UNA NOTA SOBRE LA PROPIEDAD DE DUNFORD-PETTIS.

CARMELO NUÑEZ

Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid. España.

Clasificación A.M.S.(1980):46B25,46E30.

ABSTRACT. A difficult problem in Banach space theory is if every Banach space X with the hereditary Dunford-Pettis property possess this property in the uniform sense.

In this note we connect these properties with other two propetries that the dual space X' may have or not.

Moreover, these questions are related with other difficult problem:what conditions we must impose on a Banach space Y in order to the Banach space of the Y-valued Bochner integrable functions defined on $|0,1|$ (that's to say, $L^1(|0,1|,Y)$) possess the Dunford-Pettis property.

Se dice que un espacio de Banach X posee la propiedad de Dunford-Pettis si para todo par de sucesiones débilmente nulas $(x_n) \subset X$ y $(x'_n) \subset X'$ se tiene $\lim(x_n,x'_n)=0$. Diremos que un espacio de Banach X posee la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis si todos sus subespacios cerrados poseen la propiedad de Dunford-Pettis. Es conocido (ver |2| ó |3|) que esta propiedad hereditaria es equivalente a que toda sucesión normalizada $(x_n) \subset X$, débilmente convergente a 0 pero no convergente en norma, tenga una subsucesión que es equivalente a la base canónica (en el sentido de Schauder) de c_o. Esta misma autora nos sugiere la siguiente

Definición 1. Un espacio de Banach X posee la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis en sentido uniforme si existe una constante $M>0$ (M sólo depende del espacio X) tal que, de toda sucesión normalizada débilmente nula $(x_n) \subset X$, se puede extraer una subsucesión (y_n) que es equivalente a la base canónica de c_o y, además

$$\Big\|\sum_{n\geq 1} a_n y_n\Big\| \leq M \sup_n |a_n| \quad , \text{ para toda sucesión } (a_n)\in c_o.$$

Es evidente que la definición anterior es equivalente a esta otra, que nos será más útil en lo sucesivo.

Definición 2. Un espacio de Banach X posee la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis en sentido uniforme si dada una constante $C>0$ arbitraria, existe otra constante $M>0$ (M sólo depende del espacio X y de C) tal que, de toda sucesión C-acotada, débilmente nula y no convergente en norma a 0, $(x_n) \subset X$, se puede extraer una subsucesión (y_n) que es equivalente a la base canónica de c_o y, además

$$\Big\|\sum_{n\geq 1} a_n y_n\Big\| \leq M \sup_n |a_n| \, , \text{ para toda sucesión } (a_n)\in c_o.$$

Recientemente se ha planteado si estas dos propiedades de Dunford-Pettis(la hereditaria y la hereditaria en sentido uniforme) son equivalentes. Nuestro objetivo en esta nota es relacionar estas dos propiedades con otras dos propiedades que el espacio dual puede poseer o no. Antes de nada, recordemos que un espacio de Banach Z posee la propiedad fuerte de Schur si de toda sucesión acotada $(z_n) \subset Z$ y separada (es decir, que cumpla $\|z_n-z_m\|\geq 1$ si $n\neq m$), se puede extraer una subsucesión (y_n) que es equivalente a la base canónica de ℓ^1 y, además

$$\lambda \sum_{n\geq 1} |a_n| \leq \Big\|\sum a_n y_n\Big\| \, , \text{ para toda sucesión } (a_n) \in \ell^1$$

donde $\lambda>0$ sólo depende del espacio Z. Puede consultarse esta definición en |1| .

Estamos en condiciones de enunciar nuestro primer resultado.

Teorema 3. Sea X un espacio de Banach que posee las siguientes propiedades:

a) X posee una base reductora.

b) X posee la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis en sentido uniforme.

Entonces X' posee la propiedad fuerte de Schur.

Demostración. La realizaremos por pasos.

I) Sea $(x'_n) \subset X'$ una sucesión separada y acotada. Sea $K > 0$ tal que $(x'_n) \subset B(0,K)$. Como X es un espacio separable, $B(0,K)$ es, con la topología ω^* de la convergencia puntual sobre los elementos de X, un compacto metrizable. Luego podemos extraer una subsucesión $(x'_{n(k)})$ de (x'_n) ω^*-convergente a $\bar{x} \in B(0,K)$. Llamemos, por comodidad, $z_k = x'_{n(k)}$.

II) El lector puede consultar en |4| que el hecho de que $(e_i : i \in \mathbb{N})$ sea una base reductora de X significa que $(e'_i : i \in \mathbb{N})$, la sucesión de sus coeficientes funcionales, es a su vez base (de Schauder)de X'. Definimos ahora, para todo $x' \in X'$

$$P_m(x') = \sum_{i>m} x'(e_i)e'_i \ ; \ P^m(x') = \sum_{i \leq m} x'(e_i)e'_i$$

Sea $\bar{x}_0 = P^m(\bar{x})$, donde m cumpla $\| \bar{x}_0 - \bar{x} \| < \varepsilon$ (posteriormente se verá como debe ser ε de pequeño).

Elijamos k' tal que

$$|(e_i, z_k) - (e_i, \bar{x}_0)| < \varepsilon/m \quad \text{si } k > k', \ i \leq m .$$

III) Definamos, por último

(*) $r_k = P_m z_k - P_m \bar{x}$ para $k > k'$.

Supondremos k'=0 por comodidad. Estos elementos r_k cumplen lo siguiente:

a) Trivialmente $(r_k) \xrightarrow{\omega^*} 0$, pues P_m es una aplicación ω^*-continua.

b) $\| r_k - r_j \| = \| P_m z_k - P_m z_j \| = \| z_k - z_j + P^m z_j - P^m z_k \| \geq$
$\geq \| z_k - z_j \| - \| P^m z_j - P^m z_k \| \geq \| z_k - z_j \| - \| P^m z_j - \bar{x}_0 \| - \| \bar{x}_0 - P^m z_k \| \geq$

$\geq 1 - \sum_{i \leq m} |(e_i, z_j) - (e_i, \bar{x}_0)| - \sum_{i \leq m} |(e_i, z_k) - (e_i, \bar{x}_0)| \geq 1 - 2\varepsilon$

supuesto, claro está, $k \neq j$. Por tanto, es obvio que

c) $\| r_k \| > (1-2\varepsilon)/2$, salvo quizás un k, que excluimos.

IV) A partir de III), es obvio que podemos encontrar una subsucesión de (r_k), que denotamos igual por comodidad) y una sucesión $(v_k) \subset X$, con $\| v_k \| = 1$, que cumple:

i) Para cada k podemos definir

$n_k = \inf \{ j : (v_k, e'_j) \neq 0 \}$, $N_k = \sup \{ j : (v_k, e'_j) \neq 0 \}$

ii) $N_k < n_{k+1}$ y $m < n_k$, para todo k.

iii) $(v_k, r_k) > (1-2\varepsilon)/2$.

iv) $|(v_k, r_j)| > \varepsilon/2^{k+j}$ (de hecho, con $\varepsilon/2^{k+1}$, basta).

v) $|(e_i, r_j)| < (\| r_j \| - (1-2\varepsilon)/2)/N_{j-1}$, si $i \leq N_{j-1}$, $j > 1$.

La construcción, de forma esquemática , sería así:como

$$\| r_1 |_{[e_i : i > m]} \| > (1-2\varepsilon)/2, \text{ existe } v_1 \in [e_i : i > m] \text{ tal que } (v_1, r_1) > (1-2\varepsilon)/2.$$

Esto serían las 3 primeras condiciones, pues no habría más que definir n_1 y N_1 como indica ii). Nótese también que $(e_i, r_1) = 0$ si $i \leq m$, por (*).

Finalmente, como $(r_k) \xrightarrow{\omega^*} 0$, puedo extraer una subsucesión de (r_k) que cumpla iv) y v). Por v), es evidente que el primer término de esa subsucesión (llamemosle r_2 por comodidad) cumple

$$\| r_2 |_{[e_i : i > N_1]} \| > (1-2\varepsilon)/2$$

y así sucesivamente.

IV) Como $(v_k) \xrightarrow{\omega} 0$ en X (por i) y ii)) podemos extraer una subsucesión que llamaremos igual, por comodidad, de forma que (v_k) cumpla la condición de la definición 1.

Entonces, para cualquier $(a_k) \in c_{oo}$, se tiene

$$\| \sum a_k z_k \| \geq (\sum a_k z_k, \sum \varepsilon_k v_k)/ M =$$

siendo $\varepsilon_k = \text{signo}(a_k)$. Y, como $(v_k, e'_i) = 0$ si $i \leq m$, la igualdad sigue

$$= \left(\sum a_k P_m z_k , \sum \varepsilon_k v_k \right)/M \geq$$

ahora aplicando (*)

$$\geq \left(\sum a_k r_k, \sum \varepsilon_k v_k \right)/M - \left| \left(\sum a_k P_m \bar{x}, \sum \varepsilon_k v_k \right) \right| /M \geq$$

utilizando c) y iii) tenemos

$$\geq \frac{1-2\varepsilon}{2M} \sum |a_k| - \sum_{j\neq k} |a_k| \, |(v_k, r_j)| /M - \|P_m \bar{x}\| \sum |a_k| \geq$$

por último aplicando iv) y el hecho de que

$\| P_m \bar{x} \| = \| \bar{x}_0 - \bar{x} \| < \varepsilon$, se deduce que

$$\geq ((1-2\varepsilon)/2M - \varepsilon/M - \varepsilon) \sum |a_k|$$

Es evidente, pues, como teníamos que haber tomado ε .

Es el momento de hacer una reflexiones sobre este teorema.

α) En primer lugar, el recíproco no es cierto. En |1| , Bourgain ha encontrado un predual de ℓ^1(ℓ^1 es un espacio de Banach con la propiedad fuerte de Schur) que no posee la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis, y por tanto no la poseerá en sentido uniforme.

β) En el teorema 3 la hipótesis a) parece demasiado fuerte. Parece razonable preguntarse si otras hipótesis más débiles, como que X' posea la propiedad de Radon-Nikodym, o que X no posea ninguna copia isomorfa de ℓ^1, podrán bastar. Nótese que esta última hipótesis es absolutamente necesaria.

γ) Consideremos la siguiente propiedad (compárese con página 2):

Definición 4. Un espacio de Banach Z posee la propiedad fuerte* de Schur si de toda sucesión acotada $(z_n) \subset Z$ y separada se puede extraer una subsucesión (y_n) que es equivalente a la base canónica de ℓ^1.

Pues bien, lo que el teorema 3 no prueba (al menos, con la misma demostración que hemos hecho) es lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{X posee una base reductora}\\ \text{X posee la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ X' posee la propiedad fuerte* de Schur.

Para ello, basta fijarse en que, en la demostración del teorema 3, tomamos ε dependiendo de la constante M del espacio, y eso sólo podemos hacerlo si X posee la propiedad hereditaria en sentido uniforme.

δ) Hace años, M. Talagrand exhibió en | 5 | un espacio de Banach, que ha venido a llamarse TT, Talagrand's tree ó árbol de Talagrand, tal que $L^1(|0,1|, TT')$ no posee la propiedad de Dunford-Pettis a pesar de que tanto $L^1(|0,1|)$ como TT' poseen dicha propiedad.

Deseamos subrayar que, como TT posee una base (de Schauder) reductora, y además la propiedad hereditaria de Dunford-Pettis en sentido uniforme (consultese |2| ó |5|), por el teorema 3 TT' posee la propiedad fuerte de Schur , una condición más fuerte que poseer la propiedad de Dunford-Pettis. Por tanto, parece difícil hallar condiciones sobre un espacio de Banach X que aseguren que el espacio $L^1(|0,1|, X)$ posee la propiedad de Dunford-Pettis.

BIBLIOGRAFIA

1.- BOURGAIN, J.:"New classes of L_p-spaces". L.N. nº889. Springer-Verlag.

2.- CEMBRANOS, P.:"The hereditary Dunford-Pettis property on C(K,E)". Illinois J. Math., aparecerá.

3.- DIESTEL, J. :"A survey of results related to the Dunford-Pettis property". Contemporary Mathematics, 2 (1980), A.M.S.

4.- LINDENSTRAUSS, J.; TZAFRIRI, L.:"Classical Banach spaces I". Springer-Verlag.

5.- TALAGRAND, M.:"La propiété de Dunford-Pettis dans C(K,E) et L^1(E)". Israel J. Math. 44 (1983), 317-321.

Financiado parcialmente por la ayuda nº0338/84 de la C.A.I.C.Y.T.

El autor agradece al profesor Dr. Fernando Bombal Gordón su ayuda prestada.