Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

PROYECTO FIN DE CARRERA

GENERACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA EL TREN INFERIOR DEL ROBOT HUMANOIDE TEO SUBIENDO ESCALERAS

AUTOR: FERNANDO SÁENZ NAVARRO

TUTOR: SANTIAGO MARTÍNEZ DE LA CASA DÍAZ

Leganés, junio de 2012

A mis padres Manuel y Cinta, con el deseo de que este trabajo les haga sentirse orgullosos.

A mi hermana Marta.

A mi familia.

Agradecido a Santiago por su valiosa ayuda.

Resumen ejecutivo

Este trabajo forma parte de la labor realizada en el desarrollo del nuevo humanoide TEO por el grupo de trabajo *Robotic Lab* de la Universidad Carlos III de Madrid.

Una importante actividad en el de desarrollo de este humanoide es dotarlo de movilidad y autonomía. Se espera que sea capaz de andar y subir escaleras.

Este proyecto en concreto se centra en la generación de trayectorias, partiendo de un esquema elemental de un sistema de control cinemático, se ha desarrollado un conjunto de funciones que implementan este sistema para la generación de trayectorias para el tren inferior del robot humanoide TEO. A partir de la información sobre la plataforma bípeda y la planificación del paso que se va a realizar, se establece un conjunto de valores que tomarán las articulaciones en ciertos instantes de tiempo durante el movimiento. El objetivo de este trabajo es llevar a cabo la interpolación de estos valores articulares para dar como resultado las curvas que describen la posición de las articulaciones de la estructura durante todo el tiempo que dura el paso, condicionado por una serie de limitaciones articulares y de continuidad de las trayectorias.

El esquema de desarrollo se pone a prueba con una planificación del movimiento que se realiza al subir una escalera, programando el conjunto de algoritmos en Matlab. De las pruebas realizadas se deriva la representación de trayectorias en el espacio típicas como las de la pelvis o de los pies, para verificar la ausencia de interferencia con el terreno, y una estimación de la solicitación en el tobillo en la pierna de apoyo, por ser la articulación que soporta todo el peso de la estructura.

Palabras clave: robótica, robot humanoide TEO, generación de trayectorias, Matlab.

Contenido

1 Introducción y objetivos

1.1 Introducción 1

1.2 Objetivos 3

1.3 Herramientas software empleadas 3

1.3.1 El entorno de desarrollo: MATLAB 4

1.3.2 Robotics Toolbox para MATLAB 4

1.4 Estructura del documento 5

2 Estado del arte

2.1 Descripción del movimiento realizado en el ascenso de escaleras 7

2.1.1 Fase de apoyo en el ascenso 9

2.1.2 Fase de balanceo en el movimiento de subir escaleras 9

2.2 Conceptos relacionados con el equilibrio 10

2.3 Métodos para la planificación de la trayectoria 19

2.3.1 Planificación mediante generación de trayectorias en el espacio cartesiano o en el espacio articular 19

2.3.2 Planificación mediante asignación directa de valores a las articulaciones o consecución de metas 22

2.3.3 Planificación basada en modelos matemáticos y en técnicas de inteligencia artificial (machine learning, genetic algorithms, neural networks y fuzzy control) 23

2.3.4 Planificación basada en criterios de estabilidad (dynamic walking, static walking) 34

2.4 El proyecto RH 38

2.4.1 Robot bípedo RH-0 39

2.4.2 Robot bípedo RH-1. 41

2.4.3 Robot bípedo TEO. 45

3 Implementación de un modelo de la plataforma bípeda de TEO

3.1 Generación de trayectorias....53

3.2 Desarrollo de los bloques de programación....56

3.2.1 Generación de estructuras....56

3.2.2 Selección y validación de puntos....58

3.2.3 Cinemática directa....58

3.2.4 Cinemática inversa....60

3.2.5 Interpolación....65

3.2.6 Comprobación de límites articulares....77

3.2.7 Representación gráfica....77

3.2.8 Trayectoria articular....79

4 Pruebas realizadas

4.1 Subiendo escaleras escalón a escalón....80

4.1.1 Curvas obtenidas para una profundidad de paso de 0.25m y altura de escalón 0.1m....84

4.2 Subiendo escaleras llevando el pie en vuelo de un escalón a otro no consecutivo....96

4.2.1 Curvas obtenidas para una profundidad de paso de 0.25m y altura de escalón 0.1m....99

5 Conclusiones y trabajos futuros

5.1 Conclusiones....108

5.2 Trabajos futuros....109

Presupuesto de proyecto

Bibliografía

Apéndice

1 Introducción y objetivos

1.1 Introducción

La robótica trata de reproducir en un artefacto las habilidades del ser humano que, en sustitución de personas, realiza tareas u operaciones buscando una mejora de la productividad, la eficiencia y seguridad en industrias o en aquellos ambientes donde la salud humana pueda verse dañada. El robot, por sí solo, tiene poca utilidad. Lo que lo diferencia de otros automatismos es su capacidad de adaptación a diversos tipos de tareas modificando su programación para adecuar su funcionalidad. La importancia de la ingeniería de la robótica está en el desarrollo de habilidades que pueda desempeñar. En la Figura 1-1 se muestra un ejemplo de habilidad desarrollada por un robot, se trata de un sistema de esquilado de ovejas desarrollado a finales de la década de los 80 en Australia.

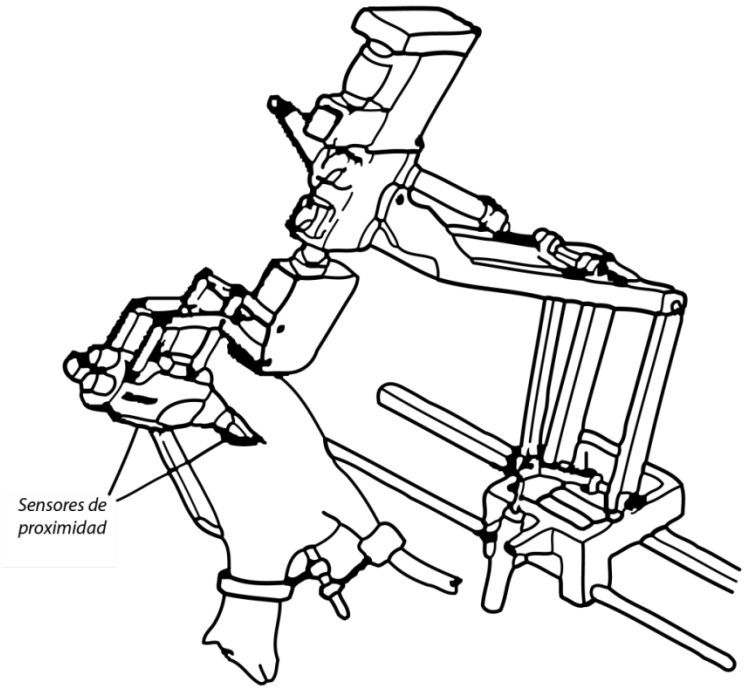


Figura 1-1. Sistema de extracción de lana mediante robot. [1]

El origen de la robótica se encuentra en dos tecnologías utilizadas desde los años 40: los sistemas teleoperados, dispositivos que permiten a los operarios ejecutar tareas a distancia, y las máquinas herramienta, capaces de manufacturar una pieza con precisión a partir de un patrón almacenado digitalmente.

Hasta los años 80 el desarrollo de la robótica, fue en su mayor parte, en dirección al campo de la industria. Desde la aparición del primer robot industrial, que se trataba de una combinación de las dos tecnologías citadas anteriormente, el objetivo de la robótica parecía ser la automatización de procesos de fabricación. Sin embargo, a partir de los años 80, el uso de

robots ha tenido relevancia en otras actividades como la medicina o la manipulación en medios peligrosos.

Las primeras aplicaciones de robots en el campo de la medicina fue la asistencia a discapacitados (piernas y brazos robotizados), y hace pocos años comenzó a utilizarse en el área de la cirugía. La manipulación en medios peligrosos comenzó ligada al desarrollo de tareas relacionadas con la ingeniería nuclear, posteriormente se extendieron a la manipulación o inspección en el espacio exterior o subacuático. [1]

La evolución de los robots ha ido al ritmo que lo han hecho las necesidades de su introducción en distintas áreas. En una primera generación, aplicada en la automatización industrial, se llevaba a término principalmente el desarrollo de funciones de manipulación. Posteriormente, tareas que requerían que el robot interaccionase con el entorno, como el robot de la Figura 1-1 donde el robot planifica las trayectorias a partir de un modelo geométrico de oveja, que no tiene que coincidir con la oveja real. Para modificar las trayectorias de las cuchillas es necesario dotar de funciones de percepción al robot. En el momento en el que ha sido necesario dotar a los robots de autonomía y movilidad se ha desarrollado la inteligencia artificial aplicada en la robótica y tareas de planificación.

Dentro de esta última evolución de robots se enmarcan los robots humanoides, en el que el robot ASIMO (Figura 1-2) desarrollado por la compañía HONDA está considerado como el más evolucionado.

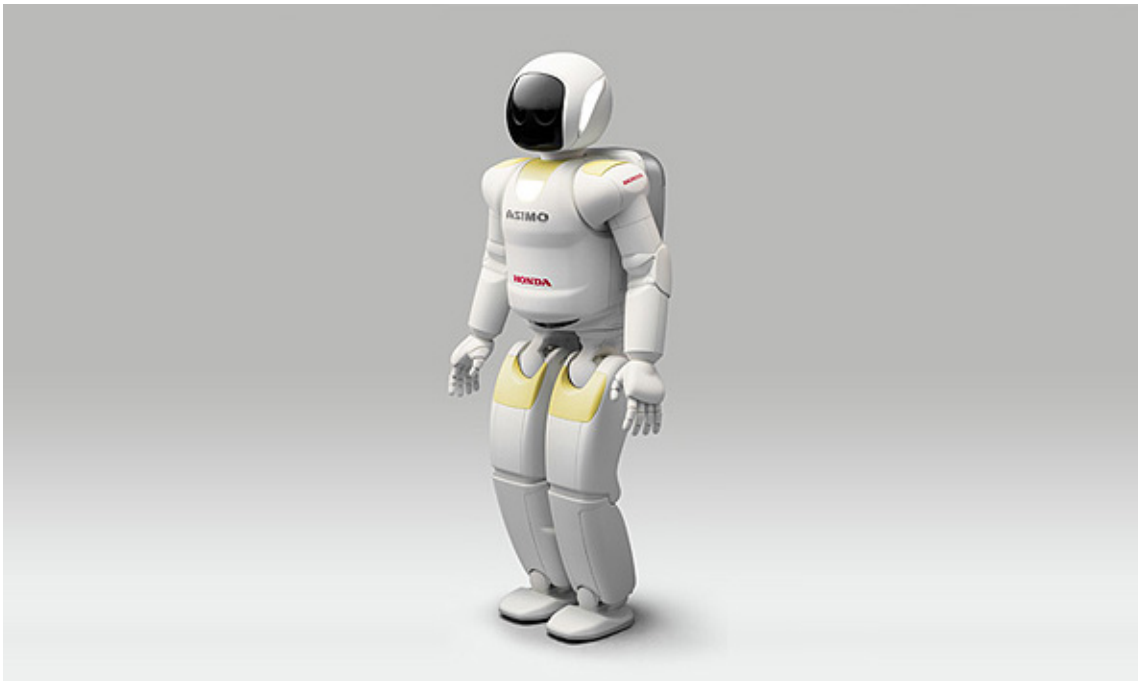


Figura 1-2. Robot humanoide ASIMO del fabricante Honda.

En la misma senda va el trabajo elaborado por el grupo de trabajo *RoboticsLab* del departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad Carlos III de Madrid en la construcción y el desarrollo del robot humanoide TEO y sus predecesores.

El robot humanoide TEO es capaz de realizar diversas actividades, hacerlas con cierta autonomía al tiempo que es capaz de relacionarse con su entorno.

Una parte del desarrollo ha sido dotar al humanoide de movilidad. Se espera que el robot sea capaz de andar y subir escaleras sin perder el equilibrio. En este contexto, este proyecto trata de aportar un medio para emular el movimiento del robot desde el punto de vista cinemático. Partiendo del planteamiento del control cinemático, una vez establecida la planificación del movimiento que realiza el robot, se plantea la cuestión de cómo generar las trayectorias de las articulaciones y obtener las trayectorias que describen los pies y las caderas en consecuencia a las trayectorias calculadas.

1.2 Objetivos

Este proyecto tiene como objetivo principal determinar la forma de generar trayectorias espaciales y temporales en las extremidades inferiores del robot humanoide TEO. Para llevar a cabo este objetivo será necesario desarrollar los siguientes objetivos secundarios.

- Realizar un modelo del tren inferior del humanoide en las que se tendrán en cuenta las limitaciones angulares de las articulaciones.
- Establecer un programa de especificación del movimiento que ha de realizar el robot. En este caso el movimiento que debe realizar es subir un escalón.
- Determinar de forma precisa la trayectoria temporal de cada articulación para obtener las trayectorias espaciales del tren inferior del humanoide que verifique el programa de especificación del movimiento.
- Representar las trayectorias temporales de las articulaciones y las trayectorias espaciales, así como el desarrollo del movimiento por parte de la estructura del tren inferior del humanoide.

De cumplirse los objetivos será posible realizar pruebas de viabilidad de distintas planificaciones de movimiento para el tren inferior del robot humanoide TEO.

1.3 Herramientas software empleadas

Para la elaboración del contenido de este proyecto se ha utilizado software técnico con licencias proporcionadas por la Universidad Carlos III de Madrid. Se ha utilizado el entorno Matlab para programar y ejecutar funciones desarrolladas para este proyecto, así como un conjunto de funciones ya implementadas y específicas para robótica contenidas en el paquete *Robotic Toolbox* para Matlab.

1.3.1 El entorno de desarrollo: MATLAB

La base de computación sobre la que se desarrolla este proyecto es MATLAB, un producto de *The Mathworks Inc*. El fabricante describe MATLAB [2] como un entorno interactivo para el desarrollo de algoritmos, visualización de datos, análisis de datos y cálculo numérico y un lenguaje de computación técnica de alto nivel. Con MATLAB es posible resolver problemas de cálculo técnico pudiendo programar y desarrollar algoritmos más rápidamente que con los lenguajes tradicionales, no siendo necesario realizar tareas administrativas de bajo nivel, tales como declarar variables, especificar tipos de datos y asignar memoria.

Un punto fuerte de MATLAB es que permite incorporar conjuntos de herramientas complementarios (colecciones de funciones de MATLAB para propósitos especiales) que amplían el entorno de MATLAB permitiendo resolver problemas específicos para estas áreas de aplicación. Estas colecciones de funciones (*toolboxes*) están disponibles en *The MathWorks*, distribuidas por terceros, o de elaboración propia, estando disponibles como productos o como software libre.

Las características principales de MATLAB son:

- Lenguaje de alto nivel para cálculo técnico.
- Entorno de desarrollo para la gestión de código, archivos y datos.
- Herramientas interactivas para exploración, diseño y resolución de problemas iterativos.
- Funciones matemáticas para álgebra lineal, estadística, análisis de Fourier, filtrado, optimización e integración numérica.
- Funciones gráficas bidimensionales y tridimensionales para visualización de datos.
- Herramientas para crear interfaces gráficas de usuario personalizadas.
- Funciones para integrar los algoritmos basados en MATLAB con aplicaciones y lenguajes externos, tales como C/C++, FORTRAN, Java, COM y Microsoft Excel.

Las funciones que se han elaborado en el lenguaje de programación de MATLAB, han sido probadas en la versión 7.10 (R2010a) de este programa.

1.3.2 Robotics Toolbox para MATLAB

En la simulación del movimiento de la plataforma bípeda, se ha hecho uso de una colección de funciones para Matlab, *Robotics Toolbox*. El paquete de software *Robotics Toolbox*, distribuido bajo licencia GNU, permite al usuario de MATLAB trabajar de manera sencilla con tipos de datos relacionados con la robótica, ya sean transformaciones homogéneas, cuaternios o trayectorias, así como con una serie de algoritmos utilizados para la representación de la posición y orientación en *SO(3)*, la cinemática, la dinámica y la generación de trayectorias.

Proporciona funciones para la manipulación y conversión entre distintos tipos de datos como vectores, matrices de transformación y cuaternios.

El *toolbox* está basado en un método general de representación de cadenas cinemáticas, modelando al robot a partir de parámetros de Denavit- Hartenberg. A la descripción de la cadena cinemática puede incluirse información relativa a la inercia de los eslabones, de los motores de las articulaciones y de rozamiento.

El contenido del *toolbox* ha sido el resultado de un progresivo desarrollo, comenzando como un conjunto de funciones que utilizó su autor como ayuda para los estudios en su doctorado, siendo el primer lanzamiento en el año 1995 con la publicación del primer artículo [3]. El cambio más significativo llega con la introducción de objetos con MATLAB 5, con la que se consigue simplificar la descripción de la cadena cinemática, eslabones y cuaternios, y la codificación de operadores para que la operación con objetos, como la composición de cuaternios o cadenas cinemáticas, tenga una representación natural [4].

El último lanzamiento de este paquete de software, *Robotics Toolbox release* 9*,* ha sido adaptada para dar apoyo al libro [5] del mismo autor del *software*, ampliada extensamente para dar cabida a los robots móviles. La nueva versión incluye algoritmos de planificación de ruta (*bug, distance transform, D*, PRM*), planificación *kinodinámica* (RRT), localización (EKF, filtro de partículas), construcción de mapas (EKF), localización y mapeado simultáneos (EKF) y modelos en Simulink de vehículos no-holonómicos [6].

Las ventajas del *toolbox* son las siguientes [6]:

- El código, siendo producto de años de desarrollo, se caracteriza por su probado funcionamiento y proporciona un punto de comparación para otras implementaciones de los mismos algoritmos.
- Las rutinas están escritas de forma clara y concisa lo que permite una fácil comprensión, tal vez a expensas de la eficiencia computacional.
- El código fuente está disponible como código abierto, lo que supone una ventaja para su comprensión y para la enseñanza.

Para el desarrollo del proyecto, se han utilizado y modificado funciones del octavo lanzamiento del paquete de software.

1.4 Estructura del documento

El capítulo 1 "Introducción y objetivos" comienza con una breve introducción al proyecto y nos sitúa en el entorno en el que se va a desarrollar. Además, se exponen los objetivos, los medios utilizados y la estructura del mismo.

En el capítulo 2 "Estado del arte" se trata todo lo referente a las distintas técnicas de planificación y generación de trayectorias utilizadas en humanoides. Se describe el movimiento que desarrolla un ser humano al subir una escalera como referencia para la planificación que

se seguirán en las pruebas. Se detallan también las características del robot humanoide TEO y sus predecesores.

El capítulo 4 "Implementación de un modelo de la plataforma bípeda de TEO" contiene la descripción de los distintos bloques que se han desarrollado en la generación de trayectorias. Tanto el modelo de cadena cinemática del tren inferior del humanoide, la planificación del movimiento y las funciones necesarias para realizar la interpolación de las variables articulares y sus correcciones como consecuencia de las limitaciones articulares son los bloques que se han desarrollado.

En el capítulo 5 “Pruebas realizadas” se plantean un par de planificaciones del movimiento destinados a hacer que el tren inferior supere un escalón, y se prueban las funciones de generación de trayectorias para comprobar la viabilidad de las planificaciones propuestas y obtener una serie de resultados.

El capítulo 6 recoge las conclusiones así como los posibles trabajos futuros que se pueden seguir haciendo en base a este proyecto.

Al final del documento, se incluyen la bibliografía utilizada y los anexos.

2 Estado del arte

La marcha bípeda es, probablemente, la característica más importante del ser humano [7]. De forma resumida, consiste en una secuencia de acciones en respuesta a una serie de situaciones controladas por un sistema realimentado en tiempo real. La activación y la concatenación de acciones que se realizan en el paso se llevan a cabo desde el sistema nervioso central. El resultado es una serie de movimientos repetidos, regulares, suaves que desplazan el centro de gravedad a lo largo de una trayectoria consumiendo la menor energía posible.

La marcha normal es un intercambio continuo de estabilidad y movilidad; acciones tales como comenzar el movimiento, detenerlo, realizar cambios en la dirección o en la velocidad son necesarios para realizar acciones tan comunes como estar de pie, andar o correr. Para ello, los elementos básicos son una buena movilidad articular y una buena acción muscular.

Para que un individuo pueda andar, el sistema locomotor debe cumplir los siguientes requisitos [7].

- Cada pierna debe ser capaz de soportar el peso del cuerpo sin colapsar.
- El equilibrio debe ser mantenido tanto de forma estática como dinámica en apoyo monopodal.
- La pierna oscilante debe ser capaz de avanzar hasta la posición en que se pueda convertir en la pierna de soporte.
- Debe poder proporcionarse la fuerza suficiente para realizar el movimiento de las extremidades y avanzar el tronco.

El dominio de la locomoción bípeda es básicamente una actividad aprendida, no obstante, superpuesto a un patrón de locomoción básico cada persona aplica ciertas peculiaridades a la forma en la que se mueve. Cualquier alteración que limite la movilidad articular por debajo de los ángulos necesarios para la marcha o bien que altere el tiempo o la intensidad de la acción muscular dará lugar a una alteración de la marcha.

Algunos factores físicos que influyen en la locomoción pueden ser la contextura de una persona, el calzado que utiliza o bien otros de carácter psicológico como el estado de ánimo.

No obstante, a pesar de estas características que aporta cada persona, puede extraerse del patrón básico una secuencia de fases que comparten el común de la personas al desplazarse.

2.1 Descripción del movimiento realizado en el ascenso de escaleras

El movimiento que realiza un individuo al subir una escalera le supone un gasto energético mucho mayor que al caminar sobre una superficie plana. La causa principal de este consumo

energético radica en que el centro de gravedad de su cuerpo debe realizar un desplazamiento vertical. Al andar se ponen en marcha mecanismos o estrategias que consiguen que el desplazamiento vertical del centro de gravedad sea mínimo. Sin embargo, en el ascenso de escaleras no hay posibilidad de aplicar estrategias similares, ya que es característico de este movimiento que el centro de gravedad recorra una distancia vertical importante en sentido contrario a la fuerza gravitatoria. En esencia, subir escaleras consiste en transferir la energía de los músculos de los miembros inferiores en energía potencial del cuerpo.

Durante el ascenso de escaleras, las funciones de los miembros inferiores son soportar y equilibrar el peso del cuerpo y elevar el peso hacia el peldaño de apoyo. Para subir escaleras con seguridad es necesario poseer un amplio rango de movimientos en las articulaciones de la cadera, rodilla y tobillo.

El ascenso de escaleras presenta un patrón similar al que se realiza al caminar, salvo por la característica que los diferencia: el movimiento vertical del centro de gravedad, cuyo rango de translación viene condicionado por la altura del escalón sobre el que se realiza el movimiento. Aparte, requiere más estabilidad que andar sobre terreno llano, de esta manera, la fase de doble apoyo es más larga y la fase monopodal es más corta [8].

M. Trew describe sistemáticamente el movimiento de ascenso de escaleras dividiendo el movimiento en tres fases diferenciadas: una fase de apoyo, una fase de balanceo y un periodo de doble apoyo (Figura 2-1), tal como sigue en los siguientes párrafos [9].

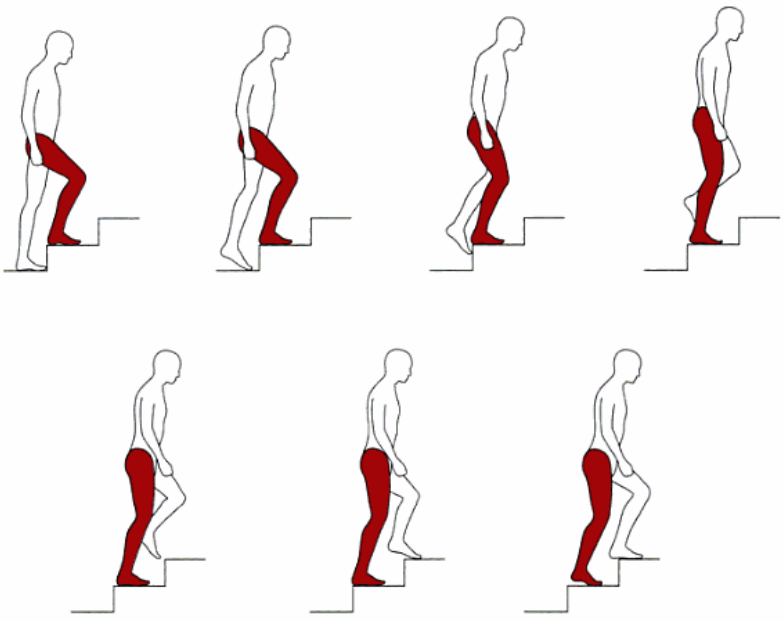


Figura 2-1. Patrón del movimiento de subir escaleras. [9]

2.1.1 Fase de apoyo en el ascenso

Esta fase se denomina en ocasiones fase de empuje (*pull up*) y se inicia en el momento en el que el pie toma contacto con el escalón inmediatamente superior. El contacto se realiza con los tercios anterior y medio del pie para posteriormente transferir todo el peso del cuerpo hasta el resto del pie, y que de esta manera presente mejor apoyo.

Sometida la extremidad adelantada al peso del cuerpo, ésta debe extenderse para levantar el cuerpo y dar el paso, desplazando la tibia en posición posterior sobre el tobillo. A medida que se ha ido alcanzando la fase de apoyo único, la cadera del miembro en el que se realiza el apoyo actúa dirigiendo lateralmente el tronco sobre el miembro de apoyo e impidiendo el movimiento de la pelvis sobre el miembro no apoyado.

Con el peso del cuerpo cargado sobre el miembro de apoyo y la rodilla de éste en extensión se produce el desplazamiento del centro de gravedad por delante del pie apoyado.

En la parte final de la fase de apoyo tiene lugar una flexión plantar con el objeto de acelerar el desplazamiento anterior y superior del cuerpo.

La duración de esta fase constituye aproximadamente el 60% del ciclo.

2.1.2 Fase de balanceo en el movimiento de subir escaleras

El miembro que realiza el balanceo lo hace pasando sobre el escalón intermedio y termina sobre el escalón superior antes de que se establezca contacto con él.

Durante el balanceo de este miembro se produce la flexión de las articulaciones de cadera y rodilla para abandonar el escalón donde antes se realizaba la función de apoyo terminando el movimiento incrementando la flexión de la rodilla para alcanzar el escalón superior donde quedará situada. La flexión de la rodilla y cadera es muy intensa ya que el pie ha de situarse muy por encima el escalón superior para evitar tropezar con él, previo al establecimiento de contacto entre pie y escalón. El descenso del pie se realiza por la extensión de la cadera. Durante el movimiento, la articulación del tobillo se mantiene flexionada para evitar que los dedos de los pies tropiecen con el escalón instantes antes de establecer contacto con el escalón en el que el antepié desciende, contacte con el escalón y pueda aceptar la carga del resto del cuerpo.

Como se ha visto, la marcha no es una acción realizada por dos segmentos del esqueleto (los dos miembros inferiores) sino por tres segmentos que actúan de forma coordinada: los miembros inferiores y la pelvis. El imperativo mecánico es el mismo para todos los sujetos: antes de despegar el pie, el individuo debe desplazar la pelvis para llevar la proyección en el suelo de su centro de gravedad (línea de gravedad) sobre el centro del talón en carga, y sucesivamente, durante la marcha, la proyección vertical del centro de gravedad se debe colocar en el centro del talón en carga, alternativamente sobre un pie distinto a cada paso.

Para reducir el desplazamiento lateral, los pies deben estar muy cerca del centro de la "base de apoyo dinámico", en otras palabras, el pie debería situarse directamente debajo de la pelvis y no bajo la articulación de la cadera. El sujeto se vale de la orientación del fémur y el valgo de la tibia [10] para que esta situación deseable del pie se produzca en cada carga de la pierna de apoyo.

Se conoce como *genu valgo* a la desviación entre el fémur y la tibia que caracteriza el miembro inferior humano, y que decíamos, desempeña un papel preeminente en la locomoción bípeda. El fémur se coloca por debajo de la pelvis para acercar el pie al centro del cuerpo reduciendo el desplazamiento lateral de la pelvis. Como el individuo debe desplazarse lateralmente para equilibrarse sobre un pie, el ángulo de *genu valgo*, será tanto más importante cuanto más amplia sea la pelvis, influenciando significativamente la geometría del miembro inferior. La influencia de la amplitud de la pelvis en la posición de la rodilla será tanto más importante cuanto más corto sea el fémur [11]. Sin la configuración de las articulaciones inferiores en *genu valgo*, la locomoción bípeda sería menos eficiente y la oscilaciones laterales de los miembros inferiores de gran amplitud.

El centro de gravedad en el cuerpo humano está situado muy alto. El hombre al ponerse de pie almacena energía en forma de energía potencial como consecuencia de la elevación del centro de gravedad hasta el nivel más alto compatible con su estructura anatómica. Esta energía le permite iniciar el movimiento en cinco de los seis movimientos cardinales en el espacio (adelante, atrás, derecha, izquierda, abajo) por una transformación de esa energía potencial en energía cinética. Precisamente esta distancia del centro de gravedad al suelo, en conjunción con la amplitud de las oscilaciones el centro de gravedad durante la caminata, lleva a un primer plano el concepto de equilibrio.

2.2 Conceptos relacionados con el equilibrio

Visto desde el contexto mecánico, es bien sabido que un cuerpo está en equilibrio cuando la proyección del centro de gravedad cae dentro de la base de sustentación. En el momento en el que la línea de gravedad se sitúa fuera de esta base, el cuerpo aumentará su inestabilidad y no volverá a ser estable hasta que dicha línea caiga de nuevo dentro de la base de sustentación.

El equilibrio refleja la respuesta motora, diligente, que actúa integrada a la fuerza gravitatoria que actúa permanentemente sobre el individuo implicando una multiplicidad de ajustes posturales. Esto requiere de la correcta organización y aplicación de las acciones musculares a partir del procesamiento de sensaciones de diferente naturaleza [12].

Por esta razón en [13] se argumenta *que "la bipedestación no es un equilibrio en el sentido físico del término, sino un desequilibrio permanente constantemente compensado. Este equilibrio relativamente estable representa la solución personal que el sujeto ha encontrado a su problema de estabilidad".*

La definición (mecánica) de equilibrio indica que la aplicación de carga a un cuerpo no desencadena en él una aceleración, por tanto, aplicando esta definición, no se podría hablar de equilibrio durante la marcha [10]. Conviene por tanto hacer la siguiente distinción al hablar del concepto de equilibrio:

Equilibrio estático

Según [14], "… *es el control de una postura sin desplazamiento".*

Correspondiente a la definición mecánica, en el equilibrio estático, la proyección del centro de masas se encuentra dentro del área de soporte.

Equilibrio dinámico

Según [14], "… *es el que se establece cuando nuestro centro de gravedad sale de la verticalidad del cuerpo y tras una acción equilibrante, vuelve sobre la base de sustentación".*

En el equilibrio dinámico la proyección del centro de masas puede abandonar el área de soporte, siendo necesaria una reacción al desequilibrio que lo devuelva al área de soporte.

Continuemos revisando a continuación conceptos afines al concepto de equilibrio de los que hacen uso numerosos métodos de planificación de trayectorias para robots bípedos.

Estabilidad

La estabilidad es una característica de un estado de equilibrio. Si se produce una perturbación sobre un sistema en un determinado estado de equilibrio y ya no vuelve al mismo, se dice que el estado de equilibrio es inestable, si por el contrario después de cesar la perturbación el sistema vuelve al estado original se dice que es estable. No se debe establecer una equivalencia entre estabilidad y equilibrio al menos en lo concerniente al equilibrio dinámico de la marcha.

Un indicador de cuan estable es el estado de equilibrio es el margen de estabilidad (*Stability Margin*). El margen de estabilidad es la mínima distancia entre el FRI y los bordes del polígono de soporte (Figura 2-2), en donde, SM_X es el margen de estabilidad en el eje X, y SM_Z es el margen de estabilidad en el eje Z. Puede ser positivo o negativo dependiendo si el punto se encuentra dentro del polígono de soporte o por fuera.

Cuanto mayor es la base de sustentación, más aumenta la estabilidad. Aumentar la base de sustentación aumenta la estabilidad, pero demasiada estabilidad representa un obstáculo a la movilidad [10]. En fases del movimiento en las que el apoyo es monopodal la base de sustentación dinámica no puede aumentar.

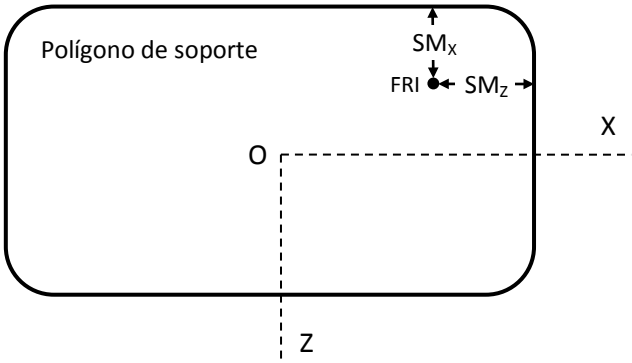


Figura 2-2. Margen de estabilidad. Vista superior del FRI en el polígono de soporte.

Polígono de soporte

El polígono de soporte o sustentación es la figura geométrica cerrada por segmentos rectos y envuelve los puntos de contacto de los pies en apoyo. Cada cambio de la posición de los pies supone un cambio en la forma del polígono de soporte. Cuando el cuerpo se sustenta sobre un apoyo monopodal existiendo pleno contacto de la superficie del pie con el suelo, el polígono de soporte es la figura determinada por el contorno del pie de apoyo. En cambio, cuando el robot se encuentra en doble apoyo, el polígono de soporte es la figura de soporte formada por la superficie de contacto de los dos pies y el espacio interpodal.

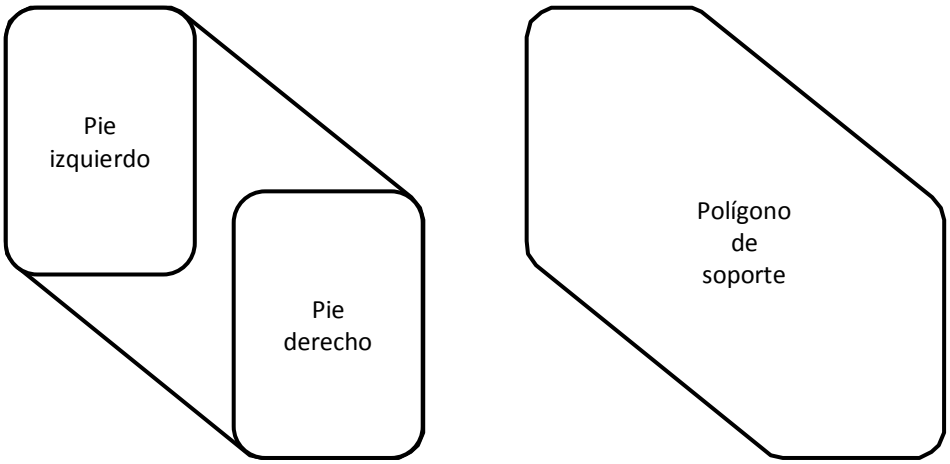


Figura 2-3. Vista superior del polígono de soporte en doble apoyo.

COP

El COP (*center of pressure*), o centro de presión o fuerza, es un punto en la superficie de contacto (limitada por el polígono de soporte) en donde se considera que actúa la fuerza neta de reacción del suelo. La fuerza resultante actuando en el centro de presión produce una fuerza y momento equivalente en la superficie de contacto a la presión producida por el robot sobre la superficie de contacto.

ZMP

El ZMP (*Zero Moment Point*), o punto de momento cero, es el punto dentro del polígono de soporte en el que actúa la reacción del suelo cuando el robot está dinámicamente estable.

Aparte del movimiento relativo de los eslabones que componen la estructura del robot, la tarea más importante durante la marcha es la de preservar su equilibrio dinámico, lo que se logra asegurando que toda la superficie del pie, y no sólo el borde, se encuentra en contacto con el suelo. El pie apoya libremente y lo único que lo mantiene en contacto estático con el suelo es la combinación de la fricción entre las superficies en contacto y la componente vertical de la fuerza de reacción del suelo. [15]

Considérese la estructura en una postura en la que carga su peso en un pie de apoyo. Para simplificar el análisis se puede estudiar el pie de apoyo omitiendo el resto de la estructura por encima del tobillo del pie apoyado sustituyendo su influencia por una fuerza $\boldsymbol{F_A}$ y un momento $\boldsymbol{M_A}$ en el tobillo, el peso del pie de apoyo está aplicado sobre su centro de gravedad y una fuerza $\boldsymbol{R}$ (R_x, R_y, R_z) y un momento $\boldsymbol{M}$ (M_x, M_y, M_z) de reacción del suelo, aplicados en un punto *P* de la planta del pie, que mantiene toda la estructura en equilibrio (Figura 2-4).

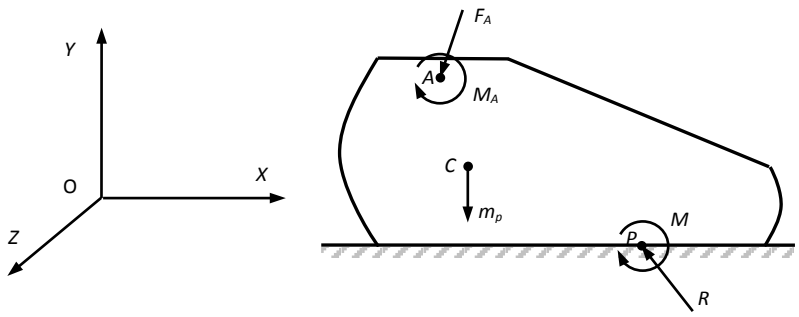


Figura 2-4. Fuerzas y momentos sobre el pie de apoyo.

Para que el pie se encuentre en equilibrio estático:

$$\sum \vec{F} = 0 \tag{2.1}$$

$$\vec{R} + \vec{F}_A = 0 \tag{2.2}$$

y,

$$\sum M_0 = 0 \tag{2.3}$$

$$\overrightarrow{OP} \times \vec{R} + \overrightarrow{OA} \times \vec{F}_A + M + M_A + \overrightarrow{OC} \times m_p \vec{g} = 0 \tag{2.4}$$

Asumiendo que la fricción entre la planta del pie y el suelo es lo suficiente grande para impedir el deslizamiento entre las dos superficies, entonces, R_X, R_Z y M_Y componentes en la horizontal del suelo compensan las fuerzas y momentos del cuerpo en esas direcciones, por lo que se puede remplazar la reacción neta por una fuerza de componente vertical y reducir los momentos al plano horizontal (ejes x, z).

$$\sum F_y = 0 \tag{2.5}$$

$$R_y + F_{A_y} = 0 \tag{2.6}$$

$$\sum M_0^H = 0 \tag{2.7}$$

Un incremento del momento en el tobillo será compensado por el cambio de la posición de la fuerza resultante todo el tiempo que la fuerza de reacción quede dentro del área cubierta por la planta del pie en contacto con el suelo, por lo que no existirán componentes horizontales de *M*, existiendo solo la componente M_y.

La condición fundamental para que el sistema esté en equilibrio es que en el punto *P*,

$$M_x = 0 \tag{2.8}$$

$$M_z = 0 \tag{2.9}$$

Cambiando el punto de referencia de ***O*** hacia ***A*** (Figura 2-4) y despreciando la masa del pie

$$\left(\sum M_A\right)^H = 0 \tag{2.10}$$

$$\left(\overrightarrow{AP} \times \vec{R}\right)^H + M_A^H = 0 \tag{2.11}$$

$$\left(\overrightarrow{AP} \times \vec{R}\right)^H = -M_A^H \tag{2.12}$$

Esta ecuación es una base para el cálculo de la posición (punto *P*) de la fuerza de reacción del suelo que actúa sobre el pie de apoyo. Se puede notar que la igualdad anterior se cumple eligiendo el punto *P* adecuado, de tal forma que el momento generado por la fuerza de reacción del suelo compense al momento total generado por el cuerpo en su caminata. Este punto *P* se conoce como ZMP. Únicamente dos de las componentes del momento M de reacción del suelo son iguales a cero (en los ejes *x*, *z*), la componente M_y representa el momento de fricción con el suelo de valor

$$M_y = M_{fr} = -\left(M_A^y + \left(\overrightarrow{OA} \times \vec{F}_A\right)^y\right) \tag{2.13}$$

que en general será distinto de cero, entonces se podría definir el ZMP como *"… el punto en el suelo en el que la resultante* M*, momento debido a las fuerzas de inercia y la gravedad, no tiene ninguna componente en el plano del suelo*". [16]

Para dar respuesta a, si dado un movimiento de la estructura, ésta se encuentra en equilibrio dinámico, debe considerarse la relación entre la posición del ZMP calculada y el polígono de soporte. Si la posición del ZMP calculada cae dentro del área del polígono de soporte la estructura se encuentra en equilibrio dinámico [17]. De hecho, la existencia del ZMP solo es posible dentro del área del polígono de soporte, por el hecho de que en un punto exterior al área de soporte no puede actuar la fuerza de reacción ***R*** sobre el sistema [17].

FRI

Dado el caso de que el momento $M_{A,}$ generado por el cuerpo sobre el pie de apoyo, sea tan grande que se obtenga un cálculo de la posición de *P* fuera del polígono de soporte (Figura 2-5) implica que el ZMP no existe, ya que la fuerza de reacción del suelo se encuentra en el contorno del pie, por tanto, no se puede aplicar en el punto calculado *P* y no puede compensar el momento generado por el cuerpo en movimiento y evidentemente el robot tiende a perder su estabilidad.

Dado que el ZMP existe únicamente dentro del polígono de soporte, su cálculo nos da una idea de la estabilidad del robot en un determinado instante, sin embargo, existe un concepto más general, el FRI (*Foot Rotation Indicator*), como solución al problema de la inexistencia del ZMP en la rotación del pie de apoyo en robots bípedos durante la fase monopodal:

"El FRI es el punto en la superficie donde la fuerza de reacción neta del suelo tendría que actuar para mantener el pie estacionario." [18]

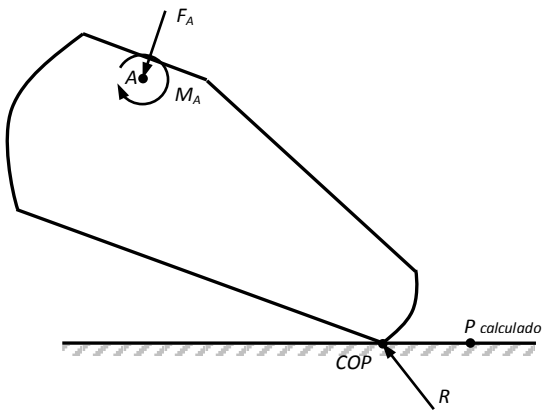


Figura 2-5. Rotación del pie a partir de uno de sus bordes. Robot inestable.

El FRI puede existir ya sea dentro o fuera del polígono de soporte, o sea, que puede ser también un indicador de inestabilidad de la postura del robot. Cuando el FRI está dentro del polígono de soporte, el movimiento del robot es dinámicamente estable y este punto es

coincidente con el ZMP y el COP. Mientras que cuanto más lejos esté el FRI de la frontera del polígono, mayor es el momento de desequilibrio, y mayor será la inestabilidad.

Como criterio de estabilidad se establece que, para que un robot bípedo se encuentre dinámicamente estable durante su caminata, el FRI debe estar siempre dentro del polígono de soporte.

A continuación se citan las propiedades del FRI [18]:

La ubicación del FRI indica la magnitud del momento de desequilibrio sobre el pie. Si el FRI está situado dentro del polígono de soporte, existirá un equilibrio de fuerzas y momentos manteniendo la estabilidad del robot, en otro caso, existirá un momento neto que hará que el pie del robot rote.

El FRI indica la dirección de la rotación del pie.

El FRI indica el margen de estabilidad del robot. El margen de estabilidad del robot puede ser cuantificado como la mínima distancia desde la frontera del polígono de soporte hasta la ubicación actual del FRI dentro del polígono de soporte. Recíprocamente, cuando el FRI está fuera del borde del pie, esta mínima distancia es la medida de la inestabilidad del robot (Figura 2-6).

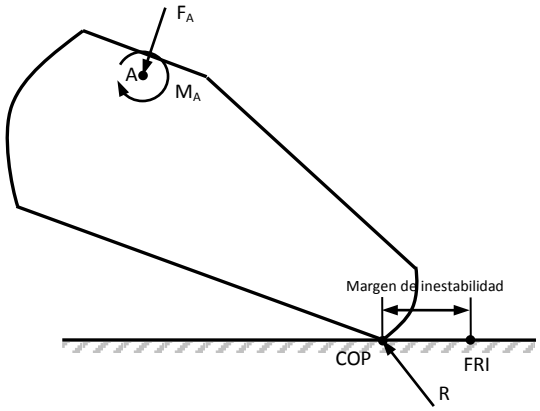


Figura 2-6. FRI visto como indicador de inestabilidad

Existe una forma de calcular el FRI a partir de la dinámica de cada uno de los eslabones que conforman el robot (Figura 2-7), de modo que, la ecuación para el equilibrio dinámico rotatorio, se obtiene mediante la suma de los momentos sobre el robot, calculado sobre cualquier punto de referencia estacionario, siendo esto igual a la suma de las razones de cambio del momento angular de los segmentos individuales en torno al mismo punto.

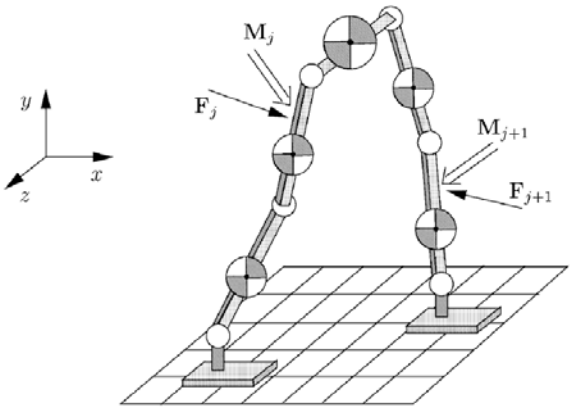


Figura 2-7. Modelo mecánico (sistema de partículas) de una plataforma bípeda bajo influencia de fuerzas y momentos externos $F_j = [F_{xj}\ F_{yj}\ F_{zj}\ ]^T$ y $M_j = [M_{xj}\ M_{yj}\ M_{zj}\ ]^T$, $j \in N$. [16]

La ecuación del equilibrio rotacional[1] se obtiene como la suma de los momentos externos aplicados en la estructura del robot calculado en la proyección del centro de masas o bien en cualquier otro punto de referencia estacionario. Esta suma es igual a la suma de la variación del momento angular de los eslabones individuales sobre el mismo punto.

Tomando momentos en el origen

$$M + \overrightarrow{OP} \times \vec{R} + \sum \overrightarrow{OG_i} \times m_i \vec{g} = \sum \dot{H}_{G_i} + \sum \overrightarrow{OG_i} \times m_i \vec{a}_i \qquad (2.14)$$

donde m_i es la masa, G_i la situación del centro de masas, a_i la aceleración lineal, y H_{Gi} el momento angular sobre el centro de masas del i-ésimo eslabón.

Si se estudia la dinámica del pie de apoyo sustituyendo la dinámica del resto de la estructura del robot por una fuerza R_1 y un momento M_1 aplicados en un punto O_1 que se corresponde con el tobillo, puede encontrarse un punto F (conocido como FRI) donde estaría aplicada la fuerza de reacción R, dentro o fuera del polígono de soporte, en el que considerando componentes tangenciales se cumple:

$$\left(M_1 + \overrightarrow{FO_1} \times \vec{R}_1 - \overrightarrow{FG_1} \times m_1 \vec{g}\right)_t = 0 \qquad (2.15)$$

Una expresión explícita de las coordenadas del FRI puede obtenerse a partir del análisis de la estructura del robot respecto a un punto F, donde se sitúa el FRI, sustituyendo la reacción del pie de apoyo sobre la estructura por una fuerza R_1 y un momento M_1.

Si están aplicados momentos y fuerzas externas en los eslabones (Figura 2-7) el análisis tomando momentos en el FRI,

[1] Se trabaja sobre el equilibrio rotacional pues se supone que el pie de apoyo no desliza sobre la superficie del suelo.

$$M_1 + \overrightarrow{FO}_1 \times \vec{R}_1 + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{FG}_i \times m_i \vec{g} + \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{FG}_j \times \vec{F}_j + \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j = \sum_{i=2}^{N} \dot{H}_{G_i} + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{FG}_i \times m_i \vec{a}_i \quad (2.16)$$

Considerando componentes tangenciales y la ecuación (2.15),

$$\left(\overrightarrow{FG}_1 \times m_1 \vec{g} + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{FG}_i \times m_i (\vec{g} - \vec{a}_i) + \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{FG}_j \times \vec{F}_j + \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j \right)_t = \left(\sum_{i=2}^{N} \dot{H}_{G_i} \right)_t \quad (2.17)$$

Reescribiendo la ecuación teniendo en cuenta que $\overrightarrow{FG_i} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OG_i}$ y $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{FO}$,

$$\left(\overrightarrow{OF} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{g} - \vec{a}_i) + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \right) \right)_t = \left(\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OG}_i \times m_i (\vec{g} - \vec{a}_i) + \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{OG}_j \times \vec{F}_j + \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j \right)_t - \left(\sum_{i=1}^{N} \dot{H}_{G_i} \right)_t \quad (2.18)$$

en la que se ha incluido el momento de inercia y aceleraciones del primer eslabón (el pie de apoyo), cero en cualquier caso, al estar estacionario.

Llevando a cabo la operación se obtiene,

$$OF_x = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(M_{j_z} + OG_{j_y} F_{j_x} - OG_{j_x} F_{j_y} \right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{H}_{G i_z} + OG_{i_y} m_i a_{i_x} + OG_{i_x} m_i \left(a_{i_y} + g \right) \right)}{- \sum_{i=1}^{N} m_i \left(a_{i_y} + g \right) + \sum_{j=1}^{N} F_{j_y}} \quad (2.19)$$

$$OF_y = 0 \quad (2.20)$$

$$OF_z = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(M_{j_x} + OG_{j_y} F_{j_z} - OG_{j_z} F_{j_y} \right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{H}_{G i_x} + OG_{i_y} m_i a_{i_z} - OG_{i_z} m_i \left(a_{i_y} + g \right) \right)}{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(a_{i_y} + g \right) - \sum_{j=1}^{N} F_{j_y}} \quad (2.21)$$

En caso de que se simplifique el análisis asumiendo que no existen fuerzas ni momentos externos aplicados en los eslabones, tomando momentos en el FRI obtendremos,

$$\overrightarrow{FO}_1 \times \vec{R}_1 + M_1 + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{FG}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=2}^{N} \dot{H}_i + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{FG}_i \times m_i \vec{a}_i \quad (2.22)$$

Considerando componentes tangenciales y la ecuación (2.15),

$$\left(\overrightarrow{FG}_1 \times m_1 \vec{g} + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{FG}_i \times m_i (\vec{g} - \vec{a}_i) \right)_t = \left(\sum_{i=2}^{N} \dot{H}_{G_i} \right)_t \quad (2.23)$$

Reescribiendo la ecuación teniendo en cuenta que $\overrightarrow{FG_i} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OG_i}$ y $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{FO}$,

$$\left(\sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{OF} \times m_i (\vec{a}_i - \vec{g}) - \overrightarrow{OF} \times m_1 \vec{g} \right)_t = \left(-\overrightarrow{OG}_1 \times m_1 \vec{g} + \sum_{i=2}^{N} \dot{H}_{G_i} + \sum_{i=2}^{N} \overrightarrow{OG}_i \times m_i (\vec{a}_i - \vec{g}) \right)_t \quad (2.24)$$

Llevando a cabo la operación se obtiene [18],

$$OF_x = \frac{m_1 OG_{1_x} g + \sum_{i=2}^{N} m_i OG_{i_x}\left(a_{i_y} + g\right)}{m_1 g + \sum_{i=2}^{N} m_i (a_{i_y} + g)} - \frac{\sum_{i=2}^{N} m_i OG_{i_y} a_{i_x} + \sum_{i=2}^{N} \dot{H}_{G_{i_z}}}{m_1 g + \sum_{i=2}^{N} m_i \left(a_{i_y} + g\right)} \tag{2.25}$$

$$OF_y = 0 \tag{2.26}$$

$$OF_z = \frac{m_1 OG_{1_z} g + \sum_{i=2}^{N} m_i OG_{i_z}\left(a_{i_y} + g\right)}{m_1 g + \sum_{i=2}^{N} \left(a_{i_y} + g\right)} - \frac{\sum_{i=2}^{N} m_i OG_{i_y} a_{i_z} + \sum_{i=2}^{N} \dot{H}_{G_{i_x}}}{m_1 g + \sum_{i=2}^{N} m_i \left(a_{i_y} + g\right)} \tag{2.27}$$

En el cálculo del FRI, numerosos estudios asumen que la influencia de los pares de inercia es despreciable [16] [19] [20], el cálculo de las coordenadas del FRI se simplifican tomando la forma,

$$OF_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i OG_{i_x}\left(a_{i_y} + g\right) - \sum_{l=2}^{N} m_i OG_{i_y} a_{i_x}}{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(a_{i_y} + g\right)} \tag{2.28}$$

$$OF_y = 0 \tag{2.29}$$

$$OF_z = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i OG_{i_z}\left(a_{i_y} + g\right) - \sum_{i=2}^{N} m_i OG_{i_y} a_{i_z}}{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(a_{i_y} + g\right)} \tag{2.30}$$

2.3 Métodos para la planificación de la trayectoria

Al igual que una persona decide que ruta tomar para ir desde un lugar a otro, la trayectoria de un robot se elige a través de la planificación de movimiento.

Se han propuesto diversos métodos para planificación del paso de robots bípedos. La meta de un método de planificación del paso del robot es generar la trayectoria del pie, la trayectoria de articulación de la cadera, y la trayectoria del ángulo del torso. Las trayectorias del conjunto de las articulaciones se pueden calcular por cinemática inversa u otros métodos.

2.3.1 Planificación mediante generación de trayectorias en el espacio cartesiano o en el espacio articular

La planificación de la trayectoria puede hacerse tanto en el espacio articular, esto es, en términos de la posición, velocidad y aceleración angular de las articulaciones, o bien en el espacio cartesiano en términos de la posición del efector final, su orientación y sus derivadas temporales. Generalmente se prefiere generar las trayectorias en el espacio cartesiano puesto que permite realizar una descripción natural del movimiento que debe realizar el robot y tener en cuenta los obstáculos presentes en el entorno incorporándolos como restricciones recogidas en los puntos correspondientes del espacio de trabajo, puntos que en el espacio

articular son más difíciles de calcular [21]. No obstante, la acción de control sobre el robot se realiza en el espacio articular.

Tang [22] presenta un análisis comparativo entre la planificación del paso de un bípedo en el espacio articular y cartesiano. Utiliza un modelo simplificado que no contempla el pie y la cadera y considera que por razón de simetría puede restringir el estudio a únicamente una pierna (Figura 2-8). Para la planificación de trayectorias en el espacio cartesiano para el robot humanoide propone la siguiente secuencia:

Definir la posición de la cadera $(x_h(t), y_h(t))$ en algunos puntos determinados, para a continuación generar la trayectoria de la cadera por interpolación polinómica.

Definir la posición del tobillo $(x_a(t), y_a(t))$ en puntos de cambio de apoyo y otros puntos que restrinjan la trayectoria. Tomando estos puntos, la trayectoria se genera por interpolación polinomial.

Para cada posición de la cadera y del tobillo, la posición de la rodilla $(x_k(t), y_k(t))$ se obtiene por geometría.

Teniendo la posición de las articulaciones, los ángulos de las articulaciones pueden obtenerse mediante cinemática inversa.

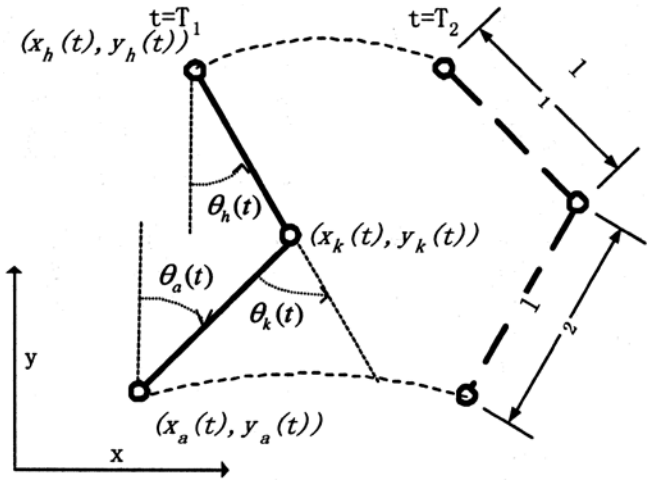


Figura 2-8. Modelo simplificado del robot en el espacio cartesiano. [22]

Para la planificación de trayectorias en el espacio articular equipara las piernas a dos manipuladores utilizando la planificación de trayectorias que se emplearían con un manipulador.

Teniendo en cuenta las dos fases diferenciadas en el paso, establece que (Figura 2-9):

Durante la fase de doble apoyo y fase monopodal en la que hace de soporte la pierna izquierda, sitúa en el pie izquierdo el sistema de referencia base para el manipulador izquierdo (BF1), y en la cadera la base para el manipulador derecho (BF2).

Durante la fase de apoyo sobre la pierna derecha, el sistema de referencia base del manipulador derecho pasa a estar en el pie derecho, siendo en esta fase, la cadera, la base del manipulador izquierdo.

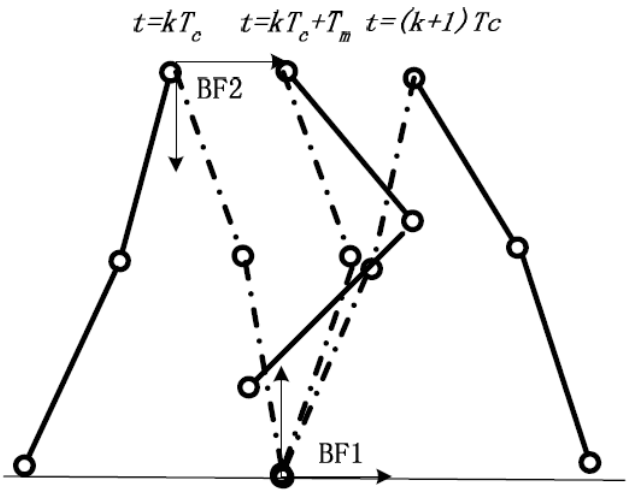
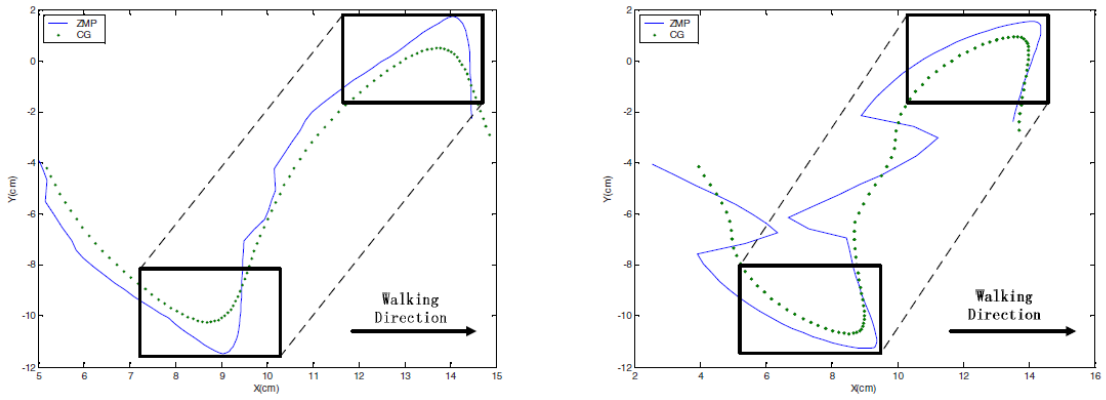


Figura 2-9. Sistemas de referencia para el modelo en el espacio articular.[22]

Establece ciertos puntos intermedios en base a la experiencia y el método de prueba y error, y añade restricciones para el comienzo y final de la trayectoria. Genera una trayectoria continua en primera y segunda derivada mediante interpolación por *splines* de tercer grado.



(a) **(b)**

Figura 2-10. (a) ZMP y CG para la planificación en el espacio cartesiano y (b) ZMP y CG para la planificación en el espacio articular.

Al comparar los resultados, destaca que en la planificación en el espacio articular el costo computacional es menor y obtiene unas curvas de velocidad angular más suaves. No obstante al analizar la trayectoria del ZMP para los dos espacios (Figura 2-10) comprueba que la generada en el espacio cartesiano es más suave, llegando a la conclusión de que las velocidades lineales son más importantes en el cálculo del ZMP que las velocidades angulares. Indica, que desde el punto de vista de la estabilidad del equilibrio, la planificación en el espacio cartesiano es más apropiado [22].

2.3.2 Planificación mediante asignación directa de valores a las articulaciones o consecución de metas

El estudio de la caminata humana ha generado interés en diversas áreas técnicas como la biomecánica, la robótica o la animación por ordenador. En el campo de la animación por ordenador, en sus comienzos, se emplearon técnicas que mezclaban el conocimiento adquirido del campo de la biomecánica con el propósito de dotar a la animación de una similitud al movimiento realizado por un humano. En un principio el objeto de estos modelos era generar un movimiento realista, no un movimiento dinámicamente estable.

Una forma de generar trayectorias consiste en asociar a la caminata una serie de estados que concurren de manera jerárquica a los que se les asocia una determinada postura. Los valores angulares de las articulaciones entre dos estados se obtienen por interpolación lineal entre los valores de las articulaciones de las posturas asociados a estos estados. La calidad del movimiento es proporcional al número de posturas especificadas.

La ventaja que tiene este método es el bajo coste computacional, sin embargo, el movimiento al ser obtenido exclusivamente de forma cinemática no tiene en cuenta los efectos de las leyes físicas como la gravedad o posibles colisiones durante el proceso de cálculo. En efecto, los valores angulares de las articulaciones obtenidos, que en esencia dan lugar a las posturas que a la postre constituyen el movimiento de la estructura, debieran mostrar cierta coordinación de las extremidades así como cumplir las restricciones provenientes de la interacción con el entorno. Cualquier postura que adopte el cuerpo, calculada en la interpolación entre dos posturas clave, debiera cumplir con la restricción que impide que cualquiera de los pies penetre en el suelo. Un método que trata de evitar este problema consiste en posicionar el origen de la estructura del cuerpo en una posición conocida respecto a un sistema de referencia global. Esto se consigue cambiando el origen de la estructura, con cada cambio de la pierna de apoyo, al pie que en ese momento estaría en contacto con el terreno. O bien utilizando algoritmos que combinan la cinemática directa e inversa, con los que se corrigen aquellas posturas intermedias obtenidas por interpolación que no cumplen con las restricciones de contacto (Figura 2-11).

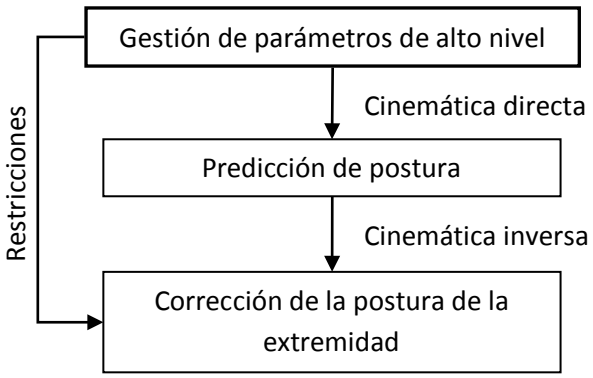


Figura 2-11. Sinopsis del sistema de locomoción de Boulic.

Las deficiencias de este método provienen del proceso de interpolación que se utiliza para la generación de posturas intermedias: las trayectorias angulares de las articulaciones se calculan de forma independiente a pesar de que debe existir una fuerte relación entre los movimientos articulares. Por otra parte, el proceso de interpolación puede hacer desaparecer la dinámica intrínseca de la locomoción de la que se obtuvieron las posturas clave, lo que lleva a una pérdida de realismo. Por último, aunque la mayoría de los terrenos no son llanos, no hay manera fácil de generar un movimiento que se adapte a cualquier tipo de terreno. La adaptación del pie a un tipo de terreno determinado tendría que ser explícitamente descrito en el diseño del modelo [23].

2.3.3 Planificación basada en modelos matemáticos y en técnicas de inteligencia artificial (machine learning, genetic algorithms, neural networks y fuzzy control)

Supongamos que un robot debe ejecutar una tarea. Para realizarla debe establecerse un patrón de movimiento en compromiso con un conjunto de restricciones impuestas, por ejemplo, por el entorno. Generalmente el robot podrá realizar distintas trayectorias que cumplan con las restricciones impuestas, y sin embargo, no todas son óptimas. Será necesario, teniendo en cuenta el conjunto de restricciones, aportar un patrón que sea una solución óptima bajo las restricciones impuestas.

Las técnicas de inteligencia artificial son una herramienta que se ajusta bien a este tipo de aplicación. Pongamos de ejemplo el aprendizaje automático (*machine learning*): el controlador del sistema puede someter al robot a una sucesión de acciones aleatorias y escoger aquellas para las que obtiene una respuesta positiva. Mientras efectúa la búsqueda de la sucesión de acciones que ha de efectuar, en busca del patrón de movimiento, el sistema va ajustando en su base de conocimiento qué importancia asocia a cada acción de forma individual por la respuesta obtenida a la sucesión de acciones a la que ha sometido al robot.

El comportamiento del sistema puede ser modelado como un agente en un entorno que va cambiando con el paso del tiempo por la acción del agente. En ocasiones se conoce con anterioridad cuales son las mejores acciones para distintas situaciones del entorno de manera

que una instancia pueda decir al agente qué debe hacer, en otras palabras, el agente aprende a resolver el problema supervisado por otro agente que ya conoce la acción óptima a realizar. El aprendizaje supervisado se basa en la teoría del control adaptativo. Se trata de un mecanismo de adaptación en la que el controlador del sistema aprende a realizar su tarea designada con la ayuda de un maestro. Cuando el sistema lleva a cabo una acción, el maestro genera una señal de error igual a la diferencia entre las acciones nominales y reales. Entonces, el sistema actualiza los parámetros con el fin de minimizar el error. Se requiere, por tanto, conocer la acción deseada y el sistema debe ser suficientemente explícito para saber cómo modificar sus parámetros para minimizar el error.

Desgraciadamente, hay muchas situaciones para las que no se conoce la respuesta correcta que el aprendizaje supervisado necesita. Cuando el controlador del sistema dispone de una base de conocimiento muy limitada se utiliza el aprendizaje por refuerzo (*reinforcement learning*). Al sistema únicamente se le proporciona la meta que debe lograr, y éste a base de interactuar con el entorno aprende como lograr esa meta. La única señal utilizada para aprender es la denominada "recompensa", un número que indica al agente si la secuencia de acciones que ha realizado le han llevado a un estado con el que o bien ha alcanzado la meta o no, esto es, el controlador aprende a base de experimentar, a evitar aquellas acciones para las que no obtiene una respuesta satisfactoria y a realizar aquellas que le llevan a ejecutar la tarea asignada de forma adecuada.

Ahora bien, cómo determinar cuál de las acciones que ha realizado ha sido la responsable del éxito o fracaso, o cómo debe distribuirse el mérito entre las acciones que ha realizado y lo han llevado a lograr la meta. Esta cuestión se conoce como el problema de la recompensa demorada (*problem of delayed reward*). Los algoritmos más simples que implementan la solución a este problema son los algoritmos de aprendizaje por refuerzo *TD-learning* y *Q-learnin*g. Ambos algoritmos proporcionan una función que valora el estado en el que se encuentra el sistema, si está abocado al éxito o al fracaso.

Benbrahim, [24] basándose en estas técnicas, desarrolla una arquitectura de aprendizaje por refuerzo a un robot bípedo para manejar complejos problemas de control, desarrollando la técnica *SSR learning* para resolver el problema de aprendizaje con refuerzo en dominios de acción continuos, consiguiendo que un robot bípedo aprenda a andar de manera dinámica sobre superficies planas, sin que el sistema tuviese ningún conocimiento previo de la dinámica del sistema.

Chew [25] desarrolla un algoritmo de control de la caminata en el plano sagital y demuestra la generalidad de un algoritmo de aprendizaje por refuerzo, aplicándolo a dos robots con estructuras similares pero con distintos parámetros de longitud e inercias de los eslabones. Cada robot llevó a cabo el proceso de aprendizaje para lograr caminar en el plano sagital.

Otra rama de la inteligencia artificial utilizada para ajustar los parámetros óptimos de la planificación del paso en la caminata dinámica del robot es el algoritmo genético. El algoritmo genético es un algoritmo de búsqueda dirigida basado en la selección natural y la genética. En

un problema de optimización, los parámetros del problema son sometidos a acciones aleatorias y evolucionan hacia una solución óptima al aplicar repetidamente operadores genéticos (reproducción, mutación y recombinación) para crear la siguiente secuencia de parámetros y someterlos a un proceso de selección consistente en una función a maximizar que permite juzgar si la secuencia actual es buena o mala.

Para poder aplicar este algoritmo, el diseño de control del bípedo debe formularse como un problema de búsqueda de algoritmo genético. Deben establecerse el esquema de control, los parámetros del controlador y la función de selección.

Cheng [26], aplica el algoritmo genético a la búsqueda del mejor diseño del controlador del bípedo y del paso, formulado como un problema de búsqueda de parámetros para lograr diferentes metas: andar por planos inclinados, andar con determinada longitud de zancada o velocidad.

Jeon [27] aplica el algoritmo genético (Figura 2-12) para generar una trayectoria empleando como función de selección la minimización de la energía del paso. Como parámetros introduce los coeficientes de los polinomios de las trayectorias de las articulaciones. Las pruebas las hace en distintos casos: caminando, subiendo escaleras y descendiendo escaleras.

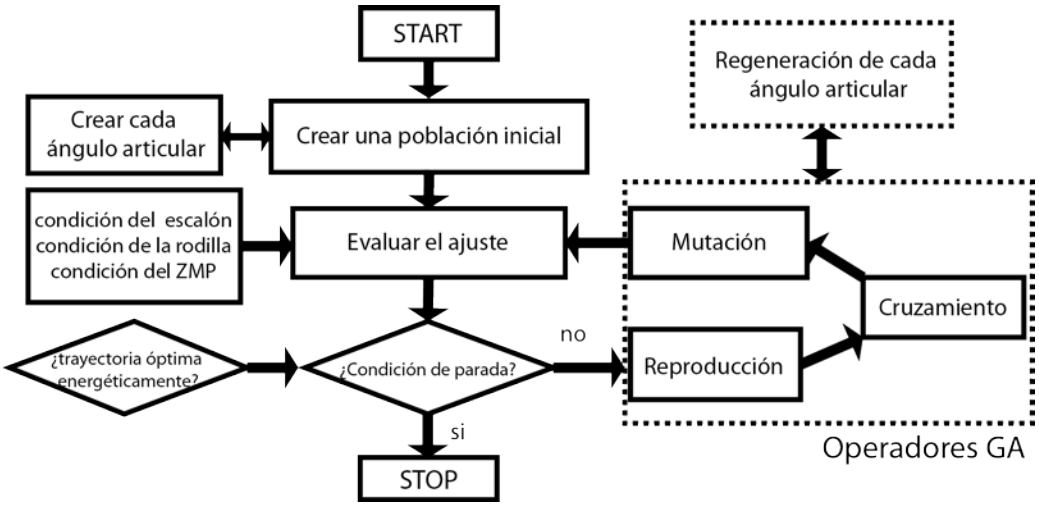


Figura 2-12. Diagrama del flujo de algoritmo genético [27]

2.3.3.1 *Redes neuronales*

Las redes neuronales son modelos para la aproximación de funciones no lineales. La configuración de la red (Figura 2-13) es un sistema de interconexión de neuronas en una red que colabora para producir un estímulo de salida. La figura representa una red neuronal genérica formada por tres grupos o capas. Una capa de neuronas de entrada está conectada a una capa oculta de neuronas que a su vez está conectada a una capa de neuronas de salida.

La actividad de las neuronas de entrada representa la información en bruto que se introduce en la red.

La actividad de las neuronas de la capa oculta está determinada por la actividad de las neuronas de la capa de entrada y por los pesos de las conexiones entre las neuronas de entrada y de la capa oculta.

El comportamiento de las unidades de la capa de salida está vinculado a la actividad de las neuronas de la capa oculta y los pesos de las conexiones entre neuronas de la capa oculta y de salida.

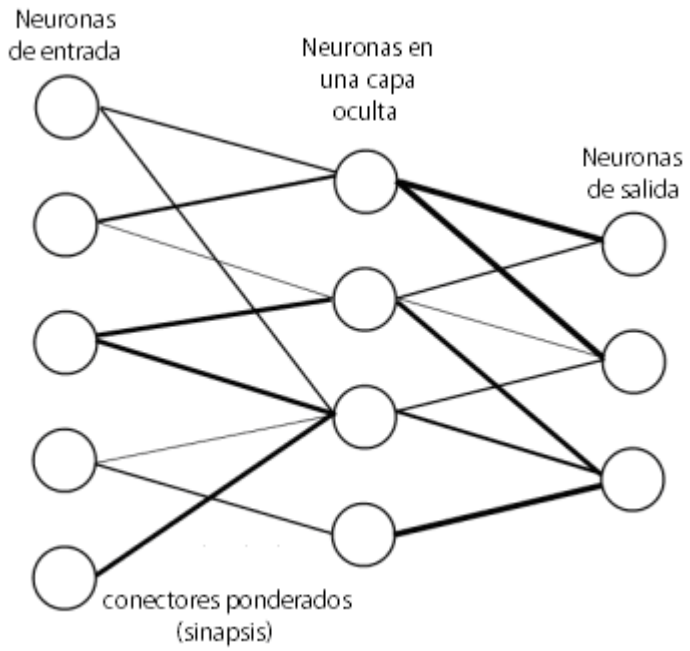


Figura 2-13. Red neuronal artificial

La capacidad de clasificación de la red neuronal depende del valor de los pesos sinápticos, que pueden ser preestablecidos o entrenados adaptativamente mediante mecanismos de aprendizaje supervisado o por refuerzo.

Esta arquitectura es interesante porque ofrece flexibilidad a la hora de representar funciones no lineales siendo posible representar cualquier función continua siempre y cuando hayan sido elegidas de manera adecuada la organización de la red y la no linealidad de las funciones.

Cada unidad tiene un número determinado de entradas y una salida. La salida es calculada de la siguiente manera:

$$y_i = f_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j\right) \tag{2.31}$$

donde i es el índice de la unidad, x_j son la entradas de la unidad, y_i es la salida, n es el número de entradas, w_{ij} son los pesos de la unidad y f_i es una función que puede ser empleada para introducir no-linealidad al sistema.

Para grandes sistemas, el número de parámetros de entrada puede ser muy elevado siendo un método poco práctico para sistemas a gran escala, especialmente en aplicaciones de control en tiempo real.

Salatian y Zheng [28][29] emplean una red neuronal para modificar el movimiento de un robot bípedo capaz de andar sobre superficies inclinadas usando la información proporcionada por los sensores como entradas. El robot es capaz de andar sobre un terreno del que no tiene conocimiento previo mediante aprendizaje por refuerzo, probando dos algoritmos, uno relativo a la modificación de velocidad del paso y un segundo algoritmo que proporcione un consumo mínimo de energía. La red está formada por veinte neuronas que se inhiben o activan recíprocamente.

La red neuronal constituye la unidad adaptativa, que modifica las trayectorias de las articulaciones generadas por el sintetizador de trayectorias cuando el movimiento del robot es involuntario, es decir, sujeto a un patrón de movimiento modificado por estímulos sensoriales para conseguir la estabilidad del paso. En el esquema mostrado en la Figura 2-14 se observa que la unidad adaptativa entra en funcionamiento cuando la unidad asociativa no es capaz de asociar el terreno con uno recogido en la base de conocimiento.

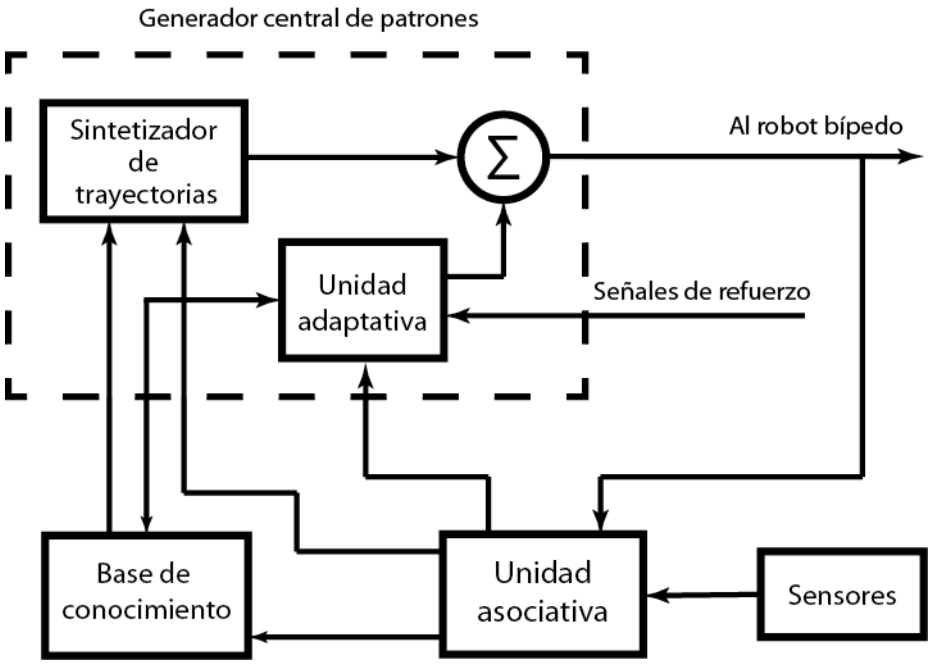


Figura 2-14. Sintetizador neuronal de pasos [28]

La red neuronal (Figura 2-15) recoge el esquema de la red que forma la unidad adaptativa. Las neuronas numeradas son denominadas neuronas de articulación y modifican la trayectoria de

la articulación correspondiente. Las neuronas identificadas con un + o un - son denominadas neuronas de dirección y se activan cuando el movimiento es de ascenso o descenso respectivamente.

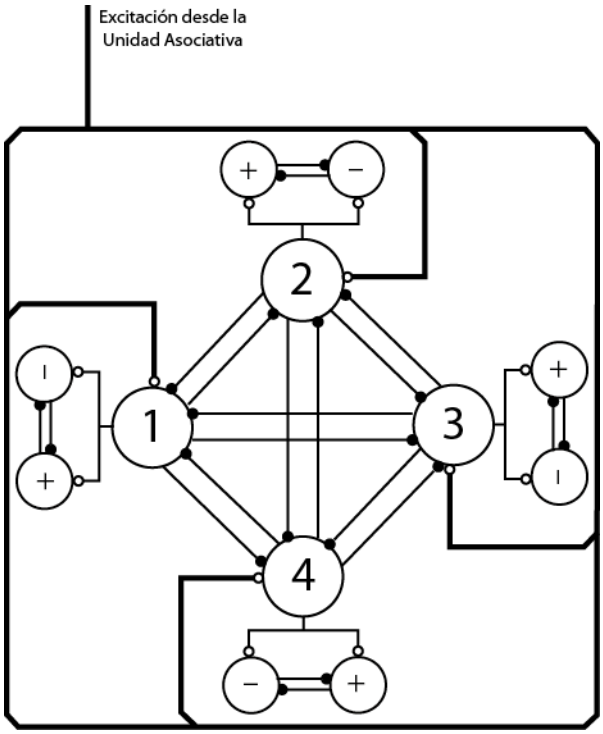


Figura 2-15. Modelo de la red neuronal de la unidad adaptativa [28]

Reinhart y Steil [30] utilizan una red neuronal para establecer una equivalencia entre el espacio de tarea y el de articulaciones, es decir, modelar la cinemática inversa y directa del brazo del robot. Presentan un esquema de control dinámico (Figura 2-16) para utilizar la dinámica de la red neuronal con el fin de generar trayectorias suaves desde la posición actual del efector final a una posición deseada con un entrenamiento de la red neuronal exclusivamente cinemático.

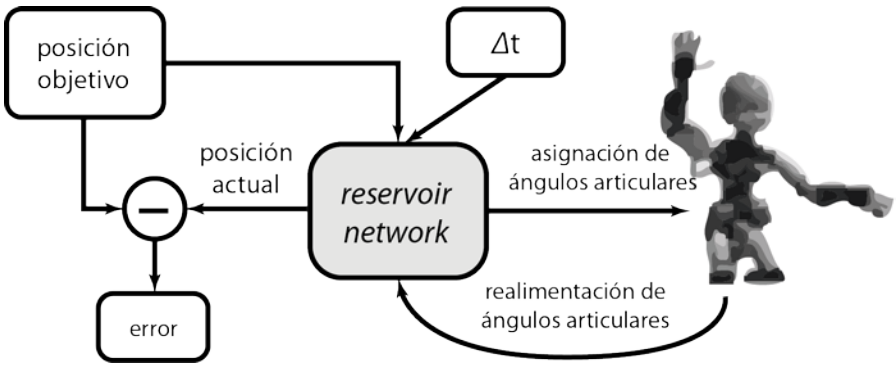


Figura 2-16. Red neuronal integrada en el esquema de control retroalimentado [30].

En la Figura 2-17 se muestran las trayectorias generadas desde una posición inicial del efector final a cincuenta puntos objetivo escogidos de manera aleatoria. Las trayectorias son suaves incluso en áreas donde no se habían recogido datos en el entrenamiento de la red.

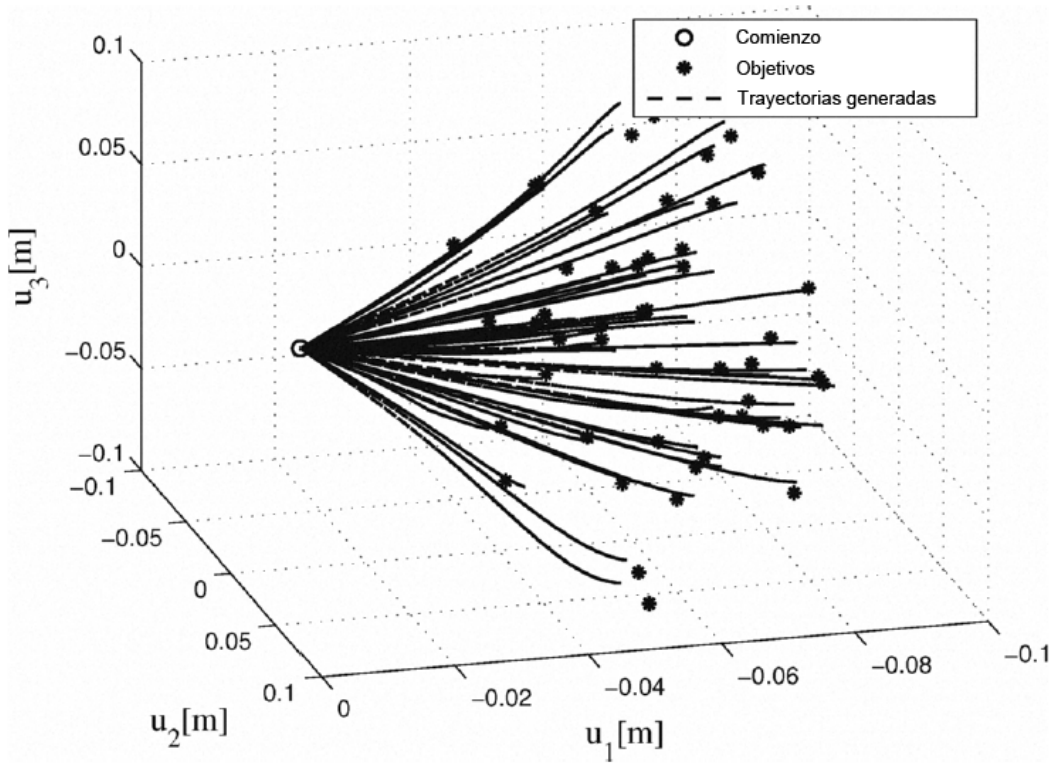


Figura 2-17. Cincuenta ejemplos de trayectorias obtenidas para distintas posiciones objetivo [30].

2.3.3.2 *Sistemas de control neuronales basado en osciladores*

En los animales, el denominado *Central Pattern Generators* (CPG), las redes neuronales que producen un patrón rítmico sin retroalimentación sensorial, han sido identificadas como las responsables de generar señales periódicas que desencadenan el movimiento muscular.

Pueden ser descritas matemáticamente por un conjunto de osciladores, siendo la función de unos la de excitar y la de otros inhibir. Configurados de la manera adecuada, generan un patrón completo de locomoción ya sea para andar, correr, saltar, gatear, etc.

Van Der Pol [31] desarrolló un conjunto de ecuaciones que ahora son ampliamente utilizadas como osciladores de CPG. Los osciladores se describen matemáticamente de la siguiente manera:

$$\ddot{x} - \mu_i(p_i^2 - c_i^2)\dot{x} + g_i^2 c_i = q_i$$
$$c_i = x_i - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} x_i \quad (2.32)$$

donde x_i son las salidas de los osciladores, p_i^2 son los llamados parámetros de amplitud, q_i parámetros de *offset*, g_i^2 son conocidos como parámetros de frecuencia y λ_{ij} son los parámetros de acoplamiento.

Bay y Hemami [32] hacen uso de los osciladores acoplados de Van der Pol para implementar un CPG. Los parámetros de estos osciladores, gobiernan la magnitud, frecuencia y el *offset* de cada oscilador. Otros parámetros adicionales se utilizan para acoplar los osciladores haciendo que se exciten o inhiban entre ellos trabajando de manera sincronizada. Mediante prueba y error acaban seleccionándose los valores de los parámetros que generan las señales y que serán utilizadas como patrón de las trayectorias de las articulaciones del robot bípedo.

La generación de un modelo funcional de CPR ha dado lugar a un tipo de arquitectura (Figura 2-18) denominada *leg model* por estar centrada en el movimiento de las piernas en la que es el CPG la que genera señales periódicas que representan la trayectorias de las articulaciones deseadas [24].

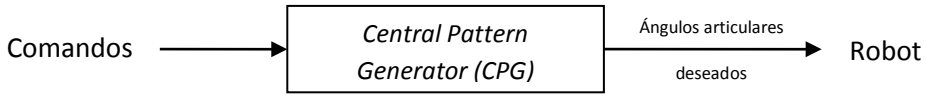


Figura 2-18. Leg model [24]

Esta es una descripción general. La implementación de este método encierra métodos complejos de control.

Taga [33] fue uno de los primeros en controlar la caminata de un robot bípedo mediante osciladores neuronales. La relación entre los osciladores se organiza automáticamente, ya que se sincronizan ellos mismos y globalmente interactúan a través del sistema de control y el entorno. Según Luksch [34], un resultado importante del trabajo de Taga es demostrar que el sistema de control del bípedo con patrones rítmicos de locomoción bípeda surge como resultado de la sincronía del sistema por la interacción dinámica del sistema músculo esquelético, el sistema nervioso y el entorno.

Katayama [35] estudia la teoría de los osciladores neuronales para su uso en el control de la locomoción bípeda y aporta soluciones para la estabilidad de ecuaciones diferenciales no lineales y su posible aplicación para la generación de patrones de caminata.

Los sistemas de control basados en osciladores neuronales no se adaptan bien con grados crecientes de libertad al no tener sus parámetros una interpretación física y por tanto son difíciles de ajustar o aprender [34].

2.3.3.3 *Lógica difusa*

La lógica difusa parte del principio de incompatibilidad descrito por L. A Zadeth: "*Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cual, la precisión y significado son características excluyentes*". Es la lógica aplicada a conceptos que pueden tomar un valor dentro de una gradación de veracidad entre la verdad o falsedad absoluta.

Bajo el concepto de conjunto difuso yace la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento son aspectos cualitativos. La lógica difusa permite tratar la información en términos de conjuntos borrosos que se combinan en reglas para definir acciones. Los sistemas extraídos de la lógica clásica presentan las dificultades de la rigidez y la bivalencia, y resultan, por ello, inservibles para expresar la ambigüedad del significado que se da en el lenguaje natural. La lógica difusa permite representar el conocimiento común, de tipo cualitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociados a ellos.

El grado de pertenencia a un conjunto difuso *A* se define con una función característica del conjunto difuso μ_A, una función continua que toma valores entre 0 y 1. La Figura 2-19 recoge funciones que suelen utilizarse por su simplicidad matemática como funciones características.

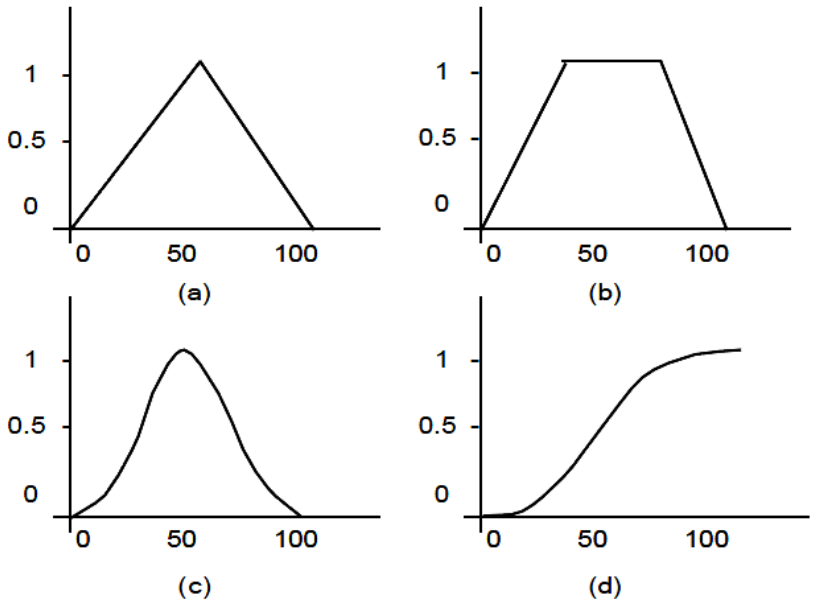


Figura 2-19. Algunas de las funciones características más habituales, (a) triangular, (b) trapezoidal, (c) gaussiana, (d) sigmoidal.

El esquema de un sistema basado en técnicas de lógica difusa (Figura 2-20) está compuesto por los siguientes bloques:

- Bloque difusor: Bloque en el que a cada variable de entrada se le asigna un grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos que se ha considerado mediante las funciones características asociadas a estos conjuntos difusos. Las entradas a este bloque son valores concretos de las variables de entrada y la salida es un conjunto de grados de pertenencia a los conjuntos difusos considerados.
- Bloque de inferencia: Bloque que relaciona conjuntos difusos de entrada y de salida mediante mecanismos de inferencia y que representa las reglas que definen el sistema. Las entradas a este bloque son conjuntos difusos (grados de pertenencia) y las salidas son conjuntos difusos asociados a la salida.
- Bloque desdifusor: Bloque que proporciona un valor concreto de la variable de salida aplicando sobre el conjunto difuso resultado del mecanismo de inferencia un método matemático de desdifusión.

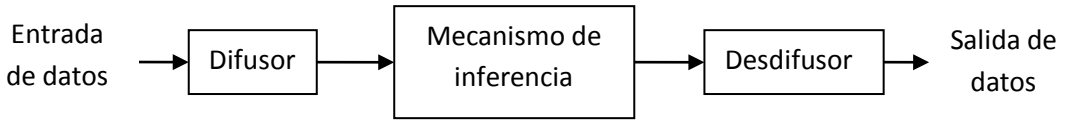


Figura 2-20. Diagrama de un sistema de lógica difusa.

Una aplicación popular es la incorporación de sistemas de lógica difusa en el control de procesos. El procedimiento adaptado de sistemas de control difuso pretende imitar las acciones de control de un sistema de control tradicional utilizando reglas difusas y adoptando características que permiten trabajar con sistemas de propiedades especiales como pueden ser algunos con comportamientos no lineales.

La principal motivación para utilizar la lógica difusa es la facilidad de escribir reglas del sentido común de tal manera que es posible construir una estrategia de control razonable en base a reglas de la forma:

Si {situación} entonces {acción}

El procedimiento comienza por escribir las reglas básicas para ir refinándolas en base a la experiencia.

La integración de las redes neuronales en sistemas de control difuso incorporan las ventajas de la representación distribuida de las redes neuronales a los sistemas de lógica difusa: eficiencia en el uso del hardware, generalización sencilla y tolerancia a fallos, así como la capacidad de aprendizaje (Figura 2-21.a). La capacidad de aprendizaje del sistema permite optimizar la composición de reglas que rigen el controlador difuso, ajustar las funciones características y los conjuntos difusos del difusor y desdifusor por aprendizaje por refuerzo o supervisado (Figura 2-21.b).

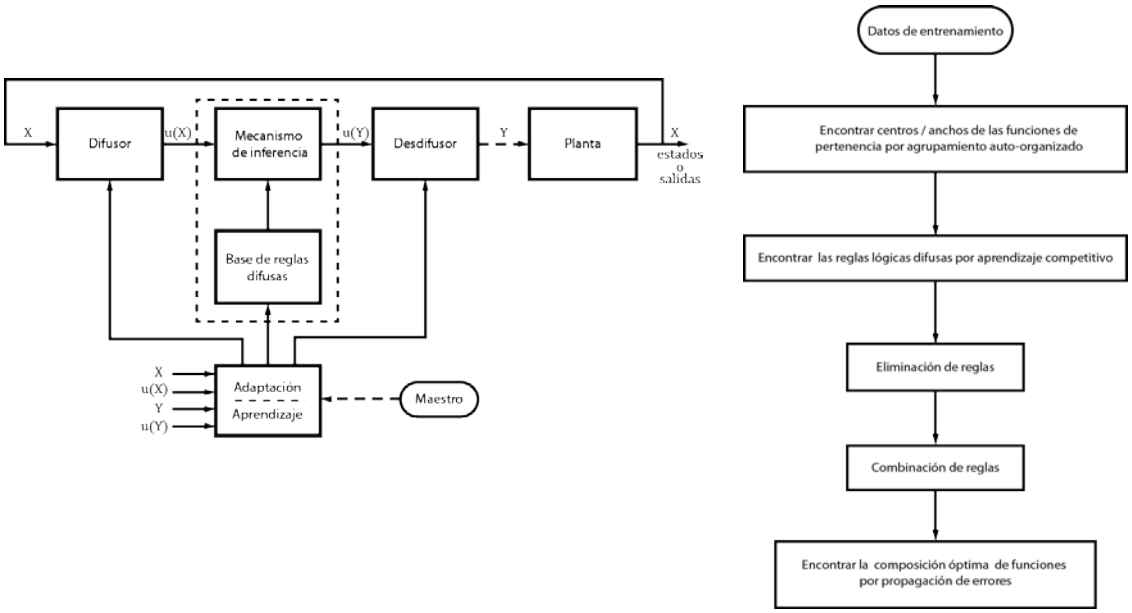


Figura 2-21. (a) Sistema típico de control difuso con función de aprendizaje. (b) Diagrama de flujo del aprendizaje del sistema de control difuso. [36]

Zhou [37] propone un esquema para un sistema de síntesis de trayectorias (Figura 2-22) en el paso de un robot bípedo empleando un sistema de control difuso con función de aprendizaje por refuerzo aplicándolo únicamente a la trayectoria del tronco, estando prescritas las trayectorias de las demás articulaciones. El sistema deduce las reglas difusas del sistema de control para mantener al robot en equilibrio dinámico durante el paso.

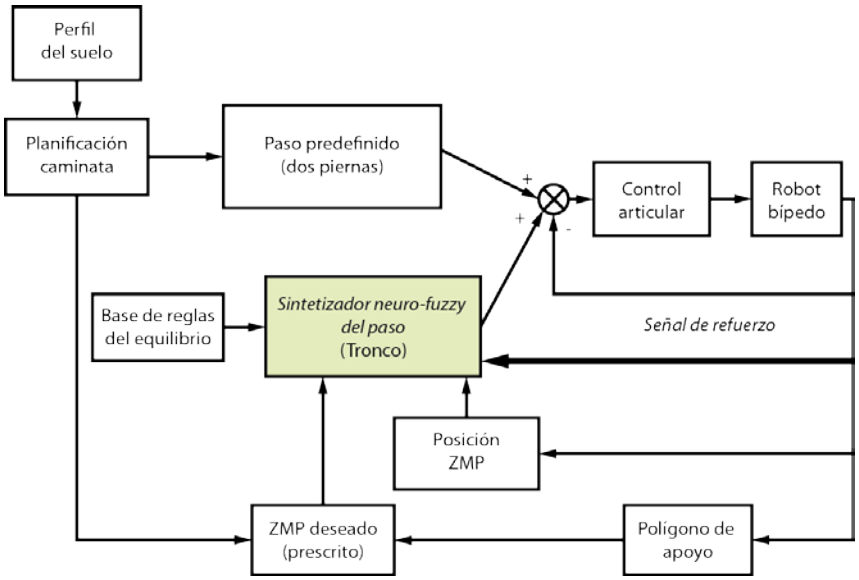


Figura 2-22. Esquema propuesto de un sintetizador neuro-difuso del paso de un robot bípedo con función de aprendizaje por refuerzo [37]

Los métodos derivados de la inteligencia artificial vistos presentan un gran potencial para resolver el problema de la locomoción bípeda. Han sido comprobados en diversos problemas

lineales o no lineales mostrando buena capacidad de adaptación, inmunidad al ruido y robustez [24]. El gran obstáculo que encuentran los algoritmos de la inteligencia artificial es la necesidad de disponer de gran capacidad de memoria y potencia de computación.

2.3.4 Planificación basada en criterios de estabilidad (dynamic walking, static walking)

Uno de los requisitos que se le exige al patrón de caminata de un robot bípedo es que durante el movimiento el robot se encuentre en equilibrio.

El problema ha sido abordado desde distintas direcciones. Una primera aproximación considera una caminata estática del robot, suponiendo el equilibrio estático de la estructura en todo momento. Esto quiere decir que si en un momento determinado se interrumpiese el movimiento del robot, éste se encontraría en una posición estable de forma indefinida.

Para asegurar la estabilidad estática del robot es preciso que la proyección del centro de masas del robot en el suelo se encuentre siempre en el interior del área del polígono de soporte. En este enfoque el robot realiza movimientos lentos, por lo que la dinámica de la estructura no colabora en la estabilidad y la proyección del centro de gravedad debe realizar oscilaciones de mayor amplitud que una planificación en equilibrio dinámico. Es posible reducir estas oscilaciones si se dispone de una mayor superficie de polígono de soporte. Las articulaciones del tobillo deben soportar de forma estática el peso de la estructura por lo que deben ser robustas y la velocidad del paso, como decíamos, es lenta.

Este planteamiento ha sido abandonado por la mayoría de los investigadores por una planificación en equilibrio dinámico, que proporciona movimientos más realistas y ágiles.

En el enfoque dinámico del caminar, ya no es condición indispensable que la proyección del centro de masas se sitúe continuamente dentro del polígono de soporte. De hecho, no hay ningún criterio absoluto que determine si el caminar dinámico es estable o no [24]. No obstante cuando el robot mantiene un pie de apoyo sobre el suelo puede considerarse utilizar el concepto del ZMP como criterio de estabilidad. La existencia o no del ZMP en un momento determinado del movimiento del robot es indicador de la estabilidad dinámica en ese instante. Asegurando que el robot rota en torno a un punto contenido en la región de soporte se consigue que la caminata sea dinámicamente estable. Análogo al caminar estático, si en un momento determinado los actuadores del robot se detuviesen, el robot tendería a girar alrededor del ZMP.

La generación de trayectorias en el caminar suele seguir la siguiente arquitectura (Figura 2-23): Conocidos los parámetros que definen el paso, se determina la trayectoria del ZMP según el área de soporte y el período del paso. La trayectoria del COM (centro de masas) se deriva de la simplificación del robot con un modelo dinámico en el que se introduce como referencia la correspondiente trayectoria del ZMP así como las trayectorias de los pies. Mediante la

cinemática inversa se obtienen los ángulos de giro de cada articulación, que se aplican al robot.

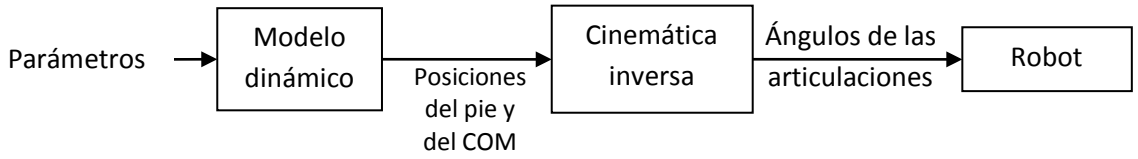


Figura 2-23. Esquema general del modelo de planificación de caminata en equilibrio dinámico.

Los modelos utilizados para modelar la dinámica del robot pueden ser los llamados sistemas de masa distribuida o los llamados modelos de masa concentrada.

Los modelos de masa distribuida tienen en cuenta que las distintas partes del cuerpo durante el paso influyen activamente en el equilibrio dinámico del sistema. La dinámica de estos modelos se aproxima más a la dinámica real del robot pero el alto coste computacional impide que puedan aplicarse en la planificación de la caminata del robot en tiempo real. Algunos modelos [16] como TMIPM (*Two Masses Inverted Pendulum Mode*) o MMIPM (*Multiple Masses Inverted Pendulum Mode*) modelan la dinámica de un robot bípedo como la suma de varios péndulos en los que la pierna oscilante, según el modelo, se modela con dos o más masas y se obtiene la trayectoria del torso (donde se asume que se encuentra el centro de masas del resto de la estructura) como solución de las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema.

Arbulu [15] afirma que no es necesario modelar la dinámica del sistema con sistemas más complejos de manera que los modelos de masas concentrada son el enfoque apropiado si se desea generar patrones de caminata en equilibrio estable en tiempo real.

Los modelos de masa concentrada modelan el sistema de la dinámica del COM donde está concentrada la masa de la estructura. Los modelos de masa concentrada más utilizados son el péndulo invertido (Figura 2-24) y el modelo *cart-table* (Figura 2-25).

Goswami [38] introduce el modelo RPM (*Reaction Mass Pendulum*) una construcción mecánica conceptual consistente en un pierna extensible sin masa que conecta el COP y el COM a la que está fijada un elipsoide que gira sobre el punto de unión con la pierna. Este modelo es una extensión del modelo del péndulo invertido para caracterizar la inercia del robot en torno al COM.

Estos métodos son válidos cuando la estructura se apoya sobre un único pie de apoyo. En el caso del péndulo invertido la dinámica del sistema se simplifica estudiando el movimiento en el plano sagital y concentrando la masa en el COM. El modelo está compuesto de una masa fijada al extremo de una pierna telescópica sin masa que rota en torno al ZMP, punto de contacto con el suelo.

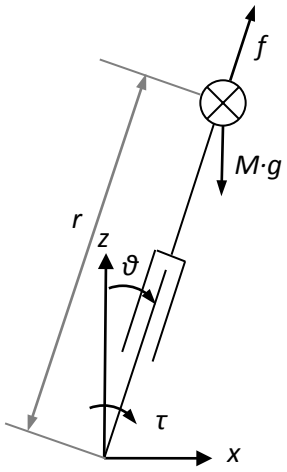


Figura 2-24. Péndulo invertido.

La ecuación dinámica del sistema viene dada por:

$$F_x = f \sin\theta + \frac{\tau}{r}\cos\theta$$
$$F_y = f \cos\theta - Mg - \frac{\tau}{r}\sin\theta \quad (2.33)$$

Que será la dinámica del centro de masas

$$F_x = M\ddot{x}$$
$$F_z = M\ddot{z} \quad (2.34)$$

Hay muchas soluciones para describir el movimiento del péndulo con este modelo dinámico. Para simplificar se pueden poner restricciones al movimiento.

- Es habitual considerar que los humanos y robots bípedos mantienen al andar una altura constante del COM. Entonces se puede suponer que el péndulo se mueve en un plano horizontal:

  $$z = z_c \quad (2.35)$$

  La longitud del péndulo cambia de acuerdo a la articulación de la rodilla del robot o cualquier mecanismo que supla su función.

- Se puede considerar el movimiento natural del péndulo, de manera que el par τ sea nulo:

$$\tau = 0 \tag{2.36}$$

Introduciendo estas condiciones, la ecuación que describe el movimiento del centro de masas es:

$$\ddot{x} = g\frac{x}{z_c} \tag{2.37}$$

Para el diseño de patrones de movimiento y conocer la geometría espacial de las trayectorias se introduce el concepto de energía orbital.

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{g}{z_c}x^2 \tag{2.38}$$

donde x es el desplazamiento horizontal desde el apoyo al centro de masas, z_c es la altura constante del centro de masas, g la aceleración de la gravedad. Se trata de una expresión cerrada que permite determinar dónde situar el próximo apoyo para alcanzar una determinada velocidad de paso, suponiendo que la transferencia se realiza sin pérdidas de energía entre cada paso.

Sin embargo en este modelo no se tiene en consideración el gasto energético relacionado con el cambio de longitud del péndulo.

En el modelo del péndulo invertido se toma como origen de coordenadas el ZMP. Si se toma otro punto de referencia, la ecuación que describe el movimiento del centro de masas queda expresada de la siguiente forma:

$$\ddot{x} = \frac{g}{z_c}(x - p_x) \tag{2.39}$$

siendo p_x la posición del ZMP respecto al nuevo sistemas de coordenadas. Se puede reescribir la ecuación de manera que se expresen las coordenadas del ZMP como función de posición del COM.

$$p_x = x - \frac{z_c}{g}\ddot{x} \tag{2.40}$$

El modelo *cart-table* (Figura 2-25) es un modelo propuesto en [39] que responde a la anterior ecuación. Cuando el robot se identifica con el modelo *cart-table* es fácil obtener la posición del ZMP en función de una trayectoria conocida del COM. Pero en la generación del patrón de la caminata se sigue el proceso contrario. La posición del carrito debe obtenerse de la trayectoria dada del ZMP determinada de los parámetros de la caminata.

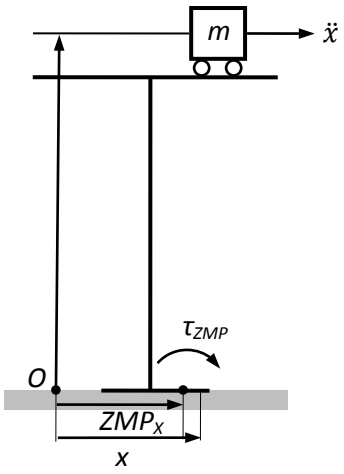


Figura 2-25. Modelo de *cart-table*.

Takanishi [40] propuso resolver este problema aplicando la transformada rápida de Fourier a la trayectoria de referencia del ZMP, resolver las ecuaciones en el dominio de la frecuencia y por aplicación de la inversa de la transformada rápida de Fourier obtener la trayectoria del COM en el dominio del tiempo. Kagami [41] propuso un método para resolver el problema en el dominio discreto del tiempo.

Kajita [39] lo resuelve modelando el problema como el control de un servo. La trayectoria del ZMP puede tener discontinuidades entre un paso y otro, la trayectoria del COM debe seguir estos cambios con antelación de modo que el control necesita información futura de la referencia de la trayectoria del ZMP para obtener la trayectoria del COM, utiliza entonces un diseño de control propuesto por Katayama [42]. Discretizando la ecuación (2.40) diseña un controlador óptimo (Figura 2-26) que proporciona u_x que representa la velocidad del COM, contiene un término de error basado en el error del ZMP, una variable de estado x basada en la posición del COM y un término "preliminar" basado en el valor de referencia futuro de la trayectoria del ZMP.

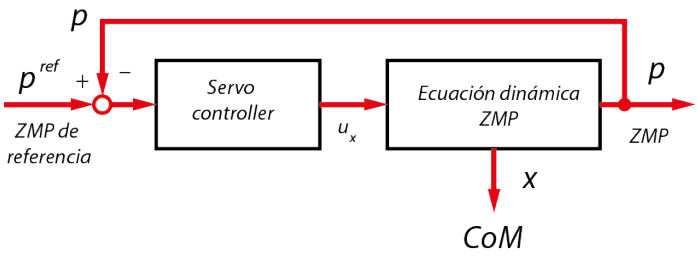


Figura 2-26. Generación de la trayectoria del COM por control de la trayectoria del ZMP [39]

2.4 El proyecto RH

El laboratorio de Automática de la Universidad Carlos III de Madrid se ha implicado en el desarrollo de un proyecto de robots humanoides llevando a cabo la construcción de dos

prototipos de robots, el RH-0 y RH-1 y un nuevo humanoide, TEO, todavía en fase de construcción.

2.4.1 Robot bípedo RH-0

El RH0 fue el primer robot humanoide (Figura 2-27) desarrollado dentro del marco del proyecto de humanoides RH en su primera fase (2002-2004). RH-0 es el primer robot humanoide que se produce en España a escala natural y el segundo en Europa. El desarrollo fue llevado a cabo por el grupo de trabajo *RoboticsLab* del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad Carlos III de Madrid. Es un proyecto financiado a nivel nacional por el Ministerio de Educación y Ciencia, dentro del Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica.

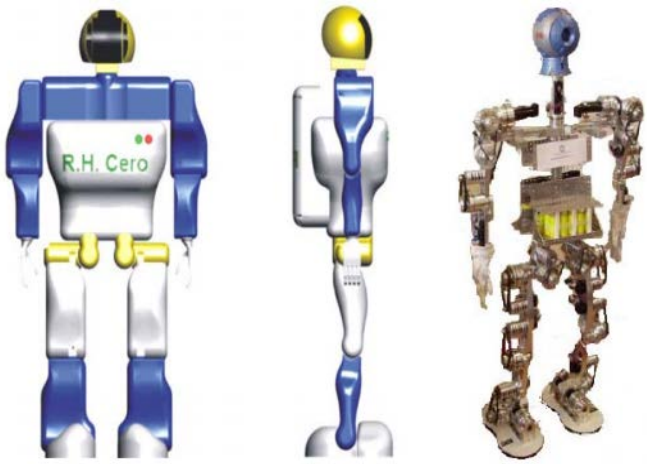


Figura 2-27: Robot humanoide RH-0.

La estructura del RH-0 alcanzaba una altura de 1,3m y en su conjunto, incluyendo las baterías pesaba 50kg. La estructura desarrollaba movimientos mediante 21 grados de libertad. La estructura está construida en aluminio aeroespacial, un material robusto y ligero.

En cada pierna distribuye seis grados de libertad distribuidos entre el tobillo, la rodilla y la cadera (Tabla 2-1).

En el tobillo dispone de dos grados de libertad, uno en el eje laterolateral[2], que le permiten realizar movimientos de dorsiflexión y flexión plantar del pie, y otro en el eje anteroposterior, que le permite realizar movimientos de aducción y abducción del pie. En la rodilla dispone de un grado de libertad que le permite realizar los movimientos de flexión y extensión de esta articulación. En la cadera dispone de tres grados de libertad en una disposición de las

[2] Nomenclatura utilizada para los ejes y planos anatómicos según quedan representados en la Figura 2-28.

articulaciones de tipo *Cantilever*; un grado de libertad en el eje laterolateral, que le permite realizar movimientos de flexión y extensión de la pierna, otro en un eje anteroposterior, lo que deja mover la pierna en abducción y aducción y otro en el eje craneocaudal, que le facilita realizar una rotación interna o externa de la pierna sobre este eje.

Cada brazo tiene distribuidos entre el hombro, el codo y la muñeca cuatro grados de libertad. En el hombro el humanoide dispone de dos grados de libertad en ejes anteroposterior y laterolateral, en el codo dispone un grado de libertad en el eje laterolateral y en la muñeca existe únicamente un grado de libertad en el plano transversal. Esta distribución permite la manipulación de objetos, aunque no le confiere la movilidad de un brazo humano.
En el tronco dispone de un grado de libertad que le permite realizar movimientos en el plano transversal.

Tabla 2-1: Distribución de los grados de libertad en el humanoide RH-0

GDL	Número	Eje de movimiento
PIERNAS	12 GDL	
Cadera	3 (x2)	Laterolateral Anteroposterior Craneocaudal
Rodilla	1 (x2)	Laterolateral
Tobillo	2 (x2)	Laterolateral Anteroposterior
BRAZOS	8 GDL	
Hombros	2 (x2)	Laterolateral Anteroposterior
Codo	1 (x2)	Laterolateral
Muñeca	1 (x2)	Craneocaudal
TRONCO	1 GDL	
Tronco	1	Craneocaudal
CABEZA	2 GDL	
Cámara	2	Craneocaudal Laterolateral
TOTAL	23 GDL con cabeza 21 GDL sin cabeza	

El humanoide RH-0 tiene embebido los siguientes componentes hardware:

Tabla 2-2. Componentes embebidos en el humanoide RH-0.

Accionadores	
Motor	Faulhaber 24 V DC
Frenos motor	MBZ 22 de Faulhaber
Sensorización	
Encoder	HEDS 5540 A de Faulhaber
Giróscopo	Silicon CRS07
Inclinómetro	ADXL Analog Devices
Sincronismo	Contrinex serie 620
Computación	

Microprocesador	SECO M570 PC/104 400Mhz
Driver	Elmo Harmonica A5/50 CAN
Adquisición de datos	-
Comunicación	
Inalámbrica	3COM Wireless LAN PC Card
Can-bus	Advantech PCM-3680 PC/104 Dual

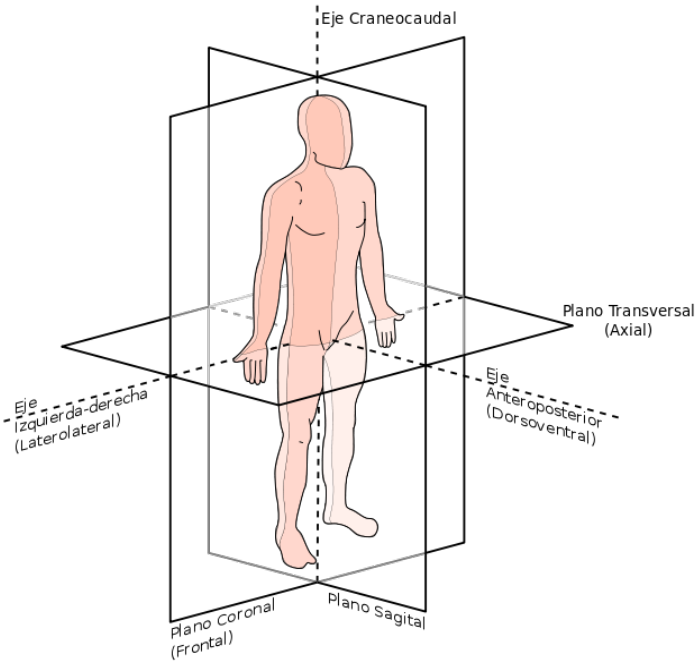


Figura 2-28. Planos anatómicos y ejes. [43]

2.4.2 Robot bípedo RH-1.

El humanoide RH-1 continuación del desarrollo del proyecto entre los años 2005-2007 conserva el diseño de la estructura de su predecesor, para el que se rediseñan algunos elementos mecánicos y se actualizan algunos elementos del hardware.

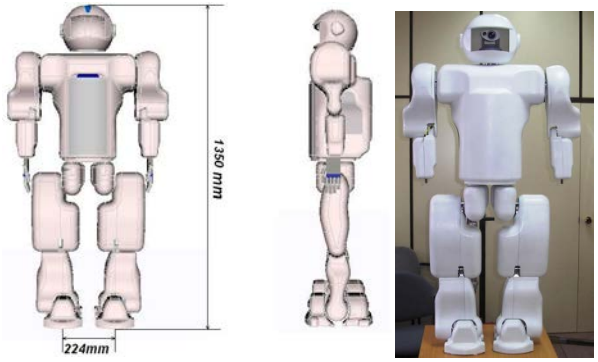


Figura 2-29: Robot humanoide RH-1.

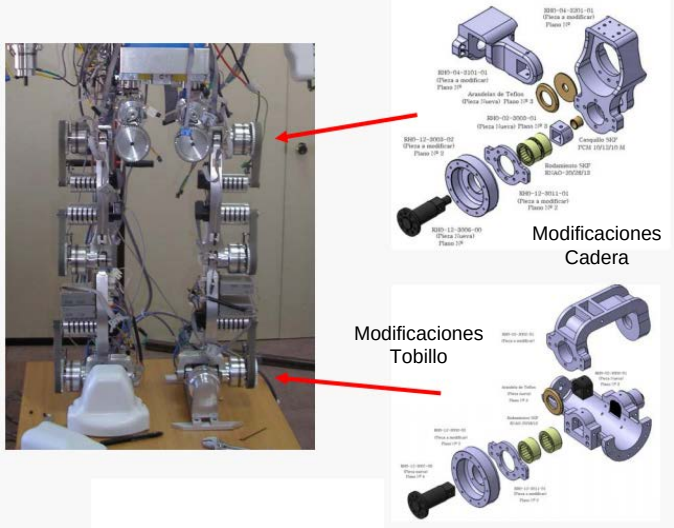


Figura 2-30: Modificaciones articulares del RH-1 respecto a su predecesor.

El rango de giro de las articulaciones del humanoide (ver Tabla 2-3) en algunos casos supera los del ser humano, en otros casos, debido a la disposición de la estructura no es posible imitarlos en el humanoide.

Tabla 2-3. Comparación del rango de las articulaciones angulares del Rh-1 y las del humano.

Articulación	Rango articular humano	Rango articular Rh-1
Cabeza	-50 a 50 (Roll)	-
	-50 a 60 (Pitch)	-
	-70 a 70 (Yaw)	-
Brazo		
Hombro	-90 a 0 (Roll)	-95 a 0 (Roll)
	-180 a 50 (Pitch)	-180 a 60 (Pitch)
	-90 a 90 (Yaw)	-
Codo	-145 a 90 (Pitch)	-135 a 0 (Pitch)
	-90 a 90 (Yaw)	-
Muñeca	-55 a 25 (Roll)	-90 a 90 (Roll)
	-70 a 90 (Pitch)	-
Mano	0 a 90 (Pitch)	-16 a 60 (Pitch)
Cintura	-50 a 50 (Roll)	-
	-30 a 45 (Pitch)	-
	-40 a 40 (Yaw)	-45 a 45 (Yaw)
Pierna		
Cadera	-45 a 20 (Roll)	-20 a 20 (Roll)
	-125 a 15 (Pitch)	-80 a 80 (Pitch)
	-45 a 45 (Yaw)	-15 a 15 (Yaw)
Rodilla	0 a 130 (Pitch)	0 a 100 (Pitch)
Tobillo	-20 a 30 (Roll)	-20 a 20 (Roll)
	-20 a 45 (Pitch)	-25 a 25 (Pitch)

En el diseño de la arquitectura de control del humanoide Rh-1 se han utilizado componentes electrónicos de la industria de automatización con el propósito de reducir el tiempo de

desarrollo y el costo (Tabla 2-4). La incorporación de estos componentes aporta flexibilidad y un sistema que es posible ampliar de forma sencilla.

En el diseño de la arquitectura de control del humanoide se apuesta por un sistema de control distribuido en la que cada nodo de control es un agente independiente en la red.

La arquitectura de control propuesta para el humanoide RH-1 en [44] está divido en diferentes módulos dividiendo las funciones de control entre funciones básicas y de alto nivel.

Las funciones básicas de control atañen al servo-control de las articulaciones y la generación de trayectorias.

Las funciones de control de alto nivel constituyen la realización de tareas por parte del humanoide de forma autónoma. Proveen además de un elevado nivel de percepción combinando datos de diferentes sensores, facilitan la implementación de la capacidad de reacción ante interacciones del entorno sobre el humanoide y la capacidad de interacción entre el usuario y el humanoide a través de una interfaz hombre-máquina (*Human Machine Interface*, HMI).

La arquitectura hardware resultante queda dividida en tres niveles (Figura 2-31), un nivel de control, un nivel de dispositivo y un nivel de sensor. Además proporciona comunicación con un cliente remoto que supervise y envíe comandos operativos al humanoide.

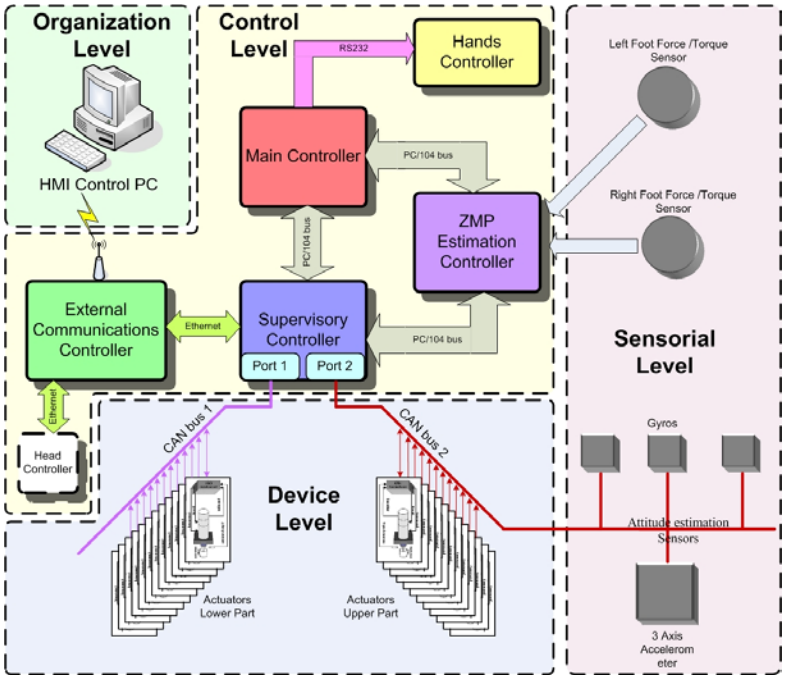


Figura 2-31. Arquitectura hardware para el control del humanoide RH-1 [44].

Tabla 2-4. Componentes embebidos en el humanoide RH-1.

Accionadores	
Motor	Faulhaber 24 V DC
Frenos motor	MBZ 22 de Faulhaber
Sensorización	
Encoder	HEDS 5540 A de Faulhaber
Giróscopo	Silicon CRS07
Inclinómetro	—
Sincronismo	Contrinex serie 620
Computación	
Microprocesador	Pentium M PC/104 Digital Logic
Driver	Elmo Harmonica A5/50 CAN
Adquisición de datos	SDM 7540 HR-1
Comunicación	
Inalámbrica	Router ASUS WL-530G
Can-bus	Softing PC/104AC2104 50Ah

En cuanto a la arquitectura del software destinada al control del movimiento del humanoide, basado en un sistema cliente-servidor, queda distribuida en tres módulos básicos [45]:

- *Control Server* – programa ejecutado en el Controlador Principal del humanoide supervisa las comunicaciones y el control general del robot.
- *Control Agent* – programa ejecutado en el driver encargado de tareas de control del movimiento articular.
- *HRSC Client* – programa que se ejecuta en un dispositivo externo a la arquitectura del robot, proporciona almacenamiento de los datos de movimiento y una interfaz gráfica para el usuario.

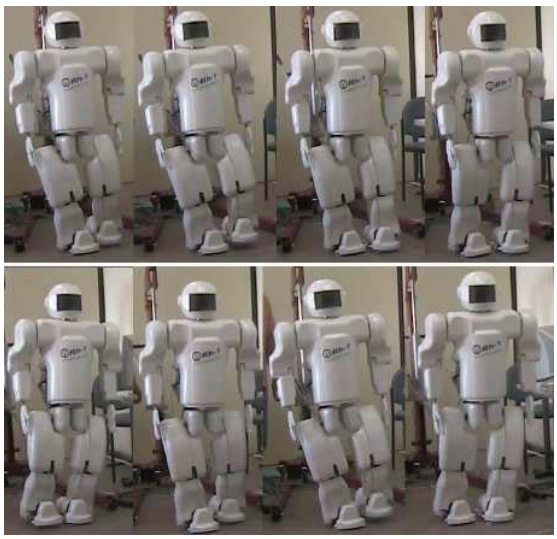


Figura 2-32. RH-1 dando tres pasos hacia adelante en equilibrio dinámico a una velocidad estimada de 0,55km/h. [15]

Arbulu [15] implementa una estrategia de generación de patrones de caminata desarrollada para esta plataforma bípeda, el algoritmo LAG (*Local Axis Gate*), basada en el álgebra de Lie y producto de exponenciales (*PoE*). La generación del patrón del paso se desarrolla en dos fases [46]:

1) Con la generación de la trayectoria del paso en equilibrio dinámico desarrollada por módulo de planificación VRT, y

2) la modificación del paso en tiempo-real utilizando la retroalimentación de sensores.

La experimentación de la caminata estable del robot (Figura 2-32) se realizó en diversas condiciones tanto en interior como en exterior y con distintos tipos de pasos.

2.4.3 Robot bípedo TEO.

El desarrollo de este robot no es casual, el deterioro de la anterior plataforma robótica y la limitación en el desarrollo de nuevas habilidades en el humanoide RH-1 son razones que han dado lugar a la necesidad de desarrollar una tercera versión de robot humanoide.

TEO es un robot que se prevé que podrá caminar en cualquier dirección, subir y bajar escaleras, sentarse en un asiento y que será capaz de moverse por sí mismo en un entorno humano.

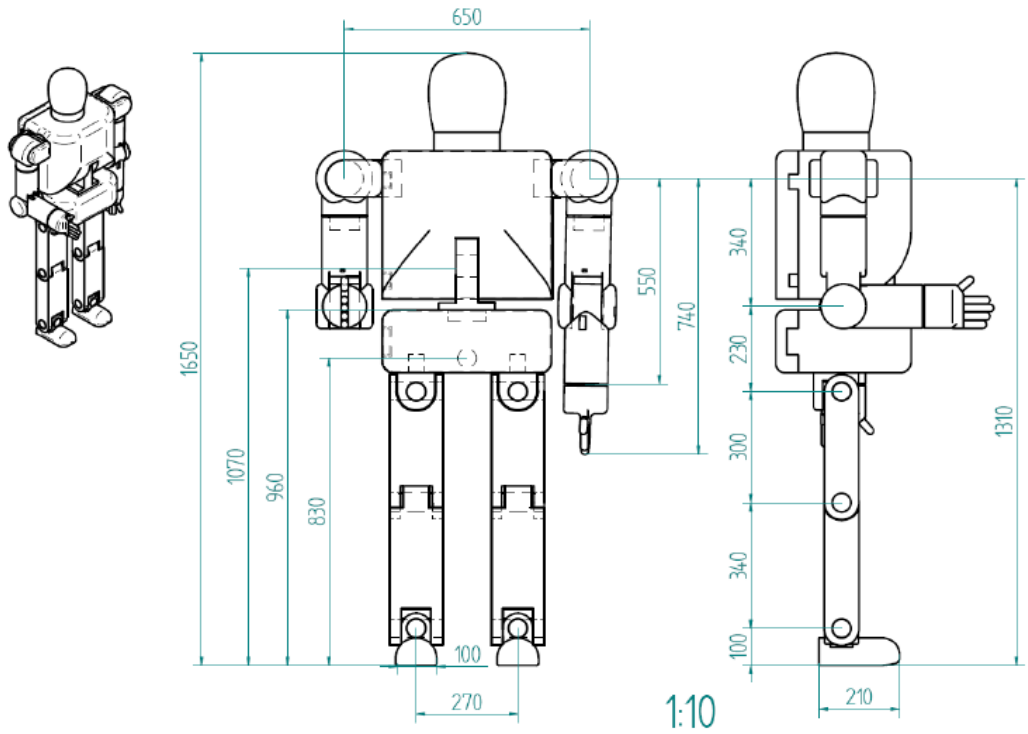


Figura 2-33: Medidas proyectadas del robot bípedo TEO.

En esta nueva versión se ha rediseñado la estructura, la cadera que en las anteriores versiones era de tipo *Cantilever* en esta nueva versión es de tipo *Planar* en la que se hacen coincidir los ejes de tres articulaciones en un único punto, de diseño más complejo pero a efectos prácticos más robusta. El nuevo diseño de la estructura, en cuyo interior se alojan la electrónica y todos los componentes mecánicos procura mayor protección a los elementos más frágiles del humanoide.

Los anteriores modelos disponían de 21 grados de libertad sin contar con la cabeza mientras que en TEO se pretende incluir tres grados más de libertad: uno en cada hombro en el eje craneocaudal que permita a los brazos realizar movimientos similares a los humanos y otro grado de libertad en el tronco en su eje laterolateral para poder controlar el balanceo del tronco hacia delante y atrás y facilitar la estabilidad del equilibrio. La configuración de los grados de libertad de la estructura está recogida en la Tabla 2-5.

Tabla 2-5: Distribución de los grados de libertad en TEO.

GDL	Número	Eje de movimiento
PIERNAS	12 GDL	
Cadera	3 (x2)	Laterolateral Anteroposterior Craneocaudal
Rodilla	1 (x2)	Laterolateral
Tobillo	2 (x2)	Laterolateral Anteroposterior
BRAZOS	10 GDL	
Hombros	3(x2)	Laterolateral Anteroposterior Craneocaudal
Codo	1(x2)	Laterolateral
Muñeca	1 (x2)	Craneocaudal
TRONCO	2 GDL	
Tronco	2	Craneocaudal Laterolateral
CABEZA	2 GDL	
Cámara	2	Craneocaudal Laterolateral
TOTAL	26 GDL con cabeza 24 GDL sin cabeza	

Respecto a la arquitectura hardware que en la anterior plataforma dividía las tareas de control entre tres niveles, nivel de control, dispositivo y sensor, da paso en TEO a una arquitectura similar (Figura 2-34) pero dividido en diferentes subsistemas: acción, decisión e información.

El subsistema de decisión consta de dos CPU con mayor capacidad de cálculo e interfaz PCI más rápido que su predecesor que controlan la movilidad de las piernas y las habilidades de movilidad de los brazos respectivamente. Los driver de cada motor de las articulaciones ahora son más ligeros y de menor tamaño.

La comunicación se realiza a través de cuatro redes CANOpen, una para cada extremidad para reducir el número de nodos por red, de manera que el intervalo de tiempo entre la lectura de una posición desde que se realiza la orden de alcanzarla sea de apenas 4ms.

El subsistema de información incorpora sensores para la medida de datos internos como la lectura de *encoders* de posición de las articulaciones o de sensores par-fuerza e inclinómetros así como la adquisición de información del entorno a través de cámaras, micrófonos, etc.

El subsistema de acción lo constituyen los motores presentes en cada articulación.

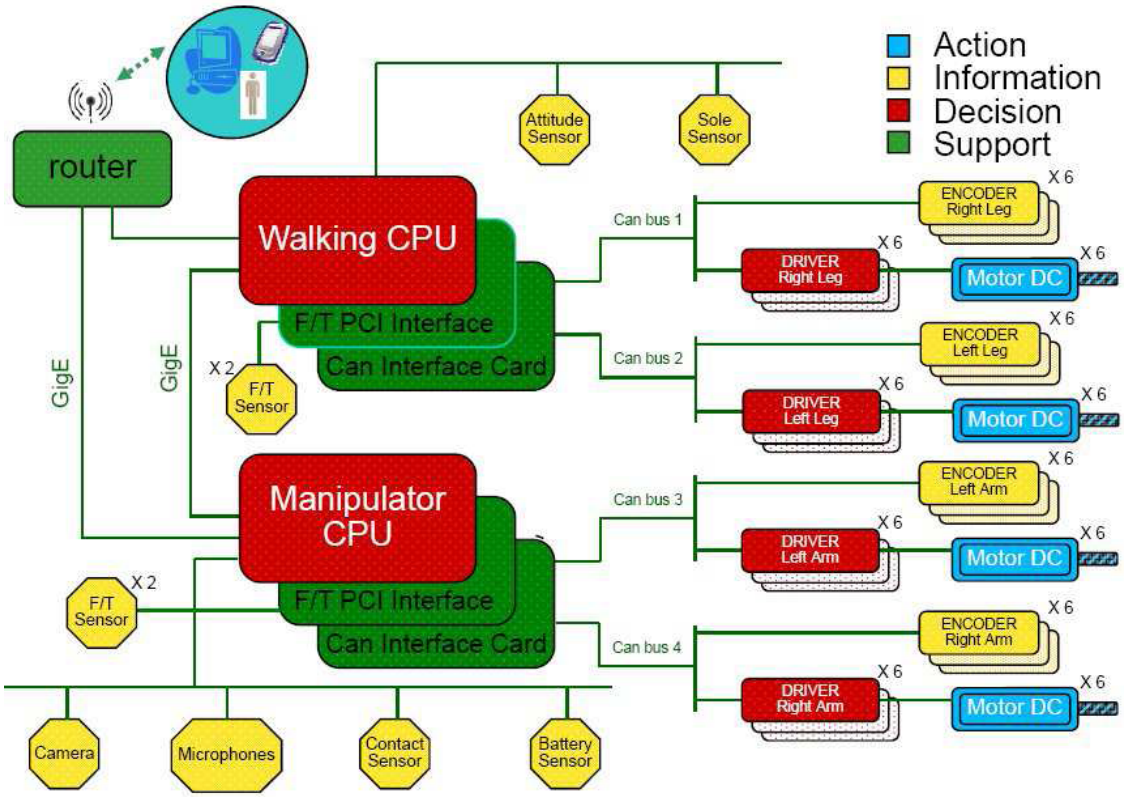


Figura 2-34. Arquitectura hardware en el humanoide TEO.

En la Figura 2-35 se puede apreciar el tren inferior de la estructura del humanoide ahora en fase de pruebas para la movilidad en lazo abierto de las articulaciones sin estar todavía montada la parte del tronco superior.

La cadena cinemática equivalente del tren inferior tendría la configuración mostrada en la Figura 2-36, en la que se muestra la disposición de las distintas articulaciones que dotan a la estructura de movimiento y el sentido de giro que se va a considerar como positivo a lo largo del proyecto.

Figura 2-35: Estado actual del tren inferior del humanoide TEO.

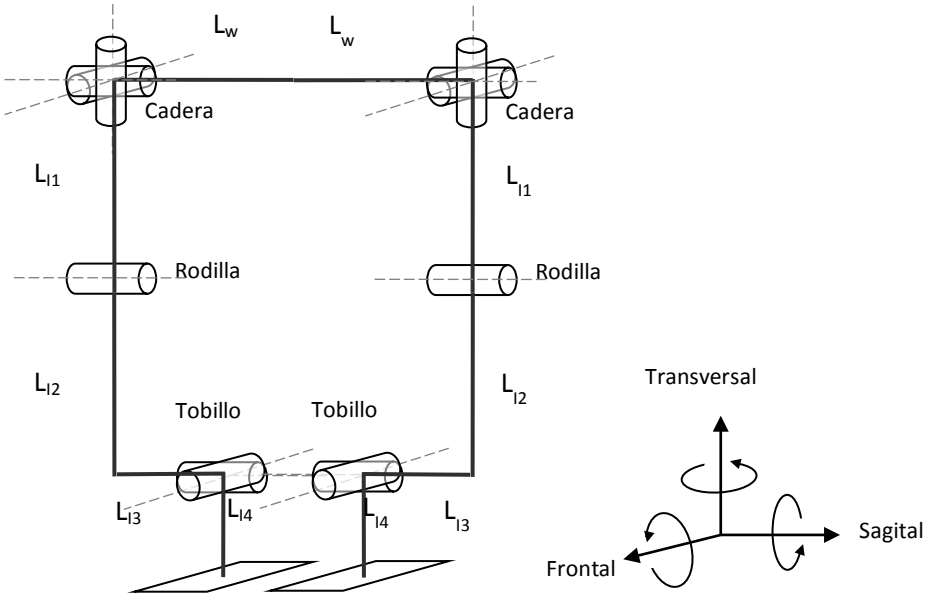


Figura 2-36. Cadena cinemática del tren inferior de TEO.

3 Implementación de un modelo de la plataforma bípeda de TEO

La estructura física del tren inferior del humanoide consiste en un conjunto mecánico que puede ser visto como una cadena cinemática de varios eslabones unidos entre sí por articulaciones.

Las articulaciones que encontramos en la estructura del tren inferior del humanoide que unen los distintos eslabones son articulaciones de revolución y permiten el giro alrededor del eje de la articulación de un eslabón respecto al eslabón al que está unido (Figura 3-1) aportando con cada articulación un grado de libertad a la cadena cinemática.

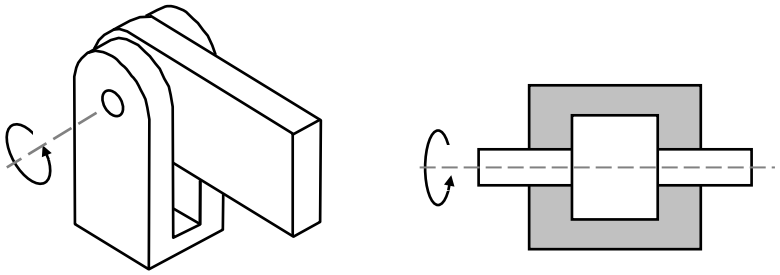


Figura 3-1. Articulación rotatoria o de revolución.

En el tren inferior del humanoide cada articulación dispone de un actuador con el que se aplican los giros adecuados para dotar de movimiento a la estructura y que ésta efectúe la tarea que se le requiere.

El giro de las articulaciones está limitado dentro de un rango por la interferencia física entre los elementos que componen la estructura. La Tabla 3-1 recoge los rangos de giro de las articulaciones presentes en el tren inferior del humanoide TEO.

Tabla 3-1. Rango de giro de las articulaciones de las piernas.

Articulación	Ángulos de giro
Tobillo sagital	-30º a +30º
Tobillo frontal	-28º a +20º
Rodilla	0º a +90º
Cadera sagital	–
Cadera frontal	-30 a +60
Cadera axial	–

El modelo que se desarrolla en este apartado tiene en cuenta aquellas características físicas de la estructura que permitan llevar a cabo el análisis cinemático. El modelo no incluye

información relativa a la inercia de los eslabones ni a los términos de fricción presentes en las articulaciones.

El modelo del tren inferior refleja información relativa a:

- Las dimensiones de los eslabones de las cadenas cinemáticas que compongan la estructura.
- Masa de los eslabones y posición del centro de masas en el eslabón.
- Tipo de articulaciones presentes en la estructura.
- Rango angular de giro de las articulaciones.

El conjunto mecánico del tren inferior del humanoide que se pretende modelar se muestra en la Figura 2-35. La estructura mostrada en la Figura 3-2, representa de forma esquemática la configuración de las articulaciones y los elementos que componen la pierna derecha del robot humanoide TEO. La estructura simétrica respecto al plano transversal representaría la estructura de la pierna izquierda. En la Tabla 3-2 se da valor a los parámetros de la figura para distintos humanoides.

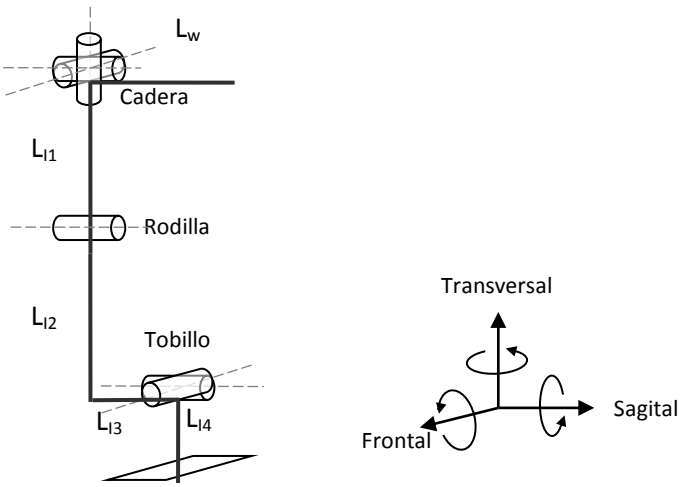


Figura 3-2. Esquema de la cadena cinemática de la pierna derecha.

Tabla 3-2. Dimensiones de los eslabones del tren inferior para distintos humanoides.

Eslabones				
Nombre	Símbolo	Longitud[m]		
		TEO	Hoap-3	HRP-2
Cintura	Lw	.146	0.039	0.06
Fémur	Ll1	0.33	0.105	0.3
Tibia	Ll2	0.3	0.105	0.3
Patella	Ll3	0.03322	0	0.035
Astrágalo	Ll4	0.1	0.040	0.105

La estructura del tren inferior estaría constituida por la cadena cinemática de la pierna derecha conectada en su extremo con la cadena cinemática de la pierna izquierda.

Para cumplir con esta restricción lo primero que debemos hacer es analizar la estructura de manera que respecto a un mismo sistema de referencia los extremos de las cadenas cinemáticas se encuentren en la misma posición y tengan la misma orientación.

Para este propósito adoptamos un método general utilizado en mecánica: ligar un sistema de referencia ortogonal a un elemento y expresar su posición y orientación del elemento como la posición y orientación de los ejes del sistema de referencia que tiene ligado respecto a otro sistema de referencia.

Las dos cadenas cinemáticas (*A* y *B*) tienen asociados a sus bases dos sistemas de referencia S_A y S_B. El centro de masas de la pelvis tiene asociado un sistema de referencia S_P.

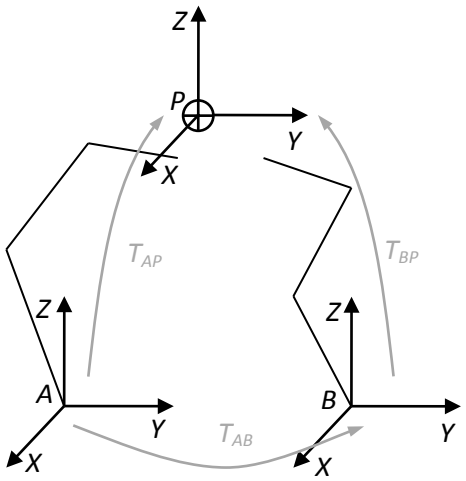


Figura 3-3. Disposición de las dos cadenas cinemáticas y el centro de masas de la pelvis.

En este caso T_{AP} expresaría la relación entre los sistemas de referencia S_A y S_P o visto de otra forma, la aplicación de esta transformación permite el cambio del sistema de coordenadas respecto al que estamos refiriendo la pelvis. Lo mismo se puede decir de T_{BA} y T_{BP}. Estas relaciones entre sistemas de referencia son la consecuencia de la aplicación giros y traslaciones en un determinado orden. Una forma de expresar la posición y orientación de un elemento respecto a un sistema de referencia asociado es la matriz de transformación homogénea y tiene la particularidad de que se puede realizar la composición de transformaciones y que trabajar con matrices permite el uso de su álgebra.

$$ {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & {}^{A}p_{B} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1} $$

La aplicación de la matriz transformación homogénea ${}^{A}T_{B}$ (de dimensión 4x4) supone la aplicación de una rotación ${}^{A}R_{B}$ y posteriormente una translación ${}^{A}p_{B}$.

Si se asocia al extremo de cada cadena cinemática un sistema de referencia y se les hace coincidir posteriormente con el sistema de referencia que definimos para la pelvis de manera que se consigan mantener solidarias a la posición y orientación de la pelvis en todo instante, se tendrá un modelo que represente el tren inferior del humanoide.

La relación entre el sistema de referencia asociado al extremo de la cadena cinemática y el sistema de referencia ligado a la base de la cadena es función de los valores de los giros de las articulaciones de la cadena cinemática. El giro de la articulación i-ésima se denota q_i y recibe el nombre de *variable articular*. El conjunto de variables articulares de la cadena cinemática es el vector

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_n] \tag{3.2}$$

se conoce como vector de *coordenadas articulares*.

La posición del extremo de la cadena cinemática viene dado por su posición y su orientación, un vector q_i de dimensión $m < n$, en este caso, en el espacio euclídeo tridimensional, es un vector de 6 elementos.

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_6] \tag{3.3}$$

La relación entre r y q, determinada por la configuración de la cadena cinemática, generalmente no es lineal. La relación se asume que viene dada por la siguiente relación

$$r = f_r(q) \tag{3.4}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación cinemática* de la cadena cinemática. La relación inversa en la que se tiene que calcular el vector de coordenadas articulares para que el extremo de la cadena cinemática esté situado en una posición y con una orientación requerida se puede expresar formalmente con la expresión

$$q = f_r^{-1}(r). \tag{3.5}$$

No obstante puede no existir solución o bien puede darse el caso que no sea única.

Al problema de obtener r para un vector q dado se conoce como problema cinemático directo, y aquel en el que debe obtenerse el vector q correspondiente a un vector r dado se conoce como problema cinemático inverso. La dificultad de estos problemas aumenta con el número de grados de libertad presentes en la cadena cinemática. Una forma de abordar el problema es asignar un sistema de referencia apropiado a cada eslabón y describir la relación entre los eslabones como la relación entre los sistemas ligados a los eslabones. De esta manera, el problema cinemático directo se hace sistemático y resolver el problema cinemático inverso más sencillo.

Llegados a esta parte, se describen los bloques o etapas implicadas en la consecución de la generación de trayectorias articulares para el modelo del tren inferior descrito anteriormente.

3.1 Generación de trayectorias

El control cinemático permite establecer las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para lograr los objetivos que se fijen (puntos de destino en el espacio articular, trayectorias cartesianas, identificación de los parámetros inerciales, etc.). Estas trayectorias se seleccionan atendiendo a las restricciones físicas propias del robot y a ciertos criterios de calidad de las trayectorias tales como precisión o continuidad.

Para la generación de trayectorias en el espacio existen dos formas básicas de especificar el movimiento:

1. Suministrando puntos consecutivos y obteniendo la trayectoria espacial que describe el robot entre cada dos puntos.
2. Especificando el camino que debe unir los puntos mediante una determinada trayectoria, tal como una línea recta o una circunferencia, que debe describir el robot en el espacio de trabajo.

La primera alternativa, denominada control punto a punto, tiene interés práctico cuando los puntos están suficientemente separados, en caso contrario la especificación sería muy laboriosa. Por otra parte si se especificaran pocos puntos, existe el riesgo de que se generen movimientos imprevisibles. En el movimiento punto a punto se plantea directamente el problema de interpolación de la trayectoria entre los puntos especificados.

La segunda forma se denomina control de trayectoria continua. En este caso, el sistema de control debe hacer que el robot reproduzca lo más fielmente la trayectoria especificada. Es necesario especificar qué tipo de trayectorias continuas deben emplearse.

En el espacio cartesiano la especificación de caminos se realiza en términos de la posición y orientación del extremo de la cadena cinemática respecto a un sistema de referencia estudiando la evolución de las variables cartesianas en el tiempo.

Sin embargo, la selección de un control de trayectoria continua puede dar lugar a que en el transcurso del movimiento, a la hora de efectuar la interpolación de trayectorias puede darse el caso de alcanzar puntos con las siguientes peculiaridades [47]:

> **Puntos intermedios inalcanzables.** Situación en que debido a la configuración de la cadena, a la longitud de los eslabones o a limitaciones de las articulaciones es imposible alcanzar un punto de la trayectoria definida.
>
> **Velocidades articulares altas cerca de singularidades.** En este caso siguiendo una trayectoria de puntos que si son alcanzables pero aproximándose a una singularidad se

produce un aumento en la velocidad de las articulaciones hacia infinito, obviamente existen limitaciones físicas que producen que la cadena cinemática no siga la trayectoria deseada.

Puntos alcanzables solo con diferentes orientaciones. Puede darse el caso de que un punto solo sea posible alcanzarlo en determinadas orientaciones.

Un esquema de control cinemático puede ser el siguiente:

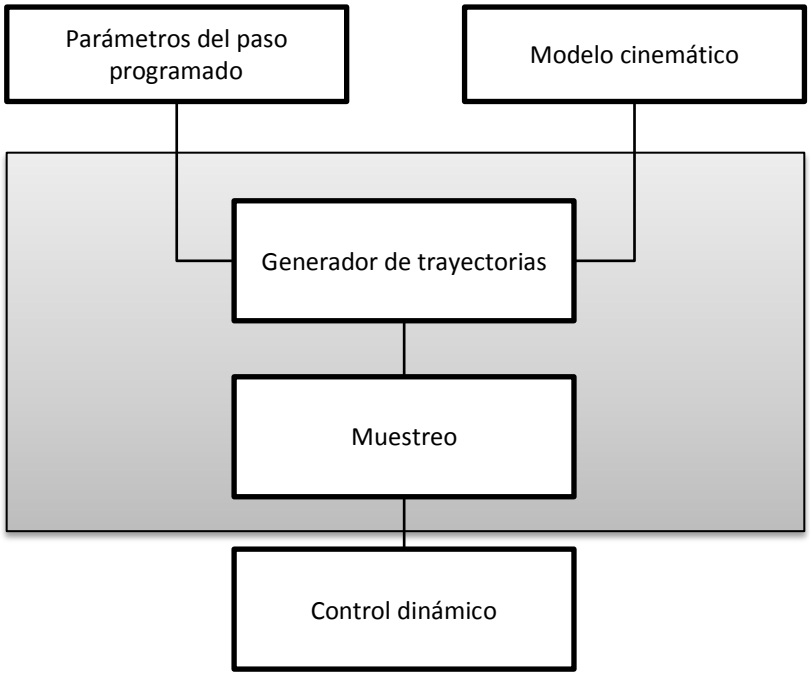


Figura 3-4. Esquema de control cinemático

La programación del paso alimenta al generador de trayectorias con información sobre la planificación del paso. En este proyecto la programación del paso se ha resumido en los siguientes parámetros:

- La amplitud lateral del balanceo de la pelvis.
- Elevación máxima del pie.
- Longitud del paso.
- Tiempo del paso.
- Periodo del movimiento.

Estos parámetros permiten especificar la posición final de los pies, restricciones al movimiento de la pelvis y el tiempo que se invierte en la ejecución del movimiento.

Puede ser necesario especificar puntos intermedios, especialmente en la trayectoria de los pies para evitar durante el movimiento interferencias con el escalón. El procedimiento general de funcionamiento del generador de trayectorias seguiría la siguiente secuencia de pasos:

- Conversión con ayuda de la cinemática inversa de los puntos cartesianos inicial, final y puntos intermedios a valores en el espacio articular para cada una de las articulaciones.
- Interpolación de los valores articulares para cada articulación de forma eficiente garantizando la máxima suavidad de la curva.

En este proyecto, se ha implementado la generación de trayectorias articulares punto a punto siendo simultáneo el movimiento de los ejes. La articulación ejecuta el cambio de posición independientemente del estado en que se encuentren el resto de articulaciones.

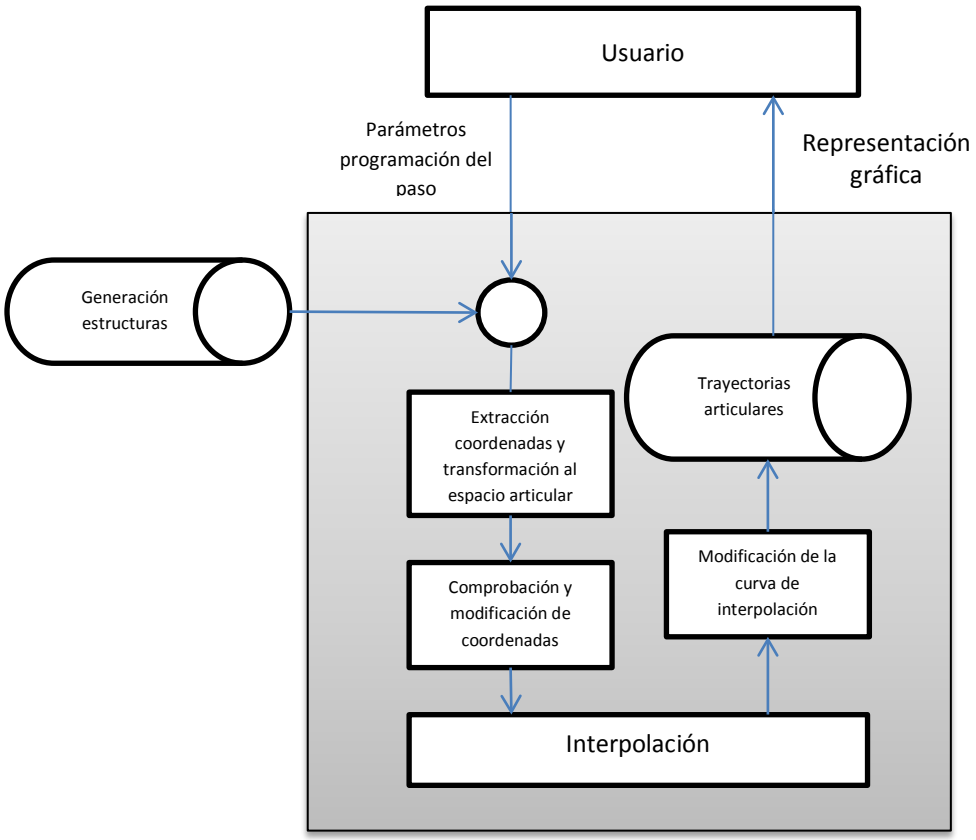


Figura 3-5. Diagrama de las etapas que forman parte de la programación de la generación de trayectorias.

En el procedimiento seguido para obtener las trayectorias de las articulaciones se ha desarrollado la programación de las siguientes etapas (Figura 3-5):

I. Crear un modelo de ambas piernas.
II. A partir de los parámetros de programación del paso, establecer un conjunto de puntos en el espacio cartesiano, transformar este conjunto de puntos cartesianos, definidos por su posición y orientación, en un conjunto de coordenadas articulares, siendo necesario el empleo de funciones cinemáticas directa e inversa para realizar las transformaciones de coordenadas entre los dos espacios. Llevar a cabo la validación de

los puntos comprobando que las coordenadas articulares están dentro del rango definido por los límites articulares y modificarlas, tomando el valor del extremo del rango sobrepasado, si se encuentran fuera de este rango.

III. En otra etapa, con el conjunto de coordenadas articulares obtenido, se lleva a cabo la interpolación.
IV. Deben corregirse aquellos tramos de las trayectorias que se encuentren fuera de los limites articulares.
V. Un último bloque se encarga de representar en una gráfica la evolución temporal de la posición de cada articulación así como la ejecución del movimiento.

3.2 Desarrollo de los bloques de programación

3.2.1 Generación de estructuras

El modelo representativo del conjunto mecánico del tren inferior consiste en la construcción de un objeto que describe las características cinemáticas de las piernas. Las características cinemáticas se derivan de las características geométricas de los eslabones y el tipo de articulaciones que los une.

3.2.1.1 Parámetros de Denavit-Hartenberg

Denavit y Hartenberg propusieron un método sistemático para describir y representar la geometría espacial de la cadena cinemática, utilizando una matriz de transformación para describir la relación espacial entre dos elementos adyacentes.

El tamaño y la forma de un eslabón de la cadena cinemática se describe con dos parámetros geométricos (Figura 3-6): a definido como la distancia más corta entre los ejes de las articulaciones que tiene el eslabón en cada extremo, y α, descrito como el ángulo entre las proyecciones de los dos ejes de las articulaciones en un plano normal al segmento a. El parámetro a se denomina longitud del eslabón y α ángulo de torsión.

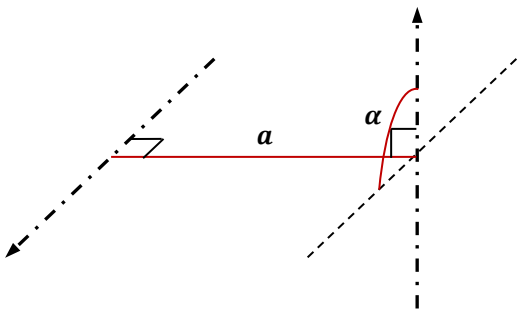


Figura 3-6. Parámetros que describen la forma y tamaño de un eslabón.

La descripción de la posición relativa entre dos elementos adyacentes de la cadena cinemática está representada por la distancia d definida como la distancia más corta entre las rectas en las que se miden las longitudes de cada eslabón y θ, ángulo que forman las proyecciones de las longitudes de los eslabones en el plano perpendicular al eje de la articulación que los une.

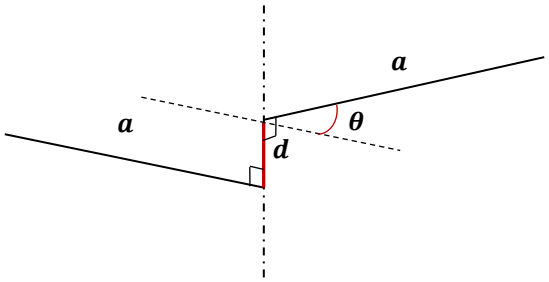


Figura 3-7. Parámetros que describen la posición relativa de dos eslabones adyacentes.

El parámetro d se conoce como longitud articular y θ se conoce como ángulo articular. Si la articulación es de revolución d es constante y θ refleja el ángulo de rotación de la articulación. Si la articulación es prismática, θ es constante y d refleja la traslación de la articulación prismática.

La forma de describir la cadena cinemática usando los parámetros anteriores se denomina notación de Denavit-Hartenberg y a los parámetros se los conoce como parámetros D-H. La tabla recoge los parámetros D-H que describen la cadena cinemática de la pierna derecha del humanoide, donde las longitudes L_1, L_2, L_3, L_W toman los valores recogidos en la Tabla 3-2 y q_i es la variable articular de la i-ésima articulación.

Tabla 3-3. Parámetros D-H de la pierna derecha del humanoide.

eslabón	tipo	θ_i	d_i	$\boldsymbol{a_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$
1	R	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$
2	R	q_2	$-L3$	$L2$	0
3	R	q_3	0	$L1$	0
4	R	q_4	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	R	$q_5 - \frac{\pi}{2}$	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	R	q_6	0	Lw	$\frac{\pi}{2}$

El *script* de nombre *generacion_estructuras* contiene la tabla de parámetros D-H de las dos cadenas cinemáticas y su ejecución almacena en memoria dos objetos que contienen la información cinemática de las estructuras de las dos piernas.

3.2.2 Selección y validación de puntos

En la generación de trayectorias es necesario especificar un conjunto de puntos, efectuar la interpolación de los puntos y llevar a cabo las oportunas correcciones para que se cumplan las restricciones de giro de las articulaciones.

Las características geométricas del escalón imponen una restricción en la selección del conjunto de puntos a interpolar. El pie, al final del paso, debe situarse a una altura igual al escalón y, en la ejecución del movimiento, el pie no puede encontrarse en la región que ocupa el escalón. Por otro lado, las restricciones de giro de las articulaciones imponen condiciones en el espacio articular a la selección de puntos.

Como la interpolación se realizará en el espacio articular es necesario aplicar transformaciones para calcular la correspondencia de unas coordenadas de un espacio en el otro. Debe resolverse el problema cinemático directo e inverso de la cadena cinemática para realizar las transformaciones entre los dos espacios.

3.2.3 Cinemática directa

El problema cinemático directo puede resolverse utilizando un método matricial por composición de las transformaciones que relacionan la localización de un sistema de referencia ligado a un eslabón respecto al sistema de referencia ligado al eslabón adyacente, de manera que permita sistematizar la obtención de las ecuaciones cinemáticas de la cadena cinemática completa.

En principio es factible utilizar cualquier conjunto de sistemas de referencia siempre que cada sistema de referencia del conjunto esté asociado a un eslabón. No obstante, escogiendo los sistemas de referencia de forma que se sitúe en el eje de la articulación el origen y alineado con el eje Z del sistema de referencia, se consigue que la transformación entre sistemas de referencia sea función de los parámetros D-H de los eslabones y se reduce el número de operaciones necesarias para calcular estas transformaciones.

Existen algoritmos que proporcionan sistemáticamente un conjunto único de sistemas de referencia asociados a los eslabones de una cadena cinemática.

El algoritmo que aparece en [48] para la selección de sistemas de referencia tiene la característica de que el sistema de referencia de cada eslabón tiene su origen en la articulación más cercana a la articulación a la base del eslabón y sitúa el eje Z en el eje de la articulación que directamente causa el movimiento de este eslabón. En la Figura 3-8 se muestra el conjunto de sistemas de referencia asignados a los eslabones de la pierna derecha del humanoide.

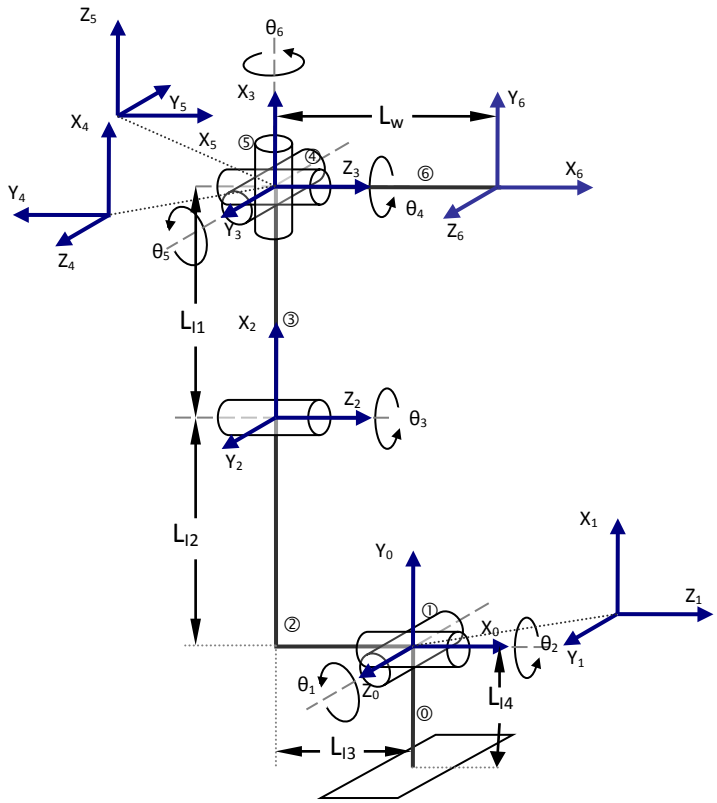


Figura 3-8. Asignación de los sistemas de referencia para la estructura de la pierna derecha.

Otro algoritmo descrito en [49] establece el origen del sistema de referencia del eslabón i-ésimo en el eje de la articulación distal del eslabón, el eje Z de este sistema de referencia corresponde con el eje de la articulación que produce el movimiento del eslabón adyacente.

La transformación homogénea que describe la relación entre el sistema de referencia Σ_i y el sistema de referencia Σ_{i-1} es

$$^{i-1}A_i = Rot(z,\theta_i) \cdot Transl(z,d_i) \cdot Transl(x,a_i) \cdot Rot(x,\alpha_i) \qquad (3.6)$$

donde $Rot(z,\theta_i)$ expresa una rotación sobre el eje Z_i de valor el ángulo θ_i, $Transl(z,d_i)$ indica una traslación en el eje Z_i de valor d_i.

Si se conocen los valores de los parámetros de los eslabones, las matrices de transformación homogénea son función de las variables articulares de las articulaciones.

Teniendo un sistema de referencia fijo Σ_f, la matriz de transformación homogénea ${}^{f}A_0$ que relaciona Σ_f con Σ_0, sistema de referencia ligado a la base del robot, ${}^{0}A_n$, calculado por la composición de transformaciones que relaciona la localización Σ_0 y Σ_n que es función de las n variables de las articulaciones $q_1, q_2, \dots, q_n$ y ${}^{n}A_E$ matriz de transformación que relaciona el sistema de referencia ligado al último eslabón con un sistema de referencia fijado en el extremo de la cadena cinemática. Entonces la relación entre el extremo de la cadena cinemática y el sistema de referencia fijo es

$$r = f_r(q) = {}^{f}A_0 \cdot {}^{0}A_n \cdot {}^{n}A_E \tag{3.7}$$

quedando resuelto el problema cinemático.

La función *cinematica_directa* implementa la resolución del problema cinemático directo. Los parámetros D-H se extraen del objeto que modela la cadena cinemática. La matriz resultante se evalúa para un vector articular Q.

3.2.4 Cinemática inversa

Considerando ahora el problema cinemático inverso, un enfoque para resolverlo es tener en cuenta la disposición de la estructura y obtener una solución por geometría o manipulando la ecuación anterior obtener una solución algebraica al problema.

Es recomendable disponer de una solución cerrada de este tipo si se desea realizar el control del robot en tiempo real. No obstante no siempre es posible dar con una solución cerrada del problema y debe recurrirse entonces a soluciones aproximadas obtenidas a partir de métodos numéricos que aporten una solución por aproximaciones sucesivas.

Para cadenas cinemáticas de más de siete o más grados de libertad hay generalmente un número infinito de soluciones para una posición y orientación factible del extremo de la cadena cinemática.

Peiper [50] generalizó que para cadenas cinemáticas que tengan tres articulaciones de revolución cuyos ejes intersecten en un punto puede obtenerse una solución cerrada del problema.

La disposición de la estructura del tren inferior humanoide cumple que las últimas tres articulaciones de cada pierna son de revolución y sus ejes intersectan en la cadera lo que permite llevar a cabo un desacoplo cinemático separando el problema cinemático en dos, uno para la posición y otro para la orientación del extremo. Dada una posición y orientación factible del extremo del robot, se han de calcular las tres primeras variables articulares que sitúen el extremo en la posición deseada. A continuación, a partir de la orientación deseada y la orientación producida por las tres primeras variables articulares se calculan las tres variables articulares restantes.

El procedimiento a seguir para obtener la solución al problema cinemático inverso de la cadena cinemática de la pierna consiste en:

- Calcular la posición de la cadera, $\boldsymbol{p}_H(q_1, q_2, q_3)$.
- Resolver el sub-problema cinemático inverso para la posición de la cadera, obteniendo las ecuaciones de las tres primeras coordenadas articulares q_1, q_2 y q_3.
- Calcular la orientación del extremo debido a las variables articulares calculadas ${}^0R_3(q_1, q_2, q_3)$.
- Obtener la solución al problema cinemático inverso de la orientación en el extremo obteniendo la expresión de la tres últimas variables articulares resolviendo el sistema de ecuaciones ${}^3R_6(q_4, q_5, q_6) = {}^0R_3 \cdot {}^TR$.

3.2.4.1 *Resolución del sub-problema cinemático inverso para la posición del extremo.*

Conocida la orientación y posición de la pelvis, definida por la matriz $R[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}]$ y el vector $\boldsymbol{p}(p_x, p_y, p_z)$, la posición de la cadera se obtiene recorriendo desde la posición del extremo una distancia igual a la longitud del último eslabón en dirección del vector $\boldsymbol{n}$,

$$\boldsymbol{p}_H = \boldsymbol{p} - l_6 \cdot \boldsymbol{n} \tag{3.8}$$

3.2.4.2 *Resolución del subproblema cinemático inverso para la posición de la cadera.*

Para resolver las ecuaciones cinemáticas del posicionamiento de la cadera se desarrolla un estudio geométrico que reduce el problema a la resolución de triángulos. La elección entre soluciones alternativas se realiza teniendo en cuenta consideraciones geométricas.

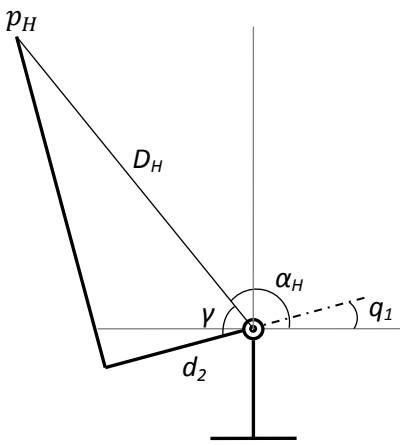


Figura 3-9. Procedimiento para el cálculo de la coordenada articular q_1.

El valor de la primera variable articular se obtiene inmediatamente como:

$$q_1 = \alpha_H + \gamma - \pi$$
$$q_1 = \arccos\left(\frac{-d_2}{D_H}\right) + \arctan\left(\frac{p_{H_y}}{p_{H_x}}\right) - \pi \tag{3.9}$$

Considerando ahora la tibia y el fémur que están situados en un plano (Figura 3-10) y haciendo uso del teorema del coseno se obtiene:

$$\left.\begin{array}{c} r^2 = p_{H_x}^2 + p_{H_y}^2 \\ r^2 + p_{H_z}^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 \cos q_3 \end{array}\right\} \cos q_3 = \frac{p_{H_x}^2 + p_{H_y}^2 + p_{H_z}^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \tag{3.10}$$

donde l_2 es la longitud del segundo eslabón y l_3 la correspondiente al tercer eslabón, se deduce el valor de q_3 en función de las componentes del vector posición de la cadera $\boldsymbol{p}_H(p_{H_x}, p_{H_y}, p_{H_z})$ respecto a un sistema de referencia situado al comienzo del segundo eslabón. El valor de la tercera coordenada articular se calcula como:

$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right). \tag{3.11}$$

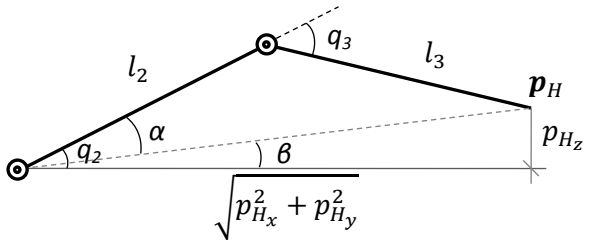


Figura 3-10. Procedimiento para el cálculo de la segunda y tercera coordenada articular.

En este caso nos interesa la configuración codo arriba, que corresponde a ángulos con valor del seno negativo. Por tanto:

$$q_3 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right). \tag{3.12}$$

El cálculo de la coordenada q_2 se realiza a partir de la diferencia entre los ángulos α y β:

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_{H_z}}{\sqrt{p_{H_X}^2 + p_{H_y}^2}}\right)$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right). \tag{3.13}$$

Finalmente:

$$q_2 = \beta - \alpha = \arctan\left(\frac{p_{H_z}}{\sqrt{p_{H_X}^2 + p_{H_y}^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right). \quad (3.14)$$

3.2.4.3 Cálculo de ${}^0R_3$ función del conjunto de coordenadas articulares q_1, q_2, q_3. .

La matriz de rotación ${}^0R_3$ se extrae de la matriz de transformación homogénea ${}^0A_3$ que relaciona el sistema de referencia ligado al tercer eslabón con el sistema de referencia ligado a la base de la cadena cinemática. Esta matriz de transformación se obtiene por composición de las matrices de transformación obtenidas para cada uno de los eslabones. Cada matriz de transformación se calcula de acuerdo a la expresión que viene dada por la ecuación (3.6).

Como lo que nos interesa es la matriz de rotación, la submatriz de rotación de la matriz ${}^{i-1}A_i$ podrá expresarse en forma matricial como:

$${}^{i-1}R_i = Rot(z, \theta_i) \cdot Rot(x, \alpha_i) \quad (3.15)$$

Pudiendo obtenerse ${}^0R_3$ multiplicando las matrices de rotación,

$${}^0R_3 = {}^0R_1 \cdot {}^1R_2 \cdot {}^2R_3 \quad (3.16)$$

Teniendo en cuenta los valores de θ_i y α_i obtenemos la rotación producida en la cadera por las tres primeras coordenadas articulares,

$${}^0R_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3) & -\frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3) & \cos q_1 \\ \frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3) & \frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3) & \sin q_1 \\ \sin(q_2+q_3) & \cos(q_2+q_3) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.4.4 Obtención de las tres últimas coordenadas articulares

La matriz que define la orientación del extremo de la cadena cinemática se define como:

$${}^0R_6 = [\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{a}] = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Esta matriz se puede descomponer en dos matrices de rotación ${}^0R_6 = {}^0R_3 \cdot {}^3R_6$ siendo ya conocida la expresión de ${}^0R_3$ y también la orientación que debe tener el extremo de la cadena cinemática ${}^0R_6$.

Por un lado podemos expresar las componentes de ${}^3R_6$ en función de las coordenadas articulares q_4, q_5 y q_6:

$$ {}^3R_6 = \begin{pmatrix} \cos q_4 \sin q_5 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_6 & \cos q_4 \cos q_5 & \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \sin q_4 \cos q_6 \\ \sin q_4 \sin q_5 \cos q_6 - \cos q_4 \sin q_6 & \sin q_4 \cos q_5 & \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 + \cos q_4 \cos q_6 \\ \cos q_5 \cos q_6 & -\sin q_5 & \cos q_5 \sin q_6 \end{pmatrix} \quad (3.19) $$

y la descomposición en dos rotaciones nos permite también expresarla en función de las coordenadas articulares q_1, q_2, q_3 y las componentes de los vectores $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{o}$ y $\boldsymbol{a}$

$$ {}^3R_6(1,1) = \left(-\frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3)\right)\cdot n_x + \left(\frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3)\right)\cdot n_y + \sin(q_2+q_3)\cdot n_z $$

$$ {}^3R_6(1,2) = \left(-\frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3)\right)\cdot o_x + \left(\frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3)\right)\cdot o_y + \sin(q_2+q_3)\cdot o_z $$

$$ {}^3R_6(1,3) = \left(-\frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3)\right)\cdot a_x + \left(\frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3)\right)\cdot a_y + \sin(q_2+q_3)\cdot a_z $$

$$ {}^3R_6(2,1) = \left(-\frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3)\right)\cdot n_x + \left(\frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3)\right)\cdot n_y + \cos(q_2+q_3)\cdot n_z $$

$$ {}^3R_6(2,2) = \left(-\frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3)\right)\cdot o_x + \left(\frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3)\right)\cdot o_y + \cos(q_2+q_3)\cdot o_z $$

$$ {}^3R_6(2,3) = \left(-\frac{1}{2}\cos(q_1+q_2+q_3) + \frac{1}{2}\cos(q_1-q_2-q_3)\right)\cdot a_x + \left(\frac{1}{2}\sin(q_1-q_2-q_3) - \frac{1}{2}\sin(q_1+q_2+q_3)\right)\cdot a_y + \cos(q_2+q_3)\cdot a_z $$

$$ {}^3R_6(3,1) = \cos q1 \cdot n_x + \sin q_1 \cdot n_y $$

$$ {}^3R_6(3,2) = \cos q1 \cdot o_x + \sin q_1 \cdot o_y $$

$$ {}^3R_6(3,3) = \cos q1 \cdot a_x + \sin q_1 \cdot a_y $$

De este sistema de ecuaciones obtenemos las expresiones de las coordenadas articulares que nos faltan realizando las siguientes operaciones sobre la última expresión de la matriz ${}^3R_6$:

$$ q_4 = \arctan\left(\frac{{}^3R_6(2,2)}{{}^3R_6(1,2)}\right) $$

$$ q_5 = \operatorname{asin}(-{}^3R_6(3,2)) \quad (3.20) $$

$$ q_6 = \arctan\left(\frac{{}^3R_6(3,3)}{{}^3R_6(3,1)}\right). $$

La función *cinemática_inversa* implementa la solución al problema cinemático inverso tomando del objeto que representa la cadena cinemática los parámetros D-H de los eslabones, y evaluando la solución para una matriz de transformación T determinada.

3.2.5 Interpolación

El control cinemático punto a punto requiere suministrar al control dinámico con el muestreo de la posición de referencia de las articulaciones. Es necesario disponer de una función que proporcione estos puntos de unas trayectorias de la que solo disponemos de los puntos de interpolación.

Para cada articulación disponemos de la posición de referencia en que se encuentra la articulación en unos valores de tiempo dados. Se puede calcular una función que pase por todas las posiciones.

Dependiendo del tipo de interpolación, esta puede ser global, si se interpola todo el conjunto de posiciones con una única función, o local, si se divide el intervalo temporal en subintervalos. La selección del tipo de función de interpolación responde a motivos técnicos como exigencia de continuidad de la función, economía de cálculo, etc. Debido a limitaciones impuestas por la naturaleza de los drivers es conveniente añadir restricciones en la velocidad y aceleración de paso entre puntos considerando al menos la continuidad en la primera derivada de la función de interpolación para asegurar la suavidad de la trayectoria.

3.2.5.1 Función global de interpolación

Encontrar una función que interpole el conjunto de nodos supone que a la hora de alimentar al control dinámico con la posición de referencia de las articulaciones sea tan sencillo como evaluar la función en el tiempo dado. La función interpoladora dependiendo del tipo de ajuste que se desee realizar podría ser un polinomio, un polinomio trigonométrico (series de Fourier), etc.

Si se trata de un polinomio (en el proyecto nos centramos en la interpolación por polinomios), si se aplican un conjunto de condiciones de interpolación se obtendrá un sistema lineal de ecuaciones que permiten calcular los coeficientes del polinomio interpolador, conocido como polinomio interpolador de Lagrange, cuyo grado será una unidad menor al número de ecuaciones del sistema. La existencia de este polinomio interpolador está garantizada si en el conjunto de valores del vector temporal no hay tiempos repetidos y además se asegura que existe un único polinomio que interpola el conjunto de posiciones articulares. Así, para un par de valores articulares tendremos como función de interpolación una recta, y según se vayan agregando nodos de interpolación aumentará el grado del polinomio.

Una forma eficiente de representar el polinomio interpolador de Lagrange es la fórmula de las diferencias divididas de Newton. Una ventaja de este método es que permite eliminar o añadir nodos de interpolación sin tener que recalcular todos los coeficientes del polinomio, ya que el polinomio interpolador para $n+1$ nodos de interpolación $\mathrm{P_n}$ de grado n se representa de la siguiente manera:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + C \tag{3.21}$$

Siendo $P_{n-1}(x)$ el polinomio para los n primeros nodos de interpolación de grado $n-1$ y C un polinomio de grado n del que solo se requiere calcular un coeficiente.

La expresión del polinomio calculado por diferencias divididas es,

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_i) \tag{3.22}$$

El vector de coeficientes d se calcula aplicando el siguiente algoritmo,

for $i = 0,1, \dots, n$ **do**

$d_i \leftarrow f(x_i)$

end

for $j = 0,1, \dots, n$ **do**

for $i = j, j+1, \dots, n$ **do**

$d_i \leftarrow (d_i - d_{i-1})/(x_i - x_{i-j})$

end

end.

Si se proporciona un elevado número de nodos articulares validados equiespaciados en el tiempo, podemos encontrarnos con la sorpresa de que el polinomio interpolador de Lagrange efectúa una serie de oscilaciones en los extremos conocido como efecto de Runge, saliéndose de los limites articulares.

En la siguiente figura se muestra una función de interpolación polinomial en el que queda patente el efecto de Runge en los extremos del intervalo.

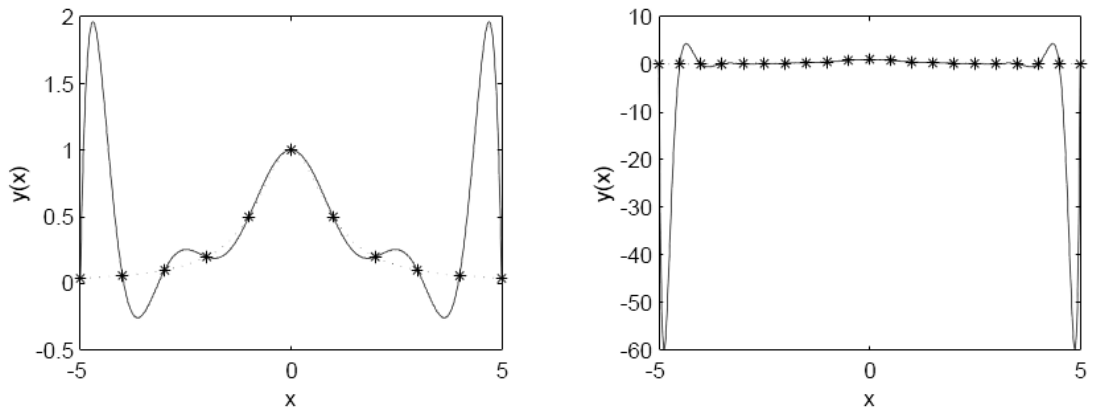


Figura 3-11. Ilustración del efecto de Runge. A la izquierda interpolación de la función $1/(1+\mathrm{x}^2)$, conocida como función de Runge, con 11 nodos equiespaciados en el intervalo [-5, 5], y a la derecha con la misma función interpolada con 22 nodos equiespaciados en el mismo intervalo.

Sería posible minimizar este efecto oscilatorio jugando con la elección de los valores de la abscisa de los nodos de interpolación y escogiendo los polinomios de interpolación de Lagrange que minimicen la norma máximo $\|\cdot\|_\infty$ del error del polinomio con la función de la que provienen los datos, que fue resuelto por *Tchevbyshev*, pero que en nuestro caso al ser una función tabulada es imposible de estimar este error y las abscisas de los nodos ya vienen definidas previamente.

3.2.5.2 *Interpolación lineal con enlaces parabólicos*

Para atenuar las oscilaciones de la función de interpolación si se considera la función $\|P'(x)\|_2$ como un indicador de los que oscila la función interpoladora deberíamos encontrar la función que minimice:

$$\|P'(x)\|_2 = \left(\int_a^b \left(P'(x)\right)^2\right)^{1/2} \tag{3.23}$$

De todas las funciones continuas, la interpolación que la minimiza es la unión de los nodos con una línea recta. Cada segmento entre dos puntos conocidos se puede calcular de forma independiente (Figura 3-12).

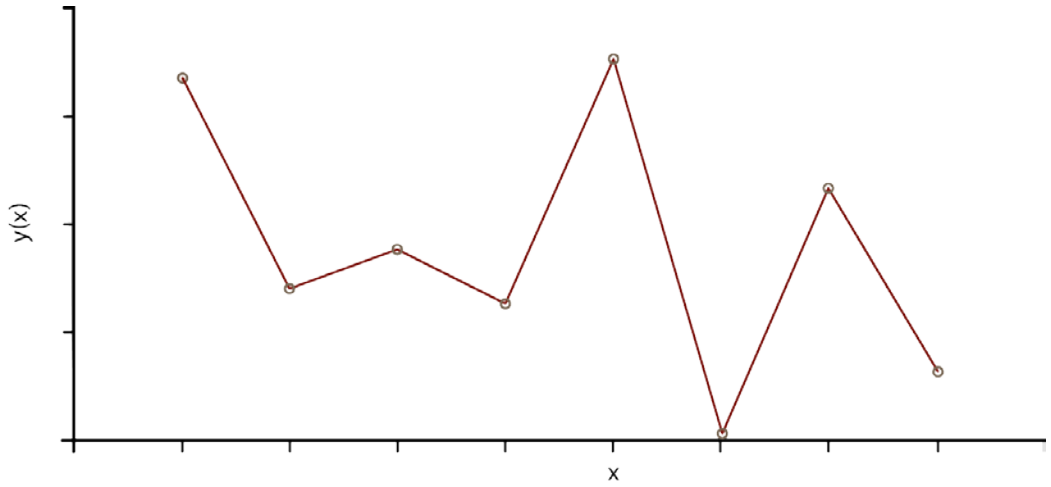


Figura 3-12. Ejemplo de interpolación lineal.

No obstante, de forma general, con esta función de interpolación perdemos la continuidad de la primera derivada.

Para conseguir la continuidad en la primera derivada y una transición más suave de la curva de interpolación, se emplean enlaces parabólicos, cuyo desarrollo está descrito en [47]. La solución del enlace parabólico escogida es generalmente simétrica respecto al punto medio de interpolación entre dos puntos conocidos. La función de interpolación en cada subintervalo está compuesta por una parte lineal unida a dos funciones parabólicas que interpolan los extremos del subintervalo (Figura 3-13).

Para obtener una curva de interpolación deben plantearse las restricciones del enlace. La velocidad del tramo lineal debe ser igual a la del enlace parabólico en la unión de ambas curvas.

Se verifica:

$$p'' x_b = \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} \tag{3.24}$$

Siendo (x_b, y_b) el punto de enlace de la primera parábola con el tramo lineal y p'' la derivada segunda en el tramo parabólico, que es constante en este tramo de curva.

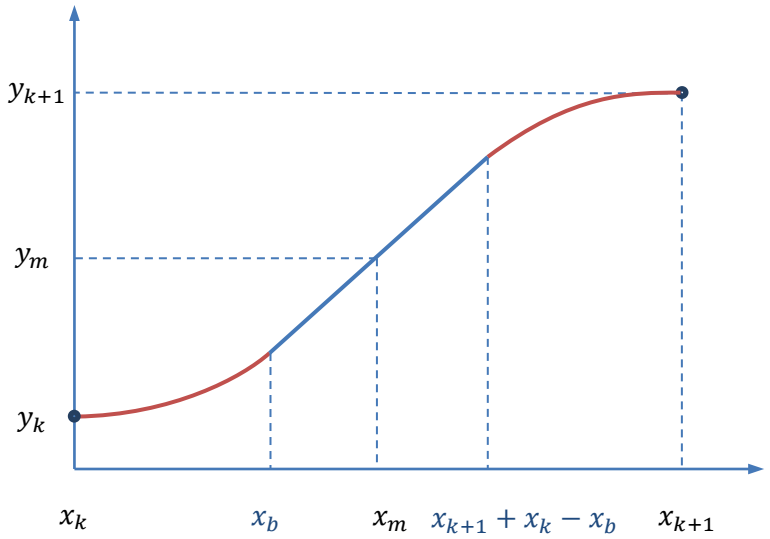


Figura 3-13. Interpolación lineal con enlaces parabólicos.

La ecuación del tramo parabólico para $x_k < x < x_b$ es:

$$P(x) = y_k + \frac{1}{2} p'' x^2 \tag{3.25}$$

Sustituyendo $x_m = \frac{x_{k+1}+x_k}{2}$ y (3.25) en (3.24), y teniendo en cuenta por la simetría se verifica que $y_m - y_k = \frac{y_{k+1}-y_k}{2}$, se llega a:

$$p'' x_b^2 - p''(x_{k+1} + x_k) x_b + (y_{k+1} - y_k) = 0 \tag{3.26}$$

Dados $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$ debe escogerse p'' y x_b^2 que satisfagan la ecuación anterior. Generalmente se escoge un valor de p''obteniendo x_b despejando de la ecuación anterior,

$$x_b = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} - \frac{\sqrt{p''^2 (x_{k+1} + x_k)^2 - 4p''(y_{k+1} - y_k)}}{2p''} \tag{3.27}$$

para lo que habrá que tener en cuenta la restricción a la hora de escoger el valor de la segunda derivada:

$$p'' \geq 4\frac{y_{k+1} - y_k}{(x_{k+1} + x_k)^2} \tag{3.28}$$

Si se cumple la igualdad en la ecuación (10.5) la sección lineal tendrá longitud cero por lo que la curva de interpolación estará compuesta por dos enlaces parabólicos conectados.

La conexión de las curvas obtenidas en la interpolación de cada par de nodos proporciona una curva que pasa por los nodos de interpolación y asegura la continuidad de por lo menos la primera derivada. Se hace referencia en [47] a un método de interpolación lineal parabólico en tiempo real en el que las pendientes de los segmentos lineales corresponden a los que se obtendrían en la interpolación lineal entre los nodos de paso y en el que los enlaces parabólicos aproximan la curva a los nodos de interpolación sin pasar por ellos. Un desarrollo del código de ejecución de este método de interpolación puede encontrarse en la biblioteca desarrollada por Maza Alcañiz [51].

3.2.5.3 Interpolación con funciones spline

Una función *spline* de grado k está formada por polinomios de grado $\leq k$ entre nodos de interpolación y tiene derivada de orden $k - 1$ continua en el intervalo de interpolación. Así la interpolación lineal sería una función *spline* de grado 1. Algunas de las técnicas de interpolación más efectivas están basadas en polinomios cúbicos a trozos pues mantienen la continuidad al menos hasta la segunda derivada. En la determinación de los polinomios que componen la función interpoladora están involucrados los siguientes términos:

La longitud del subintervalo, que viene dado por

$$h_k = x_{k+1} - x_k. \tag{3.29}$$

La variable local,

$$s = x - x_k. \tag{3.30}$$

La primera diferencia dividida,

$$\delta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}. \tag{3.31}$$

Y la pendiente de la interpolación en x_k,

$$d_k = P'(x_k) \tag{3.32}$$

La función polinómica cúbica de interpolación expresada en términos de las variables locales $s = x - x_k$ y $h = h_k$:

$$P(x) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3} y_{k+1} + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3} y_k + \frac{s^2(s-h)}{h^2} d_{k+1} + \frac{s(s-h)^2}{h^2} d_k \tag{3.33}$$

satisface cuatro condiciones de interpolación, dos del valor de la función y dos en la derivada en los nodos de interpolación:

$$\begin{aligned} P(x_k) = y_k;\ \ P(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ P'(x_k) = d_k;\ \ P'(x_{k+1}) = d_{k+1} \end{aligned} \tag{3.34}$$

Si son conocidos los valores de la derivada en los nodos, la función de interpolación que cumple las condiciones de interpolación de la derivada se conoce como interpolador de Hermite.

Si no están impuestos los valores de la derivada, es necesario determinar el término de la pendiente d_k en los nodos de alguna manera.

El *spline* cúbico es un interpolador que asegura la continuidad de la segunda derivada de $P(x)$. En el subintervalo k-ésimo la segunda derivada es una función lineal de $s = x - x_k$:

$$P''(x) = \frac{(6h - 12s)\delta_k + (6s - 2h)d_{k+1} + (6s - 4h)d_k}{h^2} \tag{3.35}$$

En el intervalo k-ésimo, en el nodo de interpolación $x = x_k$, $s = 0$ y

$$P_k''(x_k) = \frac{6\delta_k - 2d_{k+1} - 4d_k}{h_k}. \tag{3.36}$$

En el intervalo $k - 1$, en el nodo de interpolación $x = x_k$, $s = 0$ y

$$P_{k-1}''(x_k) = \frac{-6\delta_{k-1} + 4d_k + 2d_{k-1}}{h_{k-1}}. \tag{3.37}$$

Como el *spline* requiere que la segunda derivada sea continua en $x = x_k$,

$$P_k''(x_k) = P_{k-1}''(x_k) \tag{3.38}$$

para $k = 2{:}\, n - 1$. Nos lleva a la condición:

$$h_k d_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)d_k + h_{k-1} d_{k+1} = 3(h_k \delta_{k-1} + h_{k-1}\delta_k). \tag{3.39}$$

Lo que da lugar a un sistema de ecuaciones indeterminado $A\ d = r$ de $n - 2$ ecuaciones,

$$A = \begin{pmatrix} h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\ & h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$r = \begin{pmatrix} 3(h_2\delta_1 + h_1\delta_2) \\ 3(h_3\delta_2 + h_2\delta_3) \\ \vdots \\ 3(h_{n-1}\delta_{n-2} + h_{n-2}\delta_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Se puede llegar a un sistema de ecuaciones determinado:

- Imponiendo condiciones a las pendientes d_1, d_n en los nodos extremos x_1, x_n.
- Utilizando el mismo polinomio en los subintervalos 1 y 2, así como para los subintervalos $n-1$ y n. Para lo que deben cumplirse las condiciones:

$$s'''(x_2^-) = s'''(x_2^+) \text{ y}$$
$$s'''(x_{n-1}^-) = s'''(x_{n-1}^+) \quad (3.43)$$

  estrategia conocida como *not a knot ,* a la postre la opción más popular.

Conseguimos interpolar el conjunto de nodos articulares con polinomios cúbicos, asegurando la continuidad hasta la segunda derivada.

En cuanto a la oscilación de la función interpoladora, comparando la interpolación de nodos con *splines* y la interpolación con un polinomio de interpolación de Lagrange es evidente la reducción de oscilaciones en los extremos de interpolación. Sin embargo, se hace patente un efecto *ringing* en la curva de interpolación en puntos de paso consecutivos cuando mantienen constante la ordenada y la curva de interpolación viene de un flanco de subida o bajada (Figura 3-14).

En la Figura 3-14 se observa el resultado de aplicar la interpolación con *splines* de grado 3, en color azul, a un conjunto de nodos, señalados con círculos negros en la figura:

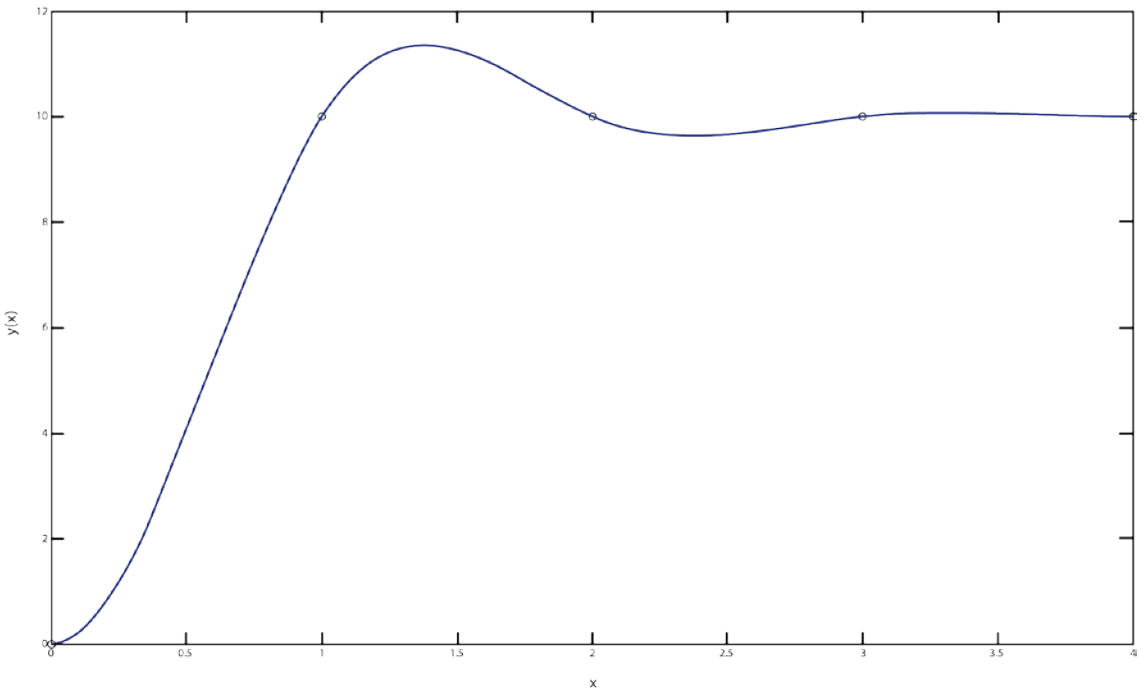


Figura 3-14. Efecto de *ringing* en una interpolación por *splines*.

3.2.5.4 Interpolador cúbico monótono

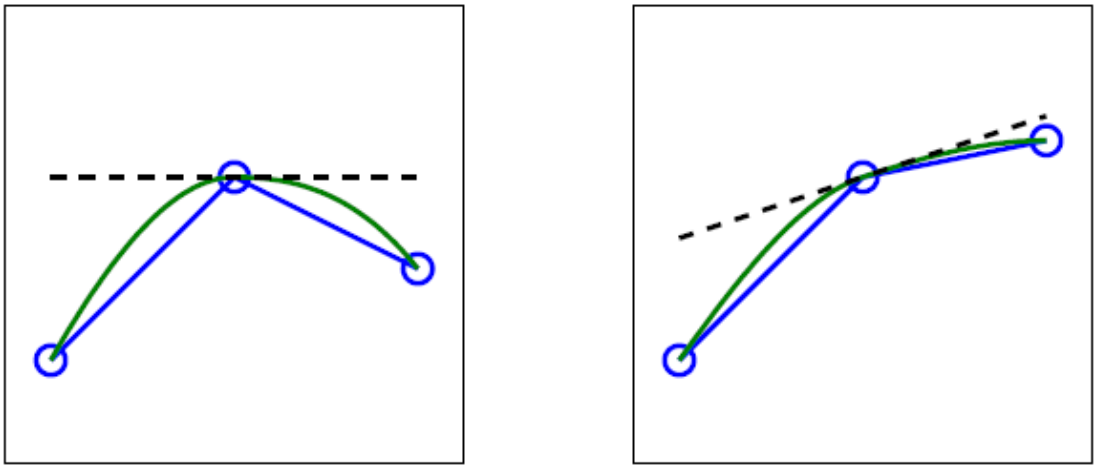
La idea al desarrollar este interpolador en el proyecto es, aprovechando el desarrollo de la interpolación con *splines*, de alguna forma asegurar que la función de interpolación no reproduzca el efecto de *ringing* y se encuentre siempre dentro de los límites articulares. La manera de conseguir este fin consiste en escoger las pendientes en los nodos que aseguren que la función interpoladora sea monótona donde los datos presenten monotonicidad y un extremo local donde los datos sean extremos locales. Como hablamos de definir la pendiente de la curva entre los puntos, empleamos la función de interpolación de Hermite, escogiendo la pendiente de la siguiente manera:

Si δ_k y δ_{k-1} tienen signos contrarios o si alguno de los dos es cero, x_k es mínimo o máximo local discreto, entonces se escoge

$$d_k = 0 \tag{3.44}$$

Si δ_k y δ_{k-1} tienen el mismo signo y los dos intervalos tienen la misma longitud, se escoge d_k como la media armónica de las pendientes discretas

$$\frac{1}{d_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_{k-1}} + \frac{1}{\delta_k}\right) \tag{3.45}$$



(a) (b)

Figura 3-15. Selección de pendientes (a) un nodo es máximo local, (b) los nodos presentan monotonicidad [52].

Aunque ambos interpoladores son polinomios cúbicos, el *spline* tiene una primera derivada suave, mientras que la función de interpolación con polinomios monótonos tiene una derivada continua pero no se asegura que lo sea su segunda derivada. Comparando las características de este interpolador y los *splines* cúbicos pueden extraer ciertas diferencias en el resultado de la interpolación:

- Como resultado de la continuidad de la segunda derivada, la función interpoladora obtenida por *splines* es más suave.
- La función de interpolación obtenida a partir de *splines* produce un resultado más fiel si los nodos de interpolación provienen de una función.
- La función de interpolación de polinomios monótonos presenta menos oscilaciones si los datos provienen de una función que no es suave.
- Los cálculos necesarios para obtener la función de interpolación conservadora de forma son menos costosos que la obtenida a partir de *splines*.

3.2.5.5 *Interpolación con* splines *en tensión uniforme*

Una solución intermedia entre la suavidad de la curva del *spline* cúbico y los interpoladores que no tienen segunda derivada continua, son los llamados *splines* en tensión. Permite obtener una función de interpolación que varía entre la forma de una *spline* cúbico y la forma de un interpolador lineal con la modificación de un parámetro llamado tensión.

Cuando el valor del parámetro tensión tiene un valor grande la curva que pasa por los nodos tendrá una forma parecida a un *spline* de grado 1. Cuando la tensión es baja la curva de interpolación es similar al *spline* cúbico.

Este interpolador, presentado por primera vez por Schweikert [53], cumple con las siguientes propiedades:

- La función de interpolación es continua hasta la segunda derivada. $f \in \mathcal{C}^2[x_1, x_n]$
- La función pasa por los nodos de interpolación. $f(x_i) = y_i \ (0 \leq i \leq n)$.
- Las funciones que componen el *spline* en tensión son solución de cierta ecuación diferencial en el intervalo abierto (x_{k-1}, x_k). La ecuación diferencial deriva de la física de una goma elástica sometida a fuerzas laterales y tensión en sus extremos y tiene una representación del tipo:

$$f^{(4)} - \tau f'' = 0 \tag{3.46}$$

donde τ es el parámetro de tensión.

Tenemos por tanto el siguiente problema de valor en la frontera para dos puntos en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\begin{gathered} f^{(4)} - \tau f'' = 0 \\ f(x_k) = y_k \quad f(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ f''(x_k) = z_k \; f''(x_{k+1}) = z_{k+1} \end{gathered} \tag{3.47}$$

La función f que verifica las condiciones anteriores es:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{z_k \sinh\big(\tau(x_{k+1} - x)\big) + z_{k+1} \sinh\big(\tau(x - x_k)\big)}{\tau^2 \sinh(\tau h_k)} \\ & + \Big(y_k - \frac{z_k}{\tau^2}\Big)\frac{(x_{k+1} - x)}{h_k} + \Big(y_{k+1} - \frac{z_{k+1}}{\tau^2}\Big)\frac{(x - x_k)}{h_k} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Una vez cálculados los valores de z_k, se utiliza esta expresión para calcular los valores de f en el subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Para que f sea de clase C^2 debe verificarse en los extremos de los subintervalos la siguiente condición en todos los nodos intermedios:

$$f''(x_k^-) = f''(x_k^+) \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{3.49}$$

El cálculo de los coeficientes lleva a solucionar un sistema tridiagonal de ecuaciones que se puede escribir de la forma:

$$\alpha_{i-1} z_{i-1} + (\beta_{i-1} + \beta_i) z_i + \alpha_i z_{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} \quad (2 \leq i \leq n-1) \tag{3.50}$$

donde los parámetros tienen la siguientes expresiones:

$$\alpha_i = \frac{1}{h_i} - \frac{\tau}{\sinh(\tau h_i)} \tag{3.51}$$

$$\beta_i = \frac{\tau \cosh(\tau h_i)}{\sinh(\tau h_i)} - \frac{1}{h_i}$$

$$\gamma_i = \frac{\tau^2 (y_{i+1} - y_i)}{h_i}$$

Las condiciones iniciales para determinar el vector z pueden fijarse de la misma manera que se hacen en el cálculo de las *splines*. Una opción consiste en tomar $z_1 = z_n = 0$ dando lugar a que para un valor de $\tau \to 0$ obtengamos una función de interpolación similar a un *spline* cúbico natural, es decir, aquel que cumple que $P''(x_1) = P''(x_n) = 0$.

Las desventajas presentadas por este tipo de interpolador son:

- La resolución del sistema tridiagonal y la evaluación de la función supone un esfuerzo computacional elevado.
- Pueden encontrarse dificultades de estabilidad a la hora de calcular los coeficientes.
- La curvatura de la función de interpolación para un valor alto del parámetro de tensión puede suponer que físicamente sea irrealizable por la articulación.

Las siguientes figuras muestran la interpolación de un conjunto de nodos en la trayectoria de una articulación mediante las técnicas de interpolación por *splines*, mediante un interpolador cúbico preservador de forma y por *splines* en tensión uniforme. Las coordenadas articulares a interpolar son:

Tabla 3-4. Ejemplo de nodos articulares a interpolar.

t(s)	0	2	4	5	6	9	10
Q (rad)	0	0.1745	0. 1745	0.1745	0.5236	0.4470	0

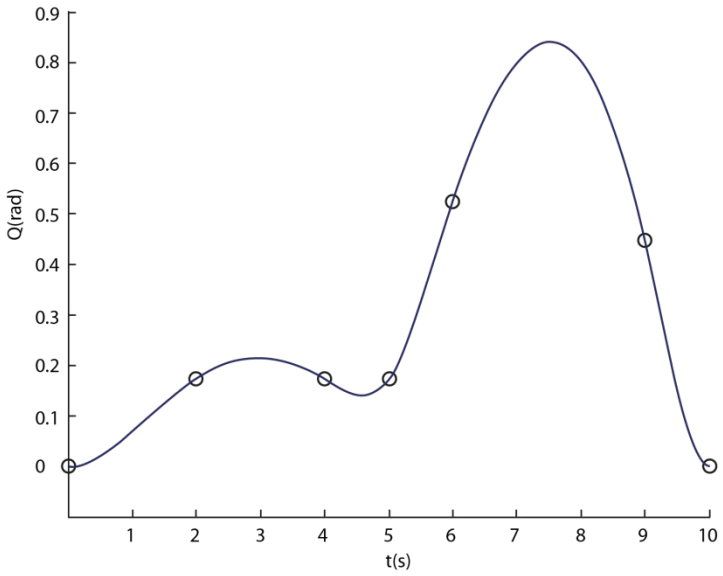


Figura 3-16. Interpolación mediante *splines* de grado 3. Se observa el efecto *ringing* en la curva de interpolación en los nodos de paso.

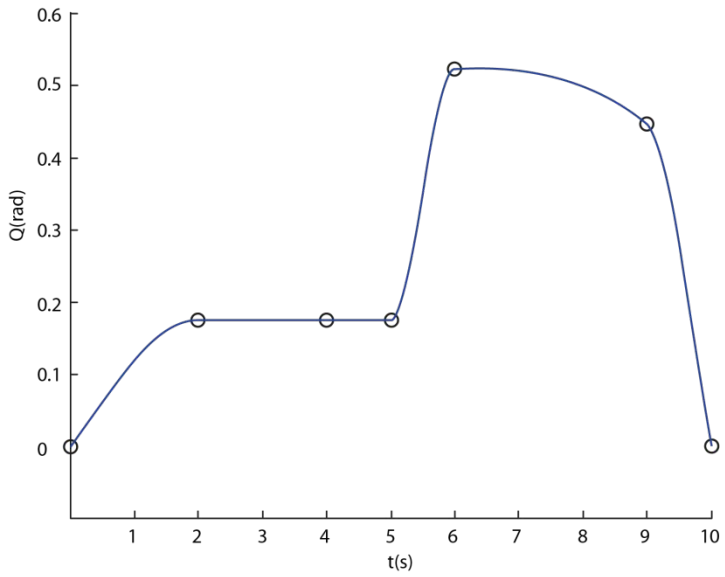


Figura 3-17. Interpolación por trozos con polinomios cúbicos monótonos. Se observa que en esta curva de interpolación no se produce el efecto mencionado.

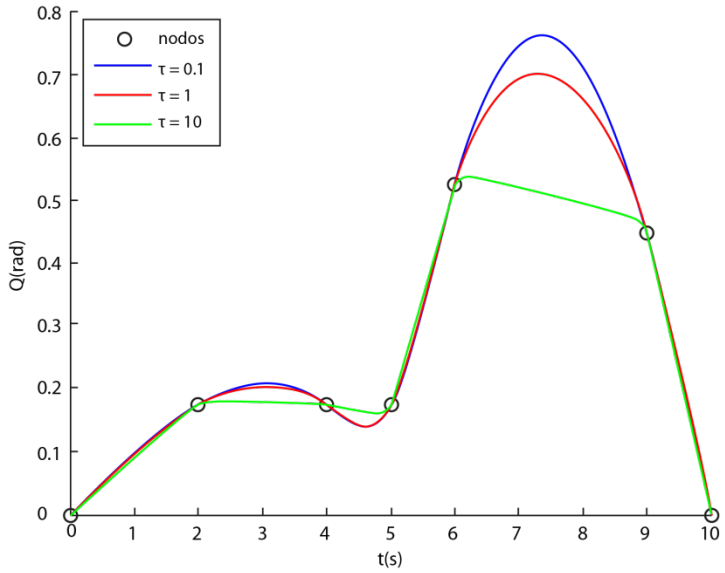


Figura 3-18. Interpolación de los nodos con *splines* en tensión con diversos valores del parámetro de tensión: $\tau = 0,1$, $\tau = 1$ y $\tau = 10$. Conforme aumenta el parámetro de tensión la función de interpolación va aproximándose a la forma que adopta un interpolador lineal.

La función *interpolacion_trayectoria* evalúa la función interpoladora para el vector de tiempos *u*. La función de interpolación es obtenida a partir del conjunto de valores articulares contenidos en el vector *y*, para los tiempos contenidos en el vector *x*. La estrategia de interpolación se escoge dando valor al parámetro *opt*. La interpolación con *splines* en tensión requiere que se introduzca un parámetro adicional de tensión.

Las funciones de interpolación implementadas son interpolaciones por trozos; dos de ellas son funciones de interpolación polinómicas de grado ≤ 3 y otra solución ha sido obtenida a partir de funciones exponenciales. La selección de la función interpoladora basadas en polinomios

está compuesta por interpolación por *splines* siguiendo la estrategia *not a knot* para la resolución del sistema tridiagonal y por otro lado la interpolación compuesta de funciones polinómicas monótonas.

3.2.6 Comprobación de límites articulares

La comprobación de límites articulares se lleva acabo para asegurar que cada una de las coordenadas articulares se encuentran en los rangos definidos por los limites articulares de la cadena cinemática donde se aplica.

La función desarrollada a parte de realizar la comprobación, modifica el valor articular si este excede alguno de los limites, tomando el valor del límite excedido (Figura 3-19).

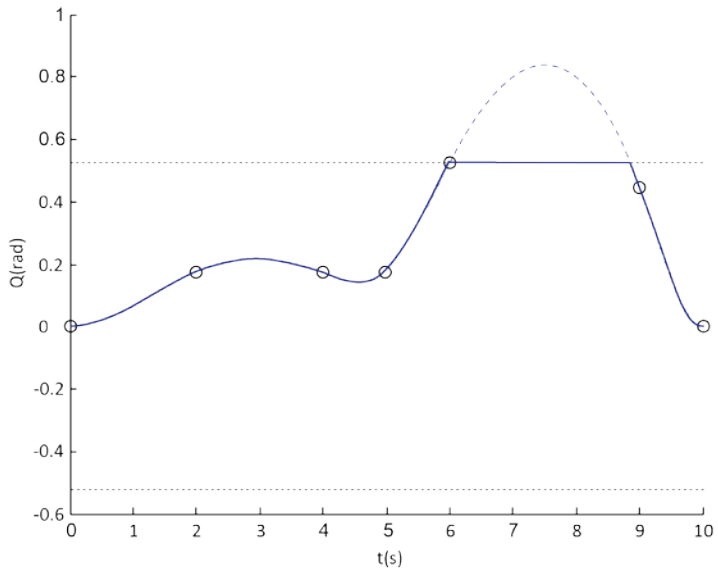


Figura 3-19. Modificación de la interpolación por el corte de la curva al superar un límite articular. La curva de interpolación está representada en línea continua, la curva previa a la comprobación en línea discontinua y los límites articulares en línea punteada.

3.2.7 Representación gráfica

La representación gráfica de las trayectorias articulares permite al usuario verificar la correcta ejecución de la interpolación de las trayectorias así como la ejecución del movimiento por parte del modelo cinemático desarrollado.

El módulo de representación gráfica lo componen tres funciones:

I. Un *script*, *plot_articulaciones*, encargada de la representación de las trayectorias articulares de las cadenas cinemáticas que modelan ambas piernas (Figura 3-20).
II. Una función, robot/plot, que representa gráficamente la postura que toma una cadena cinemática para un conjunto de valores angulares de las articulaciones (Figura 3-21).

III. Una función, *dibuja_escalera*, que representa en el espacio la escalera (Figura 3-22) con altura y profundidad definidas como parámetros de entrada de la función.

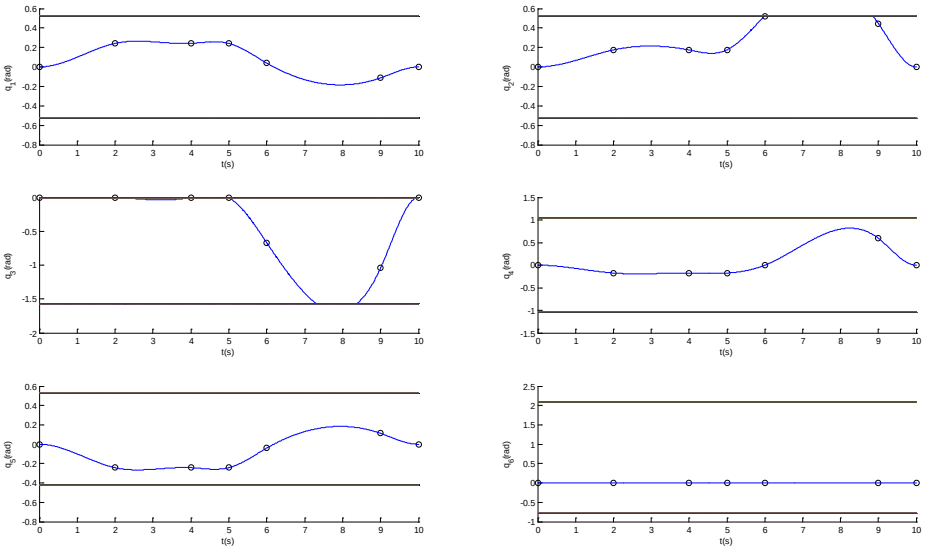


Figura 3-20. Representación de trayectorias articulares de una de las piernas, resultado de ejecutar el script *plot_articulaciones*.

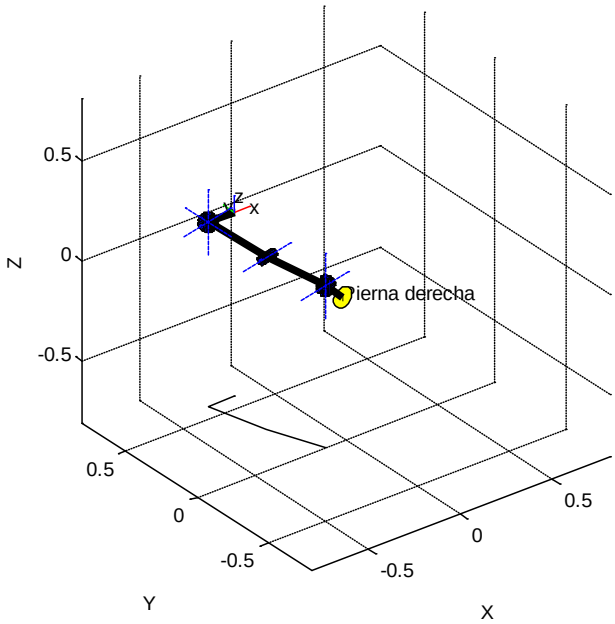


Figura 3-21. Representación de cadena cinemática de la pierna derecha tras la ejecución de la función *robot/plot*.

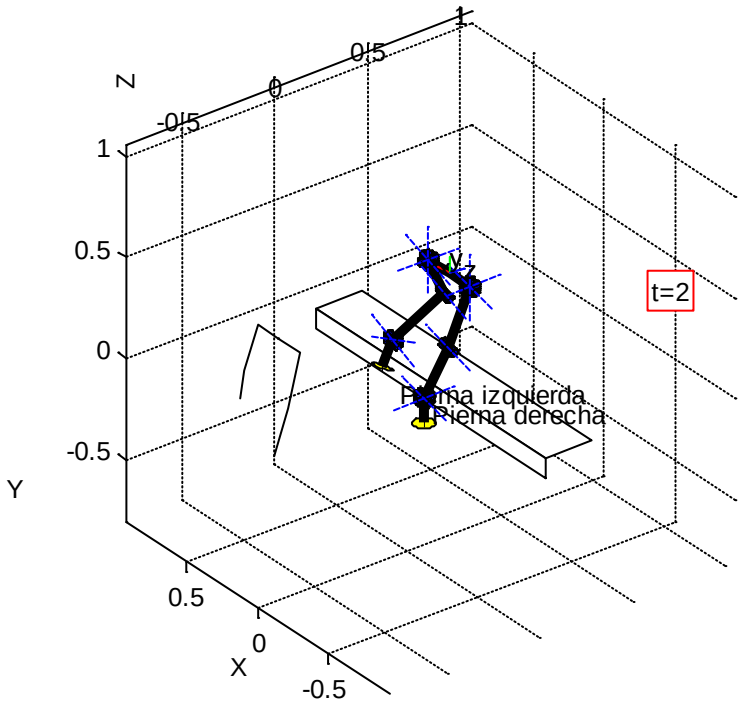


Figura 3-22. Representación del tren inferior en la ejecución de un movimiento en el instante de tiempo $t = 2$. Se observa el escalón dibujado de altura 10cm y profundidad de 25cm utilizando la función *dibuja_escalera*.

3.2.8 Trayectoria articular

Siguiendo el diagrama propuesto en la Figura 3-5, se ha desarrollado un *script* para llevar a cabo el desarrollo del control cinemático, denominado *trayectoria_articular*. El *script* comienza con la creación de las estructuras que describen las cadenas cinemáticas. A continuación se asignan los valores de los parámetros de programación del paso que quedan almacenados en una estructura.

Basándose en la programación del paso y las características de la cadenas cinemáticas, se extraen un conjunto de valores articulares para la pierna en vuelo y de apoyo, que son validados, para formar el conjunto de nodos de interpolación.

Se procede a interpolar los nodos articulares, escogiendo un método de interpolación, reasignando el valor articular de los tramos de trayectoria que superan los límites articulares.

Finalmente se muestra al usuario gráficamente la ejecución del movimiento (Figura 3-22).

4 Pruebas realizadas

En este capítulo se procede a aplicar el código desarrollado para la generación de trayectorias en la simulación del movimiento que describiría el tren inferior de TEO al subir una escalera.

Para efectuar un movimiento pueden plantearse diversas estrategias que consigan el mismo resultado, en este caso, el robot se encuentra ante un escalón sobre el que ha de situarse al final del movimiento. En este proyecto se sugieren dos estrategias para subir una escalera. Una primera forma consistiría en ir subiendo los peldaños uno a uno. El pie en vuelo inicia el movimiento saliendo de una situación de apoyo en un escalón para finalizar el movimiento realizando el apoyo un peldaño más arriba. Una segunda manera que se ha planteado sería la que describe la Figura 2-1 en la que, encontrándose el pie de apoyo en un escalón intermedio, la trayectoria del pie en vuelo parte del escalón inferior y finaliza la trayectoria en el peldaño inmediatamente superior al escalón en el que el pie de apoyo soporta el peso de la estructura.

La diferencia sustancial a la hora de definir la coordinación que siguen los pies y la cadera durante el desarrollo del movimiento está en la definición de los puntos de paso. En los apartados siguientes se explicarán las razones que llevan a escoger un determinado conjunto de puntos de paso.

4.1 Subiendo escaleras escalón a escalón

Siguiendo el procedimiento del control cinemático, en este apartado se plantea obtener las trayectorias articulares para que el tren inferior del robot TEO lleve a cabo la secuencia coordinada de movimientos correspondientes a la estrategia planteada en primer lugar.

La selección de parámetros temporales de la programación del paso tiene influencia en el tipo de estabilidad y en consideraciones cinemáticas y dinámicas de las articulaciones.

Se han escogido los siguientes parámetros temporales para todas las pruebas:

Tabla 4-1. Parámetros temporales de las pruebas realizadas

Parámetro	Valor
$\boldsymbol{T_{walk}}$ (s)	10
$\boldsymbol{T_{step}}$ (s)	5
$\boldsymbol{T_{delay}}$ (s)	1

T_{walk} es el tiempo que tarda en ejecutarse el movimiento. El tiempo escogido es propio de un movimiento para el estudio de la estabilidad estática. T_{step} es el tiempo que la pierna oscilante se mueve entre apoyo y apoyo. T_{delay} es un tiempo que se ha tomado como tiempo de aterrizaje del pie en vuelo. No se han tenido en cuenta fases de doble apoyo.

El movimiento lateral de la pelvis, si se considera que se corresponde al realizado por el centro de masas, debe alternar su posición con el cambio de los apoyos, se considera que una trayectoria adecuada sería una sinusoide, por eso se introduce un parámetro de amplitud A_{pelvis}. Se toma un valor de 0.15m de amplitud del desplazamiento lateral de la pelvis.

Parámetro	Valor
$\boldsymbol{A_{pelvis}}$ (m)	0.15

Los parámetros dimensionales del escalón son H_{foot} y L_{step} son las distancias medidas en el eje Y y Z entre apoyos consecutivos durante el desarrollo del movimiento.

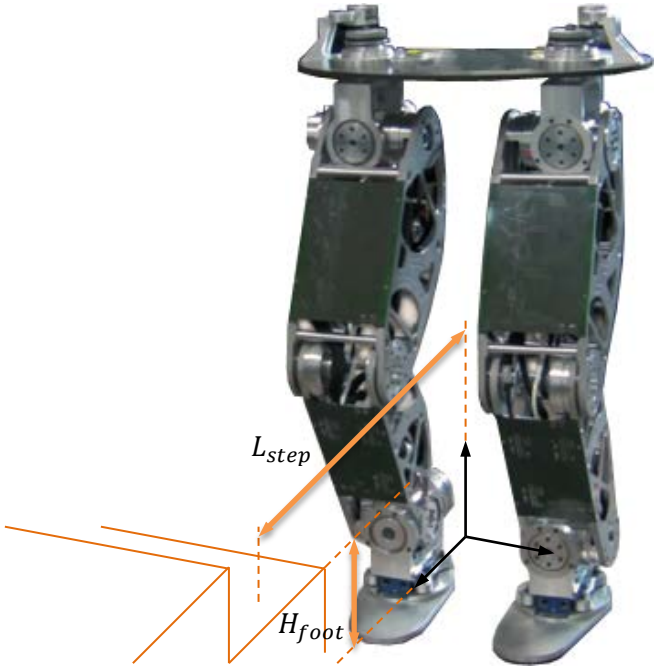


Figura 4-1. Parámetros del paso L_{step} y H_{foot}.

Para subir los escalones de uno en uno se han establecido las siguientes etapas:

El primer punto establece la postura inicial. Cada punto intermedio corresponde al final de las siguientes etapas. Se ha divido el movimiento en una primera etapa en la que se desplaza lateralmente la pelvis por encima del pie de apoyo y simultáneamente se eleva el pie en vuelo.

Una segunda etapa lleva el pie en vuelo sobre el escalón. Le sigue una etapa de aproximación del pie en vuelo al escalón hasta que establece contacto con la planta y se convierte en el apoyo de la estructura en las siguientes etapas.

Comienza una nueva etapa con la elevación de la pelvis y del pie más retrasado hasta que se supera la altura del escalón. En la siguiente etapa se sitúa el pie sobre el escalón. En una última etapa el pie en vuelo contacta con el escalón y la estructura adopta la postura inicial.

Estas etapas llevan a definir siete puntos de interpolación para la programación del movimiento de ascenso del escalón.

Selección de puntos en el espacio cartesiano

Los puntos del espacio cartesiano que se han seleccionado corresponden a las trayectorias de los pies en vuelo para evitar el obstáculo que supone el escalón durante el vuelo y en los puntos de contacto de los pies de apoyo.

El primer punto cartesiano establecido es en el tiempo medio en la trayectoria del pie en vuelo $t = T_{step}/2$. Se ha considerado que para no impactar con el escalón debe situarse el pie en una posición a una altura mayor que la del escalón a la altura de la posición del pie de apoyo en la dirección de avance, pues conocemos el punto de contacto al finalizar el vuelo, pero no la situación del escalón.

La orientación y las coordenadas cartesianas del nodo anterior se conservan en esta etapa modificando la altura del pie en este instante que se toma como $Y_{pie} = 0.025 + 1.45 \cdot H_{foot}$. El primer término es la altura que alcanza el pie cuando la altura definida del escalón es cero para compensar el descenso de la pelvis al desplazarse lateralmente.

El máximo valor de Y_{pie} estará condicionado por los limites articulares de la estructura, lo que da lugar a una altura máxima de escalón que podrá superar.

La misma altura se mantiene en el nodo previo al descenso del pie en la etapa de aproximación al punto de apoyo, en este nodo se impone un desplazamiento lateral del pie en vuelo en sentido hacia el plano sagital de la estructura para evitar que el desplazamiento lateral de la pelvis, realizado en la siguiente etapa, debido al cambio de pie apoyo, sea de gran amplitud. Al comenzar el segundo paso, en el ascenso del pie más retrasado, también se escoge como altura del pie la especificada en los nodos anteriores.

El desplazamiento lateral del pie en vuelo, al realizar el apoyo, supone que exista un desplazamiento lateral de la estructura respecto de su posición inicial por lo que para subir más escalones debe corregirse la posición lateral de la estructura con un nuevo paso.

Respecto a la cadera, no podemos establecer puntos de paso en el espacio cartesiano pues solo hemos propuesto la forma en que se desplaza lateralmente. Hacemos una estimación de la posición de la pelvis en el momento de máximo desplazamiento lateral.

Concluyendo, las coordenadas cartesianas seleccionadas para los puntos de paso quedan recogidas en la siguiente tabla.

Tabla 4-2. Expresiones de algunas de las coordenadas cartesianas de los nodos de interpolación.

Pie derecho		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$t = 0$	`estructuras{1}.base`	Orientación y posición extraída de la función de generación de estructuras
$t = T_{step} + T_{delay}$	$Y_{pie} = 0.025 + 1.45 \cdot H_{foot}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.
$t = T_{walk} - T_{delay}$	$Z_{pie} = L_{step}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Z}$ de la matriz de transformación anterior.
$t = T_{walk}$	$Y_{pie} = H_{foot}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.

Pie izquierdo		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$\boldsymbol{t = 0}$	estructuras{2}.base	Orientación y posición extraída de la función de generación de estructuras
$\boldsymbol{t = T_{step}/2}$	$\boldsymbol{Y_{pie} = 0.025 + 1.45 \cdot H_{foot}}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.
$\boldsymbol{t = T_{step} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{X_{pie} = 0}$ $\boldsymbol{Z_{pie} = L_{step}}$	Translación en el eje $\boldsymbol{X}$ y en el eje $\boldsymbol{Z}$ de la matriz de transformación anterior.
$\boldsymbol{t = T_{step}}$	$\boldsymbol{Y_{pie} = H_{foot}}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.

Cadera		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
–	$\boldsymbol{A_{pelvis} = 0.15}$	Máxima amplitud de oscilación de la cadera

Transformación de los puntos al espacio articular y selección de resto de nodos de paso en este espacio

Se lleva a cabo la transformación al espacio articular de las coordenadas cartesianas y se añaden nuevos nodos en este espacio para la interpolación. Las coordenadas de los nodos de interpolación añadidos en este espacio son proporcionales a los límites de interpolación y se ha escogido el coeficiente tras realizar ensayos con distintos valores.

Tabla 4-3. Secuencia cronológica de los nodos articulares.

Pierna derecha		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$t = 0$	`estructuras{1}.q`	
$\boldsymbol{t = T_{step}/2}$	$\boldsymbol{q_2}$: Límite superior/3 $\boldsymbol{q_3}$: Límite superior $\boldsymbol{q_1}$: Cálculo por cinemática inversa para que $\boldsymbol{X_{pelvis} \approx -0.15}$ Orientación $\boldsymbol{q_4}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_5}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_6}$: Cálculo por cinemática inversa	Se añade nodo articular en $\boldsymbol{q_2}$y $\boldsymbol{q_3}$ proporcional al límite articular.
$\boldsymbol{t = T_{step} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{q(T_{step} - T_{delay}) = q(T_{step}/2)}$	Se mantienen los valores articulares del nodo anterior
$\boldsymbol{t = T_{step}}$	$\boldsymbol{q(T_{step}) = q(T_{step} - T_{delay})}$	Se mantienen los valores articulares del nodo anterior
$\boldsymbol{t = T_{step} + T_{delay}}$	$\boldsymbol{q(T_{step} + T_{delay})}$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{walk} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{q(T_{walk} - T_{delay})}$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{walk}}$	$\boldsymbol{q_{zero}}$	

Pierna izquierda		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$t = 0$	`estructuras{2}.q`	
$\boldsymbol{t = T_{step}/2}$	$\boldsymbol{q(T_{step}/2)}$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{step} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{q(T_{step} - T_{delay})}$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{step}}$	$\boldsymbol{q(T_{step})}$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{step} + T_{delay}}$	$\boldsymbol{q_2}$: Límite superior/8 $\boldsymbol{q_3}$: Límite inferior/5 $\boldsymbol{q_1 = -q_{1,der}(T_{step}/2)}$ Orientación $\boldsymbol{q_4}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_5}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_6}$: Cálculo por cinemática inversa	Se añade nodo articular en $\boldsymbol{q_2}$y $\boldsymbol{q_3}$proporcional al límite articular. Para $\boldsymbol{q_1}$ se asigna el valor angular que se obtuvo para la variable articular de la pierna derecha en $\boldsymbol{t = T_{step}/2}$ pero en sentido de giro negativo.
$\boldsymbol{t = T_{walk} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{q_1 = q_1(T_{step} + T_{delay})}$ $\boldsymbol{q_2}$: Límite superior/7 $\boldsymbol{q_3}$: Límite inferior/5 Orientación $\boldsymbol{q_4}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_5}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_6}$: Cálculo por cinemática inversa	Se añade nodo articular en $\boldsymbol{q_2}$y $\boldsymbol{q_3}$ proporcional al límite articular.
$\boldsymbol{t = T_{walk}}$	$\boldsymbol{q_{zero}}$	

4.1.1 Curvas obtenidas para una profundidad de paso de 0.25m y altura de escalón 0.1m

Se han asignado valores a los parámetros H_{foot}, L_{step} y se obtendrán las curvas articulares para este paso de ejemplo.

Parámetro	Valor
H_{foot} (m)	0.1
L_{step}(m)	0.25

Los valores temporales de los nodos de interpolación para los valores de la Tabla 4-1 en orden cronológico son:

	t_0	$T_{step}/2$	$T_{step} - T_{delay}$	T_{step}	$T_{step} + T_{delay}$	$T_{walk} - T_{delay}$	T_{walk}
$t(s)$	0	2.5	4	5	6	9	10

Los valores articulares obtenidos de aplicar los valores de los parámetros en las expresiones de la Tabla 4-3 se muestran a continuación. Cada fila es el conjunto de valores articulares de cada nodo de interpolación. Los valores que se encuentran fuera del rango articular se muestran en rojo.

Tabla 4-4. Valores articulares obtenidos antes de la corrección por superar los límites de las articulaciones. En color rojo los valores fuera del rango articular.

Pierna derecha					
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	0	0	0	0	0
0.2420	0.1745	0	-0.1745	-0.2420	0
0.2420	0.1745	0	-0.1745	-0.2420	0
0.2420	0.1745	0	-0.1745	-0.2420	0
-0.2671	0.7265	-0.7594	0.0330	0.2671	0
-0.2671	0.4101	-0.9706	0.5605	0.2671	0
0	0	0	0	0	0

Pierna izquierda					
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	0	0	0	0	0
0.3391	1.0633	-1.5446	0.4814	-0.3391	0
0.0824	0.5125	-1.5714	1.0589	-0.0824	0
0.0707	0.3766	-1.2406	0.8640	-0.0707	0
-0.2420	0.0654	-0.3142	0.2487	0.2420	0
-0.2420	0.0748	-0.3142	0.2394	0.2420	0
0	0	0	0	0	0

Resultado de aplicar la corrección de los nodos y realizar con ellos una interpolación con los distintos métodos de interpolación estudiados obtendríamos la ley horaria de cada articulación que se representan en las siguientes gráficas.

La Figura 4-2 y la Figura 4-3 son resultado de aplicar la interpolación con el interpolador cúbico monótono. Se puede observar que la curva de interpolación de cada articulación queda dentro de los límites articulares y no necesita corrección.

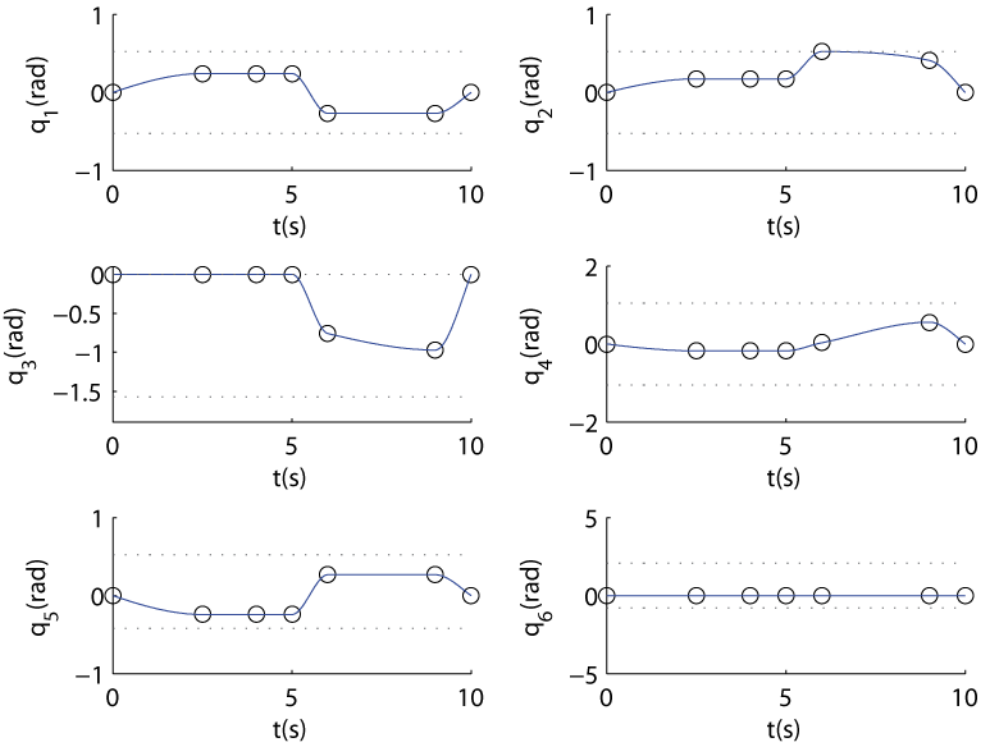


Figura 4-2. Interpolación de trayectorias de las articulaciones de la pierna derecha. Interpolación con polinomios cúbicos monótonos.

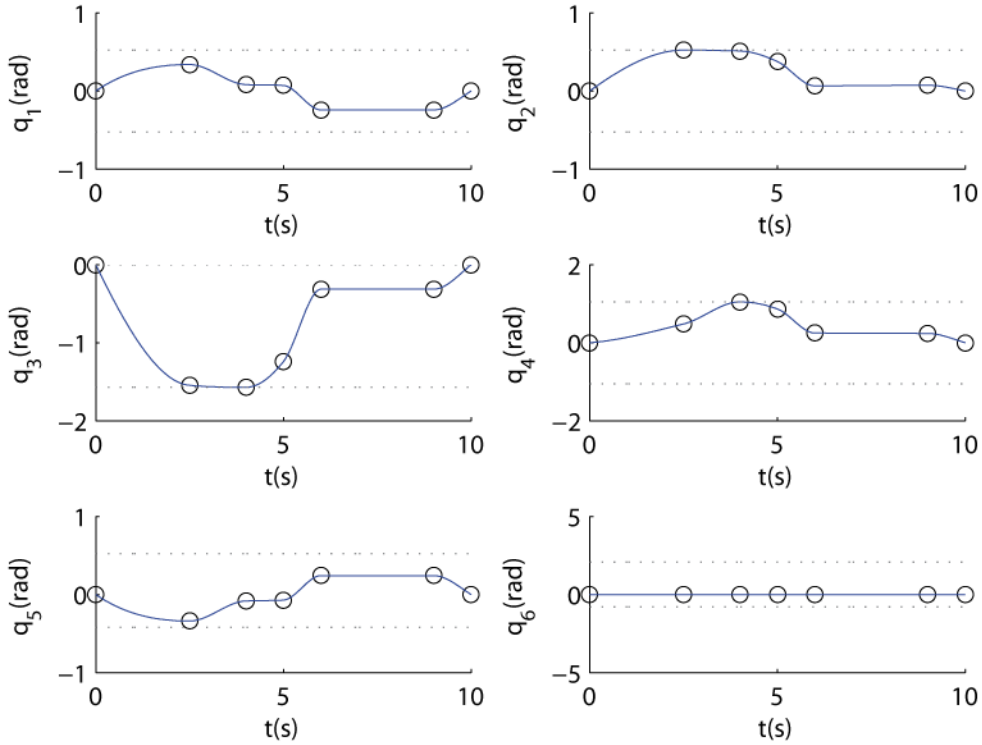


Figura 4-3. Interpolación de trayectorias de las articulaciones de la pierna izquierda. Interpolación con polinomios cúbicos monótonos.

La interpolación mediantes *splines* cúbicos de los nodos articulares da como resultado las curvas articulares mostradas en la Figura 4-4 y la Figura 4-5. En las figuras se observa que la curva de interpolación entre ciertos nodos supera los límites articulares. La curva resultante recorta estos tramos sustituyéndolos por el limite articular. Como resultado de este recorte, se pierde la continuidad de las derivadas.

La interpolación con el *spline* de tensión (Figura 4-6 y Figura 4-7) no acaba de resolver este problema, aunque el efecto de las oscilaciones del *spline* se ha atenuado, la curva de interpolación en puntos próximos a nodos de interpolación que en la corrección se les asignó el valor del límite articular de interpolación supera los límites articulares.

Se propone que para la aplicación de este último método de interpolación se modifique la función de comprobación y modificación de los valores articulares en nodos intermedios, asignando un valor límite inferior al límite articular, para que la interpolación tenga cierto margen donde desarrollar la curvatura.

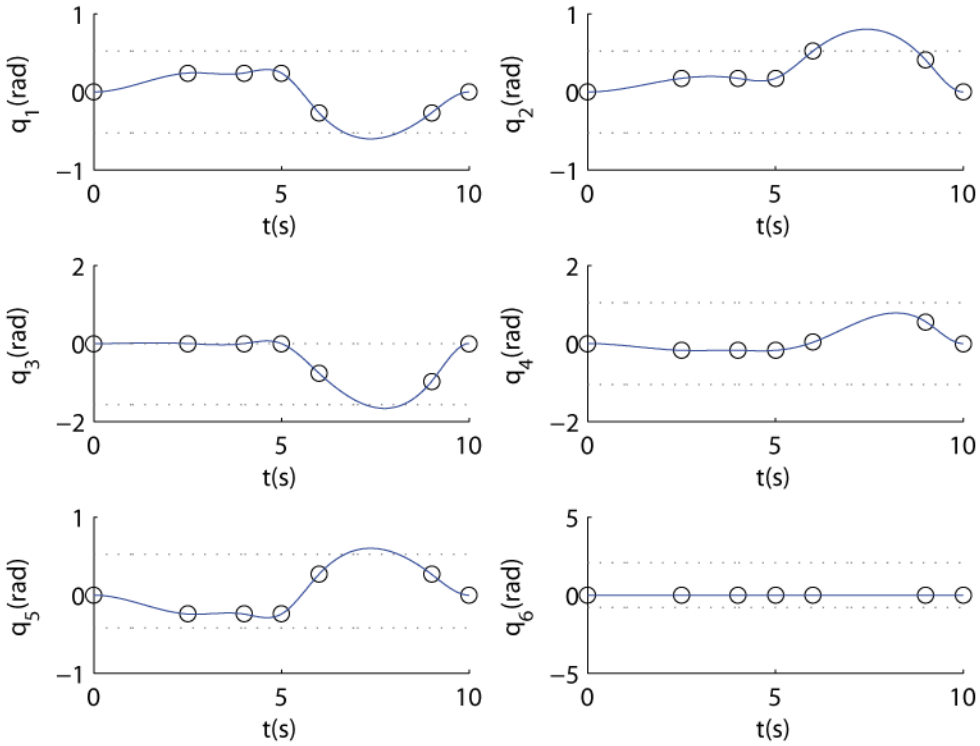


Figura 4-4. Interpolación de trayectorias de las articulaciones de la pierna derecha. Interpolación con *splines* cúbicos.

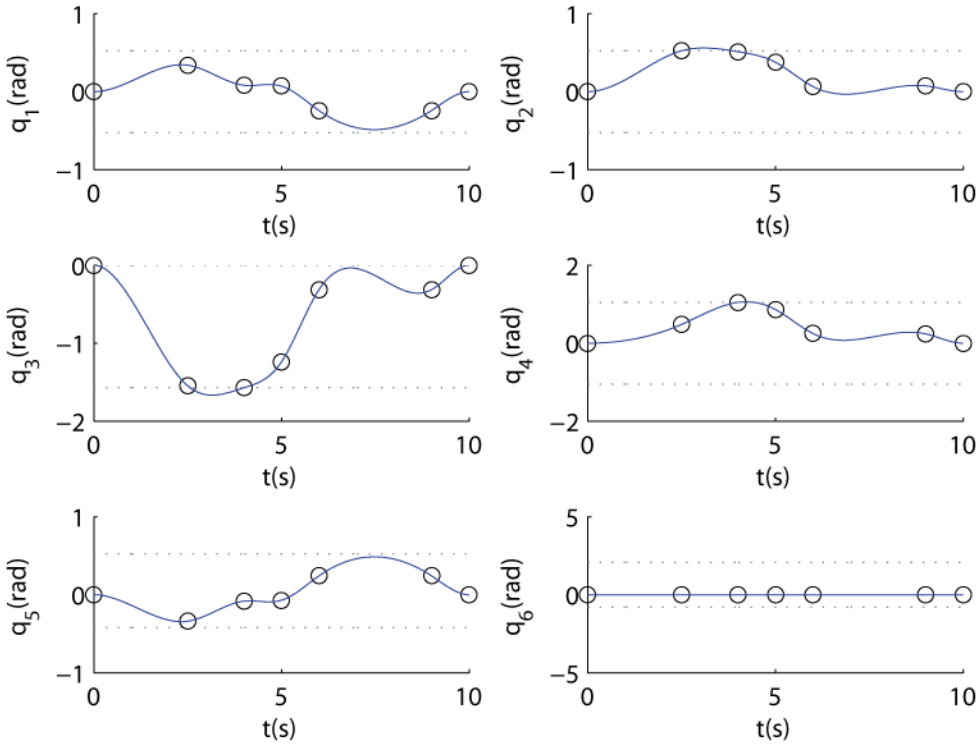


Figura 4-5. Interpolación de trayectorias de las articulaciones de la pierna izquierda. Interpolación con *splines* cúbicos.

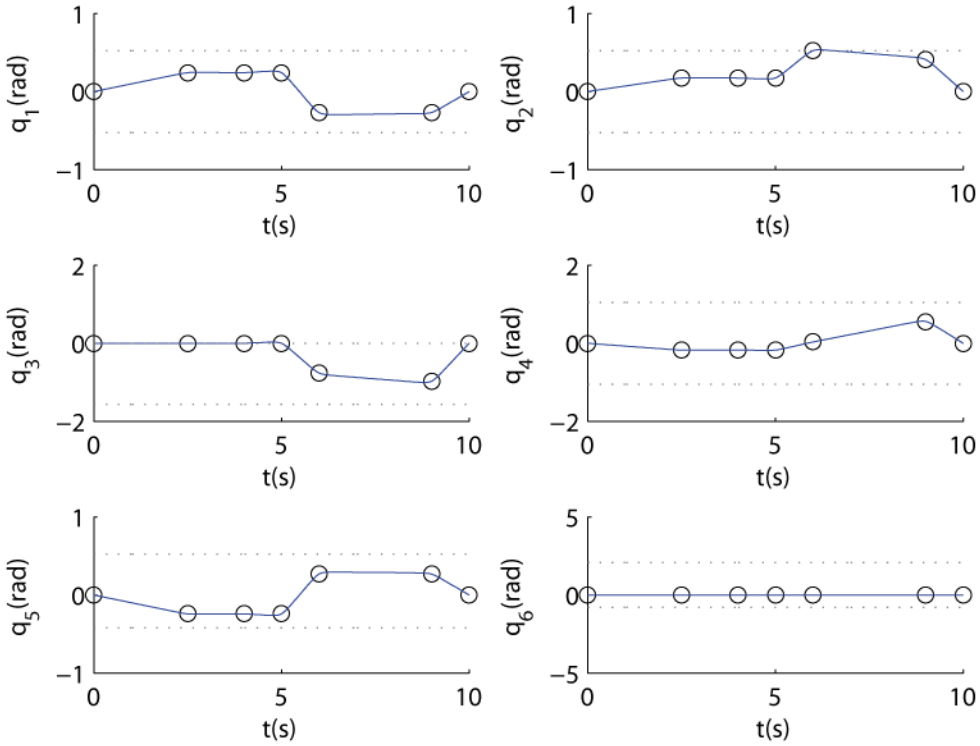


Figura 4-6. Interpolación de trayectorias de las articulaciones de la pierna derecha. Interpolación con *splines* en tensión con parámetro de tensión $\tau = 10$.

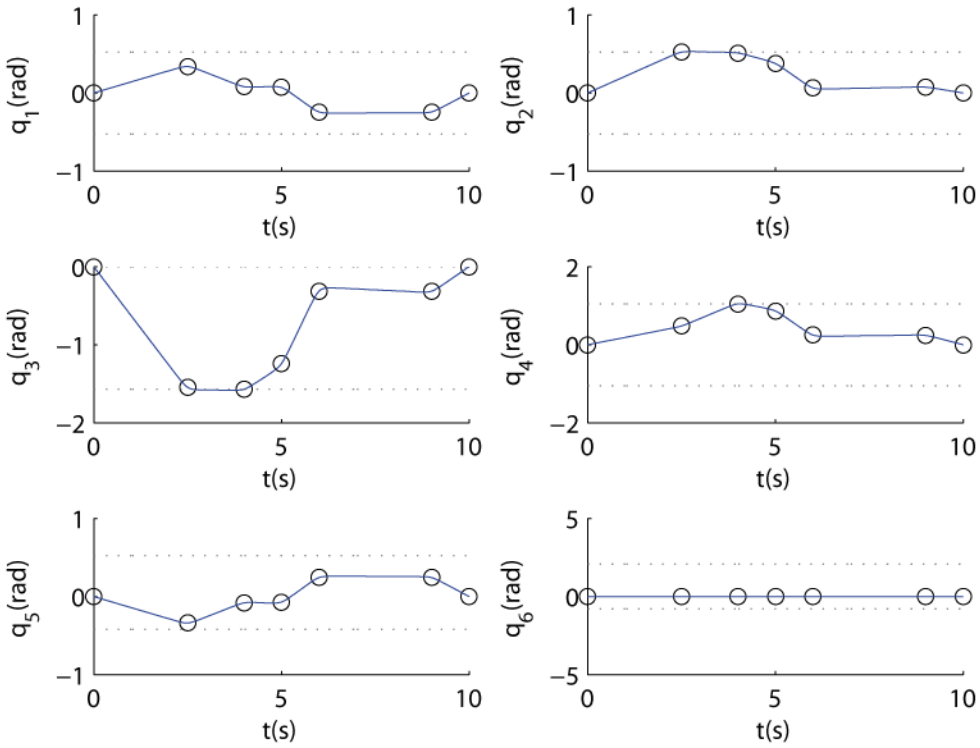


Figura 4-7. Interpolación de trayectorias de las articulaciones de la pierna izquierda. Interpolación con *splines* en tensión con parámetro de tensión $\tau = 10$.

Velocidad articular

La velocidad angular de las articulaciones de la interpolación obtenida a partir del método interpolador de los polinomios cúbicos monótonos es continua como se comprueba en las siguientes gráficas donde se grafica la velocidad angular instantánea de cada articulación de la cadena cinemática correspondiente.

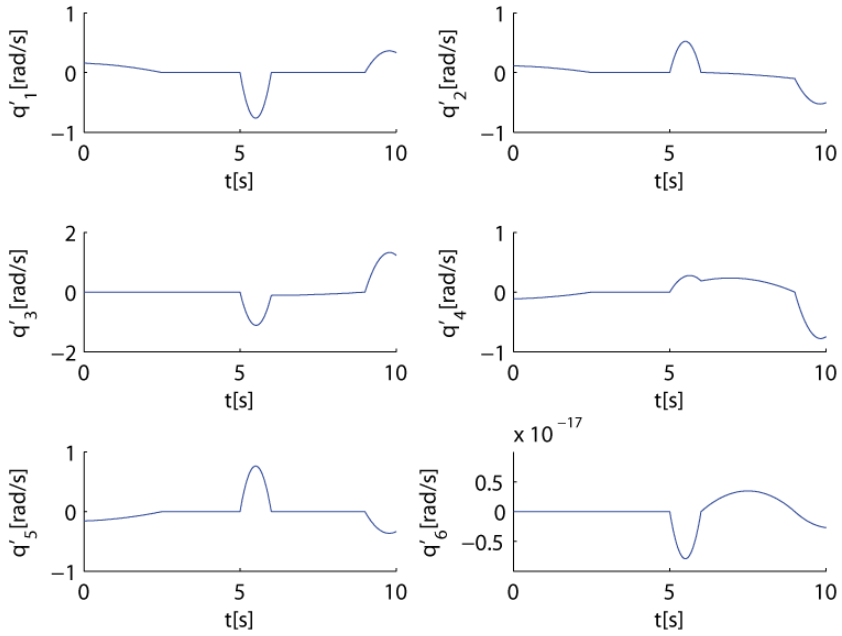


Figura 4-8. Velocidades angulares de las articulaciones del a pierna derecha

Sobre la gráfica anterior, notar que la mayor tasa de cambio de la posición de las articulaciones coincide con el momento en que la pierna derecha cambia su situación de ser pie de apoyo a partir de T_{step}. Notable el cambio en q_2 y q_3, no tan evidente en q_4, al mantener una trayectoria vertical para no colisionar con el escalón, situación que lleva a plegar la pierna por estas tres articulaciones.

La velocidad de la primera articulación tiene un mínimo en $t = 5.5$ debido a la traslación lateral de la pelvis por el repentino cambio de la situación del pie de apoyo, simultáneamente en q_5 se produce una tasa de variación articular en la cadera compensatoria del efecto del giro de q_1 sobre la pelvis para mantener la pelvis con una orientación en un plano horizontal.

El descenso de la pierna de la postura en que se encuentra en el penúltimo nodo a la situación de apoyo del nodo final, motiva un cambio de posición angular de todas las articulaciones realizada en el breve periodo de tiempo T_{delay}.

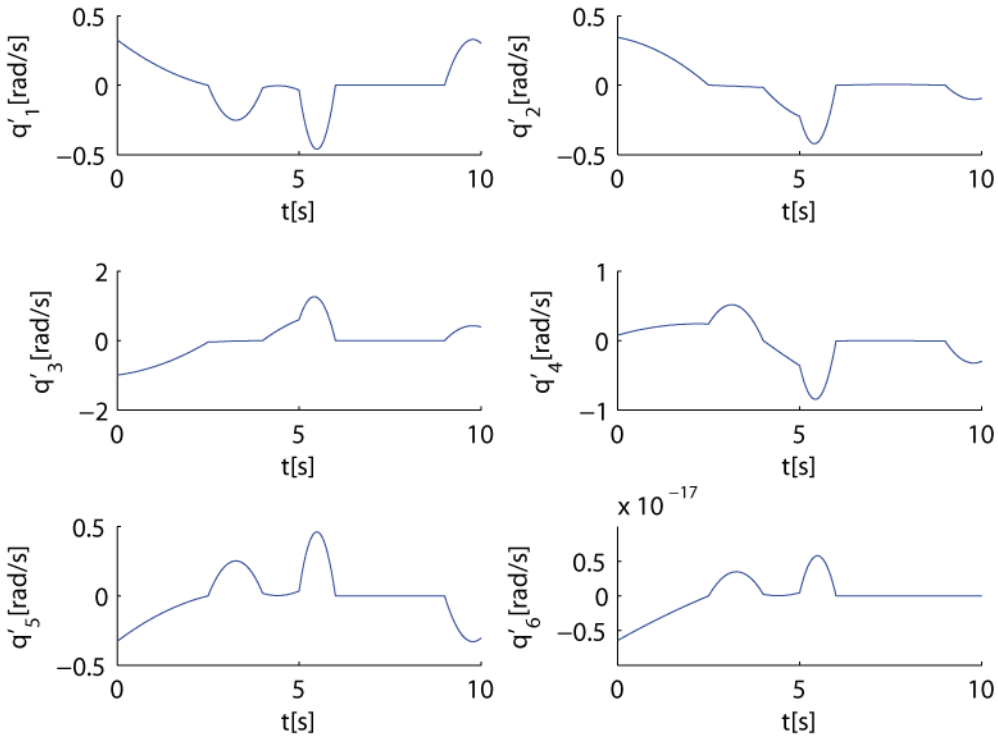


Figura 4-9. Velocidades angulares de las articulaciones de la pierna izquierda.

Mayores velocidades se producen en la pierna izquierda entre el instante inicial y $T_{step}/2$ ya que junto al desplazamiento lateral de la pelvis debe flexionarse la pierna para iniciar la trayectoria de vuelo del pie izquierdo.

El cambio de la posición de q_1 y q_5 posterior a $T_{step}/2$ viene motivado por la intención de que se minimice la tasa de variación de la posición de estas articulaciones instantes después de T_{step} reduciéndose el desplazamiento lateral de la pelvis.

En el momento en que la pierna de apoyo pasa a ser la pierna izquierda se produce la elevación de la pierna derecha por encima de la altura del escalón por la extensión de la pierna de apoyo, lo que da lugar a la tasa de variación de las articulaciones en este instante.

Trayectoria en el espacio cartesiano de la pelvis

Conociendo las trayectorias de las articulaciones podemos deducir la ley horaria de la pelvis durante el movimiento. En la Figura 4-10 se representa la ley horaria de las coordenadas cartesianas de la pelvis.

Se observa el desplazamiento lateral de la pelvis que tiene correspondencia con el cambio de la pierna de apoyo sobre la que carga el peso de la estructura.

El desplazamiento de la pelvis correspondiente a la altura del escalón tiene lugar pasado $t = T_{step}$. La elevación de la pelvis (en eje Y) una cantidad igual a la altura del escalón es indicativo de que el tren inferior ha sido capaz de superar el escalón.

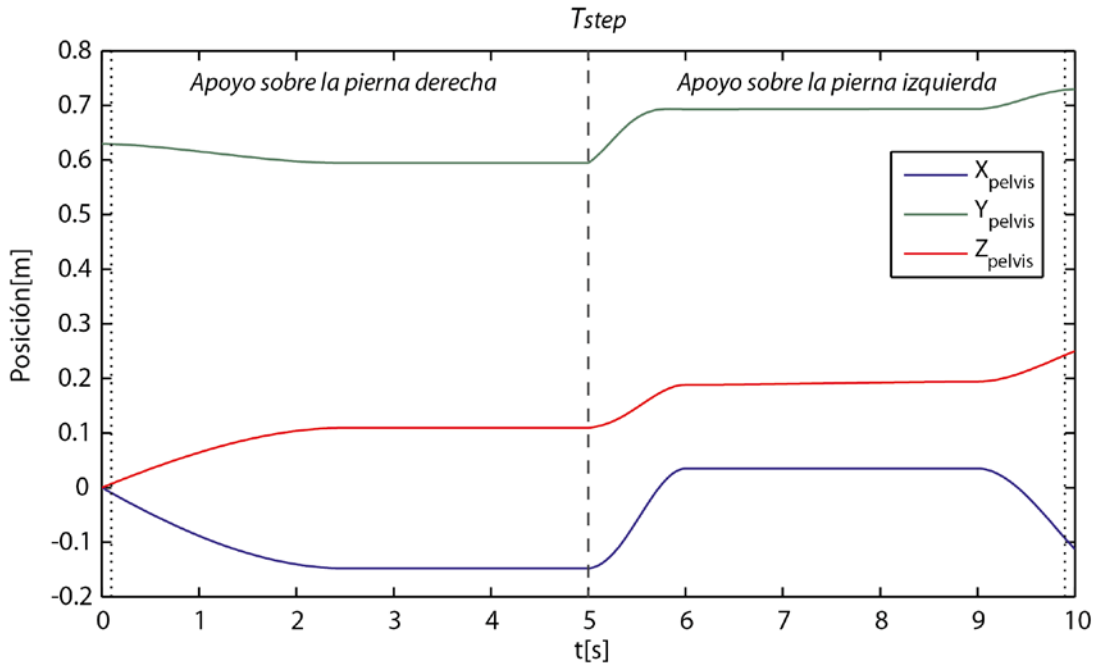


Figura 4-10. Evolución temporal de la posición de la pelvis.

La siguiente gráfica es la representación tridimensional de la trayectoria de la pelvis. En esta gráfica, habida cuenta del comentario de la figura anterior, se sitúa la pelvis en puntos extremos sobre la posición de la pierna de apoyo tras realizar un desplazamiento lateral y su elevación se ha incrementado una altura igual a la del escalón entre la postura inicial y la final.

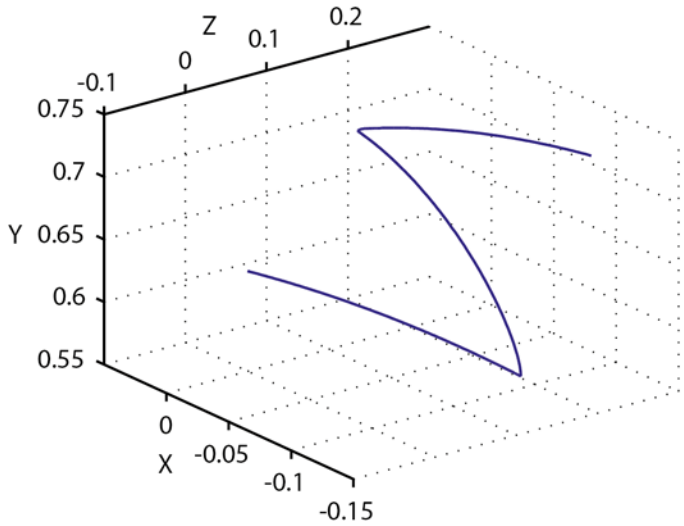


Figura 4-11. Trayectoria de la pelvis en el paso.

En la figura siguiente, para representar la evolución temporal de la posición de los pies se toma el origen sistema de referencia de trabajo situado, en la postura inicial, entre los dos tobillos. En T_{step} el pie izquierdo toma contacto con el escalón, pasando a partir de ese momento a ser el pie de apoyo de la estructura, y por tanto, iniciando el vuelo el pie derecho. Desde el comienzo del paso hasta $t = 0.1s$ el pie izquierdo, durante el vuelo, queda por debajo del nivel del suelo. En $t = 9.89s$ hasta el final del movimiento, el descenso del pie derecho lleva la planta del pie a una altura por debajo del nivel de la superficie del escalón. En este instante debería detenerse la evolución articular siendo la postura adoptada la postura que tenga la estructura hasta el final del movimiento. Estos dos casos de descenso de la planta del pie de apoyo por debajo de la superficie de contacto se producen aplicando los tres tipos de interpoladores.

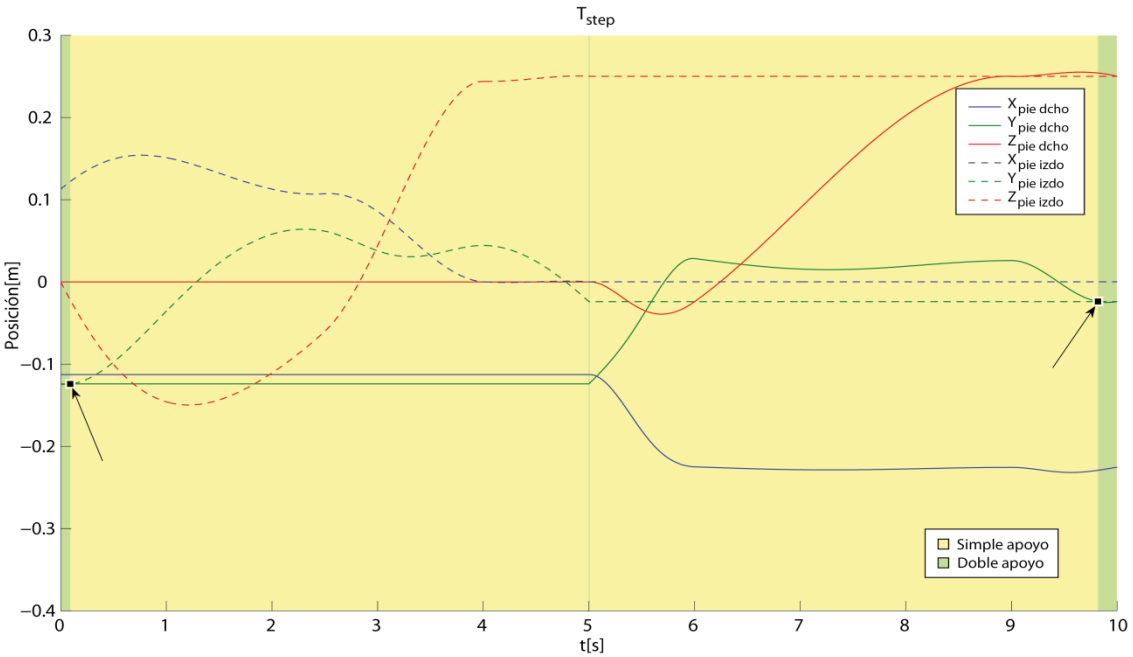


Figura 4-12. Evolución temporal de la posición de ambos pies.

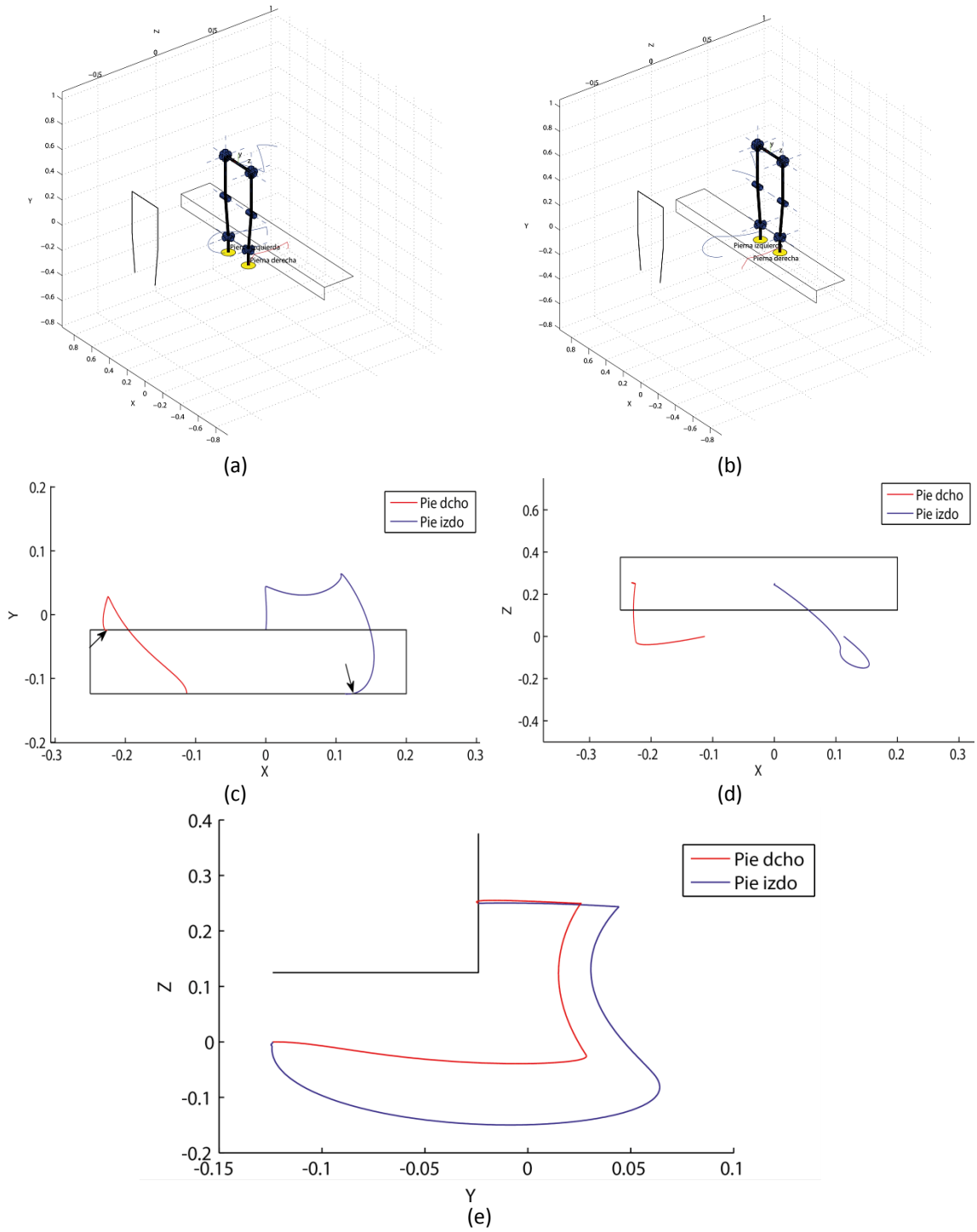


Figura 4-13. (a) Postura y posición inicial. (b) Postura y posición final. (c) Proyección de trayectorias de ambos pies en el plano XY. (d) Proyección de las trayectorias en el plano XZ. (e) Proyección de las trayectorias en el plano YZ. En rojo la trayectoria correspondiente al pie derecho, en azul, la del pie izquierdo.

El desplazamiento lateral del tren inferior al final del movimiento respecto de la posición inicial puede comprobarse en la Figura 4-13 (c) y (d), en la que se representa la trayectoria de ambos pies visto desde una vista frontal. Se han marcado en esta gráfica (Figura 4-13 (c)) los puntos de la trayectoria que se encuentran por debajo de la superficie de apoyo. Se comprueba que la trayectoria interpolada evita la colisión con el escalón (Figura 4-13 (e)), llevando el pie en vuelo

por detrás del pie en apoyo (línea azul), alcanzando una ordenada mayor a la altura del escalón desde una abscisa menor que la abscisa en la que se encuentra el pie de apoyo.

Par en el tobillo de la pierna en apoyo

La articulación del tobillo se considera que es a la que más par se le exige soportar pues sobre ella pivota el resto de la estructura cuando se encuentra la pierna en apoyo simple.

Se va a realizar en este apartado una estimación del par máximo al que se someten las articulaciones del tobillo en la pierna de soporte en el tiempo que dura cada apoyo.

Se hace la suposición de que el centro de masas de cada eslabón se encuentra en el punto medio de su longitud. El centro de masas de los pies está situado en la planta del pie. La masa de la estructura se supone 55 kg. La distribución de masas de los eslabones sería la siguiente:

La masa de cada pie se estima en 2kg.

La masa de la tibia y fémur de una pierna 2.75kg cada uno.

La masa de la pelvis, que incluye la masa del torso, se ha estimado en 40kg.

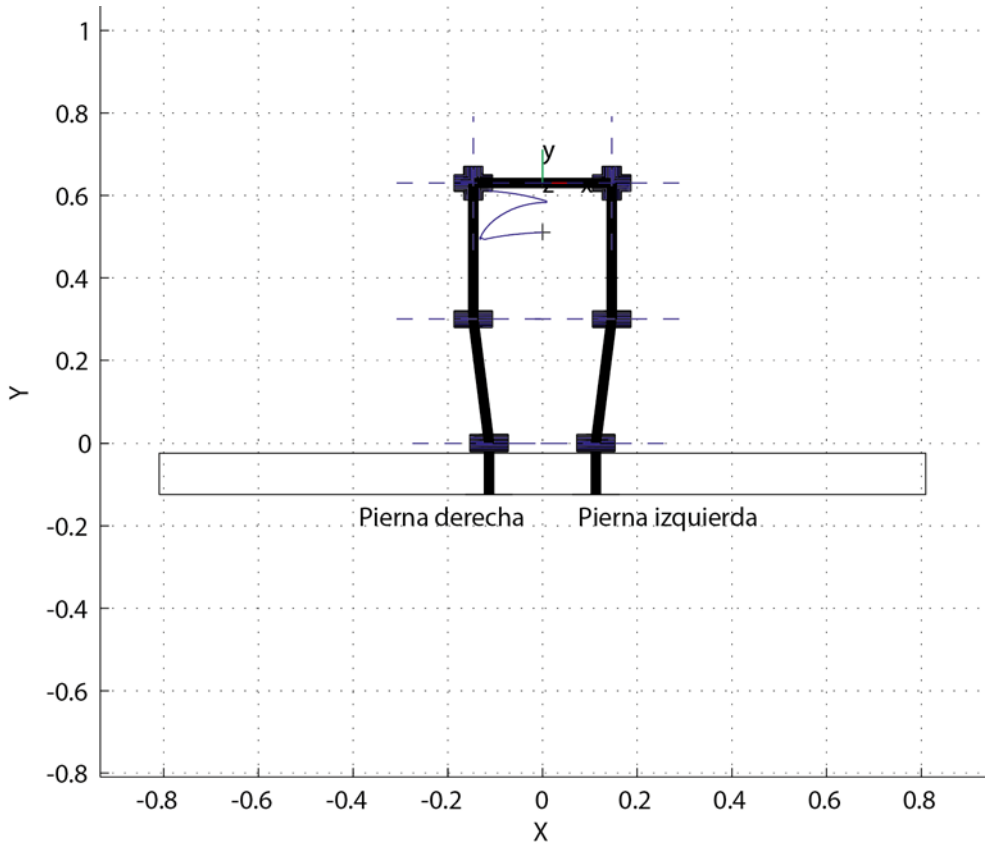


Figura 4-14. Proyección de la trayectoria del CM en el plano XY.

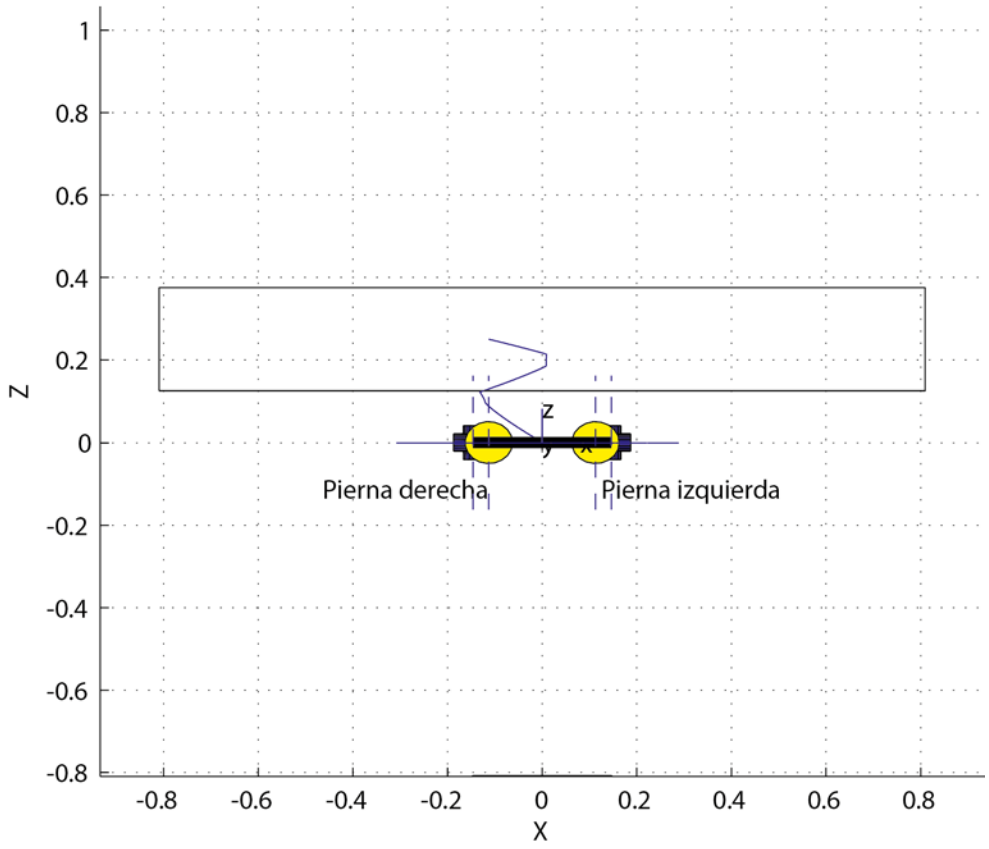


Figura 4-15. Proyección de la trayectoria del CM en el plano XZ.

Idealizando el cuerpo como un péndulo invertido que rota en torno a las articulaciones del tobillo se puede hacer una estimación del máximo par soportado por cada una de las articulaciones del tobillo, calculado como la fuerza del peso del cuerpo (suponiendo que la aceleración de avance del cuerpo es mucho menor que la producida por la fuerza del peso de la estructura) por el brazo medido desde el tobillo de la pierna de apoyo a la proyección del centro de masas.

Cuando la pierna derecha actúa de soporte, el tobillo derecho soporta en su eje frontal un par máximo de 56,50Nm al separarse el pie izquierdo del suelo en el instante $t = 0{,}11s$. En la articulación del tobillo en el eje sagital el par máximo es 65,97Nm en $t = 4s$, al iniciar el pie en vuelo el descenso sobre el escalón.

Cuando la pierna izquierda actúa como apoyo, el máximo par en el eje frontal del tobillo es de 71.15Nm al iniciar el despegue el pie derecho en $t = 5s$. También es en ese instante cuando se alcanza el máximo par en el eje sagital del tobillo con un valor de 69.48Nm.

Máximo valor de los parámetros métricos de paso

Se ha realizado la simulación de trayectorias de distintos parámetros métricos del paso y se han obtenido los valores máximos para los que la estructura es capaz de superar el escalón. Estos valores, recogidos en la Tabla 4-5, se obtuvieron de realizar pruebas con los distintos

métodos de interpolación implementados. La altura máxima del escalón viene dada por la capacidad de flexión de la pierna en vuelo, por tanto, este resultado está condicionado por los límites articulares. No obstante, al no conocer la situación del comienzo del escalón existe una influencia de la interpolación respecto a la capacidad de mantener la pierna flexionada a medida que avanza y supera el escalón. Se observa una ligera influencia del tipo de interpolador utilizado en la altura máxima de escalón que la estructura es capaz de superar. En estos ensayos el comienzo del escalón se sitúa a media distancia de la longitud de paso.

La longitud máxima del paso que la estructura es capaz de realizar está condicionada por la longitud de los eslabones de la estructura y los límites articulares.

Tabla 4-5. Valores máximos de los parámetros métricos de programación de paso para cada tipo de interpolación.

Interpolador monótono		Interpolación *spline* de grado 3		Interpolación con *splines* en tensión	
H_{foot}	L_{step}	H_{foot}	L_{step}	H_{foot}	L_{step}
0,00	**0,301**	**0,00**	**0,301**	**0,00**	**0,301**
0,02	**0,338**	**0,02**	**0,338**	**0,02**	**0,338**
0,04	**0,339**	**0,04**	**0,339**	**0,04**	**0,339**
0,06	**0,340**	**0,06**	**0,340**	**0,06**	**0,340**
0,08	**0,341**	**0,08**	**0,341**	**0,08**	**0,341**
0,10	**0,342**	**0,10**	**0,342**	**0,10**	**0,342**
0,12	**0,343**	**0,12**	**0,343**	**0,12**	**0,343**
0,14	**0,344**	**0,13**	**0,343**	**0,14**	**0,344**

4.2 Subiendo escaleras llevando el pie en vuelo de un escalón a otro no consecutivo

La planificación del movimiento hasta el primer apoyo es idéntica a la anterior planificación estudiada, pues se parte de la misma postura inicial. La incorporación de un nuevo escalón tiene como consecuencia tener que añadir un nuevo nodo de interpolación, necesario para asegurar que el escalón no interfiera en la trayectoria del pie en vuelo.

Selección de puntos en el espacio cartesiano

De acuerdo a lo anterior, los puntos seleccionados para realizar la planificación del paso programado serían los siguientes.

Tabla 4-6. Expresiones de algunas de las coordenadas cartesianas de los nodos de interpolación.

Pie derecho		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$t = 0$	`estructuras{1}.base`	Orientación y posición extraída

		de la función de generación de estructuras
$t = T_{step} + T_{delay}$	$Y_{pie} = 0.025 + 1.45 \cdot H_{foot}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.
$t = \frac{3}{2} \cdot T_{step}$	$Y_{pie} = 0.025 + 2.45 \cdot H_{foot}$ $Z_{pie} = L_{step}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ y en el eje $\boldsymbol{Z}$.
$t = T_{walk} - T_{delay}$	$Z_{pie} = 2 \cdot L_{step}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Z}$ de la matriz de transformación anterior.
$t = T_{walk}$	$Y_{pie} = 2 \cdot H_{foot}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.

Pie izquierdo		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$\boldsymbol{t = 0}$	estructuras{2}.base	Orientación y posición extraída de la función de generación de estructuras
$\boldsymbol{t = T_{step}/2}$	$\boldsymbol{Y_{pie} = 0.025 + 1.45 \cdot H_{foot}}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.
$\boldsymbol{t = T_{step} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{X_{pie} = 0}$ $\boldsymbol{Z_{pie} = L_{step}}$	Translación en el eje $\boldsymbol{X}$ y en el eje $\boldsymbol{Z}$ de la matriz de transformación anterior.
$\boldsymbol{t = T_{step}}$	$\boldsymbol{Y_{pie} = H_{foot}}$	Translación en el eje $\boldsymbol{Y}$ de la matriz de transformación anterior.

Cadera		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
–	$\boldsymbol{A_{pelvis} = 0.15}$	Máxima amplitud de oscilación de la cadera

Transformación de los puntos al espacio articular y selección del resto de nodos de paso en este espacio

Se lleva a cabo la transformación al espacio articular de las coordenadas cartesianas y se añaden nuevos nodos en este espacio para la interpolación. Las coordenadas de los nodos de interpolación añadidos en este espacio son proporcionales a los límites de interpolación y se ha escogido el coeficiente tras realizar ensayos con distintos valores.

Tabla 4-7. Secuencia cronológica de los nodos articulares.

Pierna derecha		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$t = 0$	`estructuras{1}.q`	
$\boldsymbol{t = T_{step}/2}$	$\boldsymbol{q_2}$: Límite superior/3 $\boldsymbol{q_3}$: Límite superior $\boldsymbol{q_1}$: Cálculo por cinemática inversa para que $\boldsymbol{X_{pelvis} \approx -0.15}$ Orientación $\boldsymbol{q_4}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_5}$: Cálculo por cinemática inversa $\boldsymbol{q_6}$: Cálculo por cinemática inversa	Se añade nodos articulares en $\boldsymbol{q_2}$ y $\boldsymbol{q_3}$ proporcionales a los límites articulares.
$\boldsymbol{t = T_{step} - T_{delay}}$	$\boldsymbol{q(T_{step} - T_{delay}) = q(T_{step}/2)}$	Se mantienen los valores articulares del nodo anterior
$\boldsymbol{t = T_{step}}$	$\boldsymbol{q(T_{step}) = q(T_{step} - T_{delay})}$	Se mantienen los valores articulares del nodo anterior
$\boldsymbol{t = T_{step} + T_{delay}}$	$\mathbf{q}(\boldsymbol{T_{step} + T_{delay}})$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = \frac{3}{2} \cdot T_{step}}$	$\boldsymbol{q(\frac{3}{2} \cdot T_{step})}$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{walk} - T_{delay}}$	$\mathbf{q}(\boldsymbol{T_{walk} - T_{delay}})$	Cálculo por cinemática inversa
$\boldsymbol{t = T_{walk}}$	$\mathbf{q}(\boldsymbol{T_{walk}})$	Cálculo por cinemática inversa

Pierna izquierda		
Tiempo	Coordenadas	Observaciones
$t = 0$	`estructuras{2}.q`	

$t = T_{step}/2$	$\mathbf{q}(T_{step}/2)$	Cálculo por cinemática inversa
$t = T_{step} - T_{delay}$	$q(T_{step} - T_{delay})$	Cálculo por cinemática inversa
$t = T_{step}$	$q(T_{step})$	Cálculo por cinemática inversa
$t = T_{step} + T_{delay}$	q_2: Límite superior/8 q_3: Límite inferior/5 $q_1 = -q_{1,der}(T_{step}/2)$ Orientación q_4: Cálculo por cinemática inversa q_5: Cálculo por cinemática inversa q_6: Cálculo por cinemática inversa	Se añade nodo articular en q_2y q_3 proporcionales a los limites articulares. Para q_1 se asigna el valor angular que se obtuvo para la variable articular de la pierna derecha en $t = T_{step}/2$ pero en sentido de giro negativo.
$t = \frac{3}{2} \cdot T_{step}$	$q_1 = q_1(T_{step} + T_{delay})$ q_2: Límite superior/7 q_3: Límite inferior/5 Orientación q_4: Cálculo por cinemática inversa q_5: Cálculo por cinemática inversa q_6: Cálculo por cinemática inversa	Nodos articulares q_2 y q_3 proporcionales a los limites articulares.
$t = T_{walk} - T_{delay}$	q_2: Límite superior/3 q_3: Límite superior q_1: $= q_{1,der}(T_{step}/2)$ Orientación q_4: Cálculo por cinemática inversa q_5: Cálculo por cinemática inversa q_6: Cálculo por cinemática inversa	Se añade nodos articulares en q_2y q_3 proporcionales a los límites articulares.
$t = T_{walk}$	$q_1 = 0$ q_2: Límite superior/3 q_3: Límite superior Orientación q_4: Cálculo por cinemática inversa q_5: Cálculo por cinemática inversa q_6: Cálculo por cinemática inversa	Nodos articulares q_2 y q_3 proporcionales a los limites articulares.

4.2.1 Curvas obtenidas para una profundidad de paso de 0.25m y altura de escalón 0.1m

Se han asignado valores a los parámetros H_{foot}, L_{step} y se obtendrán las curvas articulares para este paso de ejemplo.

Parámetro	Valor
H_{foot} (m)	0.1
L_{step}(m)	0.25

Los valores temporales de los nodos de interpolación para los valores de la Tabla 4-1 en orden cronológico son:

	t_0	$T_{step}/2$	$T_{step} - T_{delay}$	T_{step}	$T_{step} + T_{delay}$	$t = \frac{3}{2} \cdot T_{step}$	$T_{walk} - T_{delay}$	T_{walk}
$t(s)$	0	2.5	4	5	6	7,5	9	10

Los valores articulares obtenidos de aplicar los valores de los parámetros en las expresiones de la Tabla 4-7 se muestran a continuación. Cada fila es el conjunto de valores articulares de cada nodo de interpolación.

Tabla 4-8. Valores articulares obtenidos aplicada la corrección en los valores que superan los límites articulares.

Pierna derecha					
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	0	0	0	0	0
0,2420	0,1745	0	-0,1745	-0,2420	0
0,2420	0,1745	0	-0,1745	-0,2420	0
0,2420	0,1745	0	-0,1745	-0,2420	0
-0,2667	0,5236	-0,9133	0,0937	0,2667	0
-0,0695	0,5236	-1,5708	0,9086	0,0695	0
-0,0726	0,5125	-1,5708	1,0472	0,0726	0
-0,0625	0,3766	-1,2406	0,8640	0,0625	0

Pierna izquierda					
q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	0	0	0	0	0
0,3391	0,5236	-1,5446	0,4814	-0,3391	0
0,0687	0,5125	-1,5708	1,0472	-0,0687	0
0,0592	0,3766	-1,2406	0,8639	-0,0592	0
-0,2420	0,0654	-0,3142	0,2487	0,2420	0
-0,2420	0,0748	-0,3142	0,2394	0,2420	0
-0,2420	0,1745	0	-0,1745	0,2420	0
-0,2420	0,1745	0	-0,1745	0,2420	0

Se lleva a cabo la interpolación de los nodos con la función interpoladora de polinomios monótonos para obtener curvas que describan la posición en el tiempo de cada una de las articulaciones de las cadenas cinemáticas.

El resultado de la interpolación se muestra en las gráficas (Figura 4-16 y Figura 4-17) en donde se representa la posición de las articulaciones de las cadenas cinemáticas y que se encuentran en todo momento dentro los límites articulares (líneas discontinuas).

La pierna derecha, desde el instante inicial hasta T_{step}, actúa como pierna de apoyo, la tercera articulación (la rodilla) se encuentra en este periodo en su límite superior, de manera que la pierna de apoyo se encuentra extendida y la pierna bascula girando sobre las articulaciones del tobillo (q_1 y q_2). Durante la etapa en que la pierna está en vuelo las articulaciones q_2 y q_3 llegan a sus límites inferiores, momento en el que la pierna se ha encogido lo máximo posible

para evitar el contacto con el escalón durante el vuelo. La cadera corrige la orientación de la pelvis y el tronco, mediante los giros de las articulaciones q_4, q_5 y q_6 para mantener la orientación indicada en los nodos de interpolación. En este caso, en los nodos de interpolación, la orientación de la pelvis no necesita que actúe la sexta articulación y la interpolación de la articulación resulta una constante.

La articulación q_5 controla el desplazamiento lateral de la pierna en la etapa en vuelo, la pierna derecha pasa de un apoyo situado en una posición anterior a la pierna de apoyo a una posición posterior, en $t = 6$, se desplaza lateralmente para evitar impactar con la pierna de apoyo.

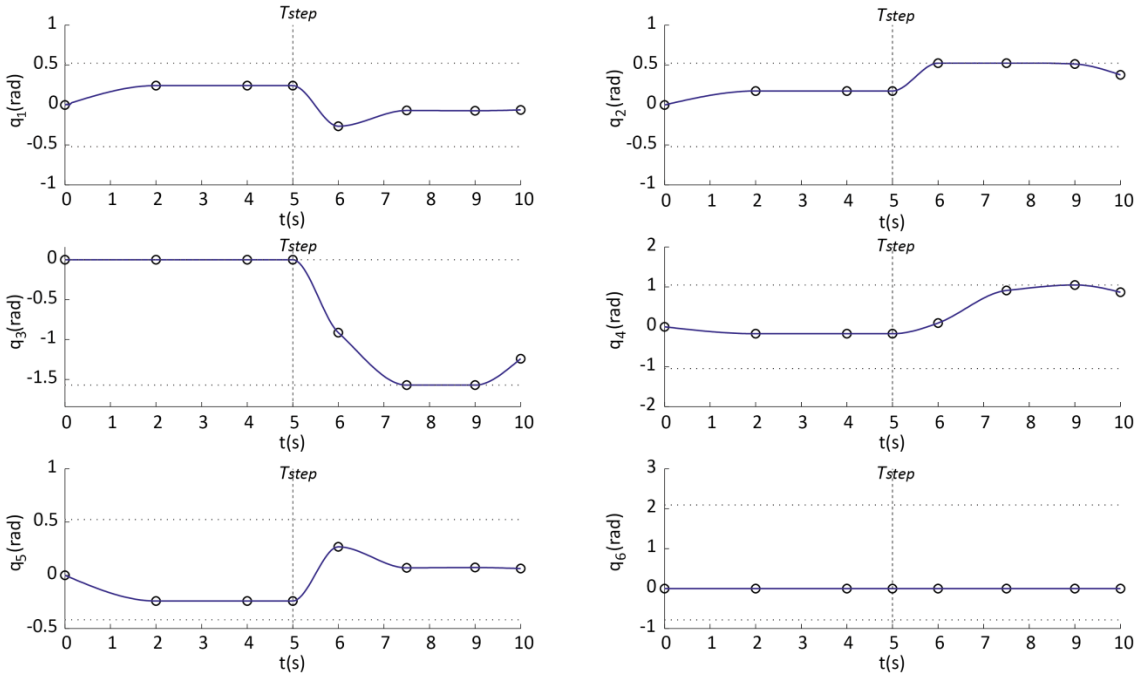


Figura 4-16. Curvas de la posición en el tiempo de las articulaciones de la pierna derecha

La pierna izquierda (Figura 4-17) desde instantes iniciales en que se separa del suelo efectúa una etapa de vuelo hasta T_{step}, momento en el que aterriza en el punto de apoyo. En este periodo la pierna se pliega por la articulación de la rodilla llegando al límite articular de las articulaciones q_3 y q_2, que trata de mantener la orientación del pie paralelo al suelo, sin llegar a conseguirlo en puntos intermedios por la limitación articular. La articulación q_5 impone durante la etapa en vuelo el desplazamiento lateral de la pierna en vuelo. En $t = 2$ se impone un desplazamiento lateral, alejando la pierna en vuelo del eje ventral de la estructura para evitar el contacto entre pierna en vuelo y pierna de apoyo, aumentando el valor del ángulo de la articulación.

En el cambio de situación de ser pierna en vuelo a pierna de apoyo produce un cambio rápido del valor de ciertas articulaciones, notable en q_3 donde la pierna pasa de encontrarse flexionada a ser estirada para levantar el centro de masas de la estructura. También notar el desplazamiento lateral del centro de masas por el cambio de posición de la articulación q_1 al comienzo de la etapa de apoyo.

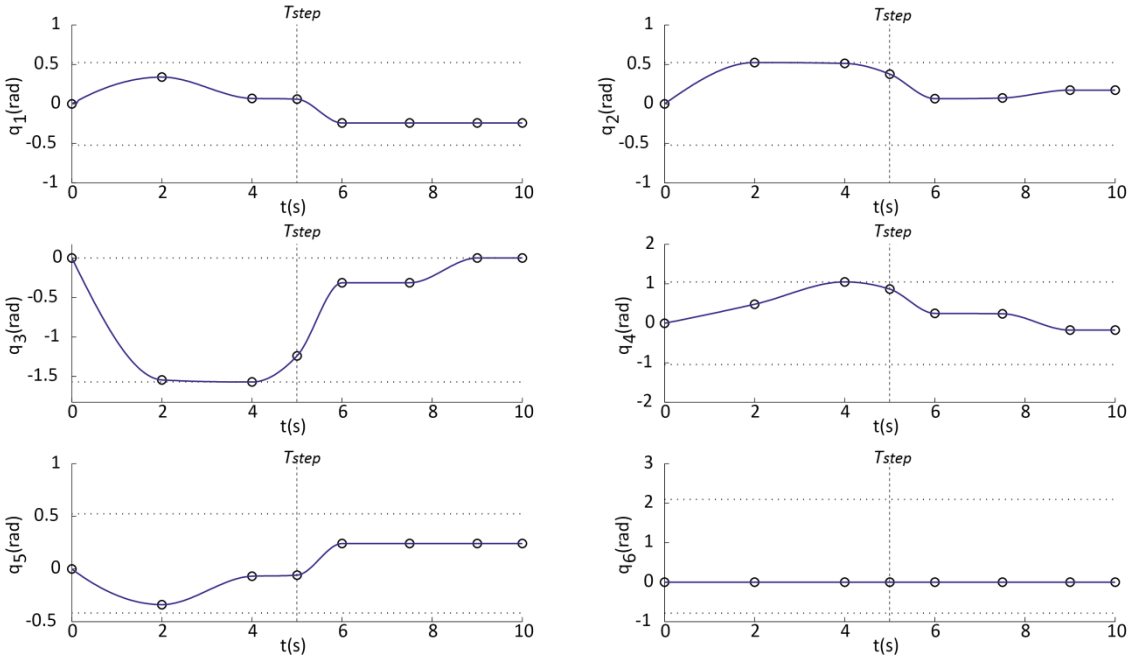


Figura 4-17. Curvas de la posición en el tiempo de las articulaciones de la pierna izquierda

Velocidad articular

La interpolación utilizada para establecer la trayectoria de las articulaciones debería proporcionar una velocidad articular continua. Las gráficas (Figura 4-18 y Figura 4-19) muestran que efectivamente la velocidad de las articulaciones son curvas continuas. La articulación de la pierna derecha a la que se le exige mayor tasa de cambio en la posición es a la rodilla con un valor de 1,25rad/s en $t = 5.55$s, momento en el que la pierna se encoge para superar el escalón donde se encuentra la pierna izquierda realizando el apoyo.

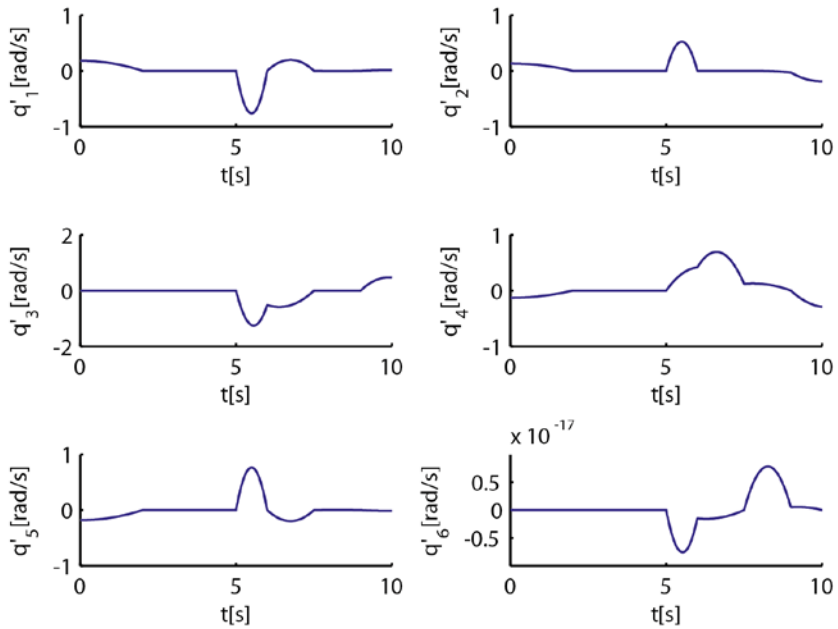


Figura 4-18. Velocidad articular de la cadena cinemática de la pierna derecha.

En cuanto a la pierna izquierda es también la articulación de la rodilla a la que se le solicita mayor respuesta en el cambio de la posición, con una velocidad máxima de 1,26 rad/s en $t = 5{,}4\text{s}$.

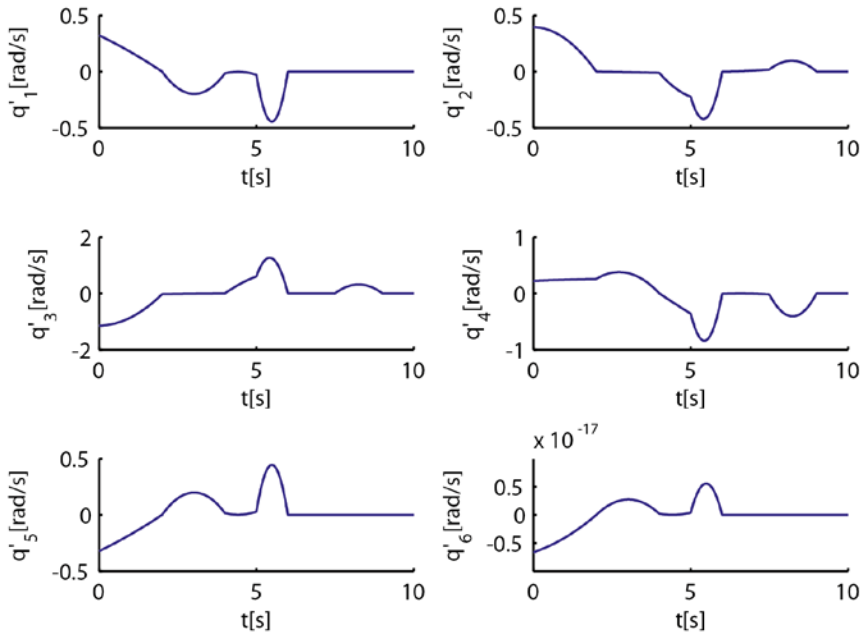


Figura 4-19. Velocidad articular de la cadena cinemática de la pierna izquierda.

Trayectorias de la pelvis y los pies en el espacio cartesiano

La característica más importante de subir escaleras es la elevación del centro de masas. La trayectoria de la pelvis para esta planificación se muestra en la siguiente figura (Figura 4-20). El desplazamiento en X es el desplazamiento lateral de la pelvis, el desplazamiento en Y es el desplazamiento en altura de la pelvis, y Z es la dirección de avance.

En la gráfica se observa que el ascenso de la pelvis se produce al comienzo del segundo paso, pasado T_{step}, en esta prueba se corresponde con $t = 5\text{s}$. Que la pelvis ascienda la altura del escalón es indicativo de que la estructura ha sido capaz de superar el escalón. Las interacciones entre la estructura y los escalones han de comprobarse en las trayectorias de los pies.

En la Figura 4-21 queda representado el movimiento que efectuan los puntos centrales de las plantas de los pies del modelo. El origen del eje Y se sitúa a la altura del tobillo. El primer escalón aparece en $Z = 0{,}125\text{m}$, el pie izquierdo alcanza esa cota en $t = 3\text{s}$, representado por la primera linea vertical. El corte de esta recta con la linea verde discontinua indica la altura a la que se encuentra el pie en ese intante, por encima de la altura del escalón (altura a la que se encuentra el pie izquierdo a partir de $t = 5\text{s}$). El pie derecho, por su parte, debe superar dos escalones, la altura a la que se encuentra el pie en la cota en la que aparecen los escalones son las intersecciones de la curva verde continua con las rectas anotadas en la figura. Se

comprueba que la altura del pie derecho en esos dos instantes es superior a la altura del escalón que se intenta superar (la altura del primer escalón es la misma que la indicada para el pie izquierdo y la del segundo escalón es la altura del pie derecho al finalizar el movimiento).

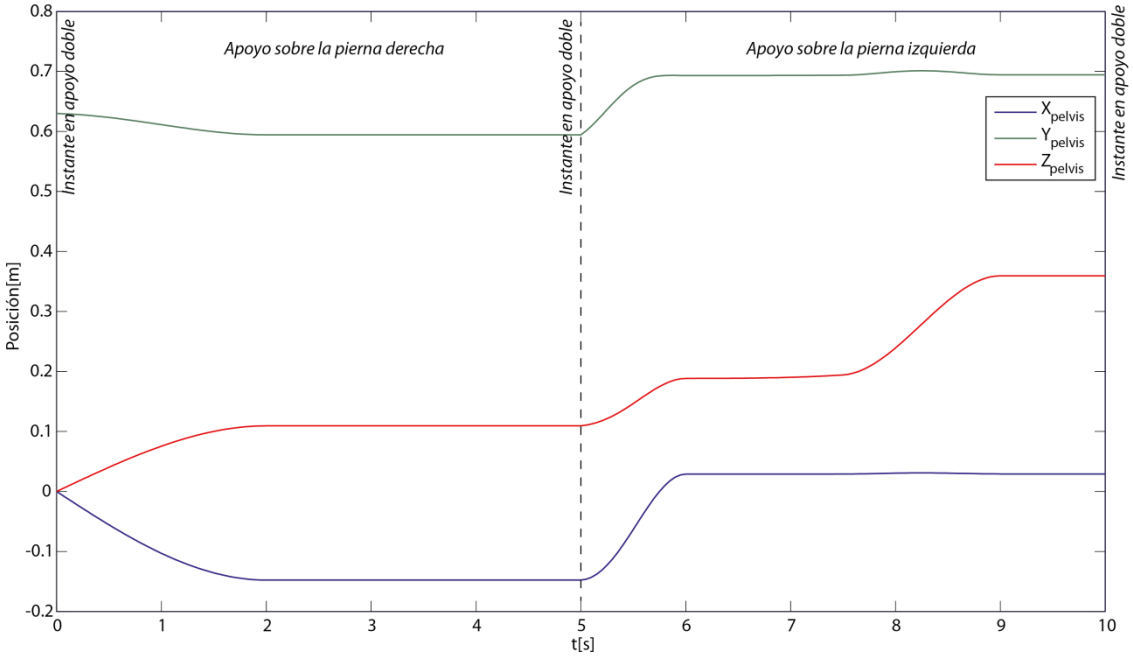


Figura 4-20. Trayectoria de la pelvis

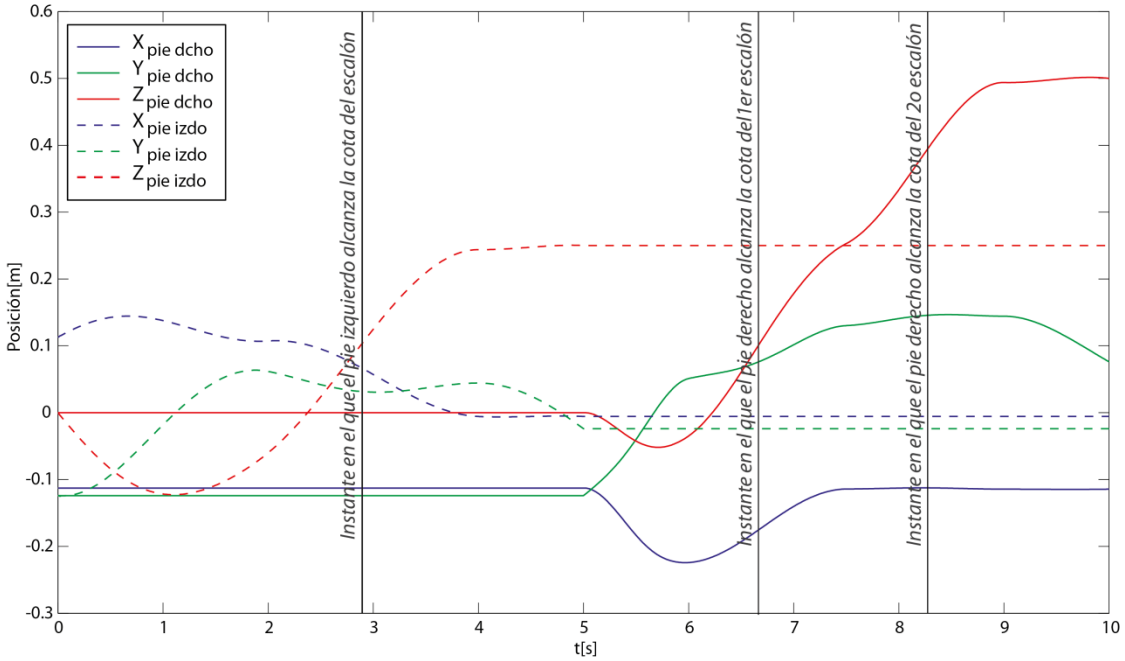


Figura 4-21. Trayectorias del tobillo del pie derecho e izquierdo.

Par de las articulaciones del tobillo

Calculamos el par máximo que deben soportar las articulaciones del tobillo de la pierna de apoyo durante el movimiento.

Calculamos la trayectoria que efectúa el centro de masas de la estructura con el propósito de establecer qué momento se produce en el tobillo debido al peso de la estructura. La Figura 4-22 y la Figura 4-23 muestran la proyección de la trayectoria del centro de masas en los planos XY y XZ. En la primera figura se muestra el desplazamiento vertical del centro de masas que se ha efectuado durante el movimiento. El extremo de la trayectoria marcado con un signo $+$ indica la situación del CM al comienzo del movimiento, al finalizar el movimiento la situación del centro de masas (el otro extremo de la trayectoria) se encuentra en una posición superior, en este caso corresponde con una diferencia de altura de 0,1m (la altura del escalón). La proyección sobre el plano XZ permite calcular la distancia del centro de masas a los puntos de apoyo para el cálculo de los pares en las articulaciones durante el movimiento.

La Figura 4-24 representa la distancia medida tanto en el eje X como en el eje Z del centro de masas al punto de apoyo de la estructura en cada instante de tiempo. Desde el instante inicial hasta $t = 5$s la estructura soporta el peso sobre la pierna derecha, cambiando el apoyo a la pierna izquierda a partir de ese momento.

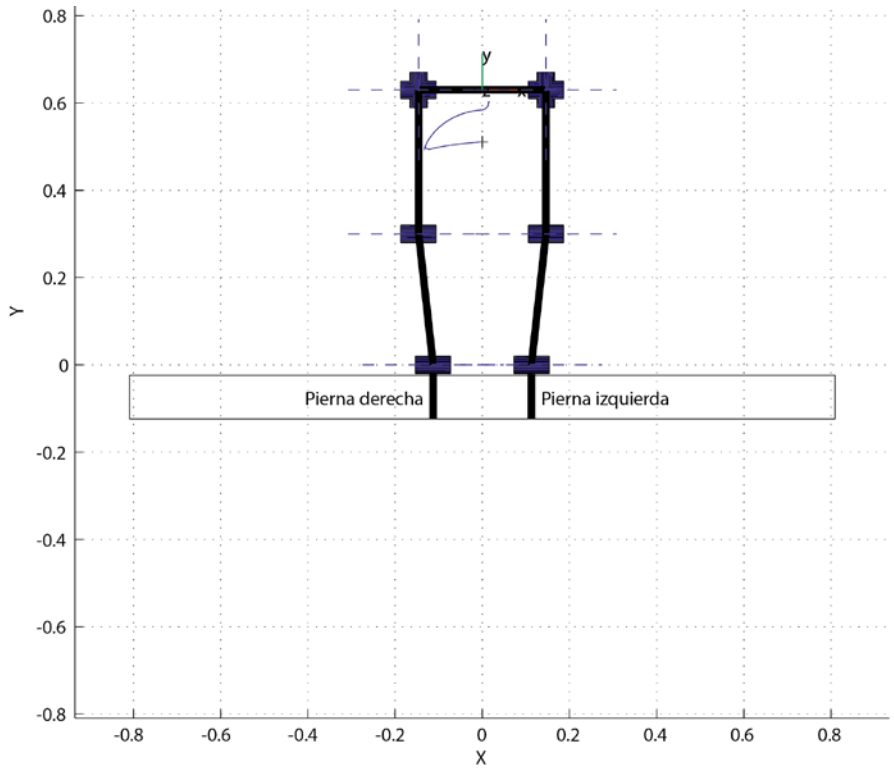


Figura 4-22. Proyección en el plano XY de la trayectoria del CM.

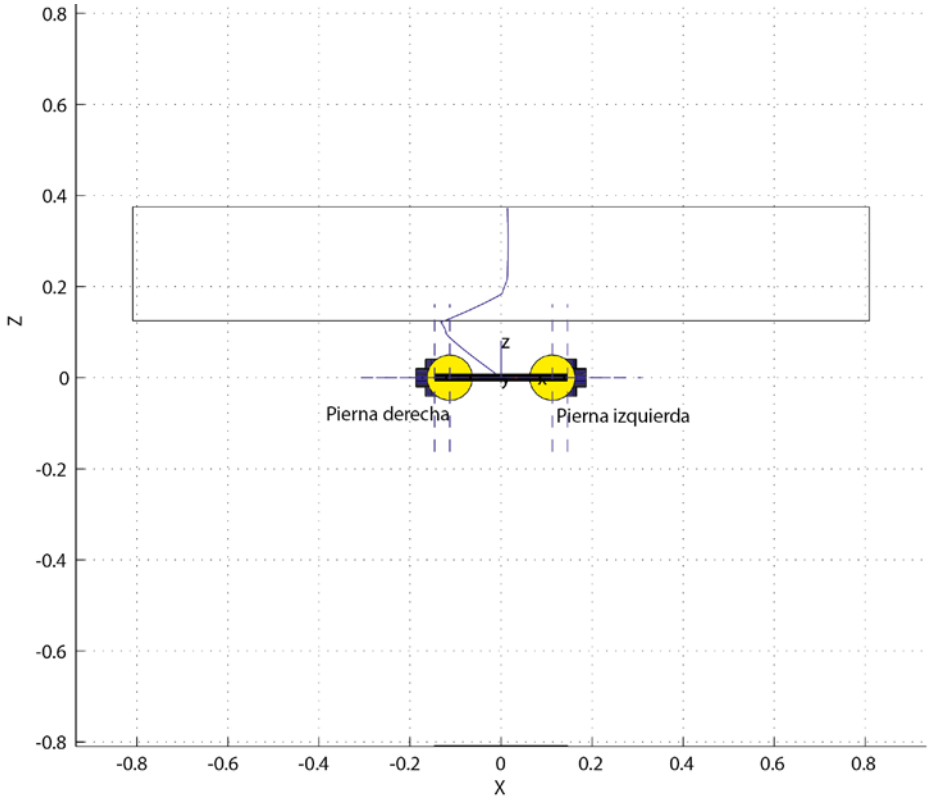


Figura 4-23. Proyección en el plano XZ del CM.

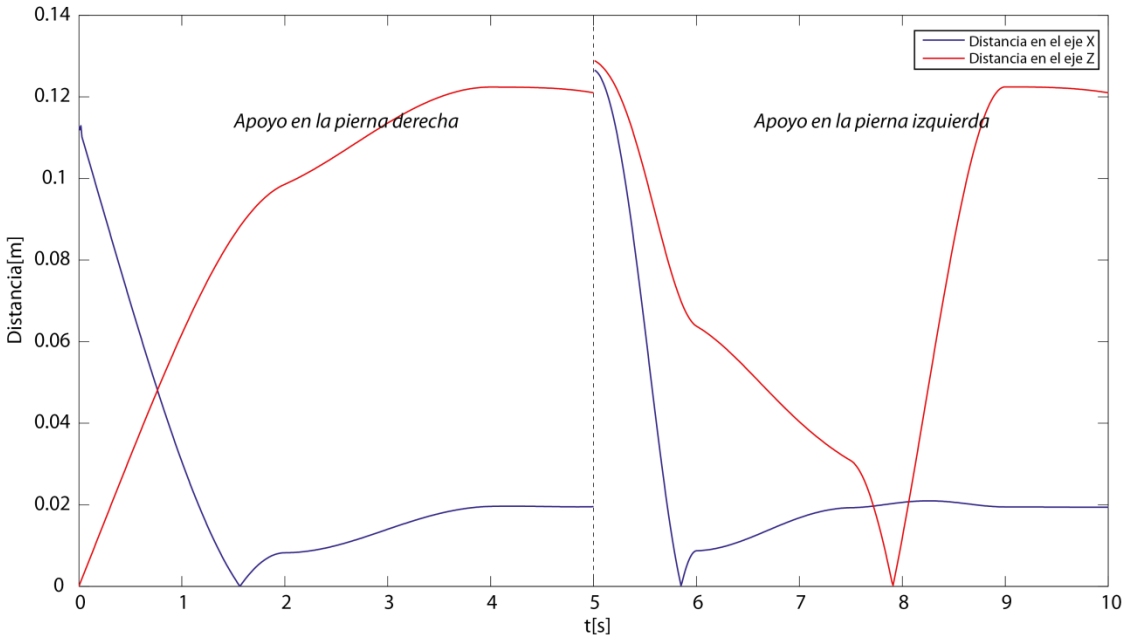


Figura 4-24. Distancia del CM al punto de apoyo en cada instante del movimiento

El par máximo aplicado en el tobillo derecho en la primera articulación tiene un valor de 60,76Nm en $t = 0$s y sobre la segunda articulación se produce un par de valor 65,95Nm en $t = 4{,}09$s.

En el tobillo izquierdo el par máximo aplicado en la primera articulación en $t = 5{,}01$s tiene un valor de 68,20Nm y sobre la segunda articulación se produce un par de valor 69,48Nm en $t = 5{,}01$s.

Valores máximos de los parámetros H_{foot} y L_{step} en la programación de paso

Se realizan ensayos para determinar los valores máximos de los parámetros H_{foot} y L_{step}. En los ensayos se determinarán la máxima longitud de paso para un valor dado de la altura de escalón. El tipo de interpolador empleado es el interpolador monótono.

Tabla 4-9. Valores máximos de los parámetros métricos en la programación de paso

H_{foot}	L_{step}
0,00	-
0,02	0,330
0,04	0,339
0,06	0,365
0,08	0,381
0,10	0,396
0,12	0,406
0,14	0,316
0,15	0,27

Con los nodos seleccionados para una altura de elevación del pie $H_{foot} = 0$ se produce que para cualquier longitud de paso, durante la traslación de la pelvis para llevar el centro de masas de la estructura sobre la pierna izquierda cuando ésta realiza el apoyo, se produce un descenso del pie derecho por debajo del nivel del suelo, por lo que no se ha dado una longitud de paso máxima.

Para H_{foot} >0,12m, el nodo en $t = 4$s para valores de L_{step} superiores a las recogidas en la Tabla 4-9, supera los límites articulares y se efectúa su corrección, por lo que no coincide la posición del pie con la planificada para el punto de apoyo sobre el escalón.

La altura máxima que se consigue superar con esta planificación del paso es un escalón de 15cm.

5 Conclusiones y trabajos futuros

5.1 Conclusiones

Nuestro trabajo ha consistido en diseñar y desarrollar un modelo en Matlab del tren inferior del robot humanoide TEO y las funciones necesarias para generar las trayectorias articulares a partir de la interpolación de un conjunto de nodos articulares.

La generación de trayectorias se ha aplicado en dos tipos de planificación del movimiento de subir escaleras. Para cada tipo de planificación se ha establecido un criterio de selección de nodos articulares a interpolar.

En el proceso de interpolación se han estudiado tres tipos de funciones interpoladoras: interpoladores monótonos, *splines*, y *splines* en tensión, buscando que la trayectoria resultante fuese continua al menos en velocidad. Posteriormente se han señalado las principales ventajas que ofrece cada tipo de interpolador.

Se ha verificado qué tipo de interpolador se adecúa a la condición impuesta de continuidad en velocidad tras interpolar la selección de nodos articulares y someter las curvas resultantes a una corrección de acuerdo al rango de giro de cada articulación. La restricción impuesta por los límites de giro de las articulaciones recorta al límite articular las trayectorias obtenidas en los tramos donde se superan dichos límites, perdiendo la continuidad en velocidad en el caso de utilizar *splines* o *splines* en tensión como funciones de interpolación. Para las pruebas se ha hecho uso del interpolador monótono y se ha comprobado la continuidad en velocidad de las trayectorias articulares resultantes.

Se ha aplicado el conjunto de funciones desarrolladas al movimiento realizado por el modelo del tren inferior de TEO al subir un escalón de una altura y una longitud de paso concreta.

Con las trayectorias articulares obtenidas se ha podido representar en el espacio cartesiano el movimiento que realiza el modelo de la estructura al subir el escalón. También se han representado curvas en el espacio cartesiano que describen la posición de la pelvis y de los pies en el tiempo sin que se hayan producido interferencias entre los pies y los escalones y que han permitido comprobar la efectividad del procedimiento de interpolación de las coordenadas articulares en estas dos pruebas realizadas.

Tras obtener las trayectorias articulares del modelo de la estructura ha sido posible calcular, de forma aproximada, la trayectoria descrita por el centro de masas del conjunto. Un resultado que se extrae es la solicitación, expresada como un momento, a la que es sometida la articulación del tobillo de la pierna de apoyo.

Finalmente, para cada planificación del movimiento se han realizado una serie de simulaciones que han permitido determinar los máximos valores de longitud de paso y altura del escalón que el tren inferior es capaz de realizar.

5.2 Trabajos futuros

Al comprobar la validez de las funciones interpoladoras se obtuvo como resultado que las trayectorias obtenidas con los *splines* y los *splines* en tensión eran curvas continuas en velocidad y aceleración. A la hora de verificar que en cada instante de tiempo la trayectoria se encuentra dentro del rango de giro articular, se ha comprobado que en ciertos tramos se superan estos límites y se produce el recorte de la curva en dichos tramos. Se propone llevar a cabo el desarrollo de un sistema de selección de nodos articulares que limite el valor de los nodos a un valor inferior a los límites articulares en puntos intermedios de interpolación para que la función de interpolación tenga margen para desarrollar la curvatura y no sea recortada. Así como la implementación de la función de interpolación *spline* en tensión que permita el ajuste del parámetro de tensión por tramos de interpolación.

La forma en que se ha llevado a cabo el diseño de la cadera de TEO difiere del diseño de la pelvis en los anteriores proyectos RH. La disposición de los grados de libertad en TEO confiere más robustez y la pelvis separa más los grados de libertad de ambas piernas. En la planificación del movimiento de subir escaleras, llevada a cabo en este proyecto, se ha mantenido la misma orientación de la pelvis de la que se partía en la postura inicial, pensando en evitar la colisión entre las partes superiores de las piernas. Se propone para proyectos futuros realizar una planificación que proporcione diversas orientaciones de la pelvis a lo largo del paso, lo que redundaría en una mejora de resultados conseguidos al obtener los valores máximos de longitud del paso y altura del escalón que TEO sería capaz de superar o bien desarrollar nuevas planificaciones como sería subir una escalera de caracol.

Otro aspecto a tener en cuenta es que las articulaciones deben tener un juego casi nulo, pues un pequeño juego angular se amplifica en la posición del extremo en función de la longitud del eslabón correspondiente, con lo cual puede dar errores considerables. Además, si no se dispone de información sobre la altura real del punto donde va a hacer el aterrizaje el pie en vuelo ha de considerarse la conveniencia de emplear una planificación de trayectorias de los pies relativas a la trayectoria de la pelvis, tema que se propone para futuros proyectos.

Por otra parte, un aspecto esencial de la bipedestación es el equilibrio. Existen diversos indicadores que se utilizan para determinar si un cuerpo se encuentra en equilibrio tales como el margen de estabilidad, el punto de momento cero (ZMP) o el indicador de rotación del pie (FRI). En esencia todos los indicadores citados consisten en comprobar si un punto se encuentra dentro del polígono de soporte de la estructura, que es el área que encierra los puntos de apoyo de la estructura. Se propone para proyectos futuros tener en cuenta estos indicadores para comprobar la estabilidad de la estructura al reproducir las trayectorias generadas en las articulaciones.

Presupuesto de proyecto

Universidad Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Descripción del proyecto

Título: Generación de trayectorias para el tren inferior del robot humanoide TEO subiendo escaleras

Duración (meses): 2

Desglose presupuestario (costes directos)

Costes de personal

Apellidos y nombre	N.I.F	Categoría	Dedicación (hombres mes)[a)]	Coste hombre mes (€)	Coste (€)	Firma de conformidad
Sáenz Navarro, Fernando		Ingeniero	2	2.694,39	5.388,78	
				Total	**5.388,78**	

a) 1 Hombre mes = 131,25 horas. Máximo anual de dedicación de 12 hombres mes (1575 horas).

Costes de equipos

Descripción	Coste (€)	% uso dedicado proyecto	Dedicación (meses)	Periodo depreciación (meses)	Coste imputable (€)
Ordenador portátil HP 6715s	400,00	100%	2	60	13,33
Licencia Individual Matlab	1694,92	100%	2	60	56,50
				Total	**69,83**

Resumen de costes

Costes totales	
Descripción	**Coste (€)**
Personal	5.388,78
Amortización	69,83
Costes Indirectos (20%)	1.091,72
Total	**6.550,33**

El presupuesto total de este proyecto asciende a la cantidad de 6.550,33 euros.

Leganés a 22 de junio de 2012.

El ingeniero proyectista

Fdo. Fernando Sáenz Navarro.

Bibliografía

[1] J. A. S. Sánchez, *Avances en robótica y visión por computador*. Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, 2002.

[2] "MathWorks España - MATLAB - Technical Literature." [Online]. Available: http://www.mathworks.es/products/matlab/technicalliterature.html. [Accessed: 03-Nov-2011].

[3] P. I. Corke, "A robotics toolbox for MATLAB," *IEEE Robotics Automation Magazine*, vol. 3, no. 1, pp. 24-32, 1996.

[4] P. Corke, "MATLAB toolboxes: robotics and vision for students and teachers," *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, vol. 14, no. 4, pp. 16-17, 2007.

[5] P. Corke, *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*. Springer, 2011.

[6] "Robotics Toolbox." [Online]. Available: http://www.petercorke.com/Robotics_Toolbox.html. [Accessed: 03-Nov-2011].

[7] I. M. Rull, *Biomecánica clínica de las patologías del aparato locomotor*. Masson, 2007.

[8] J. E. Zachazewski, P. O. Riley, and D. E. Krebs, "Biomechanical analysis of body mass transfer during stair ascent and descent of healthy subjects.," *Journal Of Rehabilitation Research And Development*, vol. 30, no. 4, pp. 412-422, 1993.

[9] M. Trew and T. Everett, *Human movement: an introductory text*. Churchill Livingstone, 2001.

[10] E. Viel, *La marcha humana: biomecánica, exploraciones, normas y alteraciones*. Masson, 2002.

[11] R. E. OUTERBRIDGE, "FURTHER STUDIES ON THE ETIOLOGY OF CHONDROMALACIA PATELLAE.," *The Journal of bone and joint surgery British volume*, vol. 46, pp. 179-190, 1964.

[12] C. B. Japa Chauca, "Deformidades torsionales de los miembros inferiores y la alteración del equilibrio dinámico en niños de 4 a 7 años," Universidad Nacional Mayor de San Marcos, 2008.

[13] F. J. H. Vázquez, *Torpeza motriz: un modelo para la adaptación curricular*. EUB, 1995.

[14] J. L. C. Caveda and V. V. Garófano, *Fundamentos para el desarrollo de la motricidad en edades tempranas*. Ediciones Aljibe, 1997.

[15] M. R. Arbulu Saavedra, "Stable locomotion of humanoid robots based on mass concentrated model," Universidad Carlos III de Madrid, 2009.

[16] A. Albert and W. Gerth, "Analytic Path Planning Algorithms for Bipedal Robots without a Trunk," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 36, no. 1994, pp. 109-127, 2003.

[17] M. Vukobratovic and B. Borovac, "Zero-moment point — thirty five years of its life," *International Journal of Humanoid Robotics*, vol. 1, no. 1, pp. 157-173, 2004.

[18] A. Goswami, "Postural Stability of Biped Robots and the Foot-Rotation Indicator (FRI) Point," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, no. 6, pp. 523-533, 1999.

[19] Q. Li, A. Takanishi, and I. Kato, "Learning Control for a Biped Walking Robot with a Trunk," *Proceedings of the 1993 IEEERSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS 93*, vol. 00, no. C, pp. 1771-1777, 1993.

[20] J. H. Park and Y. K. Rhee, "ZMP trajectory generation for reduced trunk motions of biped robots," *Proceedings 1998 IEEERSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Innovations in Theory Practice and Applications Cat No98CH36190*, vol. 1, no. October, pp. 90-95, 1998.

[21] F. Merat, "Introduction to robotics: Mechanics and control," *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 3, no. 2. pp. 166-166, Apr-1987.

[22] Z. Tang, C. Zhou, and Z. Sun, "Gait Planning for Soccer-Playing Humanoid Robots," vol. 299, T.-J. Tarn, C. Zhou, and S.-B. Chen, Eds. Springer Berlin / Heidelberg, 2004, pp. 241-262.

[23] F. Multon, L. France, M. Cani-Gascuel, and G. Debunne, "Computer animation of human walking: a survey," *The Journal of Visualization and Computer Animation*, vol. 10, no. 1, pp. 39-54, 1999.

[24] H. Benbrahim, "Biped dynamic walking using reinforcement learning," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 22, no. 3–4, pp. 283-302, 1997.

[25] C.-M. Chew and G. A. Pratt, "Dynamic bipedal walking assisted by learning," *Robotica*, vol. 20, no. 05, pp. 477-491, 2002.

[26] M.-Y. Cheng and C.-S. Lin, "Genetic algorithm for control design of biped locomotion," *Journal of Robotic Systems*, vol. 14, no. 5, pp. 365-373, 1997.

[27] K. S. Jeon, “Optimal trajectory generation for a biped robot walking a staircase based on genetic algorithms,” *2004 IEEERSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS IEEE Cat No04CH37566*, vol. 3, no. 1, pp. 2837-2842, 2004.

[28] A. W. Salatian and Y. F. Zheng, “Gait synthesis for a biped robot climbing sloping surfaces using neural networks. I. Static learning,” in *Robotics and Automation, 1992. Proceedings., 1992 IEEE International Conference on*, 1992, pp. 2601-2606 vol.3.

[29] A. W. Salatian and Y. F. Zheng, “Gait Synthesis for a Biped Robot Climbing Sloping Surfaces Using Neural Networks -- Part II: Dynamic Learning,” in *Proceedings 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1992, vol. 3, pp. 2607-2611.

[30] R. F. Reinhart and J. J. Steil, “Reaching movement generation with a recurrent neural network based on learning inverse kinematics for the humanoid robot iCub,” *2009 9th IEEERAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 323-330, 2009.

[31] B. van der Pol, “On relaxation-oscillations,” *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci.*, vol. 2(7), pp. 978-992, 1927.

[32] J. S. Bay and H. Hemami, “Modeling of a neural pattern generator with coupled nonlinear oscillators.,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 34, no. 4, pp. 297-306, 1987.

[33] G. Taga, Y. Yamaguchi, and H. Shimizu, “Self-organized control of bipedal locomotion by neural oscillators in unpredictable environment.,” *Biological Cybernetics*, vol. 65, no. 3, pp. 147-159, 1991.

[34] T. Luksch, “Human-like Control of Dynamically Walking Bipedal Robots - PhD Thesis,” Technischen Universita¨t Kaiserslautern, 2010.

[35] O. Katayama, Y. Kurematsu, and S. Kitamura, “Theoretical studies on neuro oscillator for application of biped locomotion,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA*, 1995.

[36] C. T. Lin and C. S. G. Lee, “Neural-network-based fuzzy logic control and decision system,” *IEEE Transactions on Computers*, vol. 40, no. 12, pp. 1320-1336, 1991.

[37] C. Zhou, “Neuro-fuzzy gait synthesis with reinforcement learning for a biped walking robot,” *Soft Computing*, vol. 4, 2000.

[38] A. Goswami, “Kinematic and dynamic analogies between planar biped robots and the reaction mass pendulum (RMP) model,” *Compass*, 2008.

[39] S. Kajita et al., “Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point,” *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation Cat No03CH37422*, vol. 2, pp. 1620-1626, 2003.

[40] A. Takanishi, Y. Egusa, M. Tochizawa, T. Takeya, and I. Kato, “Realization of Dynamic Biped Walking Stabilized with Trunk Motion,” in *Proceedings 7th International Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, 1988, pp. 68-79.

[41] S. Kagami, T. Kitagawa, K. Nishiwaki, T. Sugihara, M. Inaba, and H. Inoue, “A fast dynamically equilibrated walking trajectory generation method of humanoid robot,” *Autonomous Robots*, vol. 12, no. 1, pp. 71-82, 2002.

[42] T. Katayama, T. Ohki, T. Inoue, and T. Kato, “Design of an Optimal Controller for a Discrete Time System Subject to Previewable Demand,” *International Journal of Control*, vol. 41, no. 3. pp. 677-699, 1985.

[43] “Planos anatómicos y ejes con nombres en castellano.,” *Wikipedia, la enciclopedia libre.* [Online]. Available: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Planos_anatómicos.svg. [Accessed: 16-Nov-2011].

[44] M. Arbulu, D. Kaynov, L. Cabas, and C. Balaguer, “The Rh-1 full-size humanoid robot: Design, walking pattern generation and control,” *Applied Bionics and Biomechanics*, vol. 6, no. 3, pp. 301-344, 2009.

[45] D. Kaynov, “Open Motion Control Architecture for Humanoid Robots,” Universidad Carlos III de Madrid, 2008.

[46] “Robotics Lab UC3M Humanoid.” [Online]. Available: http://roboticslab.uc3m.es/roboticslab/robot.php?id_robot=2. [Accessed: 11-Nov-2011].

[47] A. Ollero Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2001.

[48] J. J. Craig, *Introduction to Robotics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989, pp. 1-29.

[49] R. P. Paul, *Robot manipulators: mathematics, programming, and control : the computer control of robot manipulators*. MIT Press, 1981.

[50] D. L. Peiper, “The Kinematics of Manipulators Under Computer Control,” in *Proceedings of the Second International Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, 1969, vol. 2.

[51] "HEMERO: Herramienta MATLAB/Simulink para el estudio de manipuladores y robots móviles ." [Online]. Available: http://grvc.us.es/hemero/index.html. [Accessed: 06-Mar-2012].

[52] C. Moler, "Numerical Computer with MATLAB By Cleve Moler SIAM , 2004 Preface," *Computer*, 2004.

[53] D. Schweikert, "An Interpolation Curve Using a Spline in Tension," *J of Math and Phys*, vol. 45, pp. 312-317, 1966.

Apéndice

Scripts utilizados en las pruebas para realizar las figuras

Script para dibujar la trayectoria temporal de la pelvis

```
generacion_estructuras; A = estructuras{2}.base; B= estructuras{1}.base;p = zeros(
3,size(qDerInterp,1));close all;for i = 1:size(qDerInterp,1)
     if (tInterp(i)<=parametros.Tstep)

      estructuras{1}.base  =  B;

      p(:,i)=transl(cinematica_directa(estructuras{1}, qDerInterp(i,:)));
    else
      estructuras{1}.base =  B;
      estructuras{2}. base = eye(4);
      estructuras{2}.base = cinematica_directa (estructuras{1},
qDerInterp(tInterp==parametros.Tstep,:))/cinematica_directa(estructuras{2},
qIzdInterp(tInterp==parametros.Tstep,:));

      p(:,i)= transl(cinematica_directa(estructuras{2}, qIzdInterp(i,:)));
    end
end; plot(tInterp, p); xlabel('t[s]');ylabel('Posición[m]');
```

Script utilizado en el dibujo tridimensional de la trayectoria de la pelvis

```
pelvis=ones(3,length(tInterp));close all;hold on; for i = 1:size(qDerInterp,1)
     if (tInterp(i)<=parametros.Tstep)
        estructuras{2}.base = eye(4);
        estructuras{2}.base =
cinematica_directa(estructuras{1},qDerInterp(i,:))/cinematica_directa(estructuras{2},
qIzdInterp(i,:));
        pelvis(:,i)=transl(cinematica_directa(estructuras{2}, qIzdInterp(i,:)));

    else
           estructuras{1}.base = eye(4);
estructuras{1}.base =
cinematica_directa(estructuras{2},qIzdInterp(i,:))/cinematica_directa(estructuras{1},
qDerInterp(i,:));
         pelvis(:,i)=transl(cinematica_directa(estructuras{2}, qIzdInterp(i,:)));
    end
end; hold off;
plot3(pelvis(1,:), pelvis(2,:), pelvis(3,:))
camorbit(180,0,'data',[0 0 1])
camorbit(-90,0,'data',[1 0 0])
camorbit(90,0,'data',[ 0 1 0])
xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z')
```

Script utilizado en el dibujo de la trayectoria temporal de los pies

```
generacion_estructuras;
P_dcho  =  zeros(3, length(tInterp));
```

```
P_izdo  =  zeros(3, length(tInterp));

for i = 1:size(qDerInterp,1)

    if (tInterp(i)<=parametros.Tstep)

        estructuras{2}.base = eye(4);
        estructuras{2}.base =
cinematica_directa(estructuras{1},qDerInterp(i,:))/cinematica_directa(estructuras{2},
qIzdInterp(i,:));
        P_dcho(1:3,i) =  transl(estructuras{1}.base);
       P_izdo(1:3,i) = transl(estructuras{2}.base);
    else

        estructuras{1}.base = eye(4);
        estructuras{1}.base =
cinematica_directa(estructuras{2},qIzdInterp(i,:))/cinematica_directa(estructuras{1},
qDerInterp(i,:));
       P_dcho(1:3,i) =  transl(estructuras{1}.base);
       P_izdo(1:3,i) = transl(estructuras{2}.base);
    end

end
plot(tInterp,P_dcho(1,:),'b-',tInterp,P_dcho(2,:),'g-',tInterp,P_dcho(3,:),'r-
',tInterp,P_izdo(1,:),'b:',tInterp,P_izdo(2,:),'g:',tInterp,P_izdo(3,:),'r:')
xlabel('t[s]');ylabel('Posición[m]');
```