LEX NOVA

11

LA VALORACIÓN DE OPCIONES SOBRE ACCIONES: UN ENFOQUE TEÓRICO [1]

J. IGNACIO PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA

Catedrático de Economía Financiera
de la Empresa
Universidad Carlos III de Madrid

Este trabajo introduce las principales ideas de los modelos de valoración de opciones sobre acciones: binomial y Black-Scholes-Merton. Se discuten los principales sesgos del modelo de valoración de Black-Scholes y se comenta brevemente el efecto que la introducción de los mercados de derivados ha tenido sobre los mercados de contado.

Palabras clave: valoración de opciones, modelo de Black-Scholes, sonrisas de volatilidad.

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta las principales ideas en las que se basan los modelos más conocidos de valoración de opciones sobre acciones: el binomial y su extensión en tiempo continuo, el modelo de Black-Scholes (BS en adelante). Los dos conceptos que se van a subrayar son: el grado de apalancamiento que los derivados permiten y la idea crucial (debida a R.C. Mer-

---

(1) Una versión preliminar de este trabajo se presentó en el curso «Los Mercados de Productos Derivados en el Nuevo Escenario Europeo» en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo en julio de 1999. El autor agradece el patrocinio aportado por MEFF para la realización de este trabajo.

ton) de la construcción de la cartera equivalente sin riesgo para valorar opciones. A continuación se comentan los principales sesgos que se han observado en la aplicación del modelo BS a los mercados reales y se finaliza exponiendo los resultados de las investigaciones sobre el efecto que la introducción de los mercados de derivados sobre el mercado del subyacente o mercado de contado.

II. EL PRIMER CONTRATO DE DERIVADOS

Como se menciona en Crawford y Sen (1996), el primer contrato de derivados de que se tiene noticia se cita en la «Política» de Aristóteles (500 BC). En el libro se relata la historia de un sabio filósofo llamado Thales de Mileto. Este pensador vivía de manera muy sencilla lo que ocasionaba que sus conocidos le preguntasen que si era tan sabio cómo es que vivía pobremente. Harto de la situación, Thales decidió utilizar su sabiduría para demostrarles que si vivía pobremente era porque así lo había elegido. Usando sus conocimientos sobre meteorología y astrología, se percato de que la próxima cosecha de aceituna iba a ser muy abundante. A continuación visitó a los dueños de las almazaras cercanas y mediante el pago de una pequeña cantidad (depósito o prima), se aseguró el derecho a ser el primero en utilizar el molino de aceite cuando llegara la cosecha, pagando un cierto precio predeterminado (precio de ejercicio, X). La cosecha fue, en efecto, muy abundante y cuando los agricultores fueron a las almazaras a moler la aceituna tuvieron que pagar un elevado precio de mercado (S) (superior al de ejercicio) a Thales para que este les cediera su derecho de uso.

Aristóteles no precisa exactamente el tipo de contrato que realizó Thales, pero desde el punto de vista financiero moderno, podemos pensar que se trataba o bien de un contrato a plazo (forward) o bien de un contrato de opción. Las figuras 1 y 4 presentan los posibles resultados de la estrategia de Thales si el contrato era un forward. Nótese que, si hay buena cosecha, la demanda para usar el molino elevará el precio de mercado por encima del precio de ejercicio ($S > X$) conseguido por Thales y por tanto este obtendrá un beneficio considerable. Sin embargo, si Thales no hubiese acertado en sus predicciones, al ser la cosecha menor de lo esperado, la demanda de uso de almazaras sería menor y el precio de mercado estaría por debajo del precio de ejercicio ($S < X$), lo cual hubiese ocasionado pérdidas considerables a Thales.

Si el contrato hubiese sido una opción de compra (call) las figuras 2 y 4 presentan los posibles resultados. Nótese que en el caso de una buena cosecha, el beneficio es considerable, comparable al del forward, pero en el caso de una mala cosecha, Thales únicamente pierde la pequeña cantidad que depositó como garantía, sin incurrir en pérdidas adicionales al no ejercer la opción. Esta asimetría en los resultados marca la diferencia fundamental entre ambos contratos de derivados: en el caso del forward tanto las pérdidas como las ganancias pueden ser muy grandes, pero en el caso de la opción, las pérdidas están limitadas. No obstante ambos contratos comparten el mismo rasgo, común a todos los contratos de derivados, el alto apalancamiento de los mismos, entendiendo por esto la situación en la cual con una aportación pequeña, se comprometen recursos considerables. En el siguiente punto se expone esta idea con otro ejemplo.

III. HILLARY CLINTON EN EL MERCADO DE FUTUROS

En octubre de 1978 Hillary Clinton invirtió \$1.000 en contratos de futuros sobre ganado y en julio de 1979 se retiró del mercado, con un saldo de \$100.000. La rentabilidad obtenida fue de más del 10.000 por 100. La explicación de estas ganancias tan enormes se debe a dos factores. En primer lugar a la habilidad del inversor para tomar las posiciones adecuadas. En particular el comprar contratos de futuros, en unos momentos en los que el subyacente experimentó fuertes subidas durante un período prolongado. Pero esta visión correcta de la evolución del mercado se combinó con un grado de apalancamiento extremadamente alto, que amplificó notablemente los resultados de una estrategia acertada.

Como ejemplo, veamos la estrategia de inversión de Ms. Clinton el día 11 de octubre de 1978. Por la mañana, compró 10 contratos de futuros (sobre 400.000 libras de ganado, con un valor nocional de \$160.000) a un precio de \$0,40 la libra. El depósito de garantía que había efectuado por la mañana era de \$1.000. Por la tarde, cerró su posición, vendiendo los contratos a un precio de liquidación de \$0,42. Su ingreso fue de \$8.000, es decir una rentabilidad diaria del 800 por 100. Sin embargo, el depósito de garantía (margen legal) exigido por el mercado de futuros era del 10 por 100 del nocional (\$16.000), lo cual implica un apalancamiento de 16 a 1. Pero Ms. Clinton sólo depositó una fracción de esa cantidad y su apalancamiento fue de **160 a 1.** Las razones por las cuales se produjo esa situación irregular no son el objeto de este trabajo, pero lo que importa señalar es cómo ese apalancamiento tan considerable amplificó las ganancias de Ms. Clinton de manera muy notable. Por supuesto que el apalancamiento no es gratis, sino que implica costes tanto en términos financieros, como de riesgos, pero si se combina adecuadamente con estrategias acertadas, los resultados son llamativos. Por supuesto, que si las estrategias son desacertadas, las pérdidas pueden ser enormes como en los casos de Barings y otros.

IV. FACTORES BÁSICOS EN LA VALORACIÓN DE OPCIONES SOBRE ACCIONES

A continuación introducimos la notación básica para estudiar los modelos de valoración de opciones sobre acciones:

— c: precio de una call europea.
— p: precio de una put europea.
— S: precio del subyacente.
— X: precio de ejercicio.
— t: momento actual.
— T: fecha de vencimiento de la opción.
— σ: Volatilidad del subyacente.
— C: precio de una call americana.
— P: precio de una put americana.
— D: valor actual de los dividendos.
— r: tipo sin riesgo al plazo del vencimiento de la opción.

Otros factores que son (potencialmente) importantes en la valoración de opciones sobre acciones, pero que no se incluyen explícitamente en los modelos que vamos a discutir a continuación son:

— Tratamiento fiscal de las operaciones con opciones.
— Márgenes y cuentas de garantía exigidos por los mercados de opciones.
— Costes de transacción explícitos (comisiones).
— Costes de transacción implícitos (horquilla de precios).
— Estructura del mercado (electrónico, subasta, etcétera).

En la tabla de la figura 5 tenemos un resumen de los efectos de las variables sobre el valor de las opciones.

V. UN PRIMER ENFOQUE DE VALORACIÓN: EL MODELO BINOMIAL

Este modelo se debe a Cox, Ross y Rubinstein (1979), como una simplificación del modelo de BS. La idea básica es que al comienzo de cada período, el precio del subyacente solo puede moverse en dos direcciones o arriba o abajo. Por tanto al final de cada período solo tenemos dos precios, uno de ellos superior y otro inferior al precio de principio del período. Veamos esto con el siguiente ejemplo, dibujado en la figura 6. Supongamos que se desea valorar una Opción Call Europea con 3 meses al vencimiento y un precio de ejercicio X=$21, sobre un subyacente (una acción que no paga dividendos durante la vida de la opción) que hoy vale S=$20 y que se sabe que al cabo de los tres meses valdrá o bien $22 o bien $18. En el primer caso la opción valdrá c=$1 y en el segundo c=$0.

La idea fundamental es construir una cartera libre de riesgo formada por una posición larga en Δ acciones y corta en la opción (véase figura 7). Nótese que para que esta cartera esté libre de riesgo, debe cumplirse que Δ = 0,25. Supongamos r = 12 por 100. La cartera *sin riesgo* es: LARGA 0,25 acciones y CORTA 1 opción call. El valor de la cartera *dentro de 3 meses* es 22 × 0,25 - 1 = 4,50. El valor de la cartera *hoy* será: 4,50 e $^{(-0,12 \times 0,25)}$ = 4,3670. Por tanto, la cartera sin riesgo (0,25 × S - 1 × c) vale hoy $4,367. Las acciones hoy valen S=$20 y por tanto su valor en esa cartera es $5,0 = 0,25 × 20. Es decir, **el valor de la opción** hoy es:

$$c = 5{,}0 - 4{,}367 = \$0{,}633$$

La generalización de esta idea está en la figura 8. Consideremos un derivado f que vence en el momento T, sobre un subyacente puede tomar dos valores: Su o Sd, donde u>1 y d<1.

Formamos la cartera ΔS - f. En T vale ΔSu - f_u o bien ΔSd – f_d. Para que no tenga riesgo debe cumplirse que

$$\Delta Su - f_u = \Delta Sd - f_d.$$

Lo cual implica que:

$$\Delta = (f_u - f_d) / (Su - Sd)$$

Podemos reinterpretar lo anterior del modo siguiente. Considere la cartera ΔSu – f_u que hoy vale (ΔSu - f_u) $e^{-r\,(T-t)}$. Por tanto se cumple que:

$$f = \Delta S - (\Delta Su - f_u)\, e^{-r\,(T-t)}$$

que es equivalente a

$$f = (p f_u + (1 - p) f_d)\, e^{-r\,(T-t)}$$

donde

$$p = [e^{-r\,(T-t)} - d] / (u - d).$$

Recordando que $f = [p f_u + (1-p) f_d]\, e^{-r\,(T-t)}$, las variables p y (1-p) se pueden interpretar como las probabilidades *neutrales al riesgo* de subidas y bajadas en S. Por tanto el valor del derivado f es el valor esperado de sus pagos en un mundo neutral al riesgo, descontado al tipo sin riesgo.

Siguiendo con los datos del ejemplo anterior:

$$f_u = 1,\ f_d = 0,\ u = 1{,}1,\ d = 0{,}9,\ e^{-r\,(T-t)} = e^{-0{,}12\,(0{,}25)}$$

Por tanto

$$p = [e^{-r\,(T-t)} - d] / (u - d) = 0{,}6523$$

y el valor de la opción es:

$$f = (0{,}633 \times 1 + 0{,}3477 \times 0)\ e^{-0{,}12\ (0{,}25)} = 0{,}633$$

Para realizar valoración binomial en la práctica, hay que seleccionar el número de pasos (horizonte). Por ejemplo con 30 pasos hay 31 precios terminales y 2^{30} posibles trayectorias de los precios. Recordemos también que los valores de u y d se determinan en función de la volatilidad σ y que hay problemas especiales con Opciones Americanas y el tratamiento de dividendos [véanse los libros de Cox y Rubinstein (1985) o Hull (1997)].

El elemento fundamental de este enfoque de valoración se basa en el Delta (Δ) que es el ratio del *cambio* de precio de la **opción** con respecto al *cambio* de precio en el **subyacente.** Nótese que el valor de Δ varía en cada instante del tiempo (nodo), es decir la composición de la cartera de riesgo neutro debe modificarse en cada período. Esta idea básica de la cartera delta-equivalente es la que está detrás del enfoque de valoración de Black-Scholes-Merton.

VI. LOS CONCEPTOS BÁSICOS EN BLACK-SCHOLES-MERTON

Las hipótesis fundamentales de este enfoque se detallan en los trabajos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) y son las siguientes:

- El **precio** del subyacente, S sigue un proceso **Lognormal** en tiempo continuo (las rentabilidades siguen una Normal).
- El precio del derivado y el precio del subyacente dependen de la **misma fuente de incertidumbre**.
- Se puede construir una cartera formada por la acción y el derivado que **elimina** esta fuente de incertidumbre.
- La cartera **no tiene riesgo** y por tanto debe rentar el tipo sin riesgo (instantáneamente).

Estas hipótesis combinadas con las herramientas del cálculo estocástico en tiempo continuo dan lugar a la PDE (ecuación diferencial parcial) de Black-Scholes-Merton, (BSM) cuyas propiedades son:

1. Cualquier activo cuyo precio depende del subyacente, satisface la PDE de BSM
2. El precio de cada activo en particular se determina por las **condiciones de contorno** en la PDE.

La ecuación (PDE) tiene la forma:

$$f_t + rS\, f_S + 0.5\ \sigma^2\ S^2 f_{SS} = rf$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales del derivado con respecto a las variables correspondientes.

Así, por ejemplo en un contrato forward (a plazo) la **condición de contorno** es $f = S - X$ cuando $t = T$ y la solución de la PDE es

$$f = S - Xe^{-r\,(T-t)}$$

Es importante señalar que en la ecuación PDE de BSM **no aparece** la rentabilidad esperada de la acción (solo están su precio S y su volatilidad σ) y por tanto es independiente de todas las variables afectadas por las preferencias al riesgo. De ahí se sigue que la solución de la PDE es la misma en un mundo **neutral al riesgo** que en el mundo real.

VII. LAS FÓRMULAS DE BLACK-SCHOLES

La solución de la PDE para opciones europeas, cuyas condiciones de contorno al vencimiento son, para una Call, Max (S – X,0) y para una Put, Max (X – S,0), da lugar a las conocidas fórmulas de valoración de Black-Scholes:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r\,(T-t)}\,N(d_2)$$

$$p = Xe^{-r\,(T-t)}\,N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Podemos dar dos interpretaciones de la fórmula de BS. La primera es considerar la opción call como una posición larga en un Forward generalizado:

$$f = S - \text{Valor actual de X}$$

$$c = \Delta\, S - \Phi\ \text{Valor actual de X}$$

nótese que si la opción está muy en dinero $\Delta \approx \Phi \approx 1$ y la relación es clara.

Otra interpretación es la de la opción call como una cartera compuesta por una posición larga en acciones y corta en bonos, con ajuste continuo de las proporciones:

c = Cantidad invertida acciones - Préstamo solicitado para financiar (parcialmente) la compra de acciones

Para las opciones puts pueden usarse iguales razonamientos.

VIII. SESGOS DE VALORACIÓN

En la aplicación de la fórmula BS a mercados reales se han ido observando una serie de sesgos de valoración. Conviene recordar que la paridad Put-Call $c + Xe^{-r\,(T-t)} = p + S$ se cumple independientemente de la distribución de S. Por tanto el sesgo de valoración de una call con X, ocasionado por usar una distribución incorrecta para S, será el mismo que el de la put con el mismo X. En resumen, OTM calls tienen los mismos sesgos que ITM puts, OTM puts tienen los mismos sesgos que ITM calls.

Los principales sesgos en Black-Scholes se resumen en la figura 9. Estos sesgos ocasionan el fenómeno conocido como «sonrisas de volatilidad». Para comprender este concepto hay que recordar que la volatilidad implícita se calcula «invirtiendo» la formula de Black-Scholes, dados unos precios de mercado para las opciones. Si la distribución del subyacente es Lognormal, la VI es la misma para cualquier precio de ejercicio y lo esperable sería un gráfico como el de la figura 10.

Sin embargo, en los mercados existentes se observan los siguientes tipos de sonrisas:

a) «Sonrisa» (Smile) como en la figura 11.
b) «Mueca» (Smirk) como en la figura 12.
c) «Mueca» (Sneer) como en la figura 13.
d) «Tristeza» (Sad) como en la figura 14.
e) «Estructura temporal de volatilidades» (Volatility Term Structure) como en la figura 15.

Para tratar de corregir este tipo de sesgos, en la actualidad se está investigando en modelos alternativos a BS, entre los que podemos citar:

— Volatilidad Estocástica (VE).
— Saltos.
— Saltos + Difusión.
— VE + Saltos.
— GARCH.
— Árboles implícitos (consistentes con VE).

Véanse los trabajos de Rubinstein (1994) y Chriss (1998) entre otros. Sobre determinantes de la sonrisa de volatilidad véase Peña, Rubio y Serna (1999).

IX. MERCADOS DE DERIVADOS Y MERCADOS DE CONTADO

Hay una considerable cantidad de trabajos que tratan de estudiar el efecto que sobre los mercados de contado ha tenido la introducción de mercados de derivados. En el caso de los mercados españoles, podemos citar a AYUSO y NÚÑEZ (1995), BLANCO (1998) y PARDO (1998) entre otros. La pregunta que se plantea es: ¿Estabilización o desestabilización?

Los argumentos a favor de la estabilización son: mejor información, menores costes de transacción, más adecuada distribución del riesgo.

A favor de la desestabilización (sobre todo a partir del crash del '87): exceso de especuladores, demasiado apalancamiento, *program trading*, seguro de carteras.

La evidencia empírica es:

— No hay evidencia concluyente que indique **aumentos o disminuciones** de la **volatilidad** del contado al aparecer el mercado de derivados.
— Evidencia consistente con incrementos en la **eficiencia informacional** del mercado de contado (indicador adelantado).
— Evidencia preliminar que indica **aumentos en el volumen** de contratación del contado.

X. REFERENCIAS

AYUSO, J y S. NUÑEZ (1995): «¿Desestabilizan los activos derivados el mercado de contado?», *Moneda y Crédito*, núm. 200, págs. 169-200.

BLANCO, R.: (1998) *Mercado de Derivados y Mercados de Contado,* Tesis Doctoral, UPV.

BLACK, F. and M. SCHOLES (1973): «The Pricing of Options and Corporate Liabilities», *Journal of Political Economy*, núm. 81, págs. 637-659.

CHRISS, J. (1998): *Beyond Black Scholes,* Wiley.

COX, J.C. and M. RUBINSTEIN (1985): *Options Markets,* Prentice Hall.

COX, J.C., S. ROSS and M. RUBINSTEIN (1979): «Option Pricing: A Simplified Approach», *Journal of Financial Economics*, núm. 7, págs. 229-263.

CRAWFORD, G. and B. SEN (1996): *Derivatives for Decision Makers,* Wiley.

HULL, J.C. (1997): *Options, Futures and Other Derivatives,* Prentice Hall.

MERTON, R.C. (1973): «Theory of Rational Option Pricing», *Bell Journal of Economics and Management Science*, núm. 4, págs. 141-183.

PARDO, A. (1998): «Efectos de los mercados derivados sobre el IBEX-35 en el activo subyacente», *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, núm. 27, págs. 99-128.

PEÑA, J.I., G. RUBIO and G. SERNA (1999): «Why Do we Smile? On the determinants of the Implied Volatility Function, *Journal of Banking and Finance* (forthcoming).

RUBINSTEIN, M. (1994): «Implied Binomial Trees», *Journal of Finance*, núm. 49, págs. 771-818.

FIGURA 1

Contrato de Thales (forward)

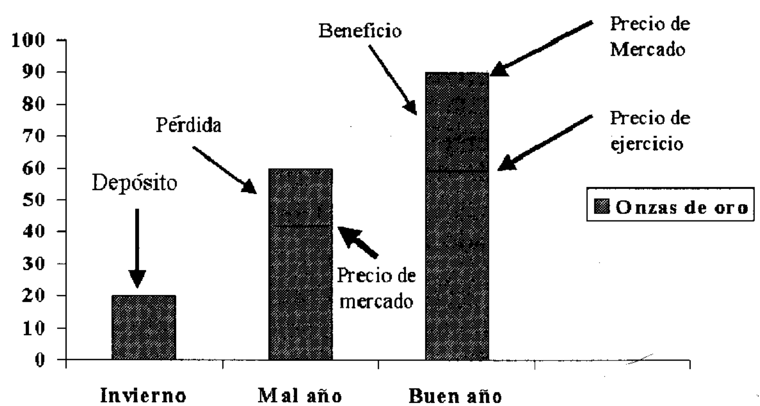

FIGURA 2

Contrato de Thales (opción)

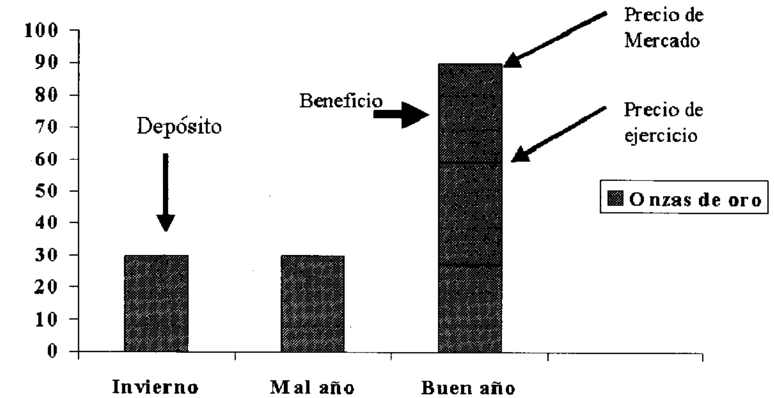

FIGURA 3

Valor de la opción al vencimiento (X = 60, S = 90)

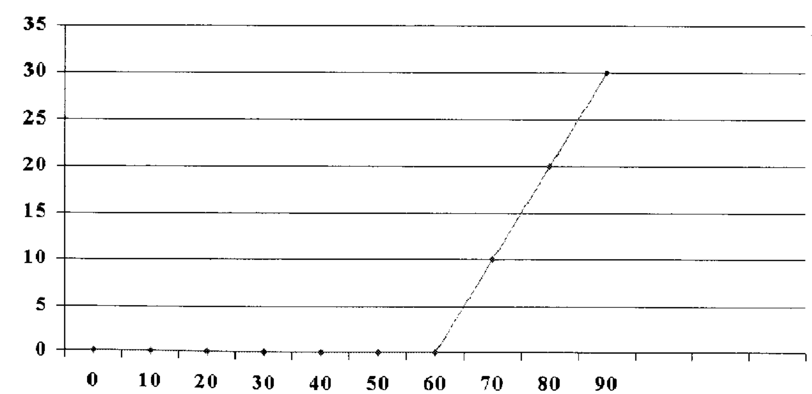

FIGURA 4

Valor del forward al vencimiento (X = 60, S = 90)

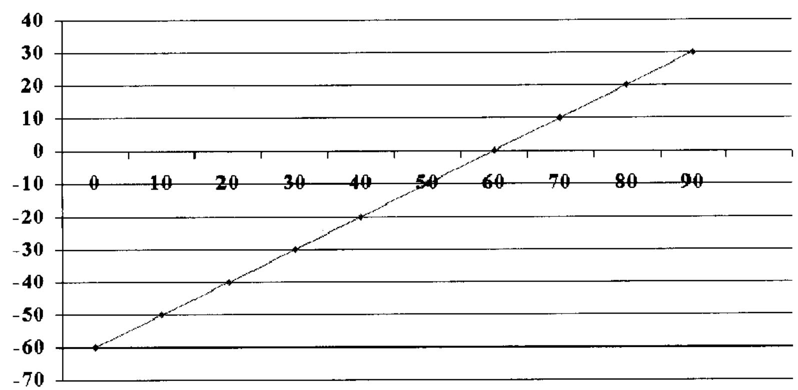

FIGURA 5

Efecto de las variables sobre el valor de las opciones

Variable	c	p	C	P
S	+	-	+	-
X	-	+	-	+
T-t	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	-	+	-
D	-	+	-	+

FIGURA 6

Valoración binomial de una opción call

Supongamos una call con T-t = 3 meses y X = 21

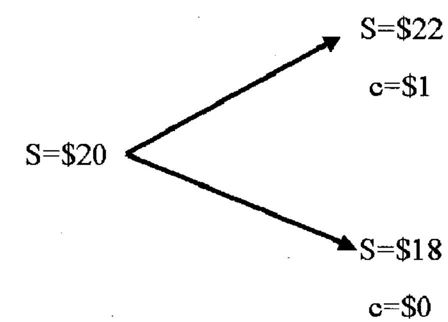

FIGURA 7

La cartera libre de riesgo

Consideremos la cartera formada por una posición LARGA en Δ acciones y corta en 1 opción call

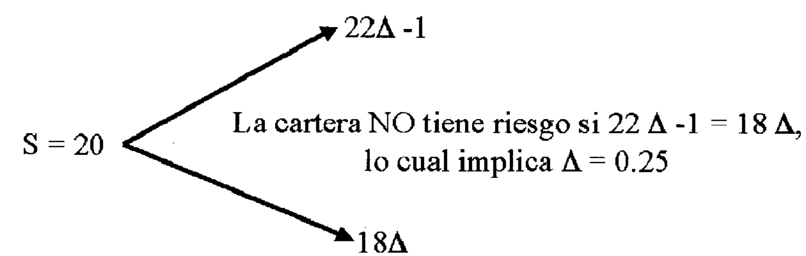

FIGURA 8

Generalización

Consideremos un derivado *f* que vence en el momento T, sobre un subyacente puede tomar dos valores: Su o Sd, donde u > 1 y d < 1

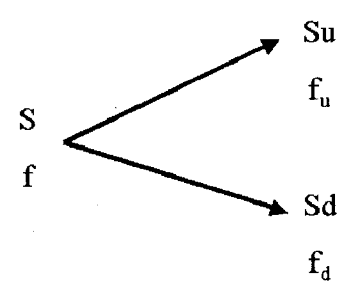

FIGURA 9

Sesgos en Black-Scholes

(ITM: In the money, OTM: Out of the money)

Características de las colas de la distribución S	Calls SOBREvalora	Puts SOBREvalora	Calls INFRAvalora	Puts INFRAvalora
Ambas más delgadas	ITM+OTM	ITM+OTM		
Izquierda más gruesa, derecha más delgada	OTM	ITM	ITM	OTM
Izquierda más delgada, derecha más gruesa	ITM	OTM	OTM	ITM
Ambas más gruesas			ITM+OTM	ITM+OTM

FIGURA 10

Sonrisas de volatilidad

La Volatilidad implícita se calcula "invirtiendo" la fórmula de Black-Scholes. Si la distribución del subyacente es Lognormal, la VI es la misma para cualquier precio de ejercicio

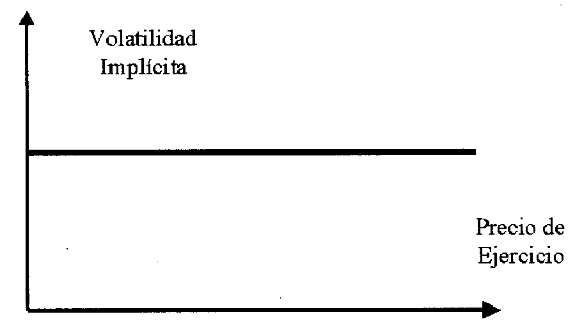

FIGURA 11

Sonrisas de volatilidad

Ambas colas más gruesas (típico en FX y algunos índices de acciones)

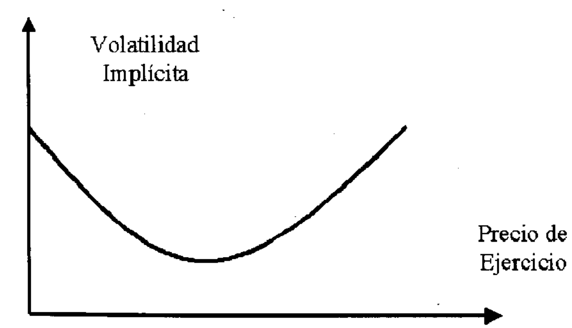

FIGURA 12

Sonrisas de volatilidad

Cola izquierda gruesa, cola derecha delgada (típico en acciones y algunos índices de acciones)

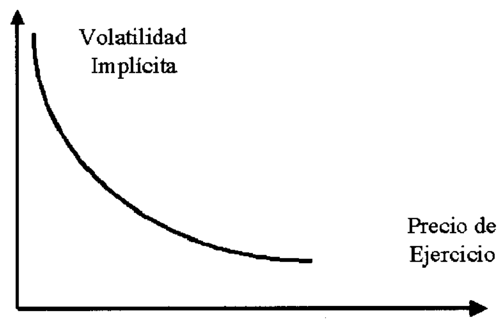

FIGURA 13

Sonrisas de volatilidad

Cola izquierda delgada, cola derecha gruesa

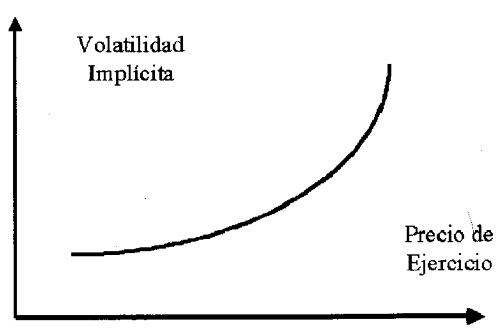

FIGURA 14

Sonrisas de volatilidad

Ambas colas delgadas

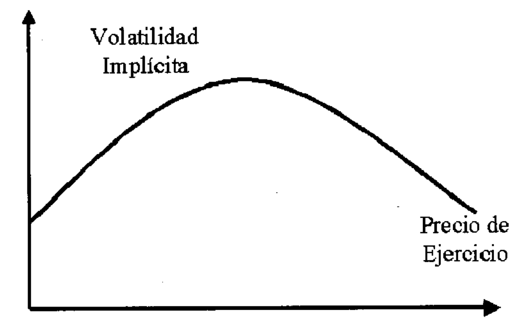

FIGURA 15

Estructura temporal de volatilidades