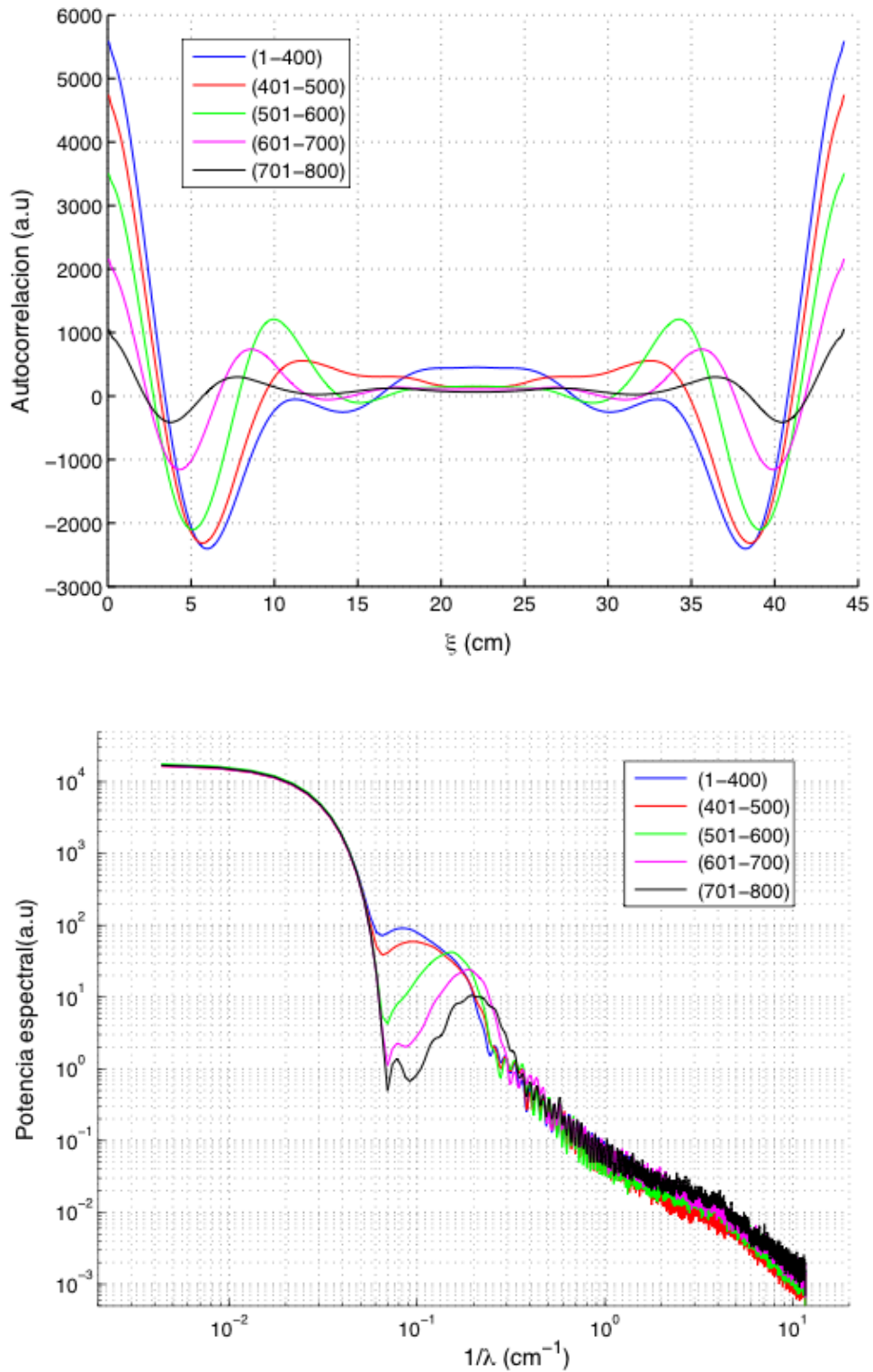


FIG. 39: - **Comportamiento ante parada 3B.** **a**, Análisis frecuencial por correlación de la superficie libre detectada para cada fotograma presentado promediado en intervalos temporales. El primer intervalo abarca los 400 primeros fotogramas que son tomados con la el generador de olas en funcionamiento. En el segundo intervalo, del fotograma 400 al 500, se produce la parada de la pala. Los restantes intervalos, con una duración de 100 fotogramas cada uno, representan la evolución de la longitud de onda para los instantes posteriores a la parada. **b**, Análisis frecuencial análogo al expuesto en Fig. 39a pero obtenidos mediante análisis frecuencial por periodograma de Welch.

Físicamente este fenómeno encaja con el hecho de que la parada del generador ocasione un tren de ondas a todas las frecuencias (una parada abrupta o escalón) sumado al carácter dispersivo de las ondas generadas. Denominamos ondas dispersivas a aquellas cuya velocidad de propagación es función de su número de onda. Puede demostrarse [sección 66 Ref.6] que la velocidad de propagación de una onda de este tipo viene dado por

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (45)$$

Aplicado a la relación de dispersión obtenida teóricamente (31) podemos escribir la velocidad de propagación en nuestro caso como

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k \tanh kh} \left[\tanh kh + \frac{kh}{\cosh^2 kh} \right]} \quad (46)$$

Resultado que confirma la relación entre velocidad de propagación y la longitud de onda. En concreto ondas de mayor longitud de onda se propagarán a mayor velocidad, lo que encajaría con el efecto observado en las figuras 39a y 39b. Las ondas de mayor longitud de onda viajan más rápido y por ello las visualizamos antes, según pasa el tiempo llegan las de menor longitud de onda que visualizamos en intervalos posteriores.

La confirmación de este fenómeno vendría de la mano del cálculo exacto de la velocidad de propagación de las ondas y no solo su tendencia, pero desafortunadamente este cálculo es complejo ya que debemos tener en cuenta simultáneamente la velocidad de propagación de las ondas incidente y reflejadas, cuando aún no hemos conseguido localizar sus longitudes de onda de forma convincente.

Aunque no podamos confirmar nuestra teoría acerca de los efectos de parada de la pala lo que sí parece evidente, es que a partir de ese momento, las detecciones realizadas se encuentran contaminadas por fenómenos no deseados. Por este motivo los resultados que hemos aplazados correspondientes al análisis de la señal promediada en fase, serán obtenidos considerando únicamente los fotogramas previos a la parada. Al tener menos fotogramas que participen en el promediado para la obtención del periodo característico, éste será algo más impreciso que el obtenido en la segunda sesión.

Como viene siendo habitual, el análisis de señal se concreta en la presentación del periodograma y la autocorrelación del periodo característico tras ser promediado en fase. En el caso de la autocorrelación (40a) se detectan, aplicando la misma técnica de detección de máximos relativos que en la sesión 2, dos frecuencias destacadas de media 12,2 cm y 18,8 cm con desviaciones típicas en ambos casos de 1.1. Mientras que en el periodograma (40b) únicamente aparece una frecuencia destacada de valor 12,5 cm. Estos resultados junto a sus análogos de las otras tres series se muestran ordenados en la tabla 1.

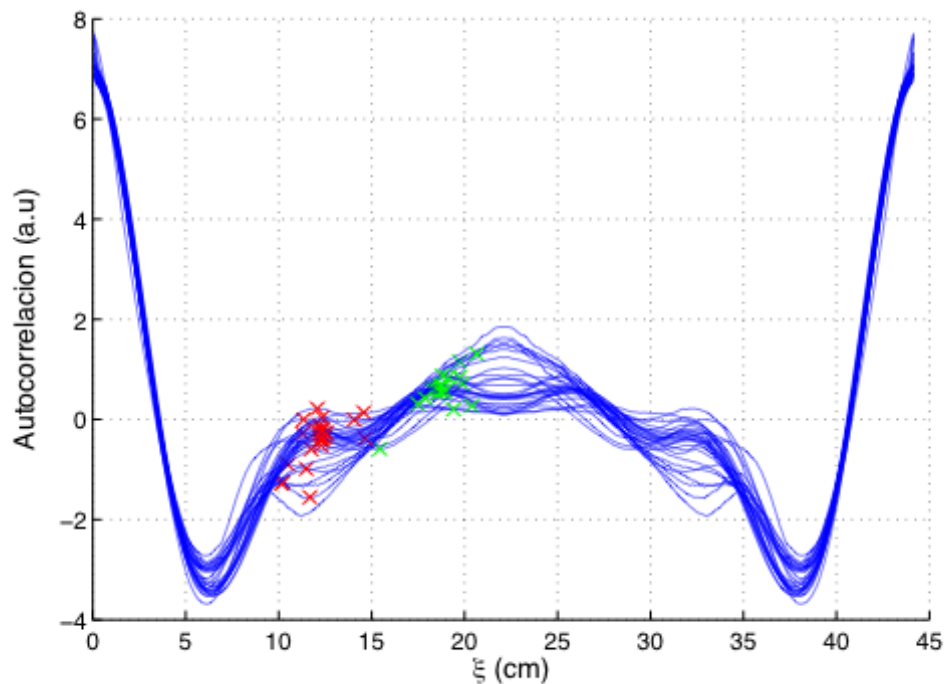
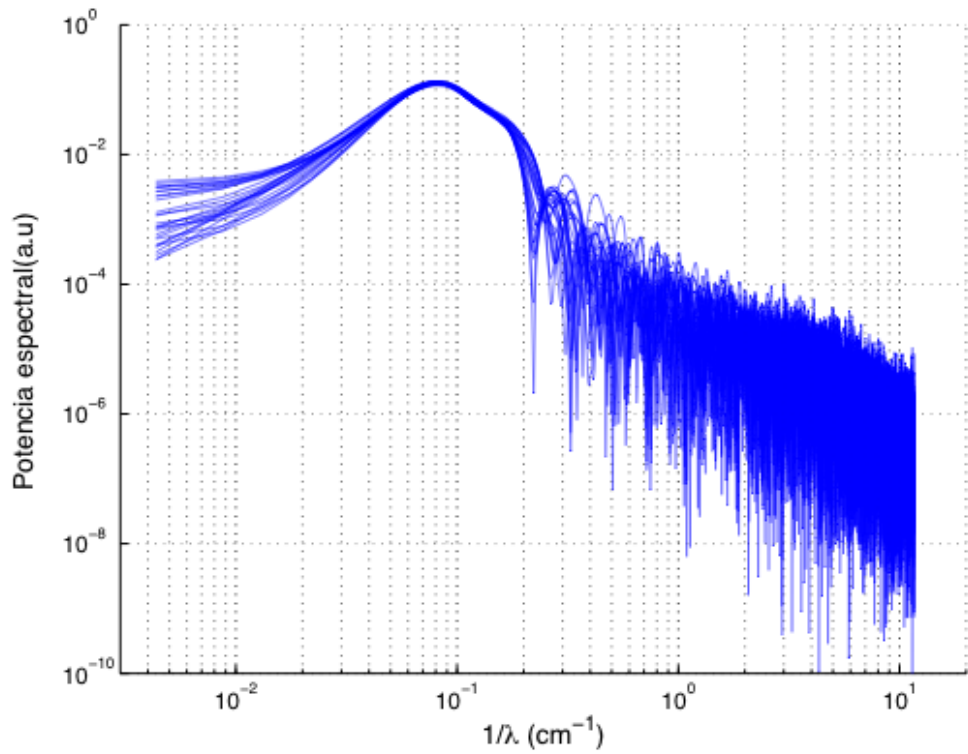


FIG. 40: - **Análisis frecuencial de la superficie libre 3B.** **a**, superposición de los análisis frecuenciales por periodograma de Welch del periodo característico tras la sustracción de la media obtenido mediante promediado en fase. **b**, superposición de los análisis frecuenciales por autocorrelación del periodo característico tras la sustracción de la media obtenido mediante promediado en fase. Se indican con espas rojas y verdes los máximos relativos de los dos entornos sensibles con los que, tras un análisis estadístico, se obtendrá la longitud de onda media de las dos zonas destacadas.

Número secuencia	ω (rad/s)	λ (cm)	
		Periodograma	Autocorrelación
1	12	10-11,1	12,9
2	11	12,5	12.2 y 18,8
3	12	9,1	13,8
4	12	12,5	10

Tabla 1: - **Resumen de las longitudes de onda destacadas.** Se muestran los resultados del análisis frecuencial realizado a las cuatros secuencias, tanto por el método del periodograma de Welch como por el de autocorrelación, junto a la frecuencia de batida de pala empleada en cada caso.

Al leer la misma destaca como prácticamente ninguna frecuencia detectada es confirmada por ambos métodos, lo que resta mucha fiabilidad a nuestros resultados. Como siempre comentamos este hecho no es demasiado sorprendente ante los dos o tres periodos de señal disponibles en la longitud analizable.

Finalmente en la figura 41 quedan expuestos los resultados de las cuatro sesiones con sus respectivas relaciones de dispersión (la sesión 3 y 4 comparten relación de dispersión). Aunque se intentó que las condiciones de velocidad fuesen las mismas para todas las sesiones la falta de repetitividad del canal no lo hizo posible razón por la cual se trazan las distintas relaciones de dispersión.

Como era de esperar los resultados distan de ser concluyentes. Las longitudes de onda medidas experimentalmente no se corresponden con las esperables teóricamente en cada una de las sesiones ni aparece una tendencia apreciable ante el cambio de frecuencia. Aun así, se ha trazado, en color magenta, la relación de dispersión que minimiza la diferencia entre las longitudes de onda medidas de forma experimental y las medidas teóricamente. La velocidad asociada a esta relación de dispersión se escaparía del rango de velocidades cuyo error fijamos como admisible en la anterior sesión. Salirse de este intervalo supone que la no correspondencia entre valores experimentales y teóricos esperados no parece ser atribuible a la no uniformidad del perfil de velocidades en el aspecto de elección de velocidad referencia. No podemos concluir que sea plenamente no atribuible a este hecho puesto que, como ya mencionamos, la no uniformidad también influye en el cumplimiento de la relación de dispersión teórica planteada. En cualquier caso todo parece apuntar a que la no uniformidad del perfil no es la razón destacada por la que los resultados no son los esperados.

Esta última discusión, unida a las de las dos primeras sesiones, servirá para la formulación de las conclusiones, así como para la propuesta de mejoras experimentales, esgrimidas en el próximo capítulo.

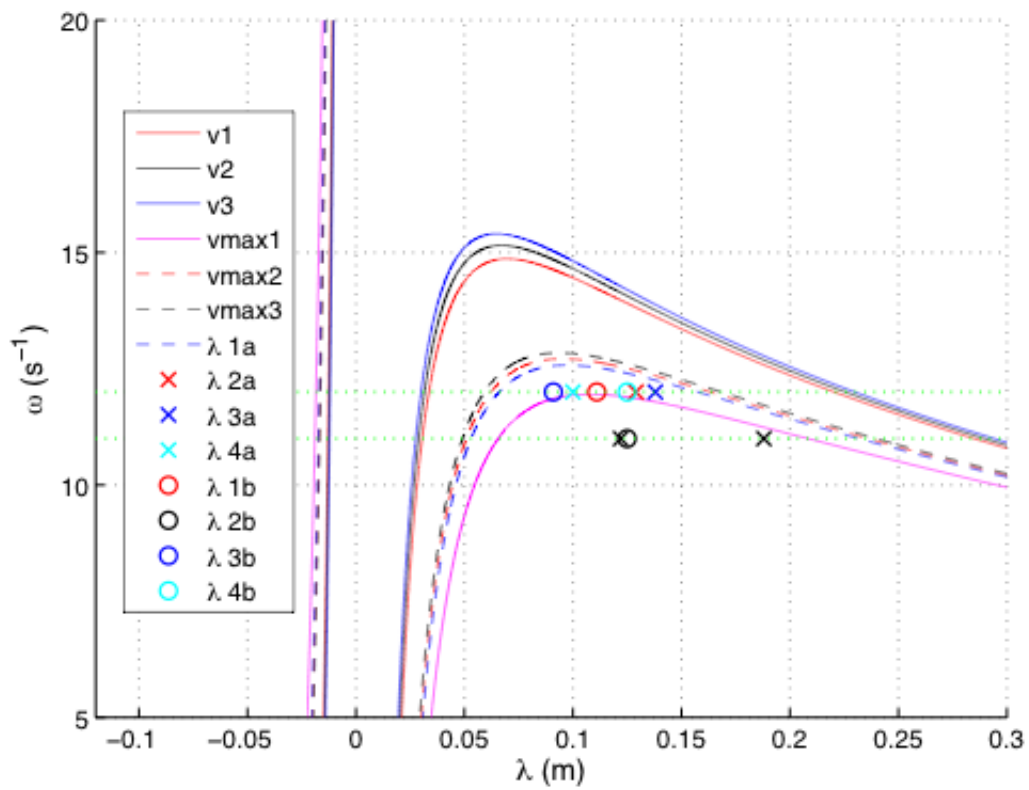


FIG. 41: - **Comparativa.** Relaciones de dispersión de las 4 secuencias que componen la tercera sesión (la tercera y cuarta secuencia comparten condiciones) junto a los resultados obtenidos en cada una de ellas. Las curvas continuas y discontinuas corresponden a las relaciones de dispersión calculadas a partir de la velocidad media del perfil y a la velocidad máxima respectivamente. Los círculos y las aspas representan los valores experimentales de las longitudes de onda obtenidos mediante análisis frecuencial en el primer caso por correlación y en el segundo por periodograma de Welch.

7. Conclusiones y mejoras.

7.1 Conclusiones

La conclusión más obvia, especialmente tras la lectura del último capítulo, es que nuestros resultados son poco concluyentes, no se ajustan a los resultados teóricos pero no son lo suficientemente fiables como para afirmar que la aproximación teórica es incorrecta. La falta de fiabilidad se encuentra, en esencia, condicionada por la escasez de periodos de señal detectados. En contrapartida las técnicas empleadas tanto en la detección como en el posterior análisis frecuencial de la entrefase han respondido positivamente según lo esperado.

Además de la falta de señal analizable, el carácter no uniforme de la velocidad tanto vertical como longitudinalmente añade incertidumbre a los resultados obtenidos. En este sentido cabe destacar que sí se ha demostrado la respuesta positiva de la onda incidente ante el modelo teórico como se vio en el apartado de validación de la instalación. El problema radica en que no se ha conseguido demostrar para las ondas reflejadas. Este hecho nos permite confiar en las prestaciones de la instalación diseñada pero aporta dudas sobre la validez del modelo teórico en las condiciones empleadas. La onda incidente solo experimenta la aceleración del flujo base en su tramo final, cuando llega al obstáculo. Por su parte las reflejadas al nacer sobre el obstáculo y al ser esperable una más rápida atenuación están más expuestas al cambio en la velocidad. Por tanto es esperable que la no uniformidad de la velocidad produzca un mayor alejamiento entre el modelo teórico, calculado para velocidad uniforme, y las observaciones experimentales para las ondas reflejadas que para las incidentes. En caso de que el modelo teórico propuesto se considere no adecuado por la problemática de las velocidades el error para la estimación de las longitudes de onda se espera más acusado para las ondas reflejadas. Pero ante la falta de periodos analizables anteriormente citada es complicado descartar dicho modelo.

Fijándonos en los resultados, únicamente se ha conseguido identificar con nitidez la onda incidente durante la primera sesión. Respecto a las ondas reflejadas, en ninguna de las sesiones se ha tenido la seguridad de estar captando su longitud de onda, ni de estar haciéndolo con precisión. En cualquier caso en ninguna sesión se ha medido simultáneamente las tres longitudes de onda correspondientes a la onda incidente y sus reflejadas. Tampoco de las dos reflejadas mediante la misma técnica de análisis frecuencial por lo que no se ha podido alcanzar uno de los objetivos del proyecto, la comprobación experimental de la relación entre los coeficientes de Bogoliubov.

Del mismo modo que la primera conclusión deriva del primer objetivo, planteado al inicio del proyecto, las siguientes conclusiones se encuentran motivadas por el segundo objetivo, dotar al Grupo de Mecánica de Fluidos de la Universidad Carlos III de una instalación para el estudio de ondas gravitatorias. En este sentido creemos que tan importante es el diseño y montaje de la propia instalación y la prueba y descripción de las técnicas empleadas para la captación de la señal, la superficie libre, como enumerar las limitaciones de la instalación. Conocer las limitaciones es importante porque explica la falta de fiabilidad de nuestros resultados y es útil de cara a próximos estudios para seleccionar las condiciones de trabajo más favorables pero sobretodo es el primer paso en la búsqueda de mejoras para la instalación.

Aunque en futuros trabajos las limitaciones puedan ser otras a continuación comentaremos aquellas limitaciones que han supuesto un impedimento para la correcta obtención de nuestros resultados. En concreto, aunque se hallan relacionados entre sí, las

enfocaremos en tres vertientes: limitaciones en el modelo teórico, limitaciones en las condiciones de trabajo y limitaciones en la detección.

Limitaciones en el modelo teórico

Una de las limitaciones que presenta nuestra relación de dispersión teórica es no haber incluido para su cálculo el efecto de las fuerzas de tensión superficial. La inclusión de las fuerzas de tensión superficial no permite la demostración de la analogía entre el comportamiento de las ondas gravitacionales y la radiación térmica enunciada por Hawking según lo publicado Schützhold y Unruh [Ref.1]. De todos modos, aunque la exclusión de dichas fuerzas sea justificada, no deja de ser una limitación para la correcta caracterización de las ondas, especialmente de aquellas con pequeñas longitudes de onda donde el efecto de la tensión superficial es mayor.

Otra de las limitaciones del modelo teórico es el tratamiento de la velocidad del flujo base, tanto longitudinal como verticalmente, como constante. Esta simplificación, la misma que se efectúa en [Ref.2] pretende facilitar la resolución analítica del problema. La desviación entre la variación longitudinal de la velocidad respecto a lo enunciado teóricamente intenta disminuirse mediante el estiramiento de la coordenada longitudinal. Mientras que los posibles efectos atribuibles a la falta de uniformidad del perfil transversalmente se han pretendido acotar fijando un intervalo admisible de longitudes de onda esperables teóricamente, este intervalo comprende las longitudes de onda obtenidas por la relación de dispersión calculada empleando desde la velocidad media del perfil hasta la velocidad máxima del mismo. En cualquiera de los dos casos no identificamos de forma precisa el error cometido.

Limitaciones en las condiciones de trabajo.

Las limitaciones del modelo teórico están estrechamente relacionadas con algunas de las limitaciones en las condiciones de trabajo. Si nos preocupa el comportamiento de la relación de dispersión teórica ante las variaciones de la velocidad o ante la no contemplación de la tensión superficial es precisamente porque durante las sesiones experimentales se ha observado la no uniformidad del perfil de velocidades o la posible aparición de ondas capilares.

El número adimensional de Weber es un indicador de la importancia relativa de las fuerzas de tensión superficial y por tanto su cálculo nos marcará si nos encontramos en una región dominada por las ondas de gravedad o por las ondas capilares. La no uniformidad del perfil de velocidad por su parte es corregible por un proceso iterativo de medida y ajuste que ofreció buenos resultados como pudo observarse en la tercera sesión.

Además de estos efectos, también se ha hecho visible la falta de repetitividad del canal. La mejora del comportamiento del mismo excede de nuestro proyecto, aunque sí es nuestra competencia fijar un protocolo de actuación que atenúe sus posibles consecuencias. Este breve protocolo consiste en la medida de las condiciones de trabajo tanto al comienzo como tras finalizar la sesión así como la captación de la superficie libre en los instantes posteriores a la fijación de las condiciones de trabajo pero anteriores a la generación del oleaje.

Limitaciones en la detección

En lo que a la propia detección se refiere los principales condicionantes son el difícil compromiso entre la longitud analizable y la resolución de la imagen, el también

compromiso entre la longitud de la intersección del plano láser con la entrefase y la potencia de dicho plano así como la limitada apertura del diafragma de la lente.

En cualquiera de los tres casos el problema reside en no captar los suficientes periodos que permitan un correcto análisis frecuencial. Tanto en el caso de disminuir el zoom de la grabación como en el caso de abrir el plano láser ganamos longitud de señal analizable a cambio de perder precisión en la identificación de la superficie libre.

7.2 Mejoras

Como ya dijimos, formular las limitaciones del canal no solo nos permite ser honestos con nuestros logros si no que además posibilita el hallazgo de soluciones a las mismas. Algunas de estas mejoras o soluciones especialmente enfocadas a nuestro escenario experimental se enumerarán a continuación.

Al igual que empezamos describiendo las limitaciones del modelo matemático comenzaremos sugiriendo como lograr su perfeccionamiento.

Un aspecto a trabajar sería la introducción del carácter variable de la velocidad a la hora de resolver las ecuaciones. Una resolución analítica sería de complejidad excesiva, siendo una alternativa recurrir a la simulación numérica.

Otro aspecto interesante sería la obtención matemática de la relación entre las amplitudes de la onda incidente y sus reflejadas. Conocer este parámetro nos supondría un nuevo punto de verificación de cara a demostrar la fiabilidad de nuestros resultados. Finalmente aunque se trate de un salto cualitativo respecto a lo planteado hasta el momento, mucho más interesante sería la modelización del proceso de reflexión experimentado por las ondas incidentes a su llegada al obstáculo. Estos dos puntos se resolverían de forma conjunta aplicando el método WKB para la resolución de ecuaciones diferenciales. En la técnica WKB la amplitud de la onda se expresa como una función exponencial compleja de la fase en la que alguno de sus parámetros (en nuestro caso la longitud de onda) varía lentamente, siendo el parámetro que caracteriza dicha variación el empleado para expandir asintóticamente la solución. Aunque a priori los problemas a los que se aplica este método difieren bastante del que nos ocupa, en la referencia 18 (cap. 12) se explica el uso de esta técnica de una manera que podría ser fácilmente aplicable a nuestro caso.

Ya desde el punto de vista experimental existen pequeñas mejoras que no fue posible implementar por la duración del proyecto pero que consideramos mejorarían notablemente la calidad de los resultados.

Una de ellas es el sembrado del flujo con rodamina. La rodamina es una sustancia con propiedades análogas a la fluoresceína, cuyas características definimos en el capítulo 5.1, pero cuya longitud de onda de excitación es de 532nm. Debemos recordar que durante los primeros experimentos se trabajó con un láser menos potente de 488 nm, una de las longitudes de onda de máxima excitación de la fluoresceína, pero al cambiar el láser su nueva longitud limitaba la respuesta de la fluoresceína por lo que se empleó leche en polvo al no disponer de rodamina. Con el uso de la rodamina obtendríamos una intersección del plano láser con el fluido mucho más intensa, lo que a su vez nos permite abrir más el plano láser consiguiendo una longitud analizable de señal mayor. Incluso podría obtenerse un filtro para la longitud de onda de trabajo que permitiese una detección de la superficie libre más precisa resultado de la notable simplificación del código de detección.

En el apartado de adquisiciones también podríamos incluir una lente de mayor apertura que incrementara aún más la longitud detectable.

Otra implementación del montaje sería la instalación de un posicionador que permitiese la toma de imágenes con distintos enfoques y desde distintas ubicaciones. Aunque durante el transcurso del proyecto el cambio de plano se ha efectuado de forma manual, un posicionador añadiría precisión y rapidez a la maniobra. Esta rapidez permite

rodar más secuencias con las mismas condiciones de trabajo por lo que la comparación de resultados entre distintas sesiones es más precisa. Este tipo de posicionador aparece en diversas publicaciones (por ej. Ref.19) en donde se trabaja en un canal hidrodinámico, en estos casos suele tratarse de un sistema controlable en velocidad, aunque para nuestras especificaciones podríamos emplear un mecanismo únicamente controlable en posición. De hecho como nuestra intención, tal y como indicamos al inicio del proyecto, es trabajar siempre que sea posible con material ya disponible en el departamento, una solución sería reutilizar el posicionador del cabezal de LDA. La adquisición o en su defecto fabricación de una pieza de sujeción entre la cámara y el posicionador ya existente supondría la utilización del mismo para esta nueva función manteniendo su funcionalidad inicial, ya que se trata de una implementación no invasiva en la que tanto el LDA como la cámara tienen el mismo campo de trabajo.

Una mejora más desde el punto de vista de la experimentación sería establecer una parada menos abrupta para el generador de olas. Como se observó durante la tercera sesión, la detención brusca de la pala generaba un tren de ondas a distintas frecuencias que dificultaba la obtención de resultados concluyentes. No obstante establecer una parada, por ejemplo, de carácter senoidal pero con una amplitud mayor a la empleada durante la generación y sobretodo que fije la posición de reposo fuera del fluido, evitaría este problema. Esta parada no generaría un tren de ondas a distintas frecuencias si no que seguiría transmitiendo únicamente la frecuencia angular inicial. De este modo, aunque el resultado está sujeto a prueba, intentaríamos visualizar las ondas reflejadas en ausencia de la onda incidente, motivación por la que se ideó la parada del generador.

Finalmente creemos oportuno mencionar otra línea de trabajo para el transcurso de futuros experimentos. No se trata de un cambio drástico si no simplemente de una modificación en las condiciones iniciales. Además no debe considerarse como una mejora de la instalación propiamente dicha puesto que ofrece los mismos pros y contras a priori que las condiciones empleadas hasta el momento. No obstante, ante la falta de resultados concluyentes no debe rehusarse su estudio.

Nuestras condiciones iniciales de altura y velocidad de flujo base y de frecuencia angular de batida de pala se establecieron con el objetivo de ocasionar longitudes de onda con valores lo más alejados posibles entre sí. Siendo estos valores lo suficientemente grandes como para ser medido con la resolución disponible en nuestra cámara y lo suficientemente pequeños como para poder distinguir un número de periodos razonable. En cambio existe otra posibilidad, de hecho la que se emplea en la publicación referencia [Ref.2], consiste en trabajar a frecuencias angulares mucho menores. En esta línea de trabajo no esperamos caracterizar correctamente la longitud de onda incidente por ser su valor demasiado elevado en relación a la longitud del canal, pero en principio esto no sería un inconveniente, pues de cara a la validación de la relación entre los coeficientes de Bogoliubov solo es necesario obtener las longitudes de onda de las dos ondas reflejadas.

Estas nuevas condiciones presentan un comportamiento para las ondas reflejadas más robusto ante las variaciones en la velocidad en el sentido de que pequeños cambios en la elección de la velocidad, a partir de la cual se calcula la relación de dispersión, generan diferencias en las longitudes de onda teóricas mucho menores cuanto más baja es la frecuencia angular.

En las condiciones iniciales en las que hemos trabajado durante el proyecto teóricamente se esperaba obtener dos ondas reflejadas, una de menor longitud de onda correspondiente a la rama negativa de la relación de dispersión y otra de mayor longitud de onda perteneciente a la rama positiva. Uno de nuestros problemas es distinguir la longitud de onda más pequeña de una onda capilar. Con las nuevas condiciones el

problema se atenúa. Al tener la rama negativa una pendiente positiva según disminuye la frecuencia angular aumenta el valor absoluto de la longitud de onda teórica alejándonos del rango de la capilaridad.

Por último cabe mencionar que aunque hasta el momento hemos incidido sobre los aspectos positivos de las nuevas condiciones, como ya dijimos, estas condiciones también cuentan con aspectos limitantes. Posiblemente la más destacada sea el elevado valor de la longitud de onda esperable teóricamente para la onda incidente. Este hecho provoca que sean pocos los periodos de señal observables y en consecuencia difícil su detección frecuencial, esto en principio no sería un problema determinante como citamos al enunciar el nuevo escenario, el verdadero problema es que la onda incidente no sea capaz de desarrollarse plenamente en tan poco espacio. Además el aumento de la longitud de onda de la onda reflejada con norma negativa está ligado a la disminución de la longitud de onda de la onda reflejada con norma positiva. De este modo aunque la disminución de esta última puede controlarse no reduciendo en exceso la frecuencia angular para evitar volver a entrar en el rango de las ondas capilares, lo que es inevitable es el acercamiento entre los valores de las longitudes de onda de las dos ondas reflejadas complicando notablemente su diferenciación en la detección.

Bibliografía

- [1] R. Shtzhold & W.G. Unruh. *Gravity wave analogs of black holes*. Phys. Rev. D **66**, 044019 (2002)
- [2] S. Weintfurtner, E.W. Tedford, M.C.J Penrice, W.G Unruh & G.A. Lawrence. *Measurement of stimulated Hawking emission in an analogue system*, Phys. Rev. Letters. **106**, 021302 (2011)
- [3] S.Hawking. *Historia del tiempo: del big bang a los agujeros negros* (Alianza, 1990)
- [4] J.M Fernández Cristóbal. *Radiación de Hawking*. Revista mexicana de Física E **56**(2), 213-226 (2010)
- [5] Agujeros negros de Schwarzschild. [Consulta: Febrero 2012]. Disponible en Internet: http://es.wikipedia.org/wiki/Agujero_negro_de_Schwarzschild
- [6] Landau & Lifshitz. *Física teórica, volumen 6.: Mecánica de fluidos* (Reverte, 1991).
- [7] B. G. Levich et al. *Curso de física teórica: teoría del campo electromagnético, teoría de la relatividad* (Reverte, 1974).
- [8] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. (Cambridge University Press, 2000)
- [9] A. Crespo. *Mecánica de fluidos*. (Paraninfo,2006).
- [10] A. Barrero Ripoll. *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*. (McGraw-Hill, 2005)
- [11] Introducción a la teoría de perfiles. Cap.9 [Consulta: Febrero 2012]. Disponible en Internet: <http://rabfis15.uco.es/lvct/tutorial/41/tema10/tema10-15.htm>
- [12] Divahar Jayaraman. *NACA 4 digit Airfoili Generator*. (Mayo 2008). Disponible en Internet: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19915-naca-4-digit-airfoil-generator>
- [13] R.C Gonzalez & R.E Woods. *Tratamiento digital de imágenes*. (Addison-Wesley Iberoamericana, 1996)
- [14] A. de la Escalera. *Visión por computador fundamentos y métodos*. (Prentice Hall, 2001)
- [15] P.D. Welch. The use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based of Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. IEEE Trans. Audio and Electroacoust. **AU-15**, 70-73 (1967).
- [16] Mathworks. *Pwelch*. Disponible en: Documentación R2012a.
- [17] C. Tropea et al. *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*. (Springer , 2007)
- [18] D. Bohm. *Quantum theory*. (Courier Dover Publications, 1989)

[19] J.H. Duncan et al. *Gentle spilling breakers: crest profile evolution*. J. Fluid Mech. **379**, 191-222 (1999)