



Universidad  
Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería Mecánica

Proyecto Fin de Carrera:

***ESTUDIO DE LA INTERACCIÓN FISURA-  
DESEQUILIBRIO EN LA EVOLUCIÓN DE LAS  
ÓRBITAS DE EJES ROTATIVOS***

Autor: Álvaro Melendo Urbano

Tutor: Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

Leganés, mayo de 2011.



## **Resumen:**

La presencia de fisuras en los ejes de cualquier tipo de maquinaria es un grave problema para la integridad de los mismos. Con el avance de las tecnologías se han desarrollado máquinas cuyos ejes giran a altísimas velocidades, aumentando aún más los riesgos relacionados con la posible aparición de fisuras. Por ello, es importante poder anticiparse a la fractura de un eje, sustituyéndolo cuando se aprecien evidencias de que está fisurado. En este estudio se trata de crear una herramienta informática que sea capaz de determinar la órbita que describe el centro de un eje fisurado y sometido a cargas externas. Mediante el análisis de estas órbitas se podrá comprender mejor cómo se comportan los ejes en estas circunstancias, y en el futuro, desarrollar sistemas que sean capaces de detectar fisuras analizando exclusivamente la órbita que describe el eje.

**Palabras clave:** eje, fisura, órbita.

## **Abstract:**

The presence of cracks is a serious problem for the integrity of the shafts of any type of machinery. The progress of technologies has enabled the development of machines whose shafts rotate at high speeds, further increasing the risks associated with the possible appearance of cracks. When an evidence of a crack is noticed it is important to anticipate the failure of the shaft, by replacing it. This study seeks to create an IT tool able to determine the orbit described by the center of a cracked shaft under external loads. Analyzing these orbits it will be better understood how shafts behave under those circumstances, and in the future, to develop systems capable of detecting cracks by analyzing the orbit described by the shaft.

**Key words:** shaft, crack, orbit.

## Índice:

### **Capítulo I:**

#### **Introducción, antecedentes y objetivos**

- 1.1. Introducción
- 1.2. Antecedentes
- 1.3. Mapas de Poincaré y diagramas de bifurcación
- 1.4. Objetivos
- 1.5. Organización del documento

### **Capítulo II:**

#### **Modelo analítico. Rotor Jeffcott**

- 2.1. Modelo de Rotor Jeffcott extendido
- 2.2. Modelo analítico para eje fisurado
  - 2.2.1. Tipos de fisura
  - 2.2.2. Función de apertura y cierre
  - 2.2.3. Modelo analítico

### **Capítulo III:**

#### **Resultados y análisis. Comparación de Órbitas**

- 3.1. Órbitas sin excentricidad
- 3.2. Órbitas con excentricidad
  - 3.2.1. Órbitas con tamaño de fisura  $\alpha=0.1$
  - 3.2.2. Órbitas con tamaño de fisura  $\alpha=0.3$
  - 3.2.3. Órbitas con tamaño de fisura  $\alpha=0.5$
  - 3.2.4. Comparación de las órbitas
  - 3.2.5. Análisis del comportamiento mediante Mapas de Poincaré y diagramas de bifurcación

### **Capítulo IV:**

#### **Conclusiones y trabajos futuros**

- 4.1. Conclusiones
- 4.2. Trabajos futuros

### **Capítulo V:**

#### **Referencias**

#### **Presupuesto**

## Índice de figuras:

### Capítulo I:

- Figura 1.1 Modelo de Rotor Jeffcott.
- Figura 1.2 Sección de Poincaré.
- Figura 1.3 Ejemplos de mapas de Poincaré.
- Figura 1.4 Ejemplo de diagrama de bifurcación.

### Capítulo II:

- Figura 2.1 Modelo de Rotor Jeffcott extendido, desequilibrado y fisurado.
- Figura 2.2 Esquema del Rotor Jeffcott con eje flexible.
- Figura 2.3 Esquema de la geometría del disco.
- Figura 2.4 Fisuras recta y elíptica.
- Figura 2.5 Fisura cerrada debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura.
- Figura 2.6 Fisura abierta al máximo debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura.
- Figura 2.7 Gráfica de la función tipo fisura abierta.
- Figura 2.8 Gráfica de la función propuesta por Gasch.
- Figura 2.9 Gráfica de la función propuesta por Mayes y Davies.
- Figura 2.10 Modelos del fenómeno de "breathing".
- Figura 2.11 Sistemas de referencia.
- Figura 2.12 Fuerzas actuando en la sección de la fisura.
- Figura 2.13 Sección transversal del eje en la localización de la fisura.

### Capítulo III:

- Figura 3.1 Diagrama de flujo del programa empleado para resolver los casos.
- Figura 3.2 Evolución de las variables Y, Z del centro en función del tiempo para  $\alpha=0,1$ .
- Figura 3.3 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,1$ .
- Figura 3.4 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,2$ .
- Figura 3.5 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,3$ .
- Figura 3.6 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\alpha$
- Figura 3.7 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,1$  y  $\beta=0^\circ$  y  $45^\circ$ .
- Figura 3.8 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,1$  y  $\beta=90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ , y  $315^\circ$
- Figura 3.9 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$  ( $\alpha=0,1$ )
- Figura 3.10 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,3$  y  $\beta=0^\circ$  y  $45^\circ$ .
- Figura 3.11 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,3$  y  $\beta=90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ , y  $315^\circ$
- Figura 3.12 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$  ( $\alpha=0,3$ )
- Figura 3.13 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,5$  y  $\beta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ , y  $135^\circ$
- Figura 3.14 Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,5$  y  $\beta=180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ , y  $315^\circ$
- Figura 3.15 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$  ( $\alpha=0,5$ )
- Figura 3.16 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$
- Figura 3.17 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\alpha$

- Figura 3.18 Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\alpha$  y  $\beta$   
Figura 3.19 Diagrama de bifurcación para  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=180^\circ$   
Figura 3.20 Mapa de Poincaré para  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=180^\circ$  y  $\omega=1150$ rpm.  
Figura 3.21 Diagrama de bifurcación para  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0^\circ$   
Figura 3.22 Mapa de Poincaré para  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0^\circ$  y  $\omega=1150$ rpm.  
Figura 3.23 Diagrama de bifurcación para  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=45^\circ$   
Figura 3.24 Mapa de Poincaré para  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=45^\circ$  y  $\omega=1150$ rpm.

## Índice de tablas:

### **Capítulo III**

- Tabla 3.1 Geometría y parámetros físicos del sistema.  
Tabla 3.2 Radios efectivos obtenidos (excentricidad nula).  
Tabla 3.3 Radios efectivos obtenidos (excentricidad no nula).

## Capítulo I:

### *INTRODUCCIÓN, ANTECEDENTES Y OBJETIVOS.*

#### *1.1. Introducción:*

La **rotodinámica** es la rama de la mecánica aplicada especializada en el estudio del comportamiento y el diagnóstico de estructuras rotatorias. Se usa comúnmente para analizar el comportamiento de estructuras que van desde motores aeronáuticos o turbinas de vapor hasta motores de automóviles o discos duros de ordenador. En su nivel más básico, la rotodinámica se refiere a una o más estructuras mecánicas (rotores) apoyadas en cojinetes y bajo la influencia de fenómenos internos, que giran en torno a un eje. La estructura de soporte se llama estátor.

Según aumenta la velocidad de rotación, a menudo la amplitud de la vibración pasa por un máximo, denominado “velocidad crítica”. Esta vibración aumenta aún más si el sistema no está equilibrado. Se manejan a diario ejemplos de este fenómeno como el equilibrado de los neumáticos en un automóvil. Si la amplitud de esta vibración es excesiva, su puede producir un fallo catastrófico.

La presencia de fisuras en un elemento mecánico provoca un aumento de la flexibilidad local del elemento, produciéndose cambios en su comportamiento estático y dinámico que se traducen en el incremento de los desplazamientos, disminución de las frecuencias de vibración y modificación en las órbitas que describen sus secciones, entre otros.

Las máquinas rotativas, tales como turbinas de vapor o gas, compresores, motores de combustión interna o eléctricos, son los componentes más extendidos en la industria, y su elemento más importante es el eje, árbol o rotor. Los fallos que más daños producen en este tipo de maquinaria suelen tener su origen en el fallo de los ejes. Estos, a su vez suelen estar provocados por la presencia de fisuras, unido al tipo de cargas a las que están sometidos y el fenómeno de fatiga.

Un eje fisurado puede pasar desapercibido durante largos períodos de tiempo, favoreciendo el crecimiento de las fisuras por fatiga, hasta alcanzar un tamaño crítico. Es entonces cuando se produce la rotura repentina o fallo por fractura del eje.

Dado que las consecuencias de operar una máquina con defectos (fisuras) entraña un alto riesgo y puede resultar catastrófico, resulta de gran interés detectar e incluso identificar a tiempo fisuras en estos ejes antes de que se alcancen los tamaños críticos y de que se produzca el fallo.

Los ejes fisurados han sido objeto de intensos estudios e investigaciones desde la década de 1960. A lo largo de estos 50 años se han alcanzado importantes logros, el conocimiento del comportamiento dinámico de los ejes fisurados ha permitido detectar la presencia de fisuras y detener muchos ejes antes de que se produjeran fallos por rotura.

En muchos de estos ejes la fisura ya se había propagado, alcanzando en algunos casos una profundidad de hasta el 50% del diámetro, lo que evidentemente es una situación muy crítica. Teniendo en cuenta que generalmente se cree que la velocidad de propagación aumenta

exponencialmente, en muchos de estos casos, sólo unos días más de operación hubieran sido suficientes para provocar un fallo catastrófico, perdiendo completamente la máquina y con riesgo muy alto para el personal y resto de equipos. Los costes de reparación de las máquinas e instalaciones son elevadísimos, además de las pérdidas derivadas de tener la producción parada durante un período de tiempo que puede llegar a ser de varios años.

Cuando una fisura se detecta a tiempo, el rotor se puede sustituir en un plazo corto (días o semanas) suponiendo un coste económico asequible.

Esta situación explica el creciente interés por el comportamiento de las fisuras y particularmente el de los ejes fisurados. A partir de los años 80, investigadores de todo el mundo han contribuido con artículos estudiando diferentes aspectos relacionados con las fisuras y los ejes rotatorios.

Es fácil darse cuenta de la gran importancia que tienen estos estudios e investigaciones para el desarrollo y perfeccionamiento de lo que conocemos como “mantenimiento predictivo” frente al mantenimiento paliativo y al preventivo. Se trata de conocer con exactitud el momento más adecuado para sustituir el elemento en estudio. Tratando de minimizar la incertidumbre, para ello, se utilizan métodos que no apliquen, o por lo menos no de forma tan directa, datos estadísticos, que aunque está sobradamente demostrado que funcionan correctamente, siempre existe un factor de duda debido a la misma definición de la estadística.

### 1.2. Antecedentes:

El primer análisis de un eje rotatorio lo realizó W. J MacQuorn Rankine en 1869. Predijo que a partir de una cierta velocidad de giro, que él llamó “*whirling speed*”, o “velocidad de giro”, el eje se deforma considerablemente, y comienza a girar en torno a esta nueva posición. Se puede demostrar que por encima de esta “velocidad de giro”, la desviación radial del modelo de Rankine, aumenta sin límite. Hoy en día, esta velocidad se denomina velocidad umbral de la inestabilidad divergente.

En 1895, Stanley Dunkerley, publicó un estudio sobre las vibraciones de ejes accionados por poleas. La primera frase de su artículo dice: "Es bien sabido que todos los ejes, aunque estén equilibrados, cuando giran a una cierta velocidad, se deforman, y, a menos que se limite la deformación, podrían incluso romperse, aunque a velocidades más altas el eje se estabiliza de nuevo. Esta velocidad o "velocidad crítica" depende de los apoyos, del tamaño y del módulo de elasticidad del eje, así como del tamaño, peso y posición de las poleas que arrastra". Esta fue la primera vez que se usó el término "velocidad crítica".

Lo que Dunkerley consideró notorio, no fue conocido en su época. Muy pocos de los profesionales de aquel día estaban al tanto del análisis que realizó el ingeniero alemán August Foppl quien demostró que existía una solución estable por encima de la “*whirling speed*” de Rankine. Lo mismo ocurrió con el trabajo del ingeniero sueco, Carl GP De Laval, quien en 1889 publicó un trabajo en el que consiguió hacer funcionar una turbina de vapor a una velocidad supercrítica.

Los ingenieros de la época trabajaban inmersos en una confusión de conceptos, la “*whirling speed*” de Rankine con la velocidad crítica de Dunkerley. Esto trajo grandes consecuencias, ya que Rankine era mucho más conocido y respetado que Dunkerley lo que llevo a que sus predicciones fueran ampliamente aceptadas y se convirtió en el responsable de retrasar el desarrollo de rotores de alta velocidad durante casi 50 años.



Fue en Inglaterra en 1916 cuando empezó a cambiar el rumbo de las investigaciones. W. Kerr publicó evidencias experimentales de que existía una segunda “velocidad crítica”. Era obvio para todos que una segunda velocidad crítica sólo se podía alcanzar después de atravesar de forma segura la primera.

La Royal Society de Londres encargó a Henry H. Jeffcott que resolviera este conflicto entre la teoría de Rankine y las evidencias experimentales de Kerr y de De Laval. Jeffcott publicó su trabajo en 1919. Su modelo de rotor se muestra en la siguiente figura (Fig. 1.1).

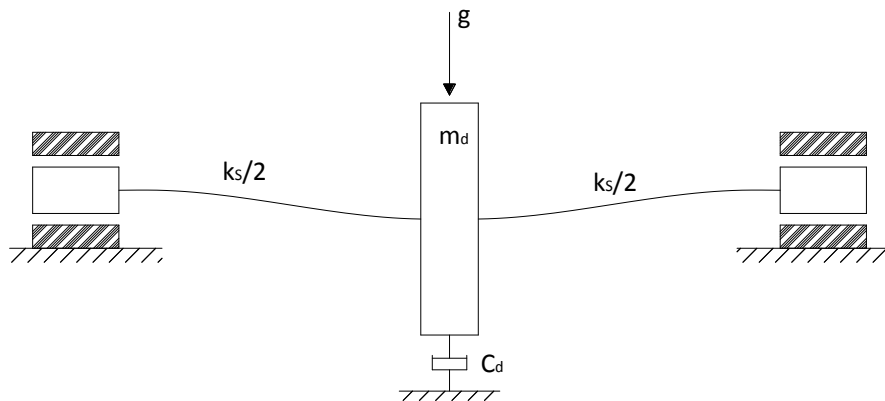


Fig. 1.1. Modelo de Rotor Jecfott.

Donde  $g$  representa la gravedad,  $m_d$ , la masa del disco, y  $k$  la rigidez del eje.

Jeffcott extendió el análisis de Foppl incluyendo amortiguamiento externo ( $C_d$ ), y confirmó la predicción de este, demostrando que existen soluciones estables por encima de la velocidad crítica. Aún hoy se utiliza su modelo de rotor en muchos trabajos e investigaciones.

En 1924, Aurel B. Stodola demostró que estas soluciones a velocidades supercríticas se estabilizaban por efecto de la aceleración de Coriolis. La omisión involuntaria de esta aceleración era el defecto del modelo de Rankine. Es interesante observar que el modelo de Rankine es adecuado para rotores cuya rigidez en una dirección es mucho mayor que en la otra, es decir, que presenta un comportamiento anisótropo. Ludwig Prandtl fue el primero en estudiar un rotor Jeffcott con sección no circular, publicó su trabajo en 1918.

Sin embargo, los investigadores tardaron poco en dejar de preocuparse por la inestabilidad. A principios de la década de 1920 se detectaron inestabilidades supercríticas en rotores en servicio. Poco después A. L. Kimball postuló que se debía a una manifestación del amortiguamiento interno del rotor. La explicación de Kimball para este fenómeno poco intuitivo es bastante complicada, por lo que se suelen preferir explicaciones más recientes. Entonces, B. L. Newkirk y H. D. Taylor describieron una inestabilidad causada por la acción, no lineal, de la cuña de lubricante en un rodamiento, a este efecto se le apodó como “oil whip” (latigazo de aceite). Aún hoy no se conoce perfectamente este fenómeno, a pesar de los esfuerzos de numerosos investigadores. Desde entonces se han descubierto otros tipos de inestabilidades. Entre ellas destacan las debidas a las rigideces de acoplamiento cruzadas en cojinetes y juntas, que pueden observarse, por ejemplo, en turbinas de gas.

El modelo analítico de Jeffcott no contemplaba la posibilidad de que el disco acoplado al eje se tambaleara, por lo que el vector de velocidad angular y el de momento angular eran siempre

colineales entre sí, y no aparecía ningún momento giroscópico. En 1924, Stodola tuvo en cuenta este fenómeno en su estudio.

En 1933 David M. Smith obtuvo unas formulas, muy simples, que predecían como variaba la velocidad angular umbral para observar inestabilidades supercríticas, con la rigidez de los cojinetes, y con el ratio entre el amortiguamiento externo y el interno (viscoso). Citando el artículo de Smith, *“... [el] aumento de la asimetría en la rigidez de los cojinetes y de la intensidad del amortiguamiento [externo] en relación al amortiguamiento [interno] hace subir la velocidad [umbral] ... esta velocidad [umbral] será siempre mayor que cualquier velocidad crítica”*. La fórmula del amortiguamiento fue obtenida de forma independiente 40 años después por Stephen Crandall.

Gradualmente, el modelo de rotor de Jeffcott, y sus múltiples variantes, se fue aproximando cada vez más a las necesidades prácticas de los investigadores de la época. Pero no lo suficiente. En la práctica, muchos rotores, especialmente aquellos diseñados para las turbinas de gas de los aviones, no eran adecuados para el modelo de Jeffcott. Esto se debía a que la distinción entre el eje y el disco se hace confusa en una turbina de gas de aviación. Se hizo necesaria una técnica de modelado más general. Esta necesidad la solventó Melvin Prohl a finales de la década de los 30, publicando su trabajo en 1945. Su método resultó ser muy similar al que publicó al mismo tiempo, y de forma independiente, N.O. Myklestad sobre el análisis de las alas de aviones. Juntos, los trabajos de estos dos investigadores llevaron a un método más amplio y general que ahora llamamos Método de la Matriz de Transferencia (TTM, de sus siglas en inglés). El TTM continúa vigente, incluso es el método utilizado en la mayoría de los análisis dinámicos de rotores industriales.

Se puede considerar que la Segunda Guerra Mundial marcó la frontera entre las primeras etapas de la rotodinámica, y lo que podemos denominar como rotodinámica moderna. Esto es consecuencia de dos factores. En primer lugar, la creciente contribución de investigadores precedentes de países de habla no inglesa, como Dimentberg en Rusia, Tondl en Checoslovaquia, Kramer en Alemania, Yamamoto en Japón y otros muchos. Está claro que la rotodinámica se había convertido en una empresa internacional. Este hecho quedó reconocido con la fundación del “Rotor Dynamics Committee of the International Federation of the Machines and Mechanisms”. Comenzando en 1982, este comité ha organizado conferencias internacionales en Roma, Tokyo, Lyon, Darmstadt y Sydney.

En segundo lugar, hubo una revolución en la capacidad de resolución. Se produjo una transición desde modelos muy simplificados, hasta casi alcanzar la precisión de la geometría actual. En la década de 1960, se produjo una fusión entre los métodos numéricos aplicados a la dinámica estructural, y la creciente capacidad de los computadores digitales de la época. Esto llevó a desarrollar una serie de códigos informáticos de propósito general. La aplicación inicial de estos códigos a la dinámica de rotores se basó en el método TTM, pero en la década de 1970, otro algoritmo, el Método de los Elementos Finitos (MEF), tuvo un gran éxito para solucionar modelos basados en una viga. Actualmente, en los inicios del siglo XXI, los investigadores combinan el MEF con técnicas de modelado de sólidos, para generar simulaciones que adapten el comportamiento conjunto de discos flexibles, ejes flexibles y soportes flexibles en un solo modelo multidimensional. Esto queda ya muy lejos de los modelos Jeffcott y Prohl.

Sin embargo, en el estudio del que trata este documento se emplea el modelo de Jeffcott, dado que los modelos sencillos dan buenos resultados y proporcionan soluciones simplificadas, que son las más adecuadas para la resolución de problemas inversos.

### 1.3. Mapas de Poincaré y diagramas de bifurcación:

En los estudios de rotodinámica se utilizan de forma habitual dos herramientas que proporcionan mucha información a la hora de analizar el comportamiento caótico de los sistemas dinámicos. Estas son los “Mapas de Poincaré”, y los “Diagramas de bifurcación”. A continuación una breve descripción de cada uno de ellos.

#### Mapas de Poincaré:

Son una de las principales maneras de reconocer los comportamientos caóticos en sistemas de pocos grados de libertad.

En matemáticas, y especialmente en dinámica, un mapa de Poincaré es la intersección de una órbita periódica en el espacio de un sistema continuo con una sección transversal a ella, normalmente llamada sección de Poincaré.

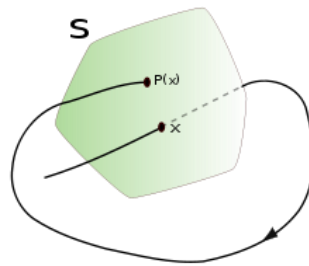


Fig. 1.2. Sección de Poincaré.

Los mapas de Poincaré aplicados a rotores, se construyen a partir de la trayectoria del rotor, indican la posición del centro del mismo en cada revolución. Es decir, se almacena la posición del centro una vez por revolución, dejando entre cada dato un tiempo equivalente al periodo de la rotación.

Las siguientes imágenes ilustran los diferentes tipos de mapas de Poincaré que se pueden encontrar en función de lo caótico que sea el sistema analizado.

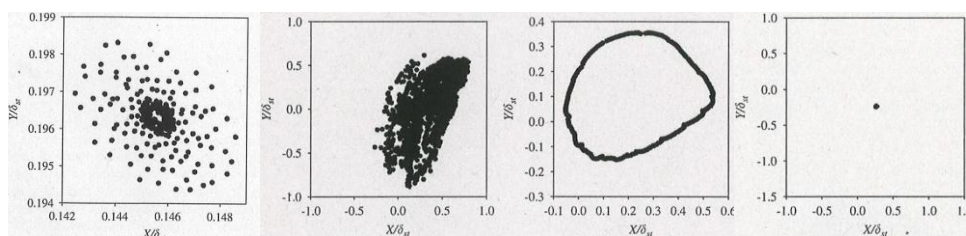


Fig. 1.3. Ejemplos de mapas de Poincaré.

### Diagramas de bifurcación:

Los diagramas de bifurcación son una técnica ampliamente usada para examinar los cambios precaóticos o postcaóticos en un sistema dinámico sometido a variaciones en alguno de sus parámetros. Se obtienen representado alguna variable que defina el movimiento, como la posición, en función del parámetro que sufre las variaciones, como la velocidad.

Cuando el diagrama de bifurcación no es continuo puede significar que el movimiento es casi periódico o caótico. En este caso, para clasificar la dinámica del movimiento hará falta realizar más pruebas.

A modo de ejemplo, en la siguiente imagen podemos observar el diagrama de bifurcación correspondiente a representar el desplazamiento vertical de un rotor frente a la velocidad de rotación.

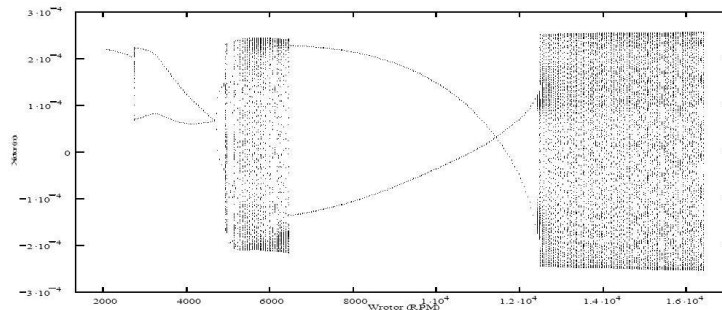


Fig. 1.4. Ejemplo de diagrama de bifurcación. (Revista Ciencia e Ingeniería, agosto-noviembre 2008)

#### 1.4. Objetivos:

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un programa informático que sea capaz de resolver las ecuaciones de movimiento de un rotor fisurado. A dicho programa habrá que indicarle varios parámetros fundamentales de la geometría del eje y de la fisura, así como datos de funcionamiento. La repuesta que se pretende obtener es la posición bidimensional del centro del eje en la sección de la fisura.

Una vez obtenido el programa, se estudiarán las órbitas de giro de un rotor fisurado bajo diferentes condiciones geométricas y de funcionamiento. Se compararán los resultados obtenidos tratando de aclarar las causas de los diferentes comportamientos que se puedan encontrar.

Adicionalmente, se analizará el comportamiento dinámico de casos concretos.

### 1.5. Organización del documento:

Este documento se divide en cinco capítulos. El primero se dedica a la introducción, así como a los antecedentes históricos que llevan a los estudios actuales en esta materia. El segundo corresponde a la exposición del modelo analítico que se utiliza para resolver los diferentes casos estudiados. En el capítulo III, se muestran los resultados obtenidos al aplicar el modelo analítico a diferentes casos. El capítulo IV se dedica a las conclusiones que se pueden sacar de todo lo expuesto anteriormente, así como a los posibles trabajos futuros que complementarían a este. En el quinto capítulo se exponen las referencias que se han consultado para la realización de este documento. Por último, se presenta un presupuesto en el que se incluyen los gastos de personal y equipos necesarios para la realización del presente documento.

## Capítulo II:

### MODELO ANALÍTICO. ROTOR JEFFCOTT.

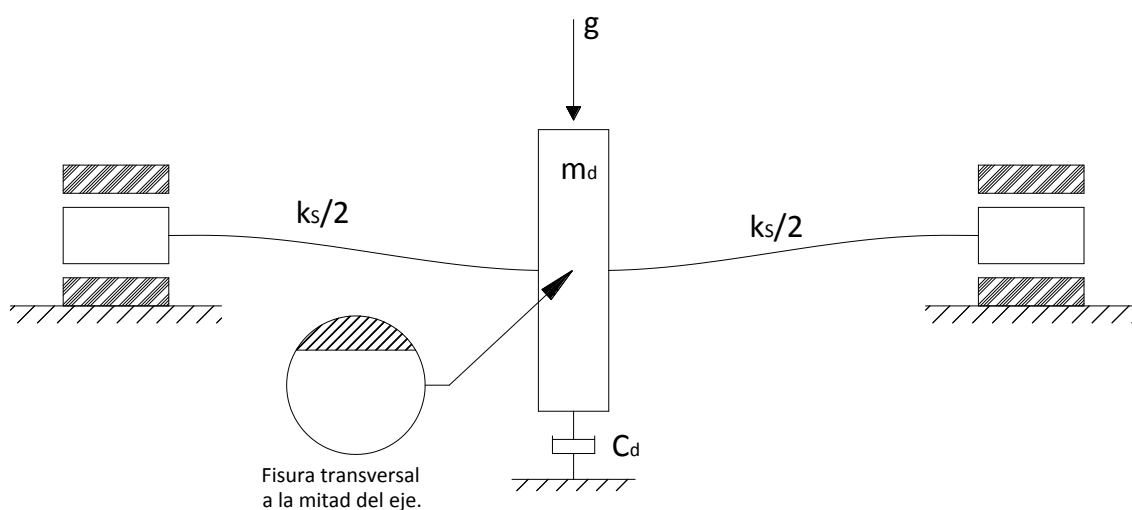
#### 2.1. Modelo de Rotor Jeffcott extendido:

En esta sección se presentará el desarrollo de los modelos matemáticos que servirán para caracterizar el comportamiento del sistema estudiado, de manera que a partir de dichos modelos se puedan realizar los programas computacionales necesarios para efectuar los cálculos y predicciones.

El estudio se basará en el modelo de “Rotor Jeffcott Extendido Desequilibrado y Fisurado”. Este consiste en un modelo de rotor básico que posee las características fundamentales de los modelos de los rotores más complejos en las respuestas al desequilibrio.

Este modelo presenta las siguientes características (ver Fig. 2.1):

- Un eje flexible, uniforme, de masa despreciable y fisurado de forma transversal en la mitad de su longitud.
- Un disco con masa, rígido y plano, montado en la mitad del eje.
- Dos cojinetes idénticos, colocados en los extremos del sistema.
- Un desequilibrio en la masa del disco.
- No existe desalineamiento.



En primer lugar se analizará el sistema suponiendo que no existe fisura, para después añadir la condición de eje fisurado. A continuación se detalla el modelo analítico para el caso en el que el eje no está fisurado.

Se toma un sistema de referencia fijo en el centro geométrico del disco cuando el sistema está en reposo, haciendo coincidir el eje X con el eje del sistema. Cuando se pone a girar el disco junto con el eje, este se deformará, como se puede observar en la figura (Fig.2.2).

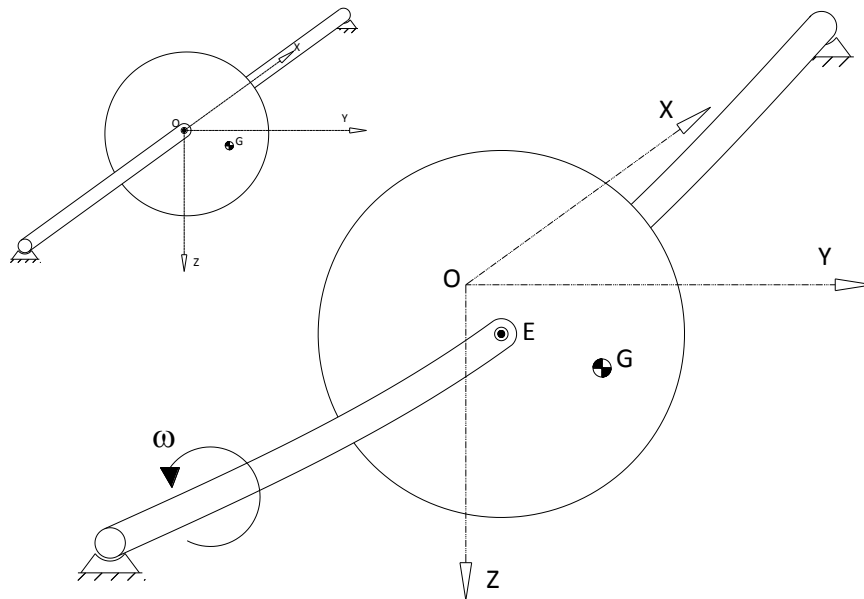


Fig. 2.2. Esquema del Rotor Jeffcott con eje flexible.

El centro de gravedad del disco desequilibrado está en el punto **G**, mientras que el punto **E** representa el centro geométrico del disco. La distancia entre estos dos puntos, o excentricidad, se denotará con la letra  **$\epsilon$** . La deflexión (distancia entre los puntos **O** y **E**) debida a cargas dinámicas será representada por  **$r$** . En este análisis se desprecia la acción de la gravedad, dado que sus efectos son despreciables frente a los efectos dinámicos o inerciales. Esta simplificación es aplicable a la mayoría de turbomáquinas.

El sistema tiene tres grados de libertad, aunque asumiendo que la velocidad de giro es constante, estos se reducen a dos.

La solución en términos de **y**, **z** como funciones del tiempo es lo que se suele medir en las instalaciones de turbomaquinaria, por todo esto, este sistema de coordenadas es el más adecuado para plantear y resolver las ecuaciones de movimiento del Rotor Jeffcott.

Para plantear las ecuaciones de movimiento hay que tener en cuenta que el eje tiene rigidez a flexión ( **$k$** ), masa ( **$m$** ), y que la resistencia que ofrece el aire ante el disco y el eje girando se aproxima mediante un coeficiente de amortiguamiento ( **$c$** ).

Las ecuaciones diferenciales y su solución se presentan a continuación, considerando una velocidad angular constante e igual a  $\omega$ .

Al plantear el equilibrio de fuerzas hay que tener en cuenta que las ecuaciones tendrán una componente debida al comportamiento elástico del eje, otra debida al amortiguamiento, y otra debida a las fuerzas de inercia.

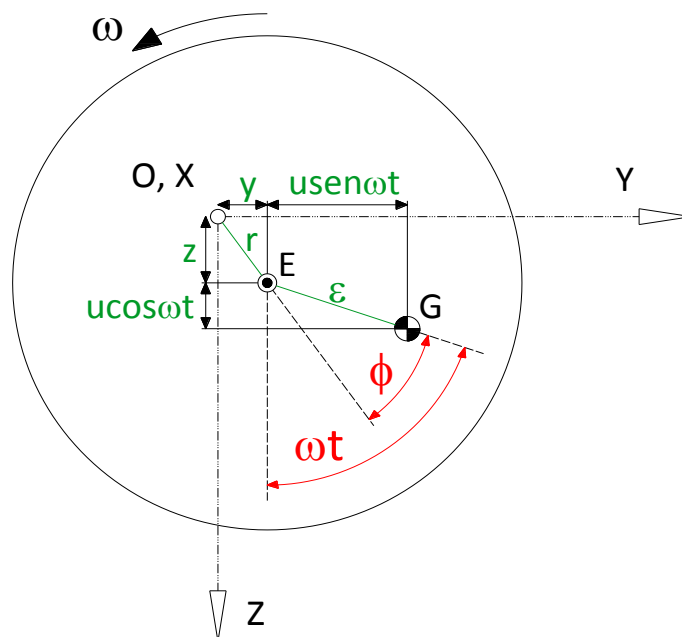


Fig. 2.3. Esquema de la geometría del disco.

Para el eje Z:

$$\text{Fuerzas de inercia} \Rightarrow m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (z + \epsilon \cos \omega t)$$

$$\text{Fuerza de amortiguamiento} \Rightarrow c \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\text{Fuerza elástica} \Rightarrow k \cdot z$$

Las fuerzas en el eje Y son equivalentes.

En la imagen (Fig. 2.3) se muestra la geometría del problema.

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio para ambos ejes quedan de la forma:

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (z + \epsilon \cos \omega t) + c \cdot \frac{dz}{dt} + kz = 0 \\ m \cdot \frac{d^2}{dt^2} (y + \epsilon \sin \omega t) + c \cdot \frac{dy}{dt} + ky = 0 \end{cases} \quad [1]$$



Las componentes inerciales de las ecuaciones se pueden derivar para simplificar su resolución:

$$\varepsilon \cos \omega t \Rightarrow \text{derivando} \Rightarrow -\varepsilon \omega \sin \omega t \Rightarrow \text{derivando de nuevo} \Rightarrow -\varepsilon \omega^2 \cos \omega t$$

$$\varepsilon \sin \omega t \Rightarrow \text{derivando} \Rightarrow \varepsilon \omega \cos \omega t \Rightarrow \text{derivando de nuevo} \Rightarrow -\varepsilon \omega^2 \sin \omega t$$

De esta manera podemos reescribir las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + m(-\varepsilon\omega^2 \cos \omega t) + c\dot{z} + kz = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m(\varepsilon\omega^2 \cos \omega t)} \\ m\ddot{y} + m(-\varepsilon\omega^2 \sin \omega t) + c\dot{y} + ky = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m(\varepsilon\omega^2 \sin \omega t)} \end{cases} \quad [2]$$

Resolviendo analíticamente estas ecuaciones diferenciales de segundo orden, se obtienen las coordenadas del centro geométrico del eje a lo largo del tiempo.

## 2.2. Modelo analítico para eje fisurado:

Para modelar el comportamiento de un eje fisurado se utiliza el razonamiento expuesto en el punto anterior, teniendo en cuenta que desde el momento en el que aparece la fisura, la flexibilidad del eje ya no es única. Esta tomará diferentes valores dependiendo de la posición relativa del eje en su movimiento de rotación.

### 2.2.1. Tipos de fisura:

Se sabe que cuando en un rotor de una máquina se genera una fisura, la forma de esta es impredecible. Sin embargo, la existencia de una fisura en un eje rotatorio necesita ser modelada para ser considerada en las ecuaciones de movimiento del sistema en estudio.

Fundamentalmente se trabaja con dos tipos de fisuras. Las de *frente plano, o recto*, y las de *frente elíptico*. En la figura (Fig. 2.4.) se pueden ver ambos tipos. La mayoría de autores trabaja con fisuras de frente de recto. Aunque hoy en día se sabe que la realidad no se corresponde exactamente con esta hipótesis, es una buena aproximación. En este estudio se utilizarán fisuras rectas.

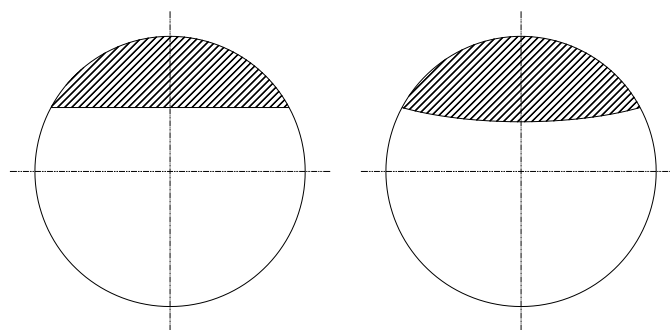


Fig.2.4. Fisuras recta y elíptica.

### 2.2.2. Función de apertura y cierre:

Los sistemas rotatorios en estudio se consideran “dominados por el peso”, es decir, es la gravedad el factor que provoca que la fisura en el rotor se pueda abrir y cerrar según su posición angular cambie.

Se sabe que la orientación de la fisura depende del tiempo, y cambia de forma periódica durante cada ciclo de rotación del eje, y es por eso que la fisura se abre y se cierra continuamente durante el giro del rotor. Al fenómeno de apertura y cierre de la fisura se le conoce como “breathing” de la fisura.

El fenómeno de “apertura y cierre” de la fisura provoca que la rigidez del eje varíe en función de la posición angular en la se encuentre dicha fisura. De tal manera que la rigidez del eje fisurado será máxima cuando la fisura se encuentre cerrada, esto es, cuando la fisura esté en la parte de “arriba” del eje. En este caso, el eje fisurado alcanzará su máxima similitud con un eje íntegro o sin fisura. Por otro lado, la rigidez del eje fisurado será mínima cuando la fisura alcance su máxima apertura, la fisura estará en la parte de “abajo” del eje. Estos dos casos extremos se representan en las siguientes figuras (Fig. 2.5 y Fig. 2.6.). Este razonamiento es válido sólo en condiciones estáticas, dado que al iniciar la rotación aparecen más factores que harán que la posición de la fisura en cada momento se altere ligeramente.

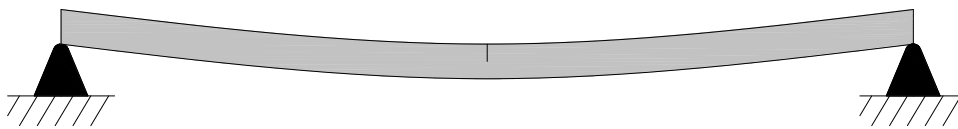


Fig. 2.5. Fisura cerrada debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura.

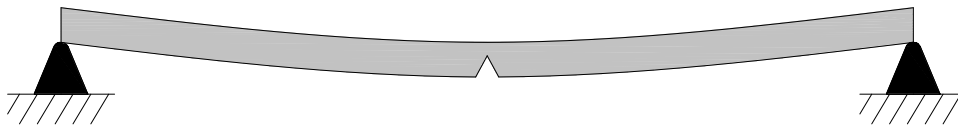


Fig. 2.6. Fisura abierta al máximo debido a la acción de la gravedad y a la posición de la propia fisura.

Por todo lo ya comentado, se hace necesario modelar la variación periódica de la rigidez del eje rotatorio debida a la fisura. Para ello, se supone que dicha variación de rigidez sólo depende del tiempo, y que el peso ejerce un efecto dominante.

Se hace necesario por lo tanto establecer una función periódica en el tiempo que caracterice el comportamiento de la fisura, y que será representado por:  $g(t) = g(\Phi)$  [3]. Donde  $\Phi$  representa el ángulo descrito por la rotación del eje.

Existen tres modelos para caracterizar el comportamiento de la fisura, que se presentan a continuación.

⇒ **Modelo de fisura abierta:**

Es la función más simple de las consideradas, y sirve para conocer el comportamiento del sistema cuando la fisura permanece siempre abierta. La función queda de la siguiente manera:

$$g(\Phi) = 1 \quad [4]$$

La gráfica correspondiente se observa a continuación (Fig. 2.7.)

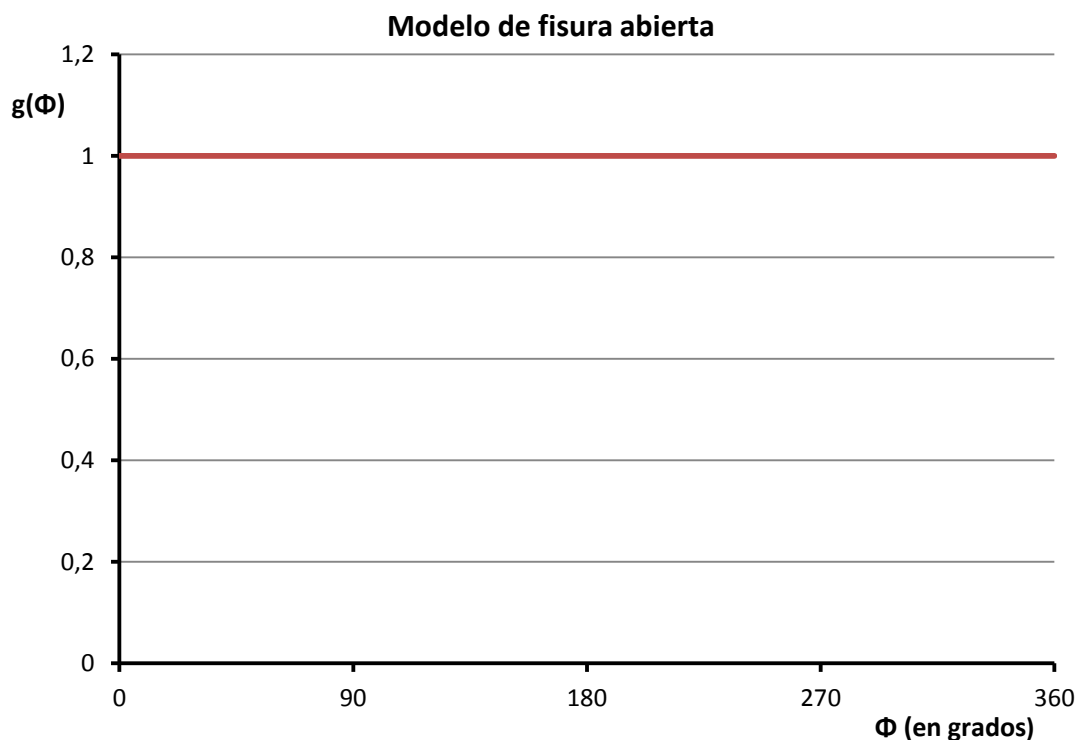


Fig. 2.7. Gráfica de la función tipo fisura abierta.

⇒ **Modelo de fisura abierta o cerrada:**

La función propuesta por Gasch se ha venido utilizando cuando la profundidad de la fisura no supera el 25% del diámetro del eje ( $\alpha \leq 0.25$ ). La función adquiere aproximadamente los valores de 0 y 1 dependiendo únicamente de la fisura. El valor cero significa que la fisura se encuentra cerrada, y por lo tanto no existe variación de la rigidez del sistema, comportándose el eje fisurado como un eje íntegro. El valor uno significa que la fisura se encuentra completamente abierta, por lo tanto, la rigidez variará, presentando el eje fisurado su menor rigidez.

La función de Gasch (función escalón), considerando la serie de Fourier truncada en el noveno término (17º armónico) se presenta a continuación:

$$g(\Phi) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left( \frac{\pi}{4} + \cos\Phi - \frac{1}{3}\cos3\Phi + \frac{1}{5}\cos5\Phi - \frac{1}{7}\cos7\Phi + \frac{1}{9}\cos9\Phi - \frac{1}{11}\cos11\Phi + \frac{1}{13}\cos13\Phi - \frac{1}{15}\cos15\Phi + \frac{1}{17}\cos17\Phi - \dots \right) \quad [5]$$

En la figura (Fig. 2.8.) se muestra la gráfica de la función tipo abierta o cerrada.

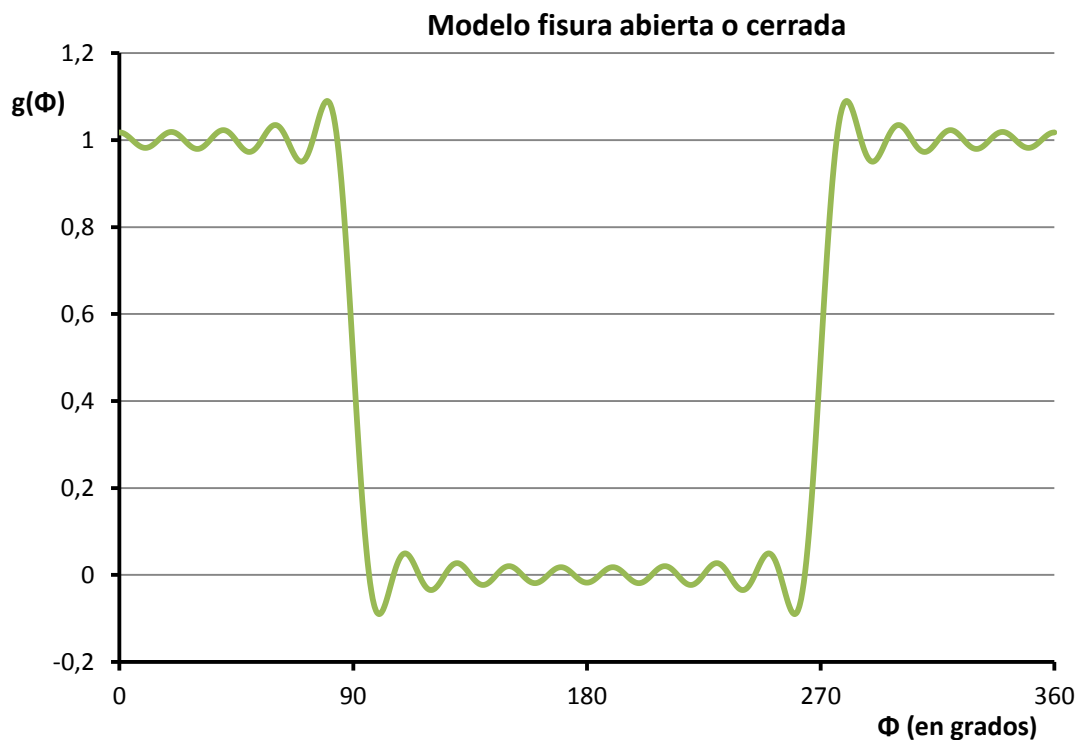


Fig. 2.8. Gráfica de la función propuesta por Gasch.

⇒ **Modelo de Mayes y Davies:**

Mayes y Davies propusieron una función cosenoidal que representa muy bien el comportamiento de fisuras profundas ( $\alpha \geq 0.25$ ). Con esta función se logra evitar el cambio brusco durante el proceso de apertura y cierre de la fisura, obteniendo una transición más suave, tal como ocurre en la realidad, sobre todo para fisuras profundas.

La función propuesta por Mayer y Davies se presenta a continuación:

$$g(\Phi) = \frac{1 + \cos \Phi}{2} \quad [6]$$

La gráfica de la función se puede observar a continuación (Fig. 2.9.).

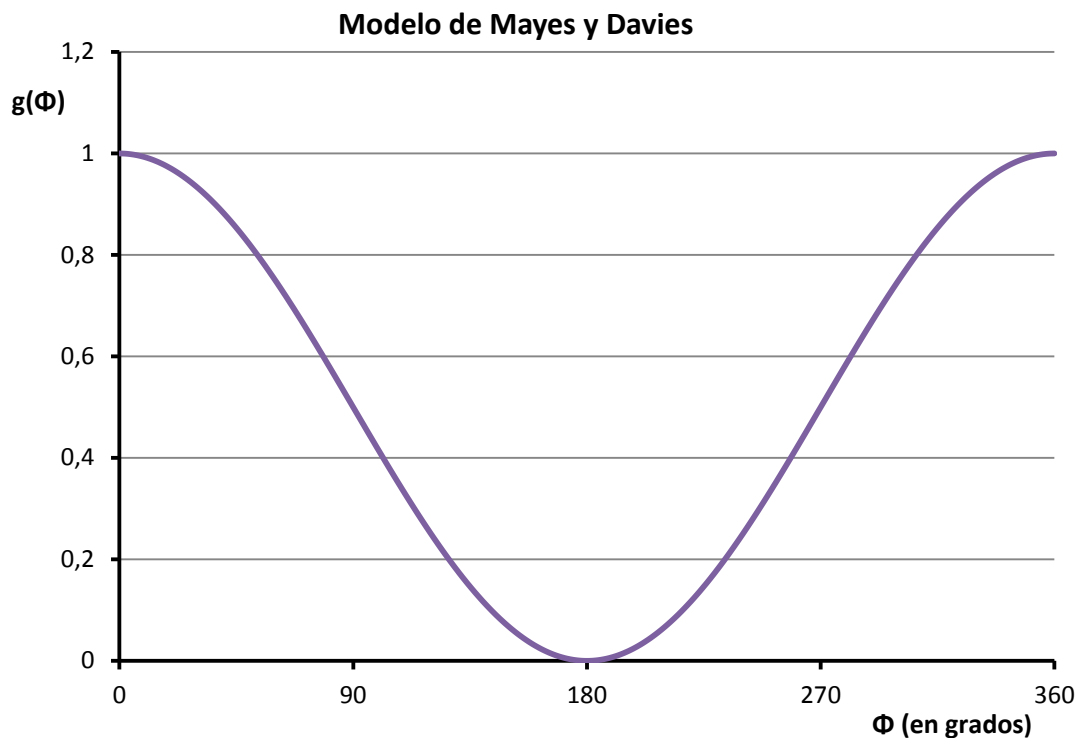


Fig. 2.9. Gráfica de la función propuesta por Mayes y Davies.

Finalmente, se presenta una figura en la que se representan superpuestas las tres funciones, de forma que se pueda apreciar mejor el efecto y las diferencias de cada una de ellas. (Fig. 2.10.).

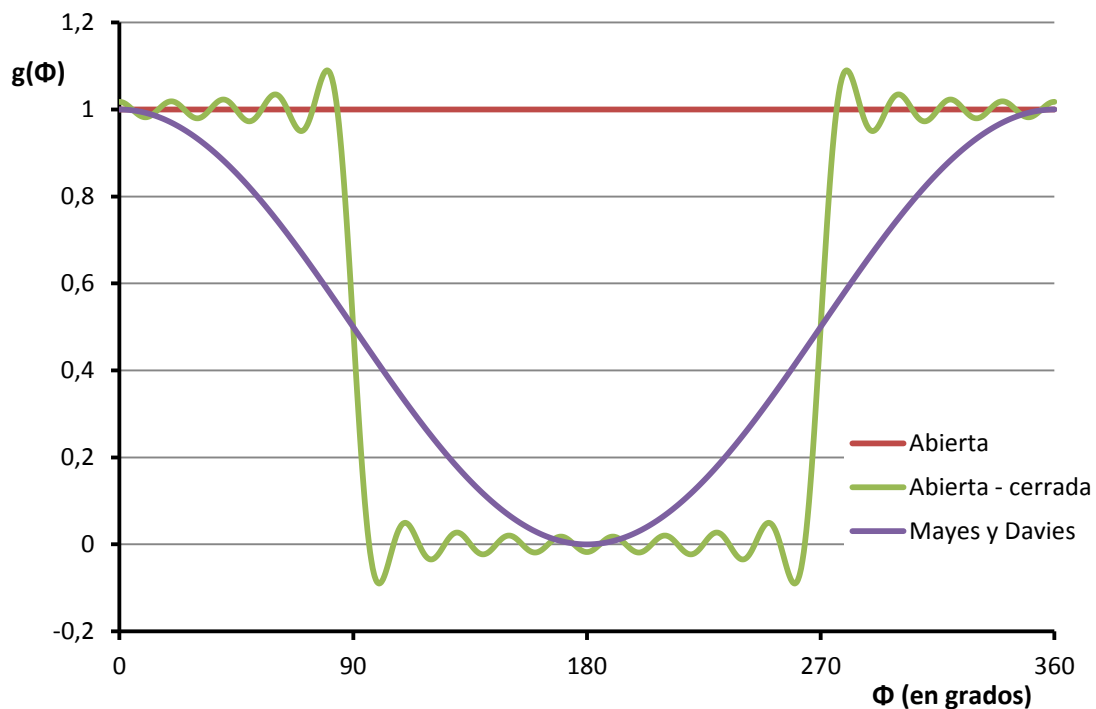


Fig. 2.10. Modelos del fenómeno de "breathing".

Una vez valorados estos modelos, aún queda una última manera de modelar el comportamiento de la rigidez del eje en función de la apertura y cierre de la fisura. Este modelo se basa en la **Mecánica de Fractura**, y será el que se utilice para la realización del estudio. Por la propia construcción del modelo, este es mucho más preciso y fiable que cualquiera de los anteriores, aunque también más complicado. Su explicación se incluye dentro del siguiente apartado, "2.2.3. Modelo analítico", para facilitar su comprensión junto con la explicación del movimiento del sistema.

### 2.2.3. Modelo analítico:

El rotor Jeffcott de masa despreciable, se considera montado sobre cojinetes rígidos, con un disco de masa  $m$  montado en la mitad de la longitud  $L$  del eje. De acuerdo con el modelo propuesto por Darpe, se asume una fisura de frente recto en el centro del eje de profundidad  $a$ . Se llamará  $Y, Z$  a los ejes del sistema de referencia fijo, y  $\xi, \eta$  a los ejes del sistema de referencia móvil o inercial en la sección de la fisura.  $\xi$  corresponde con la dirección débil de la fisura, mientras que  $\eta$  corresponde con la fuerte, como se puede ver en la figura (Fig. 2.11.).

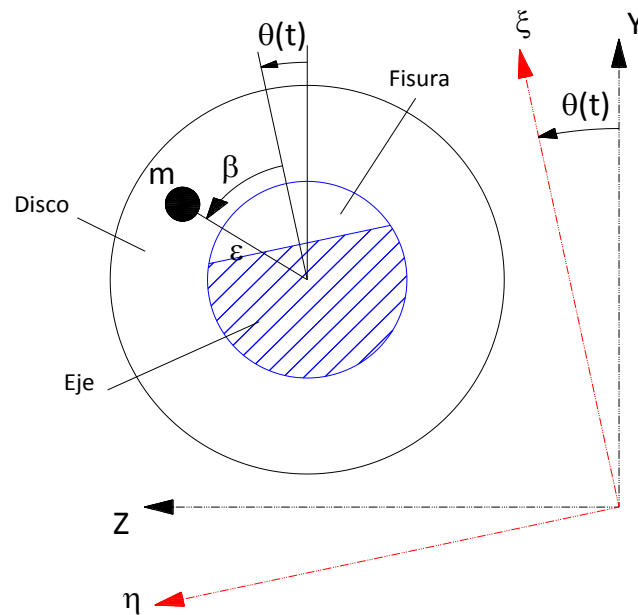


Fig. 2.11. Sistemas de referencia.

El desequilibrio del disco tiene una excentricidad  $\varepsilon$  orientada según un ángulo  $\beta$  respecto al eje débil de la fisura.  $\theta(t)$  es el ángulo instantáneo de rotación y  $\omega$  la velocidad angular del eje. Las ecuaciones de movimiento en el sistema fijo de coordenadas del rotor Jeffcott fisurado se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} m\ddot{Y} + c\dot{Y} + k_Y Y + k_{YZ} Z &= m\varepsilon\omega^2 \cos(\theta + \beta) - mg \\ m\ddot{Z} + c\dot{Z} + k_{ZY} Y + k_Z Z &= m\varepsilon\omega^2 \sin(\theta + \beta) \end{aligned} \quad [7]$$

Los coeficientes de rigidez de las ecuaciones en el sistema fijo de coordenadas (Ec. [7]) se pueden obtener a partir de los coeficientes de rigidez  $k_\xi, k_\eta, k_{\eta\xi}$  y  $k_{\xi\eta}$  definidos en el sistema móvil  $\xi - \eta$ , a través de la matriz de transformación adecuada. Como el modelo considera la apertura y cierre parcial de la fisura durante la rotación del eje, los términos cruzados de la matriz de rigidez,  $k_{\eta\xi}$  y  $k_{\xi\eta}$ , aparecerán en la ecuación, y serán iguales.

$$\begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} k_\xi & k_{\xi\eta} \\ k_{\eta\xi} & k_\eta \end{bmatrix} T \quad [8]$$

Donde la matriz de transformación  $T$  es:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [9]$$

De esta forma se pueden reescribir las ecuaciones de movimiento:

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + \frac{1}{2}\{k_\xi + k_\eta + (k_\xi - k_\eta) \cos 2\theta - 2k_{\xi\eta} \text{sen } 2\theta\}Y + \frac{1}{2}\{(k_\xi - k_\eta) \text{sen } 2\theta + 2k_{\xi\eta} \cos 2\theta\}Z = m\varepsilon\omega^2 \cos(\theta + \beta) - mg \quad [10]$$

$$m\ddot{Z} + c\dot{Z} + \frac{1}{2}\{k_\xi + k_\eta + (k_\eta - k_\xi) \cos 2\theta + 2k_{\xi\eta} \text{sen } 2\theta\}Z + \frac{1}{2}\{(k_\xi - k_\eta) \text{sen } 2\theta + 2k_{\xi\eta} \cos 2\theta\}Y = m\varepsilon\omega^2 \text{sen}(\theta + \beta) \quad [11]$$

Los coeficientes de rigidez,  $k_\xi, k_\eta, k_{\eta\xi}$  y  $k_{\xi\eta}$ , se calculan a partir de la flexibilidad del eje fisurado como se explica a continuación.

La flexibilidad total del eje se compone de dos partes, la primera es la flexibilidad del eje íntegro, sin fisura, y la segunda es la flexibilidad adicional introducida por la fisura. El valor de la flexibilidad cambia con el tamaño de la parte abierta de la fisura. Como el eje gira, la fisura se abre y cierra, y por tanto, el tamaño de la parte abierta de la fisura cambia constantemente haciendo variar la flexibilidad del eje fisurado. Los términos cruzados de la rigidez  $k_{\eta\xi}$  y  $k_{\xi\eta}$ , aparecen debido a la apertura parcial de la fisura. La flexibilidad causada por la fisura es:

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial Q_j} \quad [12]$$

Donde  $i = \xi, \eta$  y  $j = \eta, \xi$ ,  $Q$  = fuerza actuando en la sección de la fisura (Fig. 2.12.),  $u_i$  es la deflexión debida a la presencia de la fisura, y viene dada por:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial Q_i} \left[ \int J(\alpha) d\alpha \right] \quad [13]$$

$J(\alpha)$  es la función de densidad de energía de deformación para el modo I de fractura y se puede expresar como:

$$J(\alpha) = \frac{1}{E} (K_I)^2 \quad [14]$$

Donde  $K_I$  es el factor de intensidad de tensiones total (en modo I), que se expresa como sigue:

$$K_I = K_{IQ_\xi} + K_{IQ_\eta} \quad [15]$$

En esta expresión, identificamos

$$K_{IQ_\xi} = \sigma_\xi \sqrt{\pi \alpha} F(\alpha/\alpha'), \quad K_{IQ_\eta} = \sigma_\eta \sqrt{\pi \alpha} F'(\alpha/\alpha') \quad [16]$$

como los factores de intensidad de tensiones en modo apertura (modo I) debidos a  $Q_\xi$  y  $Q_\eta$ , respectivamente.  $Q_\xi$  y  $Q_\eta$  son las fuerzas laterales en la sección de la fisura, como se muestra en la figura (Fig. 2.12.). Cabe señalar que, debido a la suposición de flexión pura, el efecto de la deformación tangencial no se tiene en cuenta.

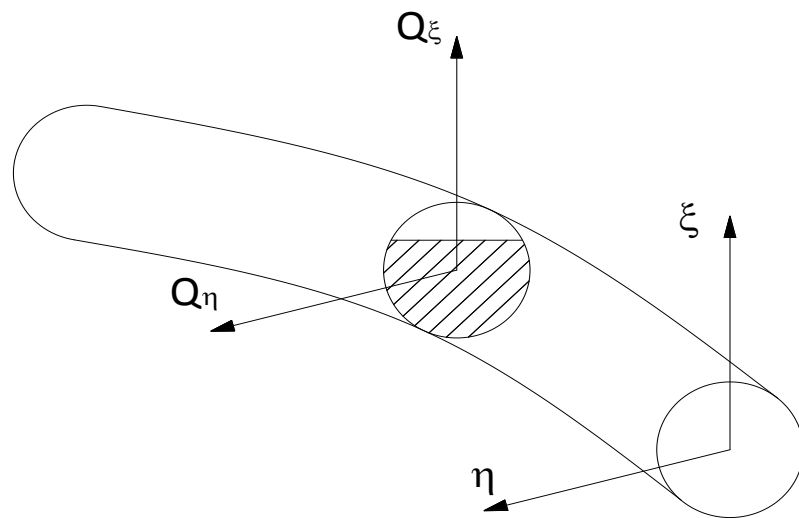


Fig. 2.12. Fuerzas actuando en la sección de la fisura.

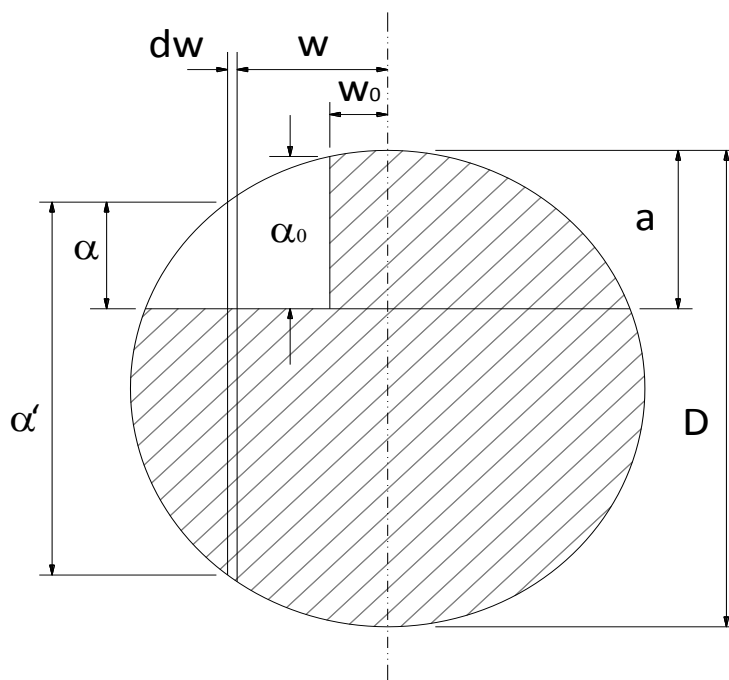


Fig. 2.13. Sección transversal del eje en la localización de la fisura.



$\sigma_\xi$  y  $\sigma_\eta$  son las tensiones de flexión debidas a  $Q_\xi$  y a  $Q_\eta$  respectivamente. Vienen dadas por:

$$\sigma_\xi(w) = \frac{(Q_\xi L/4)(\alpha'/2)}{I}, \quad \sigma_\eta(w) = \frac{(Q_\eta L/4)w}{I} \quad [17]$$

donde:  $I = (\pi D^4/64)$ ,  $\alpha' = \sqrt{D^2 - (2w)^2}$  y además,

$$Q_\xi = k_\xi \xi + k_{\xi\eta} \eta, \quad Q_\eta = k_{\eta\xi} \xi + k_\eta \eta \quad [18]$$

Se puede apreciar que el factor de intensidad de tensiones es una función de las fuerzas que actúan en el eje en la sección de la fisura (Fig. 2.12.) y de la posición a lo largo del frente de la fisura,  $w$  (Fig. 2.13.). A su vez, las fuerzas  $Q_\xi$  y  $Q_\eta$ , dependen de la respuesta del eje ( $\xi, \eta$ ) (ver Ec. [18]). La rigidez y la respuesta son dependientes la una de la otra, de lo que resultan ecuaciones no lineales.

Las funciones  $F$  y  $F'$  que aparecen en la ecuación [16] vienen dadas por:

$$F(\alpha/\alpha') = \sqrt{\frac{2\alpha'}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)} \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin(\pi\alpha/2\alpha')]^4}{\cos(\pi\alpha/2\alpha')} \quad [19]$$

$$F'(\alpha/\alpha') = \sqrt{\frac{2\alpha'}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2\alpha'}\right)} \frac{0.752 + 2.02(\alpha/\alpha') + 0.37[1 - \sin(\pi\alpha/2\alpha')]^3}{\cos(\pi\alpha/2\alpha')} \quad [20]$$

Utilizando las ecuaciones de la [12] a la [20], se puede escribir una expresión para el valor de la flexibilidad total del eje fisurado:

$$\begin{aligned} g_\xi &= \frac{L^3}{48EI} + \iint \frac{128L^2 \alpha'^2 \alpha}{E\pi D^8} F(\alpha/\alpha')^2 d\alpha dw \\ g_\eta &= \frac{L^3}{48EI} + \iint \frac{512L^2 w^2 \alpha}{E\pi D^8} F'(\alpha/\alpha')^2 d\alpha dw \\ g_{\xi\eta} &= g_{\eta\xi} = \iint \frac{256L^2 \alpha'^2 w \alpha}{E\pi D^8} F(\alpha/\alpha') F'(\alpha/\alpha') d\alpha dw \end{aligned} \quad [21]$$

El término  $L^3/48EI$  representa la flexibilidad del eje íntegro, sin fisurar. Los límites de integración de las expresiones [21] son 0 y  $\alpha$  para la profundidad de la fisura. Para el ancho de la misma no están definidos, ya que dependen de la porción de fisura que se encuentre abierta en cada instante.

Utilizando los valores de flexibilidad ya calculados se pueden obtener los coeficientes de rigidez, en el sistema móvil de referencia, como sigue:

$$k_\xi = \frac{g_\eta}{g_\xi g_\eta - g_{\xi\eta}^2}, \quad k_\eta = \frac{g_\xi}{g_\xi g_\eta - g_{\xi\eta}^2}, \quad k_{\xi\eta} = k_{\eta\xi} = \frac{-g_{\xi\eta}}{g_\xi g_\eta - g_{\xi\eta}^2} \quad [22]$$

Cabe señalar que los valores de los coeficientes de rigidez calculados varían en el tiempo, debido a la apertura y cierre de la fisura con la rotación del eje y bajo la influencia de la gravedad.

## Capítulo III:

### RESULTADOS Y ANÁLISIS. COMPARACIÓN DE ÓRBITAS

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos en los diferentes casos analizados. Para resolverlos, se ha realizado un programa basado en la herramienta informática MatLab, que resuelve las ecuaciones de movimiento, proporcionando los desplazamientos del centro del eje, tal y como se ha expuesto en el capítulo anterior. El programa así obtenido se puede explicar mediante el diagrama de flujo que se muestra a continuación.

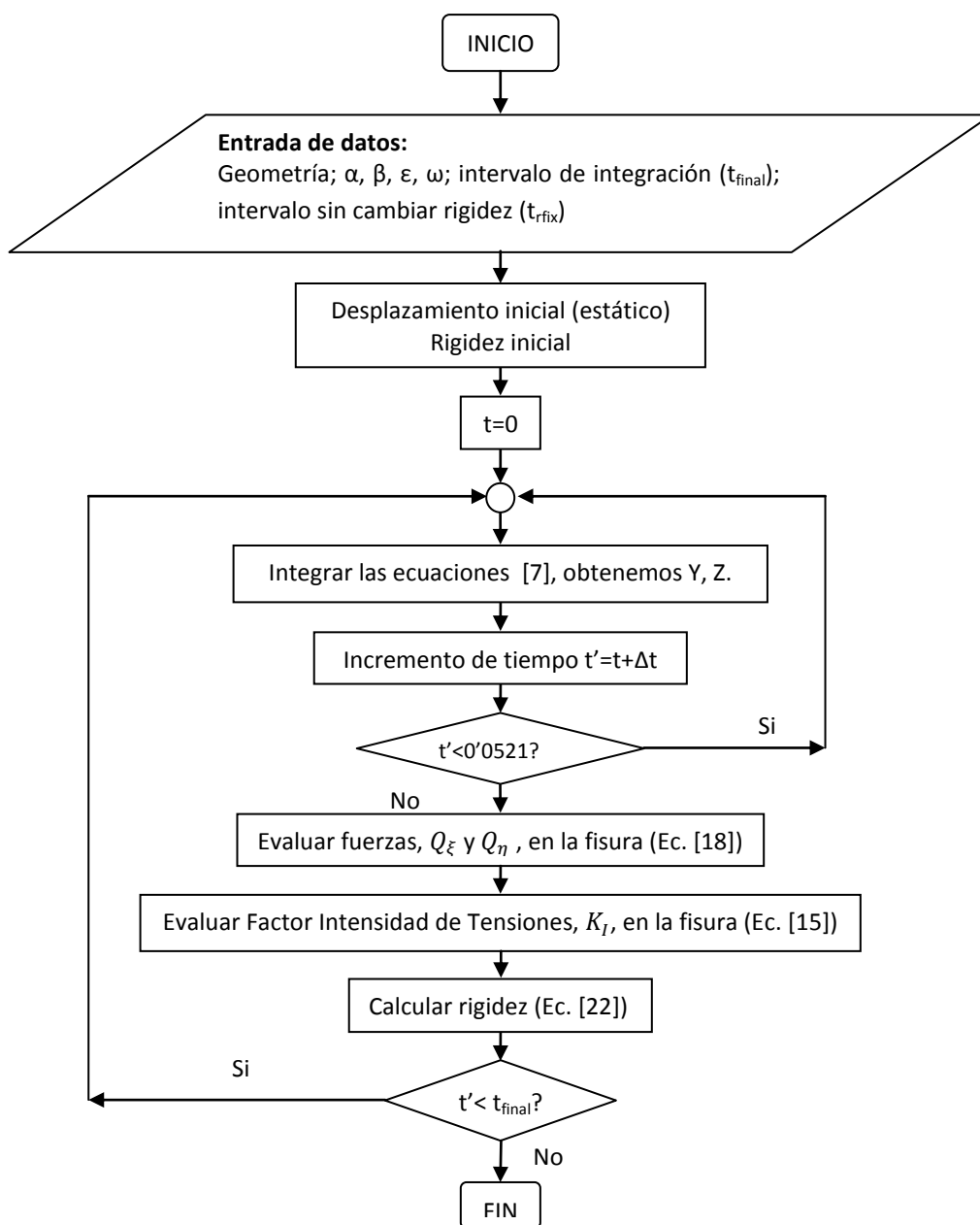


Fig. 3.1. Diagrama de flujo del programa empleado para resolver los casos.

En el diagrama se observa que tras introducir los datos necesarios, el programa comienza calculando las condiciones iniciales, rigidez y posición (vertical), para comenzar a integrar las ecuaciones diferenciales. A partir de este punto, se tienen en cuenta dos límites de tiempo, en el primero de ellos se mantiene constante la rigidez, una vez superado se recalcula la rigidez en función de la nueva posición, y el segundo define el final del programa.

De esta manera se han resuelto veintisiete casos diferentes, para distintas condiciones geométricas. El programa desarrollado tarda alrededor de diez minutos (dependiendo del equipo informático que lo haga) en resolver cada uno de ellos. Para los casos particulares que requieren un estudio más a fondo, la variante del programa que realiza estos cálculos adicionales requiere un mínimo de ocho horas de cálculo. Estos casos se verán más adelante.

En la siguiente tabla se muestran los parámetros físicos y geométricos que caracterizan el sistema en estudiado.

Longitud del eje:	$L=0,9$ m
Diámetro del eje:	$D_{\text{eje}}=0,02$ m
Masa del disco:	$M_{\text{disco}}=2$ kg
Coefficiente amortiguamiento:	$c=0,1$
Profundidad de la fisura:	$\alpha=0,1; 0,2; 0,3; 0,5$
Excentricidad del desequilibrio:	$\epsilon=0; 75$ mm
Desplazamiento estático:	$d_{\text{est}}=1,8066E-4$ m
Módulo de elasticidad:	$E= 210$ GPa
Velocidad de giro:	$\omega=1150$ rpm

Tabla 3.1. Geometría y parámetros físicos del sistema.

### 3.1. Órbitas sin excentricidad:

En primer lugar se muestran los resultados obtenidos suponiendo que no existe desequilibrio alguno en el sistema. En este caso se han calculado las órbitas para profundidades relativas de fisura iguales a  $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.2$  y  $\alpha=0.3$ .

La respuesta que obtenemos del programa realizado es la posición del centro del rotor en términos de Y, Z (adimensionales). Como el objeto de este estudio son las órbitas, las gráficas que se muestren, corresponderán a representar la variable Y frente a la Z, obteniendo así las órbitas deseadas. A continuación se pueden observar, a modo de ejemplo, las gráficas correspondientes a dichas variables en función del tiempo para el primero de los casos analizados:

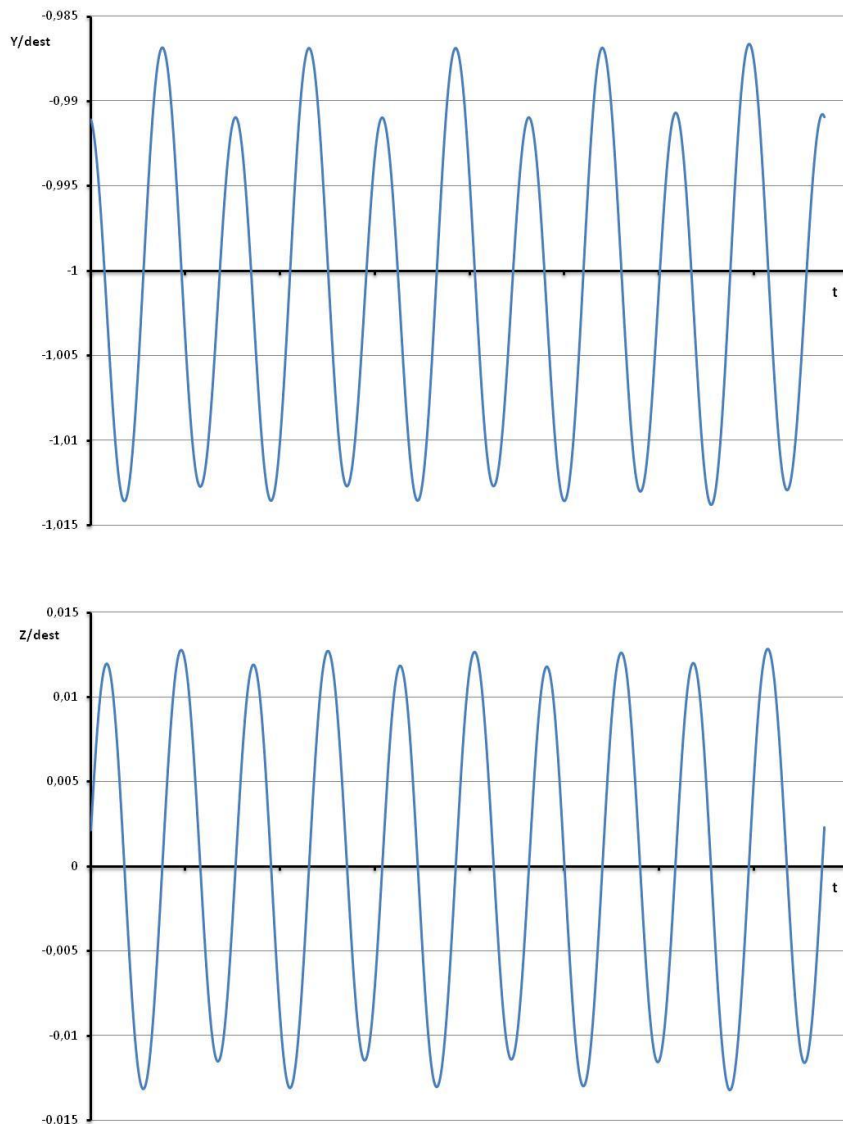


Fig. 3.2. Evolución de las variables Y, Z del centro en función del tiempo para  $\alpha=0,1$ .

A continuación se presentan las órbitas correspondientes a estos casos:

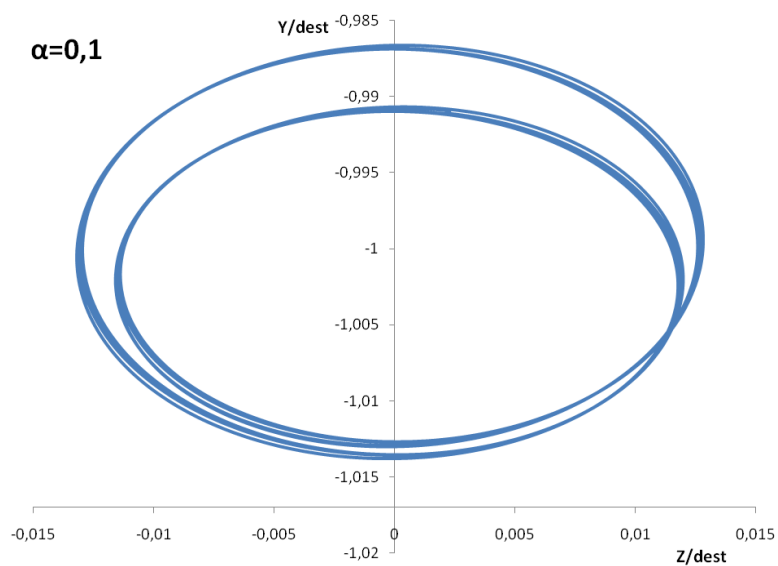


Fig. 3.3. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,1$ .

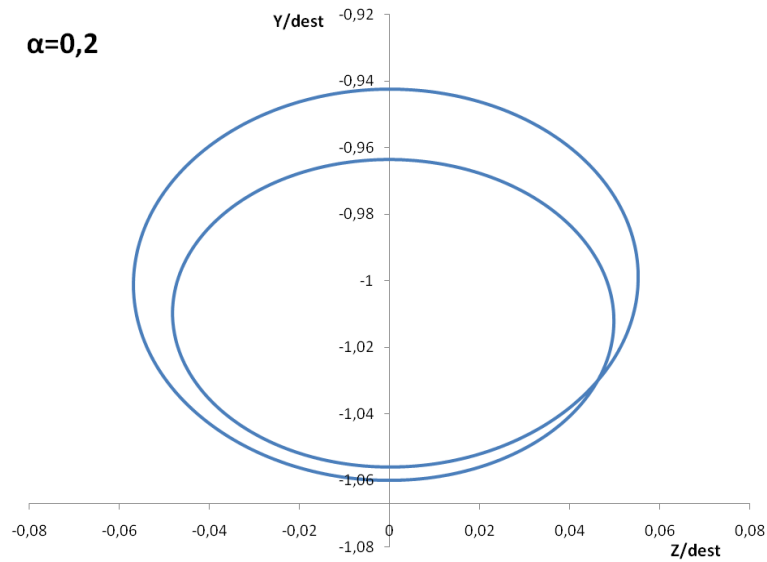


Fig. 3.4. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,2$ .

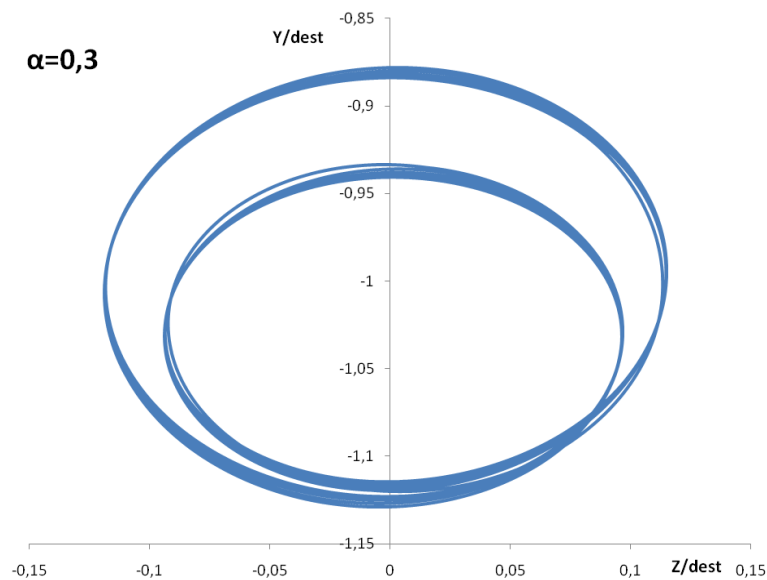


Fig. 3.5. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,3$ .

Dado que las órbitas son elípticas, no resulta trivial comparar su tamaño. Para poder estudiar su evolución, se calcula un *radio efectivo medio*, de la siguiente manera:

$$r_{ef} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (\sqrt{Y_i^2 + Z_i^2})^2}{N}} \quad [23]$$

Siendo  $Y, Z$  las coordenadas del centro del eje para un instante dado. En este caso, los valores de los radios efectivos (adimensionales) quedan de la siguiente manera:

$\alpha$	$r_{ef}$
0,1	1,00107864
0,2	1,00664933
0,3	1,02051494

Tabla 3.2. Radios efectivos obtenidos (excentricidad nula).

En el gráfico adjunto se puede apreciar claramente la evolución del “radio” de la órbita en función de la profundidad de la fisura.

Se ve una clara tendencia del *radio efectivo* a aumentar con la profundidad de la fisura ( $\alpha$ ). Este resultado coincide con lo que dicta la intuición, ya que, al aumentar la profundidad de la fisura disminuye la rigidez del eje, aumentando los desplazamientos, que combinado con la rotación del sistema hace aumentar el tamaño de la órbita descrita.

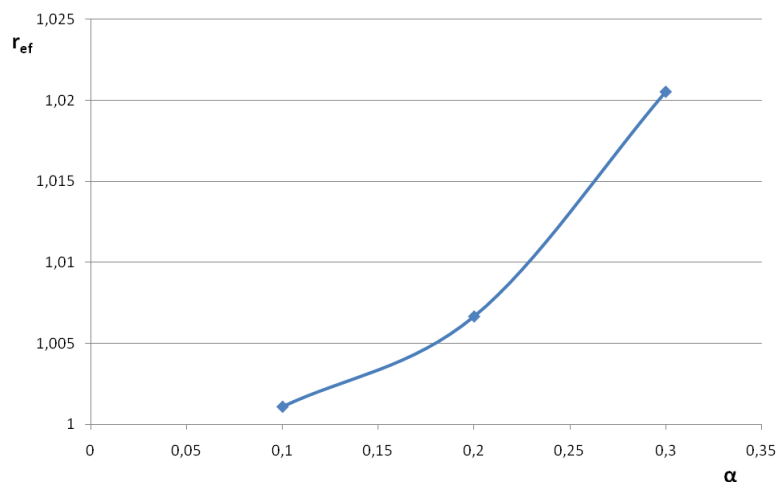


Fig. 3.6. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\alpha$

### 3.2. Órbitas con excentricidad:

Para estudiar estos casos, se añade al sistema una masa ( $m$ ) a una distancia ( $\epsilon$ ) del centro del eje, de forma que el sistema resultante presente un claro desequilibrio (Fig. 2.11). Esta masa irá variando su posición relativa a la fisura (ángulo  $\beta$ ) para de esta forma, estudiar el comportamiento dinámico del eje fisurado en función de la posición del desequilibrio. Se resolverán los casos correspondientes a tres profundidades de fisura diferentes ( $\alpha=0.1$ ,  $\alpha=0.3$  y  $\alpha=0.5$ ), y para cada una de ellas, ocho orientaciones diferentes ( $\beta=0^\circ \div 315^\circ$ ).

A continuación se presentan los resultados obtenidos:

#### 3.2.1. Órbitas con tamaño de fisura $\alpha=0.1$ :

En las siguientes gráficas se ven las órbitas calculadas tomando la profundidad de la fisura  $\alpha=0.1$  y las orientaciones de la misma en intervalos de  $45^\circ$ .

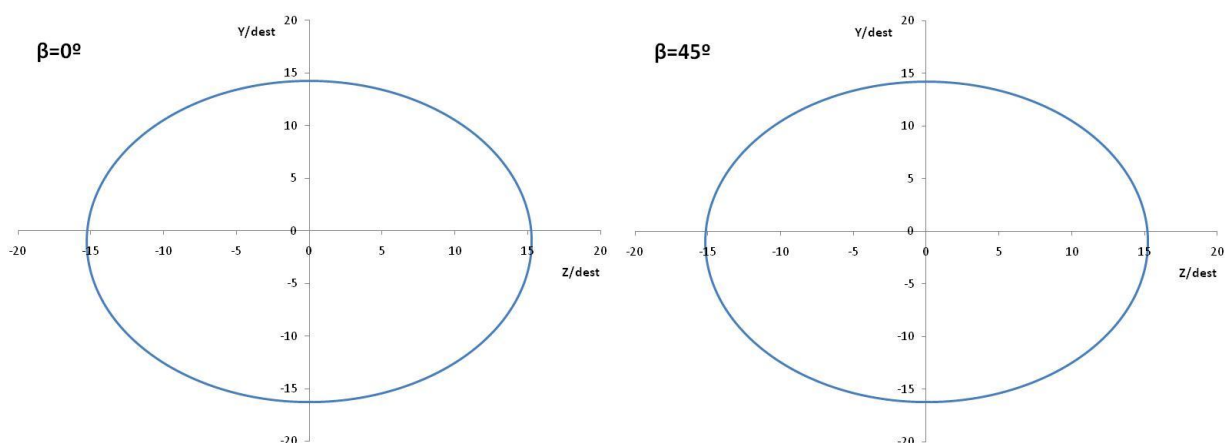


Fig. 3.7. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,1$  y  $\beta=0^\circ$  y  $45^\circ$ .

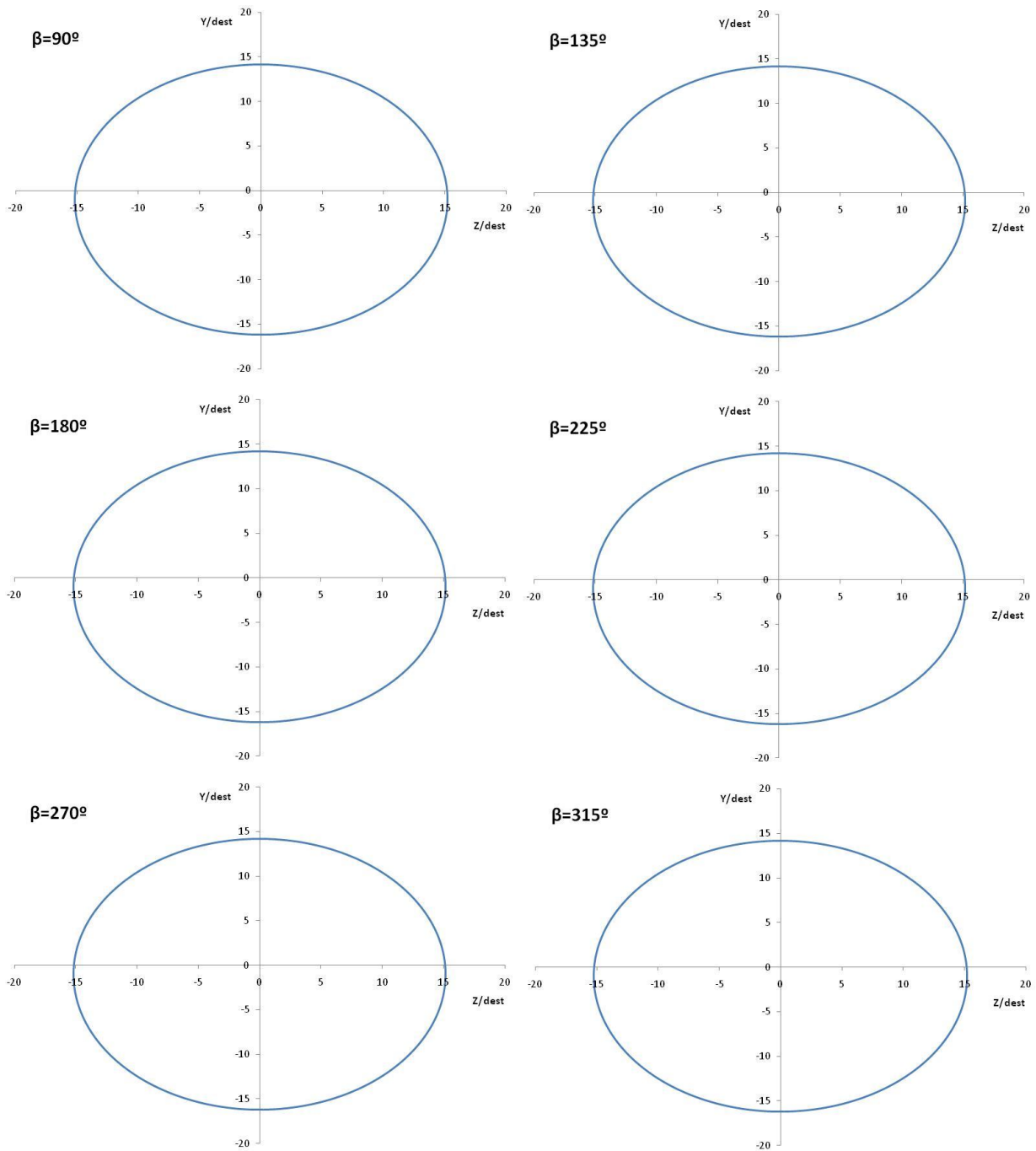


Fig. 3.8. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,1$  y  $\beta=90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ , y  $315^\circ$

Se puede ver que todas las órbitas obtenidas son muy similares, tanto, que a simple vista no es posible apreciar diferencias significativas. Si se analiza el *radio efectivo* de las orbitas de la misma forma que en el punto [3.1] y se representan en función del ángulo  $\beta$ , se obtiene la siguiente gráfica:

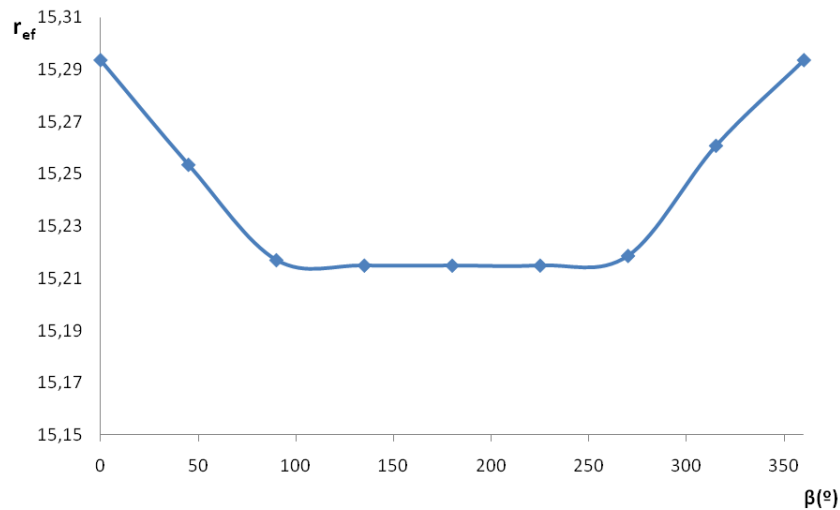


Fig. 3.9. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$  ( $\alpha=0,1$ )

A la vista de esta gráfica, queda claro que la orientación más desfavorable, la que provoca una órbita más grande, es la correspondiente a  $\beta=0^\circ$ , es decir, el desequilibrio está alineado con el eje  $\xi$  del sistema de referencia inercial (Fig. 2.11). A partir de ahí se va reduciendo el tamaño de la órbita hasta llegar a un valor de  $\beta=90^\circ$ . Desde aquí se mantiene prácticamente constante hasta alcanzar  $\beta=270^\circ$ , desde dónde aumenta de nuevo hasta recuperar el valor inicial. Conviene recordar que  $\beta$  representa la posición angular del desequilibrio respecto a la fisura, y que toma ocho valores diferentes como se aprecia en la gráfica.

### 3.2.2. Órbitas con tamaño de fisura $\alpha=0.3$ :

En las siguientes gráficas se ven las órbitas calculadas tomando la profundidad de la fisura  $\alpha=0.3$  y las orientaciones de la misma en intervalos de  $45^\circ$ .

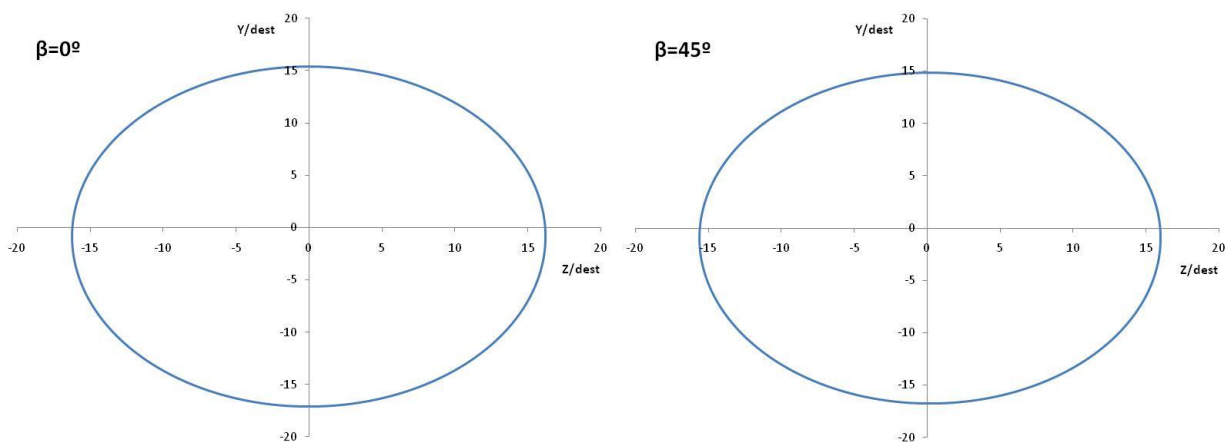


Fig. 3.10. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,3$  y  $\beta=0^\circ$  y  $45^\circ$ .



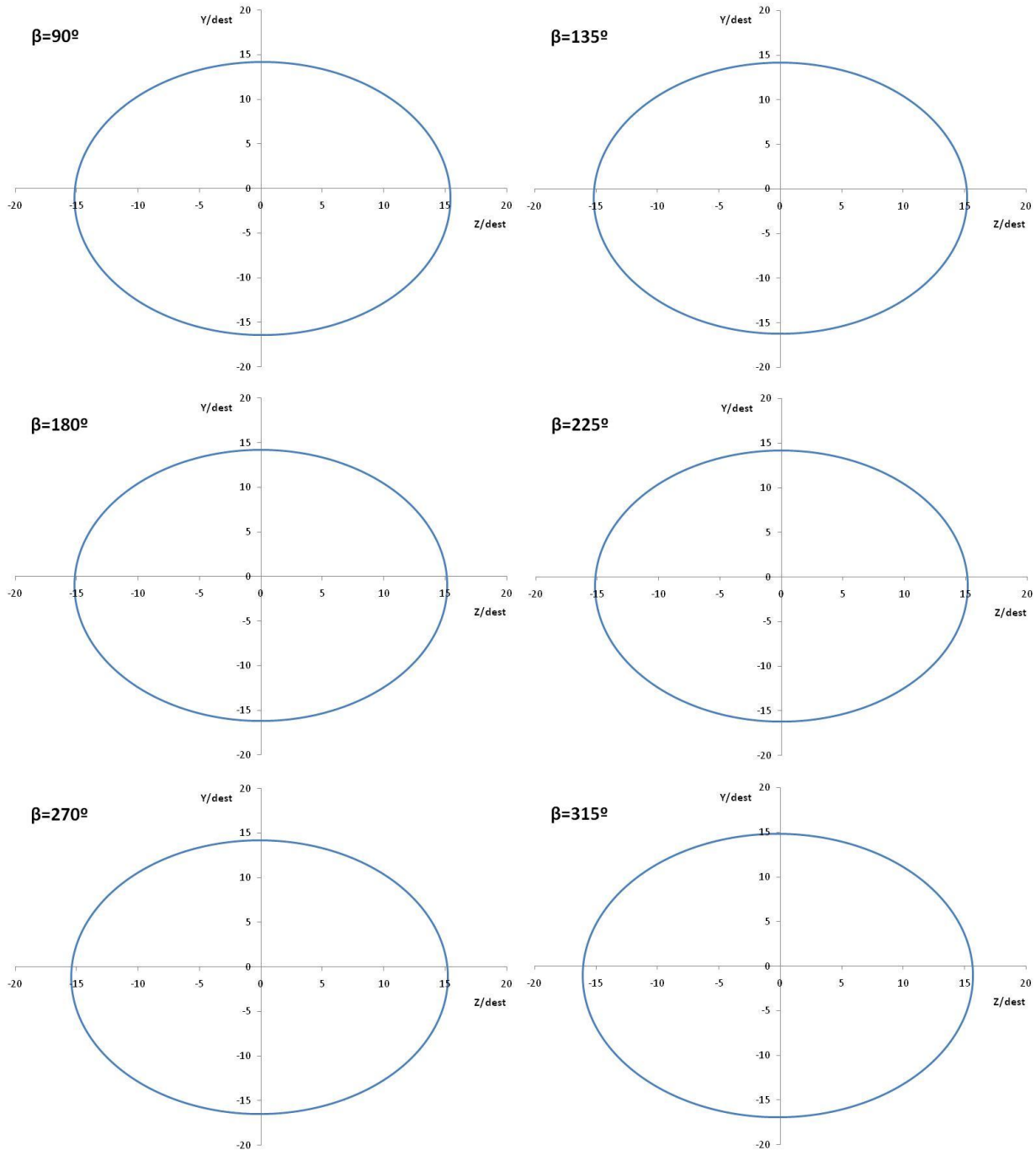


Fig. 3.11. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,3$  y  $\beta=90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ , y  $315^\circ$

En este caso, se observa de nuevo que las órbitas son aproximadamente elípticas, y prácticamente iguales. A simple vista se aprecian ligeros cambios en el tamaño de las órbitas, estos cambios se estudian de forma más detallada de la misma manera que en casos anteriores, (ecuación [23]). El resultado del análisis de los tamaños de las órbitas se muestra en la siguiente gráfica:

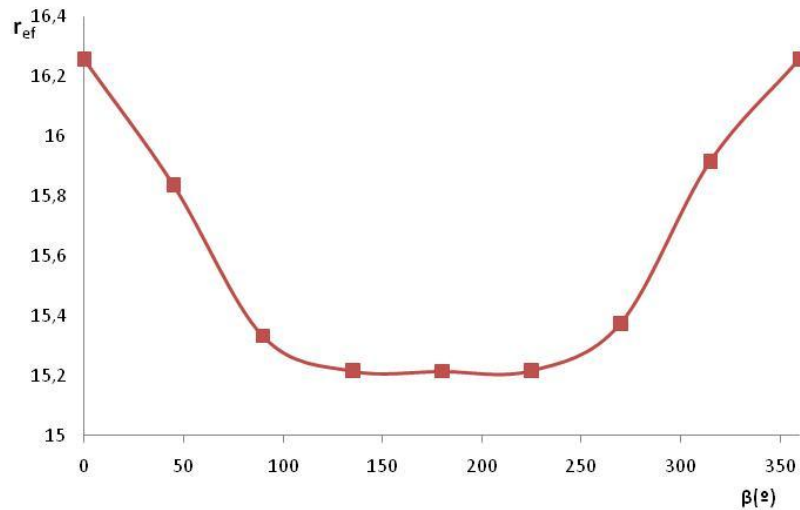


Fig. 3.12. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$  ( $\alpha=0,3$ )

En la gráfica se observa que una vez más, la orientación más desfavorable es la correspondiente a alinear el desequilibrio con el eje  $\xi$  del sistema de referencia inercial (Fig. 2.11). Desde este punto, el tamaño de la órbita decae hasta que la orientación de la fisura coincide con un ángulo  $\beta=135^\circ$ . A partir de ahí se mantiene prácticamente constante hasta llegar a  $\beta=225^\circ$ . Entonces vuelve a aumentar hasta recuperar su valor inicial.

### 3.2.3. Órbitas con tamaño de fisura $\alpha=0.5$ :

En las siguientes gráficas se ven las órbitas calculadas tomando la profundidad de la fisura  $\alpha=0.5$  y las orientaciones de la misma en intervalos de  $45^\circ$ .

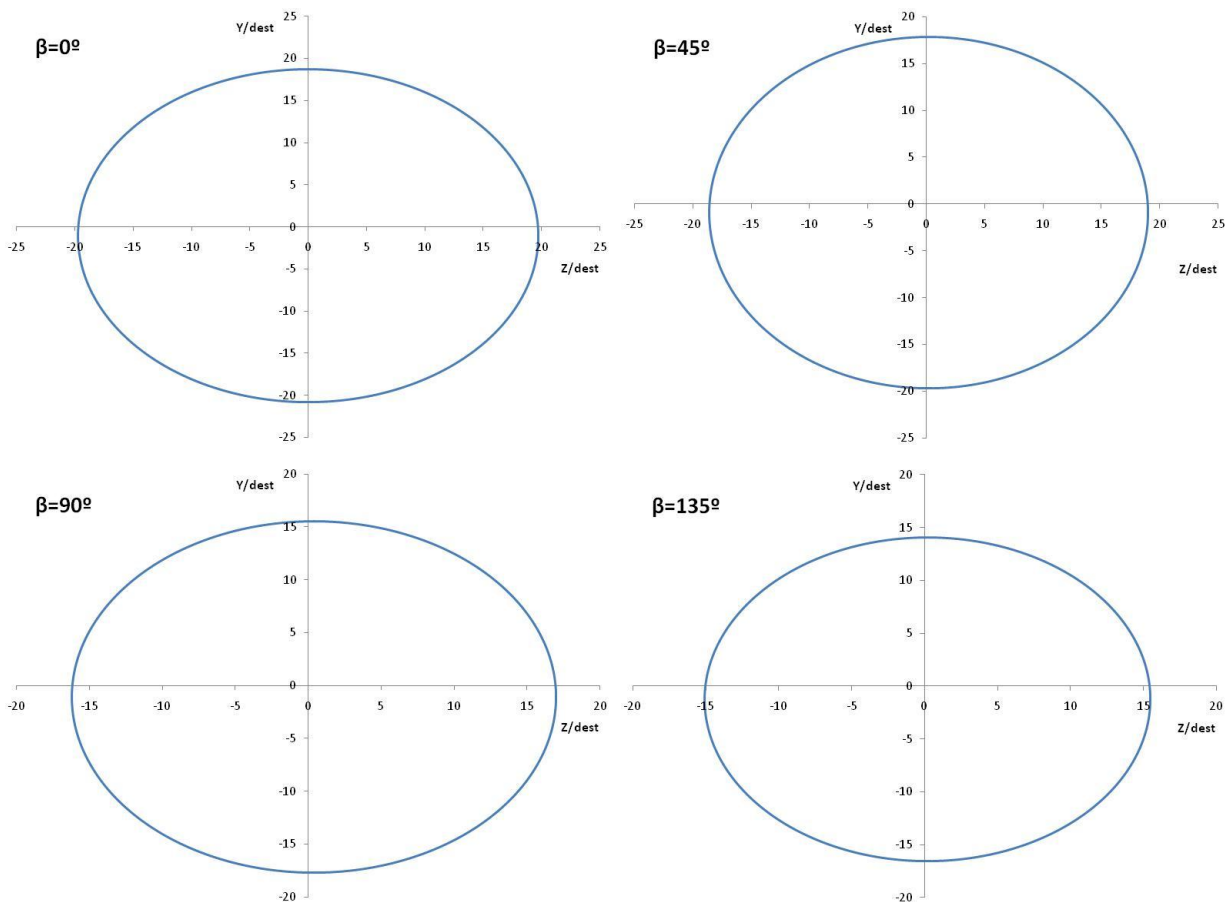


Fig. 3.13. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,5$  y  $\beta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, y 135^\circ$

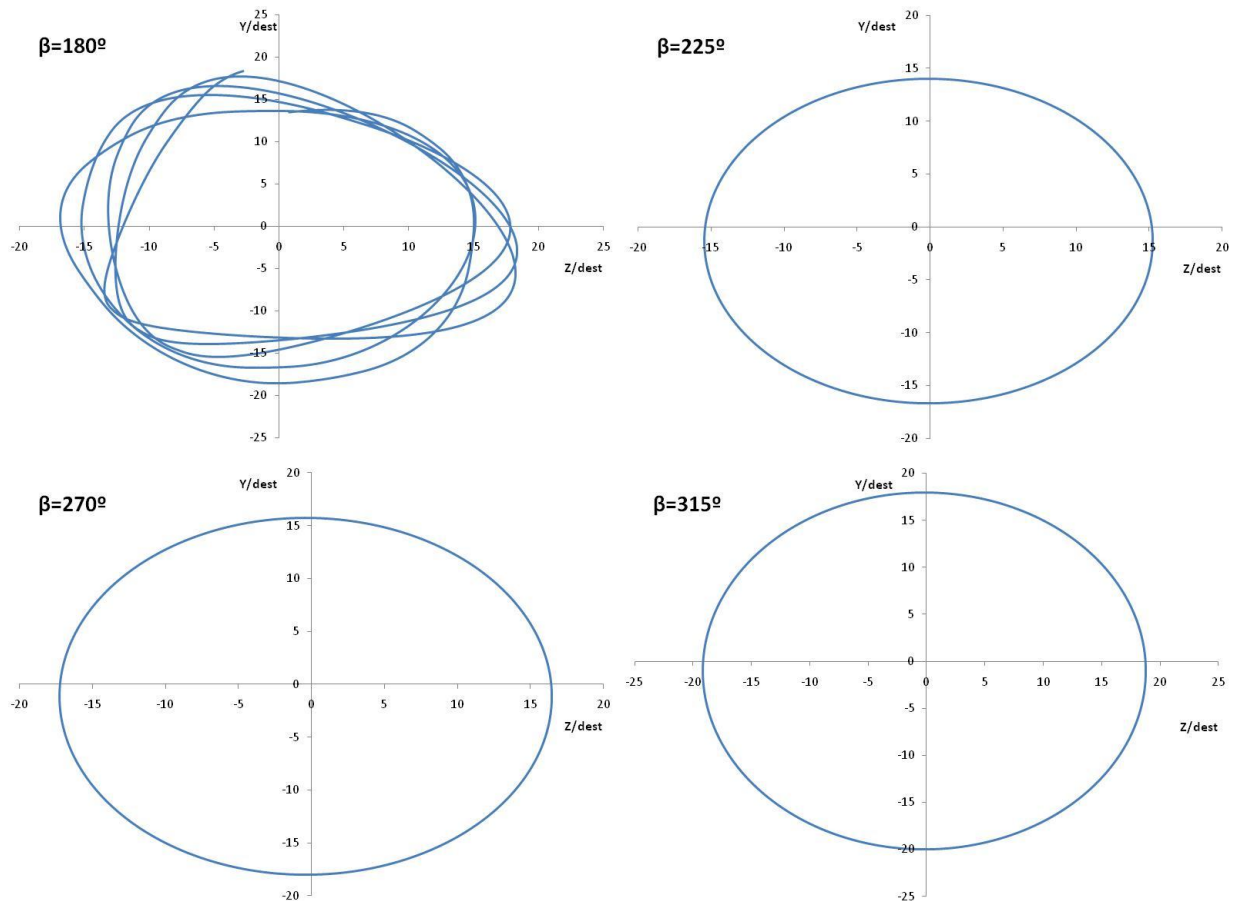


Fig. 3.14. Órbita descrita por el centro de eje para  $\alpha=0,5$  y  $\beta=180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ , y  $315^\circ$

En este caso, se aprecian mayores diferencias en las órbitas obtenidas, tanto de tamaño como de forma. Además, en el caso concreto en el que la orientación de la fisura coincide con un ángulo  $\beta=180^\circ$ , se produce una anomalía. Dado que es una excepción, este caso se analizará más adelante mediante el empleo de diagramas de bifurcación.

Estudiando el tamaño de las órbitas de la forma descrita en los casos anteriores, se observa que la tendencia es similar en todos los casos. La orientación más desfavorable vuelve a ser la que coincide con el desequilibrio y el eje  $\xi$  del sistema de referencia inercial alineados (Fig. 2.11), a partir de ahí, el tamaño decae hasta alcanzar el valor de  $\beta=135^\circ$ . Desde  $\beta=225^\circ$  el tamaño de la órbita se recupera hasta su valor inicial. Cuando la orientación del desequilibrio coincide con  $\beta=180^\circ$ , se produce un pequeño repunte en el tamaño de la órbita, pero dado que es este punto el que da problemas a la hora de realizar el cálculo, no se puede afirmar que este dato sea representativo.

Todo esto se puede ver con claridad en la siguiente gráfica:

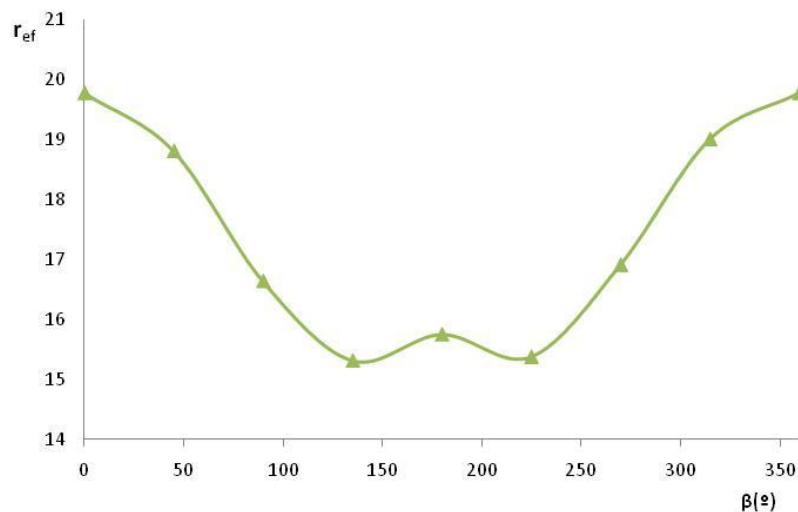


Fig. 3.15. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$  ( $\alpha=0,5$ )

### 3.2.4. Comparación de las órbitas:

A continuación se analizan de forma más precisa los tamaños de todas las órbitas calculadas.

Como ya se ha explicado, para poder comparar todas las órbitas utilizamos un “radio efectivo”, calculado de la siguiente manera a partir de los datos obtenidos de las órbitas:

$$r_{ef} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (\sqrt{Y_i^2 + Z_i^2})^2}{N}} \quad [23]$$

Los “radios efectivos” (adimensionales) obtenidos para cada una de las órbitas calculadas se muestran en la siguiente tabla:

$r_{ef}$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,3$	$\alpha=0,5$
$\beta=0$	15,293463	16,2578997	19,7747194
$\beta=45$	15,2534924	15,8381916	18,8073518
$\beta=90$	15,2170512	15,3332801	16,6384678
$\beta=135$	15,2150058	15,2161508	15,3136324
$\beta=180$	15,2149668	15,2149668	15,7502646
$\beta=225$	15,2150032	15,2172996	15,3765378
$\beta=270$	15,2186837	15,3751226	16,91163
$\beta=315$	15,2607485	15,9152862	19,0060073
$\beta=360$	15,293463	16,2578997	19,7747194

Tabla 3.3. Radios efectivos obtenidos (excentricidad no nula).

En los siguientes gráficos se comparan los *radios efectivos* obtenidos en función del ángulo  $\beta$  y de la profundidad de la fisura  $\alpha$ . A simple vista se puede apreciar que el “tamaño” de la órbita es siempre mayor cuando el desequilibrio está alineado con el eje  $\xi$  del sistema de referencia inercial (Fig. 2.11). Se puede explicar este fenómeno dándose cuenta de que cuando colocamos la fisura mirando hacia arriba, con el desequilibrio justo encima, este no afecta mucho, ya que la rigidez del eje es la misma que la del eje sin fisura, ahora bien, colocando la fisura mirando hacia abajo (rigidez mínima), el desequilibrio queda situado en la posición más desfavorable, abriendo aún más la fisura.

También se observa que la órbita aumenta según se va aumentando la profundidad de la fisura. Esto se explica fácilmente como una consecuencia de la flexibilidad, dado que cuanto más grande es la fisura, más puede abrirse en las posiciones en las que lo hace.

Combinando ambos fenómenos, se explica que al aumentar la profundidad de la fisura la variabilidad del tamaño de las órbitas también aumente. Como ya se ha explicado, en las posiciones en las que la fisura está cerrada cualquier cambio en la orientación del desequilibrio afecta poco al resultado, mientras que en las posiciones en las que la fisura está abierta, dichos cambios sí modifican sustancialmente el resultado.

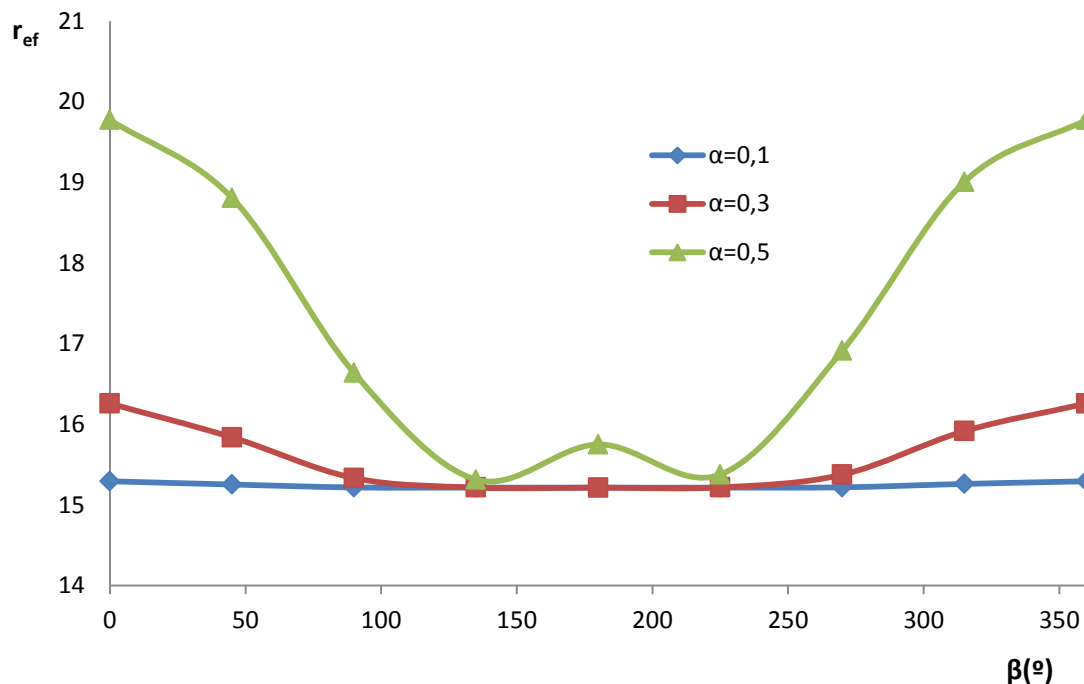


Fig. 3.16. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\beta$

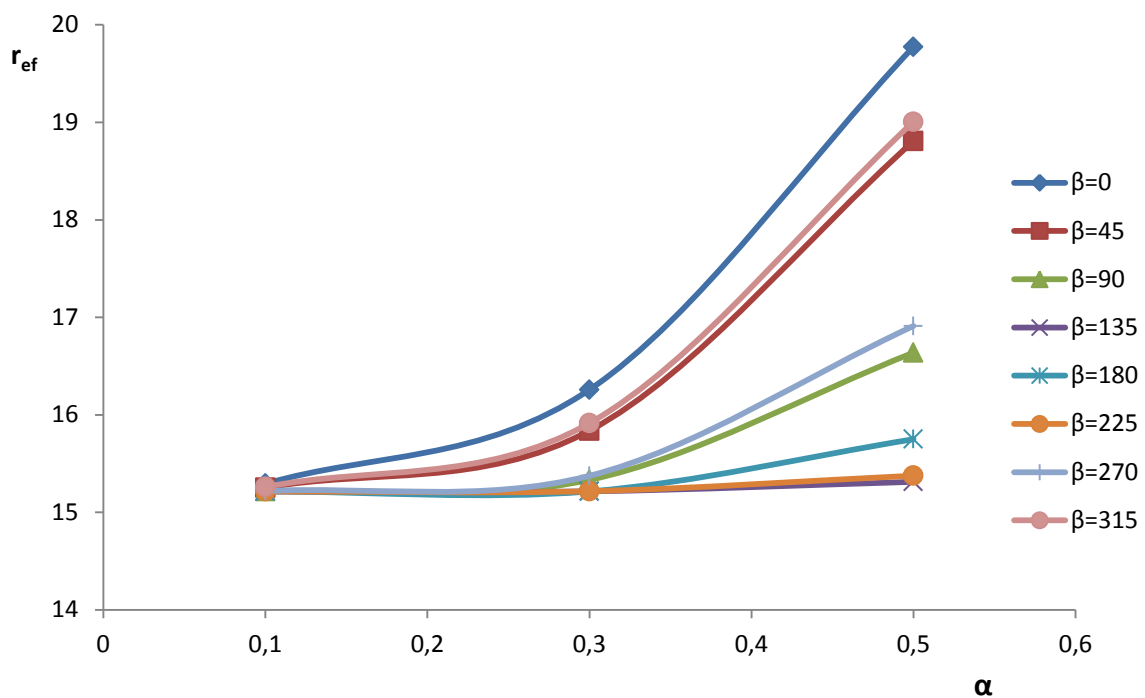


Fig. 3.17. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\alpha$

En la gráfica de la figura 3.17, se aprecia claramente cómo aumenta el tamaño de la órbita al aumentar la profundidad de la fisura. Esto sucede en todos los casos, como ya se ha explicado antes.

En la gráfica siguiente se puede ver una combinación tridimensional de las dos anteriores, para una visión completa desde ambos puntos de vista.

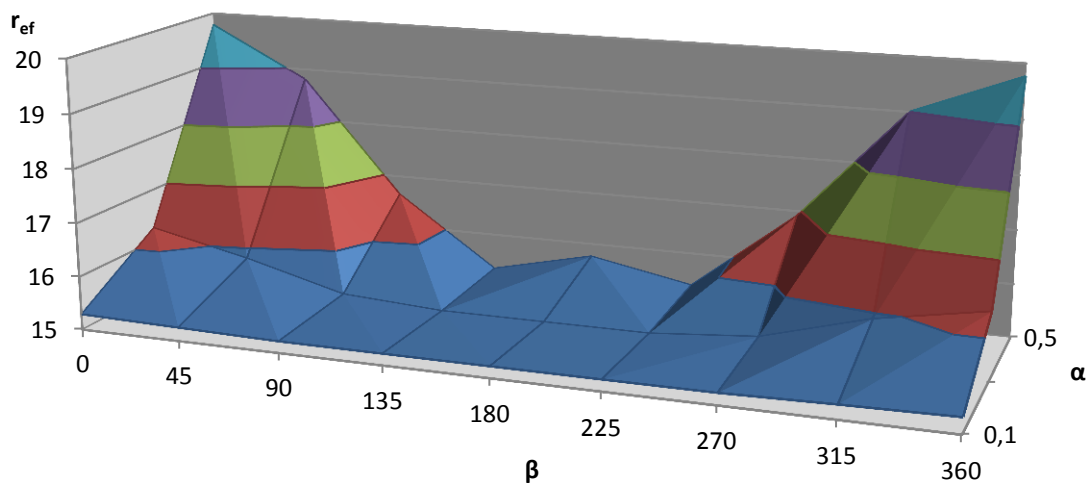


Fig. 3.18. Evolución de  $r_{ef}$  en función de  $\alpha$  y  $\beta$

### 3.2.5. Análisis del comportamiento mediante Mapas de Poincaré y diagramas de bifurcación:

A continuación se muestran los resultados obtenidos al analizar mediante diagramas de bifurcación y mapas de Poincaré el caso que en el apartado anterior resultó ser una anomalía, es decir, se resolverá por este método el caso particular en el que  $\alpha=0.5$  y  $\beta=180^\circ$ .

Para ello, se resuelve el mismo caso anterior, pero en vez de realizar el cálculo para una única velocidad de rotación del eje, se hace un barrido resolviendo para 250 velocidades diferentes, que van desde cero hasta 2225rpm.

En este caso los resultados se analizan mediante el diagrama de bifurcación que se puede ver a continuación. En él está representada la posición vertical del rotor (Y) frente a la velocidad de giro del mismo, ambas variables se presentan de forma adimensional.

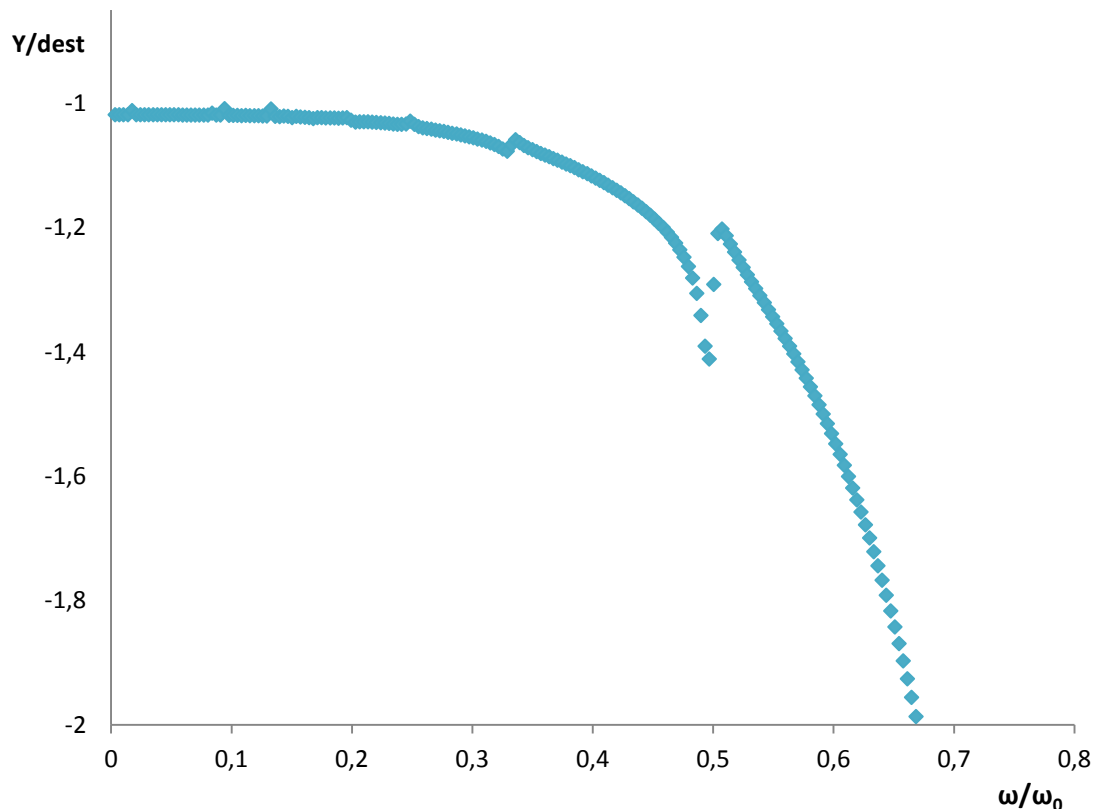


Fig. 3.19. Diagrama de bifurcación para  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=180^\circ$

Se puede apreciar que el diagrama que se ha obtenido es discontinuo. Presenta un salto brusco en torno a un valor de velocidad de  $\omega/\omega_0 \approx 0,5$ . Además, se pueden apreciar otros pequeños saltos en otros puntos de la gráfica, pero el más significativo es que está en  $\omega/\omega_0 \approx 0,5$ .

Esta discontinuidad en el diagrama de bifurcación coincide con la anomalía detectada con anterioridad (apartado 3.2.3 del presente capítulo), y puede significar que el movimiento en estas condiciones particulares ( $\alpha=0.5$ ,  $\beta=180^\circ$  y  $\omega=1150\text{rpm}$ ) es casi periódico o caótico. Para poder determinar el tipo de movimiento que se presenta en este caso es necesario realizar más pruebas. Concretamente el Mapa de Poincaré correspondiente a este caso puede dar información adicional. Dicho mapa se construye guardando los datos de la órbita que describe el centro del eje a intervalos fijos de tiempo, es decir, se almacena la posición del centro una vez por revolución, dejando entre cada dato un tiempo equivalente al periodo de la rotación. A continuación se puede ver el gráfico obtenido para este caso:

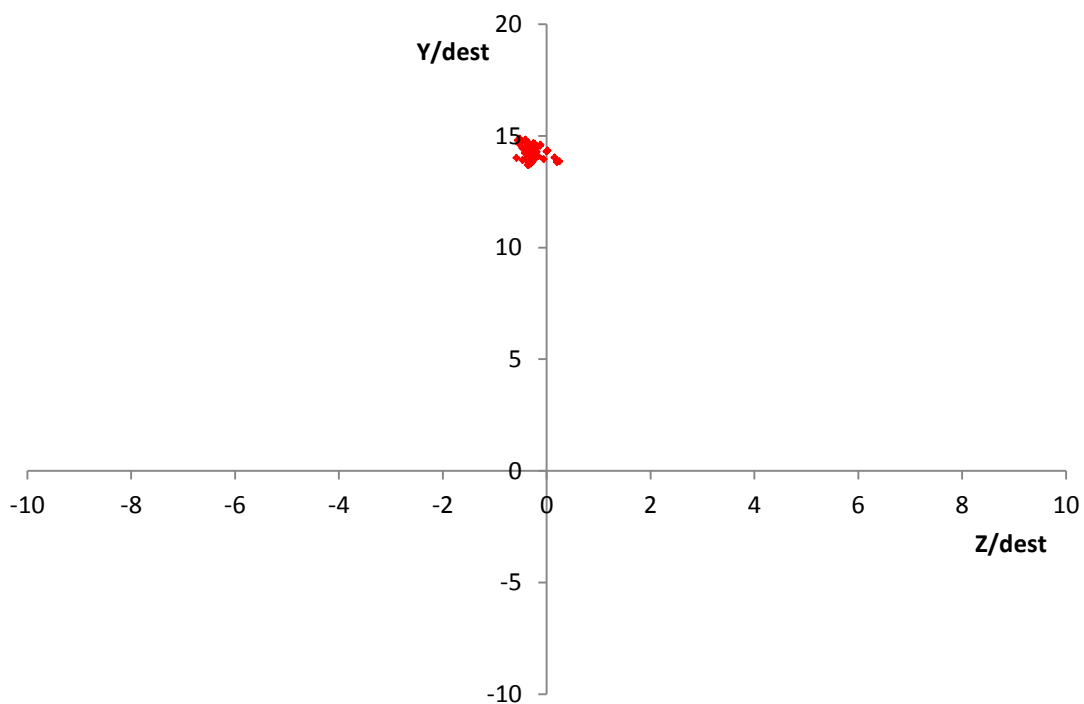


Fig. 3.20. Mapa de Poincaré para  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=180^\circ$  y  $\omega=1150\text{rpm}$ .

En el gráfico se aprecia que todos los puntos se concentran en un área muy pequeña, esto significa que el movimiento es “*casi periódico*”, ya que cada vez que se deja pasar un tiempo equivalente al período, el rotor se encuentra en un punto muy próximo al anterior, y a todos los demás.

A continuación se realiza el mismo tipo de estudio para otros casos analizados en apartados anteriores.

En los siguientes gráficos se muestra el diagrama de bifurcación y el mapa de Poincaré para el caso:  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0^\circ$ .



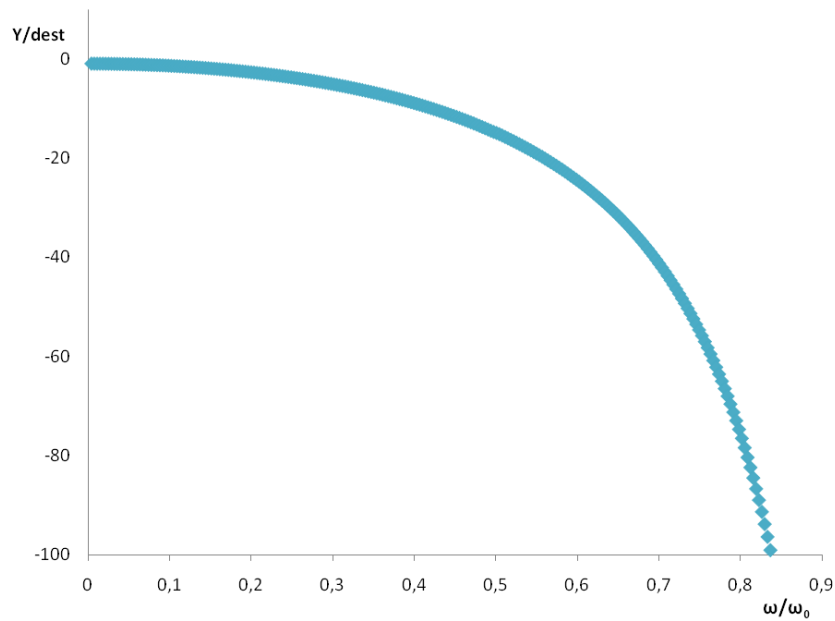


Fig. 3.21. Diagrama de bifurcación para  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0^\circ$

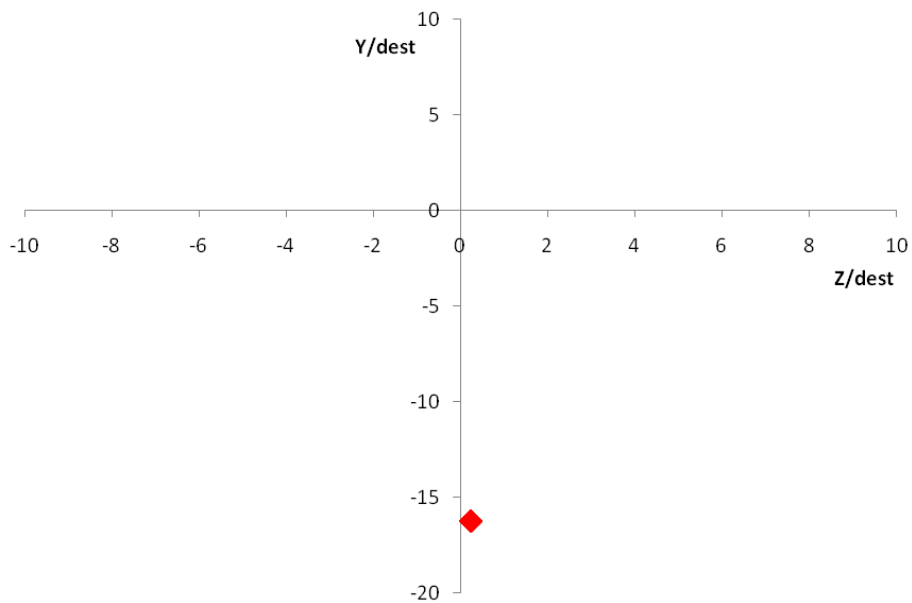


Fig. 3.22. Mapa de Poincaré para  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=0^\circ$  y  $\omega=1150\text{rpm}$ .

Se ve que el diagrama de bifurcación es continuo y sin alteración ninguna, por lo que se deduce que el movimiento es estable en todas las velocidades que se utilizan para realizar el gráfico.

El mapa de Poincaré para una velocidad de 1150rpm se reduce a un único punto, lo que indica que el tipo de movimiento analizado es periódico, ya que revolución tras revolución, el centro del eje está en la misma posición.

A continuación se muestran los gráficos correspondientes al caso  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=45^\circ$ :

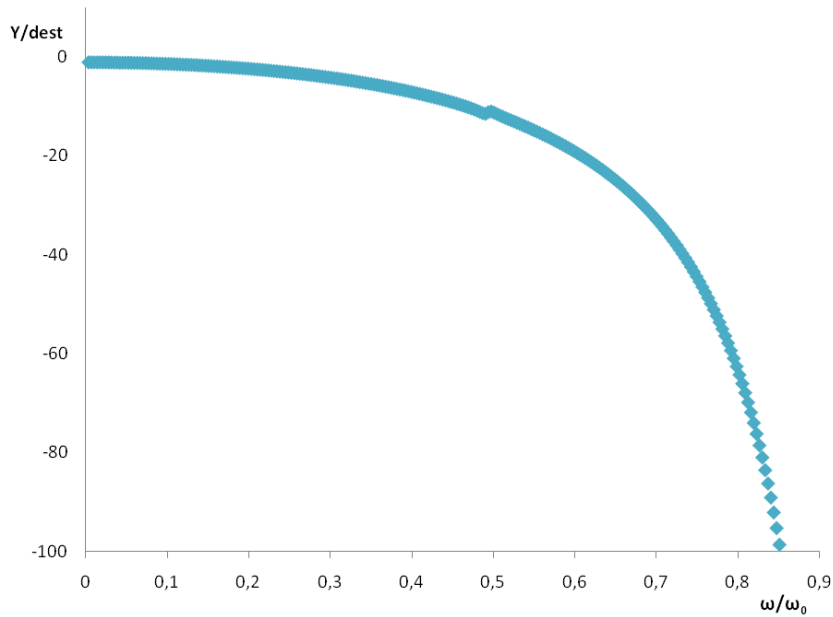


Fig. 3.23. Diagrama de bifurcación para  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=45^\circ$

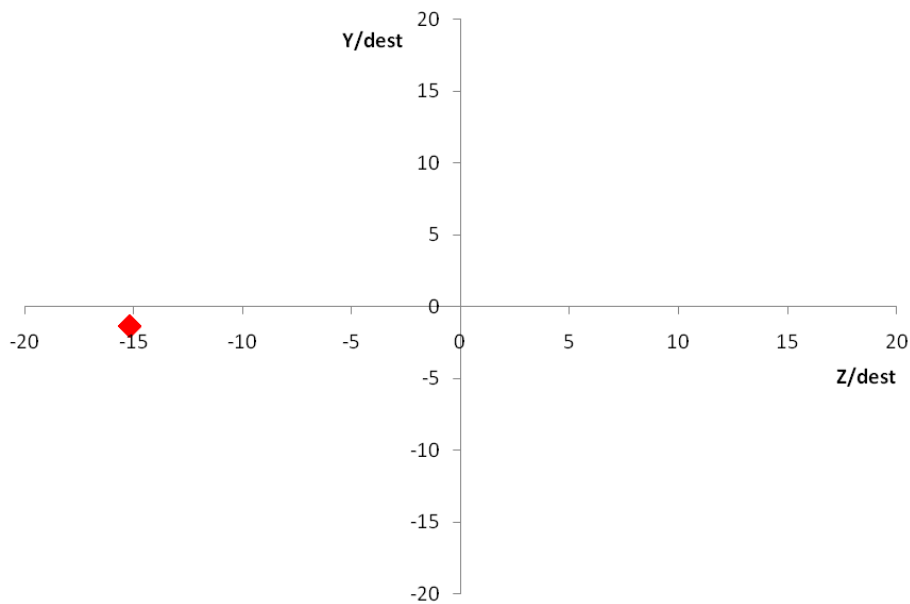


Fig. 3.24 Mapa de Poincaré para  $\alpha=0.3$ ,  $\beta=45^\circ$  y  $\omega=1150\text{rpm}$ .

Este caso es similar al anterior, el resultado que se obtiene es un diagrama de bifurcación continuo y un mapa de Poincaré puntual. Una vez más se trata de un movimiento estable y periódico para el rango de velocidades que se ha estudiado.

Se puede destacar que en el diagrama de bifurcación existe una anomalía en el entorno de  $\omega/\omega_0 \approx 0.5$ . Este valor de velocidad es equivalente a 1150rpm. Como ni en el mapa de Poincaré, ni en la órbita correspondiente (Fig. 3.10), se aprecia ningún elemento que llame la atención, se puede deducir que dicha anomalía no afecta al movimiento del sistema.



Solo se muestran los diagramas de bifurcación y mapas de Poincaré de estos dos casos, ya que el resto de los casos analizados mediante órbitas, presentan el mismo tipo de gráfica, indicando movimiento estable y periódico todos ellos.

Sólo viendo las órbitas mostradas en apartados anteriores se puede deducir que presentan movimientos periódicos. Son todas órbitas elípticas, en las que todas las revoluciones representadas se superponen unas con otras, por esto en los Mapas de Poincaré se ve un único punto.

## **Capítulo IV:**

### **CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS**

#### **4.1. Conclusiones:**

Se ha desarrollado con éxito el programa informático que resuelve las ecuaciones de movimiento de un rotor fisurado y desequilibrado.

De los resultados obtenidos al aplicar dicho programa a casos reales se pueden extraer varias conclusiones.

En primer lugar, se aprecia que en rotores equilibrados, las órbitas obtenidas presentan un bucle, lo que indica que se ha trabajado con una velocidad de rotación próxima a la velocidad crítica del sistema. Al introducir un desequilibrio en el mismo sistema, dicho bucle desaparece, obteniendo en todos los casos órbitas de tipo elíptico y mucho más pequeñas, es decir, movimientos más estables. Esta situación induce a pensar que mediante la introducción del desequilibrio se está alejando la velocidad crítica. Este efecto está relacionado con el desplazamiento de las frecuencias naturales del sistema.

Por otro lado, se ha constatado que al aumentar la profundidad de la fisura ( $\alpha$ ), aumenta también el tamaño de las órbitas. Este aumento de tamaño es debido a que al crecer la fisura, disminuye la sección resistente del eje, disminuyendo a su vez la rigidez del mismo.

Además, al ir variando la orientación del desequilibrio respecto a la fisura ( $\beta$ ), se ha podido comprobar que la orientación que produce órbitas más grandes, es la que hace coincidir el desequilibrio con la parte positiva de un eje perpendicular a la fisura con origen en el centro del rotor ( $\beta=0^\circ$ ). El tamaño de la órbita decrece según se aumenta el ángulo entre el desequilibrio y dicho eje hasta que el ángulo alcanza un valor en torno a  $120^\circ$  dependiendo del caso. A partir de ahí, el tamaño de las órbitas se mantiene constante, registrándose un ligero repunte cuando el ángulo alcanza los  $180^\circ$ . Este efecto se debe a que las fuerzas de inercia asociadas al desequilibrio tienden a abrir o cerrar la fisura dependiendo de la posición del mismo. Las causas de que los tamaños de las órbitas aumenten ligeramente cuando el valor del ángulo coincide con  $180^\circ$  no están claras, por lo que habría que seguir investigando por esa línea.

Mediante el empleo de diagramas de bifurcación y mapas de Poincaré se ha demostrado que todos los casos analizados presentan movimiento estable y periódico a excepción de uno de ellos ( $\alpha=0.5$  y  $\beta=180^\circ$ ). Para este caso particular, solo observando la órbita es fácil ver que no se comporta como el resto. Según los datos obtenidos mediante el mapa de Poincaré, se trata de un movimiento casi periódico. No obstante, sería interesante continuar indagando sobre las causas de que este sea un caso particular.

#### 4.2. Trabajos futuros:

Sería interesante que en el futuro se realizasen los siguientes trabajos que complementarán y ampliarán los resultados obtenidos en este.

En primer lugar, es importante obtener una comprobación experimental de los resultados que se han obtenido de forma analítica, por lo que realizar ensayos en laboratorio sobre ejes reales es fundamental.

Además, se debe realizar un estudio similar a este utilizando fisuras de frente curvilíneo, y su correspondiente comprobación experimental.

Por otro lado, sería interesante indagar a fondo en las causas de los diferentes comportamientos de los ejes, sobre todo en los casos particulares que se pueden encontrar.

Una vez se conozca el comportamiento de los ejes teniendo en cuenta todas las posibles variables, y realizando las menores simplificaciones posibles, será posible desarrollar un sistema que analice en tiempo real la órbita de ejes en servicio, que sea capaz de detectar la presencia de fisuras y predecir con exactitud el momento exacto en el que el eje sufrirá un fallo catastrófico. De esta manera se podrán programar las labores de mantenimiento necesarias para evitar dicho fallo.

## **Capítulo V:**

### *REFERENCIAS*

1. **Patel, Tejas H. y Darpe, Ashish K.** Influence of crack breathing model on nonlinear dynamics of a cracked rotor. 3-5 *Journal of Sound and Vibration*. 2007. Vol. 311, págs. 953-972.
2. **Machorro López, José Manuel.** *Tesis Doctoral. Experimentación y validación de modelos dinámicos para detectar fisuras en ejes rotatorios de maquinaria en operación.* México, D.F : Instituto Politécnico Nacional, 2005.
3. **Frederick C., Nelson.** A brief review of early rotordynamics. *Journal of Sound and Vibration*. 2003.
4. **Muszynska, A.** *Rotordynamics.* s.l. : Taylor & Francis, 2005.
5. **Genta, Giancarlo.** *Dynamics of rotating systems .* s.l. : Springer, 2005.
6. **Ruiz, Rafael.** Análisis no lineal de cojinetes flotantes. 2008. Vol. 29, 3, págs. 269-276.
7. Poincaré Map. *From Wikipedia, the free encyclopedia.* [En línea] [Citado el: 29 de Marzo de 2011.] [http://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9\\_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_map).

## **Presupuesto:**

El coste de la realización del presente documento se puede dividir en los costes asociados al personal que ha intervenido en su desarrollo y en los relacionados con el material y equipos utilizados.

Los costes personales se cuantifican teniendo en cuenta que la duración aproximada de los trabajos ha sido de diez meses a tiempo parcial. El ingeniero proyectista ha dedicado un total de 314 horas de trabajo a razón de 20,53 €/h. En su labor de supervisión, un ingeniero senior ha dedicado un total de 62 horas con un coste por hora de 32.68€/h.

El equipo utilizado se compone de un ordenador personal, con licencias actualizadas de los programas MatLab, AutoCad, así como el paquete Ms Office. También se tiene en cuenta la utilización de una impresora multifunción.

Los costes indirectos se cuantifican como un 20% del total.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto y según el desglose que se adjunta, el presupuesto total de este proyecto asciende a la cantidad de diez mil quinientos sesenta euros y sesenta y nueve céntimos (10560,69€).

Leganés, a 31 de Mayo de 2011

El ingeniero proyectista:



Fdo. Alvaro Melendo Urbano

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**  
**Escuela Politécnica Superior**

PRESUPUESTO DE PROYECTO

---

**1.- Autor:**  
ALVARO MELENDO URBANO

**2.- Departamento:**  
Ingeniería Mecánica

**3.- Descripción del Proyecto:**

- Título Estudio de la interacción fisura-desequilibrio en la evolución de las órbitas de ejes rotatorios

- Duración (meses) 10

Tasa de costes Indirectos: 20%

**4.- Presupuesto total del Proyecto (valores en Euros):**  
10.560,69 Euros

**5.- Desglose presupuestario (costes directos)**

PERSONAL

Apellidos y nombre	N.I.F. (no rellenar solo a título informativo)	Categoría	Dedicación (hombres mes) <sup>a)</sup>	Coste hombre mes	Coste (Euro)	Firma de conformidad
Alvaro Melendo Urbano		Ingeniero	2,39	2.694,39	6.439,59	
Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre		Ingeniero Senior	0,47	4.289,54	2.016,08	
<b>Hombres mes 2,86</b>					<b>Total</b>	<b>8.455,68</b>

<sup>a)</sup> 1 Hombre mes = 131,25 horas. Máximo anual de dedicación de 12 hombres mes (1575 horas)  
Máximo anual para PDI de la Universidad Carlos III de Madrid de 8,8 hombres mes (1.155 horas)

EQUIPOS

Descripción	Coste (Euro)	% Uso dedicado proyecto	Dedicación (meses)	Periodo de depreciación	Coste imputable <sup>d)</sup>
Ordenador personal	659,00	60	10	60	65,90
Impresora multifunción	367,00	10	10	60	6,12
Licencia software Ms Office	139,00	60	10	60	13,90
Licencia software MatLab	6.238,00	30	8	60	249,52
Licencia software AutoCad	2.837,61	10	2	60	9,46
<b>Total</b>					<b>344,90</b>

<sup>d)</sup> Fórmula de cálculo de la Amortización:  

$$\frac{A}{B} \times C \times D$$
A = nº de meses desde la fecha de facturación en que el equipo es utilizado  
B = periodo de depreciación (60 meses)  
C = coste del equipo (sin IVA)  
D = % del uso que se dedica al proyecto (habitualmente 100%)

SUBCONTRATACIÓN DE TAREAS

Descripción	Empresa	Coste imputable
		0,00

OTROS COSTES DIRECTOS DEL PROYECTO<sup>e)</sup>

Descripción	Empresa	Costes imputable
		0,00

<sup>e)</sup> Este capítulo de gastos incluye todos los gastos no contemplados en los conceptos anteriores, por ejemplo: fungible, viajes y dietas,

**6.- Resumen de costes**

Presupuesto Costes Totales	Presupuesto Costes Totales
Personal	8.455,68
Amortización	344,90
Subcontratación de tareas	0,00
Costes de funcionamiento	0,00
Costes Indirectos	1.760,11
<b>Total</b>	<b>10.560,69</b>

Página 48



