



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
GROUP OF APPLIED MATHEMATICAL ANALYSIS (GAMA)

Escuela Politécnica Superior

ESTUDIO DE LA CONSTANTE DE HIPERBOLICIDAD EN GRAFOS

Una tesis sometida a la Universidad Carlos III de Madrid

Para el grado científico de:

DOCTOR EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

por

JEAN-MARIE VILAIRE

Director de tesis: JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ GARCÍA

Año académico 2010-2011

Tabla de contenidos

Tabla de contenidos	1
Agradecimientos	4
Resumen	5
1 Introducción	8
1.1 Una aproximación a la teoría de grafos	8
1.1.1 Algunos ejemplos de clases de grafos	12
1.2 Espacios hiperbólicos en sentido de Gromov	21
2 Sobre la constante de hiperbolicidad en grafos	31
2.1 Hiperbolicidad, lazos y aristas múltiples	31
2.2 Cálculo explícito de la constante de hiperbolicidad de algunos grafos	38
3 Grafos hiperbólicos en sentido de Gromov	48
3.1 Cotas para la constante de hiperbolicidad de un grafo	48
3.2 Hiperbolicidad y adición de aristas	52
3.3 Grafos cúbicos	56
4 Hiperbolicidad de grafos de teselación y esqueletos de CW complejos	63
4.1 Hiperbolicidad de grafos de teselación	63
4.2 Hiperbolicidad de grafos planares.	75
4.3 Hiperbolicidad de CW 2-complejos y sus grafos duales	80

Problemas abiertos	86
Referencias	89

A mi familia,

en particular, a Edwige, Luce, Sonia, Suzette y Wilfred.

Agradecimientos

Esta tesis no se habría realizado sin el apoyo, el entusiasmo y el estímulo de muchas personas. Esa es la razón por la que me gustaría empezar con algunas palabras de agradecimiento.

En primer lugar, quiero expresar mi profundo agradecimiento al Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid por ofrecerme la posibilidad de hacer un doctorado. Fue una experiencia muy agradable ser un miembro del “Group of Applied Mathematical Analysis”.

Estoy extremadamente agradecido por la oportunidad de haber tenido como director de tesis a José Manuel Rodríguez García. Quiero darle las gracias por la sabiduría que él compartió conmigo. Fue un privilegio ser su discípulo ya que ha tenido una importante influencia sobre mi comprensión de las matemáticas.

También quiero agradecer a José María Sigarreta Almira por ser un consejero, por su apoyo continuo y también por sus colaboraciones en los trabajos que hemos escrito juntos.

No puedo olvidar a Juan Bory Reyes por haberme introducido en el mundo de la investigación y por dedicar todo su tiempo a leer entera esta tesis que queda fuera de sus temas de investigación.

Resumen

Esta tesis se dedica al estudio de los grafos hiperbólicos y está dividida en cuatro capítulos. El primer capítulo es una introducción a la teoría de grafos y a los espacios hiperbólicos en sentido de Gromov. En los demás capítulos se incluyen los resultados de investigación que hemos conseguido.

Aunque se dispone de ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos, no existen criterios generales que permitan determinar la hiperbolicidad de un espacio. Por tanto, uno de los problemas más importantes en el estudio de los grafos hiperbólicos es obtener criterios que garanticen si un determinado grafo es hiperbólico o no.

Por otra parte, existen numerosos parámetros en teoría de grafos que tienen gran importancia, tales como: el número de vértices, el número de aristas, el grado máximo, el grado mínimo, el diámetro, el cuello,... Por tanto, otro problema tan natural como importante es encontrar desigualdades que relacionen alguno de estos parámetros (o varios de ellos simultáneamente) con la constante de hiperbolicidad del grafo, encontrando y clasificando (como es importante en teoría de grafos) aquellos grafos para los que se tenga la igualdad.

En esta tesis se demuestra que el estudio de la hiperbolicidad de los grafos se puede reducir al estudio de la hiperbolicidad de grafos más sencillos. En particular, hemos demostrado que el estudio de la hiperbolicidad de un grafo G con lazos y aristas múltiples se puede reducir al estudio de la hiperbolicidad del grafo obtenido al eliminar de G sus lazos y aristas múltiples; también se demuestra que el estudio de la hiperbolicidad de un grafo arbitrario es equivalente al estudio de la hiperbolicidad de un grafo 3-regular obtenido añadiendo algunas aristas y vértices. En resumen, probamos que el estudio de la hiperbolicidad para grafos generales (posiblemente con lazos y aristas múltiples) se reduce al estudio de la hiperbolicidad de grafos cúbicos sin lazos ni aristas múltiples. Adicionalmente, se estudia cómo la constante de hiperbolicidad de un grafo puede cambiar añadiendo o eliminando una cantidad finita o

infinita de aristas.

Por otra parte, se obtienen buenas cotas de la constante de hiperbolicidad de un grafo y los valores exactos de esta constante para algunas familias importantes de grafos. En particular, se investiga la relación entre la constante de hiperbolicidad $\delta(G)$ de un grafo G y su número de aristas, su diámetro y sus ciclos. Como consecuencia del estudio, se demuestra que si G es un grafo con m aristas de longitudes $\{l_k\}_{k=1}^m$, entonces $\delta(G) \leq \sum_{k=1}^m l_k/4$ y $\delta(G) = \sum_{k=1}^m l_k/4$ si sólo si G es isomorfo al grafo ciclo C_m . Además, se prueba la desigualdad $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$ para todo grafo G , y esta desigualdad permite encontrar los valores exactos de $\delta(G)$ para muchos grafos.

Finalmente, encontramos condiciones para que un grafo que sea el 1-esqueleto de una teselación de una superficie riemanniana sea hiperbólico. Se demuestra que los isomorfismos entre grafos no siempre preservan la hiperbolicidad y, de hecho, encontramos condiciones suficientes para que dos grafos isomorfos sean equivalentes en términos de la hiperbolicidad. Por último, demostramos que un grafo es hiperbólico si y sólo si su grafo dual es hiperbólico.

Los resultados de esta tesis han sido incluidos en los artículos [4], [39] y [42] que ya han sido publicados, aceptados o enviados a revistas internacionales de matemáticas que aparecen en el JCR (Journal Citation Report) y también han sido dados a conocer mediante la presentación de conferencias y posters en diversos congresos nacionales e internacionales tales como:

- Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación COMPUMAT, 2010, La Habana, Cuba. Conferencia impartida por José María Sigarreta.
- Colloquim de la Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco, México, noviembre de 2010, impartido por Jean-Marie Vilaire.
- XII Encuentros de Análisis Real y Complejo 2010, 22-24 de abril, Haro (La Rioja).

Póster presentado por Jean-Marie Vilaire.

- International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 19-25 de septiembre de 2010, Rhodes, Greece. Conferencia impartida por Jean-Marie Vilaire. La contribución a este congreso se ha publicado en los Proceedings [\[3\]](#).

Capítulo 1

Introducción

1.1 Una aproximación a la teoría de grafos

Una de las partes de la matemática discreta que en estos últimos años ha experimentado un desarrollo más notable es la *teoría de grafos*. Enmarcada dentro de la combinatoria, esta teoría permite modelar de forma simple cualquier sistema en el cual exista una relación binaria entre ciertos objetos; y es por esto que su ámbito de aplicación es muy general y cubre áreas dentro de la misma matemática, la ingeniería, la sociología, la lingüística,...

Como línea de investigación, la teoría de grafos es todavía relativamente reciente, pero está madurando rápidamente con muchos resultados que se han descubierto en el último par de décadas.

En esta sección se pretende exponer, de un modo organizado, los conceptos y términos sobre grafos que aparecen en distintas partes de este trabajo (ver [5, 14, 15, 16, 17, 23, 36, 37, 51, 52]).

Definición 1.1.1. Sea V un conjunto no vacío, al que llamaremos conjunto de vértices y sea E un subconjunto del conjunto de pares no ordenados de V , al que llamaremos conjunto de aristas. Llamaremos grafo G al par (V, E) , también denotado por $(V(G), E(G))$. Dado que las aristas son pares no ordenados de vértices, siempre estamos tratando con grafos no orientados.

La terminología en teoría de grafos varía muchísimo. En particular, los vértices de un grafo también reciben a veces el nombre de nodos, puntos y las aristas arcos, ejes o líneas.

El número de vértices de un grafo G es su *orden* y se escribe como $|V(G)|$; su número de aristas es su *medida* y se denota por $|E(G)|$. Un grafo G es finito si y sólo si $|V(G)| < \infty$ y $|E(G)| < \infty$. En caso contrario se dice que el grafo es infinito.

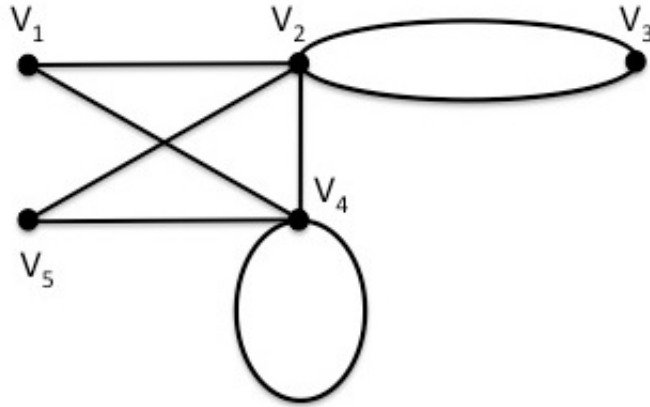
Un grafo G de orden 1 se llama trivial.

Una arista que une los vértices $u \in V(G)$ y $v \in V(G)$ se denota en muchas ocasiones por $[uv]$, pero usaremos la notación $[u, v]$ para denotar dicha arista, ya que la notación $[uv]$ se reserva en este trabajo para las geodésicas, de las que hablaremos un poco más adelante.

A lo largo de este trabajo trataremos con grafos cuyas aristas pueden tener diferentes *longitudes* o *pesos*.

Observación 1.1.2. Un intervalo cerrado de la recta real se denota de igual forma que una arista, pero no habrá confusión con las notaciones, ya que en cada caso el contexto dejará claro a qué nos estamos refiriendo.

Definición 1.1.3. Un lazo es una arista cuyos extremos son iguales, es decir, una arista que une un vértice con él mismo. Decimos que el grafo tiene aristas múltiples si en el grafo dos o más aristas unen el mismo par de vértices.



En este ejemplo las aristas que unen V_2 y V_3 son aristas múltiples y $[V_4, V_4]$ es un lazo.

Un grafo se denomina *simple* si no tiene ni lazos ni aristas múltiples.

Definición 1.1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si $G' = (V', E')$ es un grafo tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que G' es un subgrafo de G .

Definición 1.1.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Diremos que dos vértices $u, v \in V(G)$ son vecinos si $[u, v] \in E(G)$. El grado de un vértice es el número de vecinos que tiene en el grafo.

El grado de $v \in V(G)$ se denota por $\deg(v) := \text{card}\{u \in V(G) : [u, v] \in E(G)\}$.

El número $\rho(G) := \min\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ es el grado mínimo de G , el número $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V\}$ es su grado máximo. Si $\rho(G) = \Delta(G)$, entonces se dice que el grafo es regular.

Si el grado de un vértice es 0, diremos que es un *vértice aislado*.

Definición 1.1.6. Dos vértices u, v de un grafo $G = (V, E)$ se dicen adyacentes si $[u, v] \in E(G)$; asimismo, dos aristas son adyacentes si tienen un mismo vértice en común; análogamente si $e = [u, v]$ decimos que la arista e es incidente a los vértices u y v .

Pares de vértices o aristas no adyacentes se dicen *independientes*. Más formalmente, un conjunto de vértices o de aristas es independiente (o estable) si ningún par de elementos suyos son adyacentes.

Definición 1.1.7. *Un camino es una sucesión de vértices (o de aristas) adyacentes.*

La *longitud* de un camino es la suma de las longitudes de las aristas que tiene este camino.

Definición 1.1.8. *Un grafo G es conexo si existe en G un camino entre cualquier par de vértices; en otro caso, decimos que es desconexo.*

Definición 1.1.9. *Una componente conexa de un grafo G es un subgrafo conexo de G que no está propiamente contenido en ningún otro subgrafo conexo de G , es decir, una componente conexa de G es un subgrafo que es maximal respecto a la propiedad de ser conexo. En otras palabras, un subgrafo conexo F de un grafo G es una componente conexa de G si, para cada grafo conexo H , con $F \subseteq H \subseteq G$, $V(F) \subseteq V(H)$ y $E(F) \subseteq E(H)$, resulta que $F = H$.*

Señalemos que las componentes conexas de un grafo son grafos conexos; es fácil ver que todo grafo se puede representar como unión de grafos conexos (sus componentes conexas).

Definición 1.1.10. *En un grafo conexo G definimos la distancia $d_G(u, v)$ entre u y v como el ínfimo de las longitudes de los caminos que unen los puntos u y v de G ; si no hay posibilidad de confusión, simplemente escribiremos $d(u, v)$. Un camino uniendo u y v de longitud $d(u, v)$ se llama geodésico. Si no existe ningún camino uniendo u y v , definimos $d(u, v) := \infty$.*

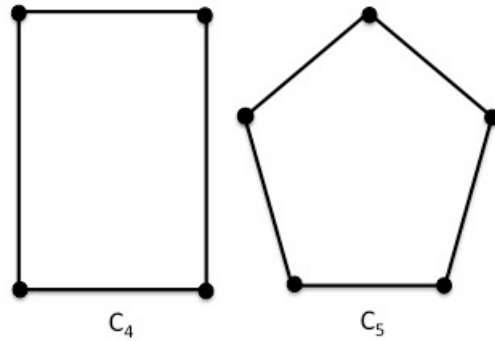
Observación 1.1.11. *Los puntos u y v pueden ser vértices de G o no, es decir, pueden estar en el interior de una arista de G . Si no requerimos $u, v \in V(G)$, escribiremos $u, v \in G$.*

Con esta función de distancia todo grafo es un espacio métrico.

El supremo de las distancias entre dos vértices cualesquiera en G es el diámetro de $V(G)$, denotado por $\text{diam}_G V(G)$, y el supremo de las distancias entre dos puntos cualesquiera en G

es el diámetro de G , denotado por $\text{diam}_G G$. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos simplemente $\text{diam } V(G)$ y $\text{diam } G$ en lugar de $\text{diam}_G V(G)$ y $\text{diam}_G G$.

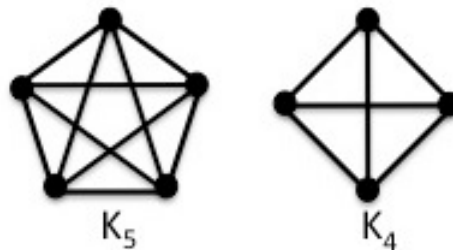
Veamos unos ejemplos:



En estos ejemplos, $\text{diam } V(C_4) = \text{diam } C_4 = 2$ y $\text{diam } V(C_5) = 2$, mientras que $\text{diam } C_5 = 5/2$ (asumiendo que todas las aristas tienen longitud 1).

1.1.1 Algunos ejemplos de clases de grafos

Definición 1.1.12. *Un grafo completo es un grafo en el cual cada par de vértices se unen por exactamente una arista; en otras palabras, si todos los vértices de G son pares adyacentes, entonces G es completo. El grafo completo con n vértices se denota por K_n .*



Evidentemente, todo grafo completo es regular.

Observación 1.1.13. *Hay grafos que son regulares y sin embargo no son completos, como el ejemplo que figura a continuación.*



En efecto, este grafo es regular de grado 2 y, sin embargo, los vértices en diagonal no son adyacentes; por tanto, no es completo.

La propiedad de ser completo relaciona la medida $|E(G)|$ de un grafo G y su orden $|V(G)|$.

Proposición 1.1.14. *En todo grafo finito $G = (V(G), E(G))$ se verifica:*

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}|V(G)|(|V(G)| - 1)$$

y si se da la igualdad, entonces G es completo.

Observación 1.1.15. *El grafo completo de n vértices K_n tiene $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ aristas.*

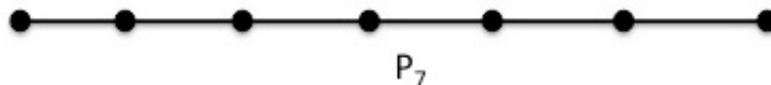
Definición 1.1.16. *Un grafo camino es un grafo no vacío $P = (V, E)$ con*

$$V = \{x_1, \dots, x_n\} \quad E = \{[x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\},$$

donde los x_i son todos distintos. Los vértices x_1 y x_n están unidos por P y son llamados extremos; los vértices x_2, \dots, x_{n-1} son los vértices interiores de P .

El número de aristas de un camino es su longitud (si todas las aristas miden 1); el camino con n vértices se denota por P_n . Obsérvese que $P_1 = K_1$ y $P_2 = K_2$. Nótese que el grafo camino P_n tiene $n - 1$ aristas.

Veamos un ejemplo del grafo camino para $n = 7$:



Si $P = x_1 \cdots x_n$ es un camino y $n \geq 3$, entonces el grafo C con $V(C) = V(P)$ y $E(C) = E(P) \cup [x_n, x_1]$ se llama un *ciclo*. Como los caminos, denotamos a menudo un ciclo por su sucesión de vértices; el ciclo anterior puede ser escrito como $x_1 \cdots x_n x_1$. La longitud de un ciclo es su número de aristas (o vértices), cuando todas las aristas tienen longitud 1; el ciclo de orden n se denota por C_n . El número de vértices en un grafo C_n es igual al número de aristas, y cada vértice tiene grado dos, es decir, cada vértice tiene dos aristas incidentes.

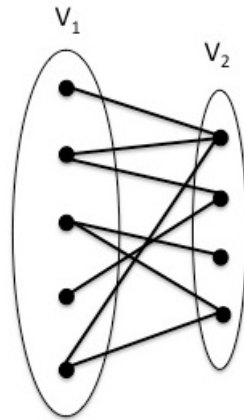
Veamos un ejemplo del grafo ciclo para $n = 8$:



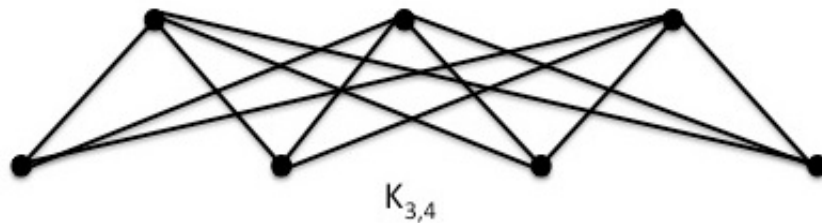
Proposición 1.1.17. *Sea G un grafo conexo y e una arista perteneciente a un ciclo en G . Entonces $G \setminus e$ es conexo.*

Definición 1.1.18. *Un grafo bipartito es un grafo no dirigido $G = (V(G), E(G))$ cuyo conjunto de vértices $V(G)$ es unión de dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 de forma que $[u, v] \in E(G)$ implica que, o bien $u \in V_1$ y $v \in V_2$, o bien $u \in V_2$ y $v \in V_1$. Es decir, todas las aristas tienen un extremo en cada uno de los conjuntos V_1 y V_2 .*

Recordemos que V_1 y V_2 forman una partición de $V(G)$: su intersección es vacía y su unión es $V(G)$.



Definición 1.1.19. Se dice que un grafo simple $G = (V(G), E(G))$ es bipartito completo y se denota por K_{mn} , si el conjunto de vértices $V(G)$ se puede dividir en dos conjuntos disjuntos V_1, V_2 ($V_1 \cup V_2 = V(G), V_1 \cap V_2 = \emptyset$) con m y n elementos respectivamente, de tal manera que toda arista $e \in E(G)$ conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2 , y todo vértice de V_1 es adyacente a todo vértice de V_2 .

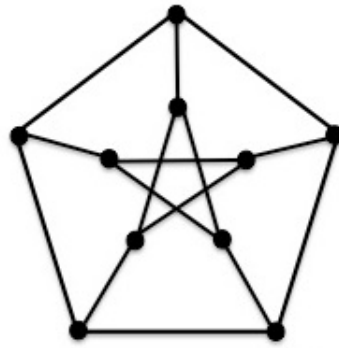


Nótese que K_{mn} tiene $m + n$ vértices, y mn aristas. También se tiene $K_{mn} = K_{nm}$.

Proposición 1.1.20. Un grafo (con aristas de longitud 1) es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

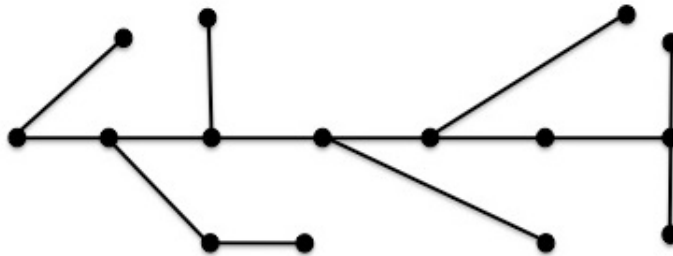
El grafo de Petersen es un grafo que a menudo sirve como ejemplo o contraejemplo para

diversas conjeturas en teoría de grafos. Este grafo se denomina así por Julius Peter Christian Petersen, quien lo descubrió en 1898.



Grafo de Petersen (P)

Definición 1.1.21. *Un bosque es un grafo sin ciclos. Un árbol es un grafo conexo sin ciclos, es decir, un bosque conexo.*



Existen numerosas formulaciones equivalentes de la definición de árbol; el teorema siguiente resume las fundamentales.

Teorema 1.1.22. *Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. G es un árbol.

2. *Dos vértices cualesquiera de G están conectados por un único camino simple.*
3. *G es conexo, pero si se le suprime una arista cualquiera, deja de serlo.*
4. *G es conexo y $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*
5. *G es acíclico y $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*
6. *G es acíclico, pero si se le añade una arista, deja de serlo.*

Proposición 1.1.23. *Si T es un bosque que tiene n vértices y k componentes conexas, entonces tiene $n - k$ aristas.*

Definición 1.1.24. *Un grafo plano o planar es un grafo que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna de sus aristas se intersequen.*

El matemático polaco Kazimierz Kuratowski encontró una caracterización de los grafos planos, conocida como el teorema de Kuratowski.

Teorema 1.1.25. *Un grafo es plano si y sólo si no contiene un subgrafo isomorfo a K_5 (el grafo completo de 5 vértices) o a $K_{3,3}$ (el grafo bipartito completo de 3 y 3 vértices).*

Definición 1.1.26. *Dos grafos G_1, G_2 son isomorfos si existe una función biyectiva f de $V(G_1)$ en $V(G_2)$ con la propiedad de que $[u, v] \in E(G_1)$ si y sólo si $[f(u), f(v)] \in E(G_2)$.*

No es fácil, en general, decidir si dos grafos son isomorfos o no. En los casos sencillos, si los dos grafos son isomorfos, se puede encontrar la biyección a simple vista, sobre todo si el dibujo nos ayuda. Una manera de comprobar si dos grafos finitos son isomorfos (que, por supuesto, habrán de tener el mismo número de vértices, digamos n), sería comprobar si alguna de las $n!$ aplicaciones biyectivas entre los conjuntos de vértices respectivos cumple las propiedades necesarias para ser un isomorfismo entre los dos grafos. Pero esto, desde luego, no es un procedimiento razonable si n es grande.

Sin embargo, para decidir que dos grafos no son isomorfos contamos con ciertas propiedades de un grafo que se han de conservar por isomorfismos:

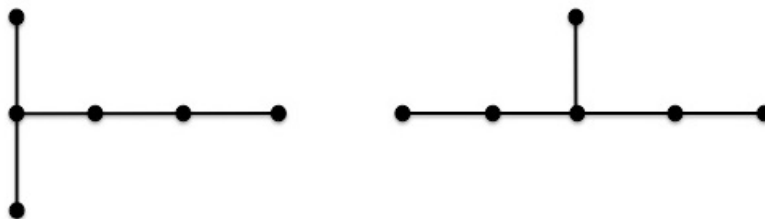
- Ambos grafos han de tener el mismo número de vértices (si no lo tienen, no podremos construir una aplicación biyectiva entre los conjuntos de vértices).
- Cada vértice ha de mantener sus relaciones de vecindad. En particular, si $G = (V(G), E(G))$ y $G' = (V(G'), E(G'))$ son dos grafos isomorfos mediante ϕ , entonces, para cada $u \in V(G)$:

$$\deg(u) = \deg(\phi(u)).$$

En efecto, como ϕ es una biyección que conserva la adyacencia, el número de vértices adyacentes a u en G ha de ser el mismo que el de vértices adyacentes a $\phi(u)$ en G' ; por lo tanto, el número de aristas con extremo en u ha de coincidir con el número de aristas con extremo en $\phi(u)$ y, consecuentemente, sus grados serán iguales.

- Con más generalidad, si dos grafos son isomorfos, entonces han de tener la misma sucesión de grados. Sin embargo, que dos grafos tengan la misma sucesión de grados no garantiza que sean isomorfos, como muestra el ejemplo 1.1.27.
- La sucesión de grados ha de conservarse, y como sabemos que en todo grafo (finito) la suma de los grados coincide con dos veces el número de aristas, deducimos que dos grafos isomorfos han de tener el mismo número de aristas.

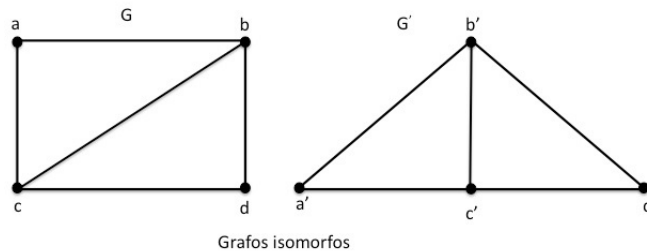
Ejemplo 1.1.27. *Consideremos los dos grafos siguientes:*



Ambos tienen seis vértices, cinco aristas y su sucesión de grados es $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$. Sin embargo, no son isomorfos pues, por ejemplo, el vértice de grado 3 es, en un caso, vecino de dos de grado 1 y de uno de grado 2; y en el otro, de uno de grado 1 y de dos de grado 2.

Hay otras propiedades que son conservadas bajo isomorfismos (todas las relacionadas con vecindades); por ejemplo, el llamado *cuello* de un grafo, del que hablaremos un poco más adelante. Sin embargo, no existe una caracterización para el isomorfismo de dos grafos (una serie de propiedades que determinen si dos grafos son o no isomorfos). Veamos un ejemplo de dos grafos isomorfos:

Ejemplo 1.1.28. *Los dos grafos que siguen son isomorfos, ya que la función ϕ que lleva a en a' , b en b' , c en c' y d en d' es una biyección y preserva la adyacencia.*



Si G es un grafo, se llama *cuello* de G al ínfimo de las longitudes de los ciclos de G , y lo denotamos por $g(G)$.

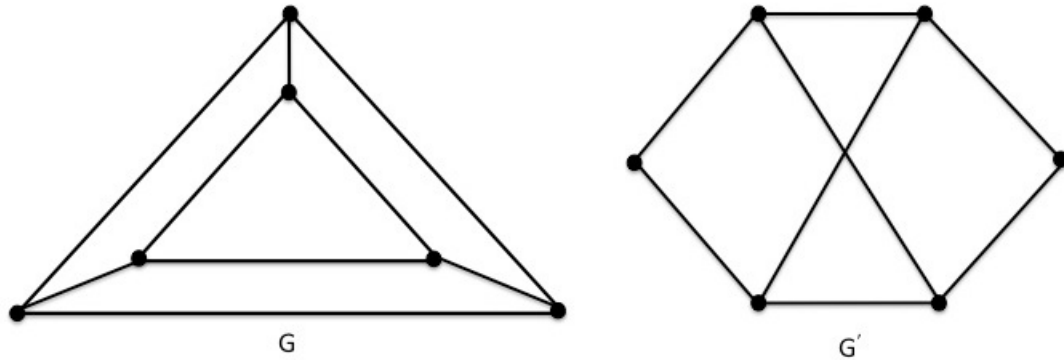
Si dos grafos G y G' son isomorfos (con aristas de igual longitud constante), entonces $g(G) = g(G')$.

El supremo de las longitudes de los ciclos en un grafo G es su *circunferencia*, y se denota por $C(G)$.

Por ejemplo, si consideramos los siguientes grafos con aristas de longitud 1:

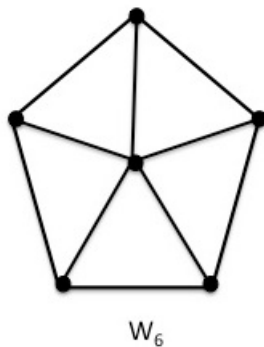
Es fácil ver que tienen igual número de vértices y de aristas y todos los vértices son de

grado 3; pero no son isomorfos, porque $g(G) = 3$, mientras que $g(G') = 4$. Pero recordemos una vez más que comprobar que todas estas propiedades son iguales en dos grafos no basta para concluir que esos dos grafos son isomorfos. Habrá que encontrar una biyección entre los respectivos conjuntos de vértices que respete las relaciones de vecindad.



Por simple intuición, se podría pensar que los isomorfismos entre grafos preservan todas las propiedades; no obstante, probamos que la propiedad de ser hiperbólico no se preserva por isomorfismos (ver Teorema 4.1.8); de hecho, bajo ciertas hipótesis, hemos podido garantizar que la hiperbolicidad se preserva entre grafos isomorfos (ver Teorema 4.1.11).

Definición 1.1.29. *El grafo rueda W_n de orden n es un grafo simple que contiene un ciclo de orden $n - 1$ y tal que cada vértice en el ciclo se conecta al otro vértice (el vértice central).*



En esta tesis trabajamos con grafos conexos muy generales: pueden tener lazos, aristas múltiples y las aristas pueden tener longitud arbitraria; además, pueden ser finitos o no. En el caso de que sean infinitos pedimos que sean localmente finitos, es decir, que toda bola interseque una cantidad finita de aristas; esto garantiza la existencia de geodésicas uniendo dos puntos cualesquiera del grafo y, por tanto, que el grafo es un espacio métrico geodésico.

1.2 Espacios hiperbólicos en sentido de Gromov

El término hiperbolicidad se utiliza en esta tesis para describir el comportamiento de las geodésicas en los espacios “curvados negativamente”. La idea de Gromov era buscar una manera de identificar estructuras a gran escala en un espacio, olvidando pequeñas “irregularidades” locales. En sus trabajos, Gromov desarrolla las propiedades de los grupos hiperbólicos, es decir, grupos finitamente generados con grafos de Cayley hiperbólicos (ver, por ejemplo, [22], [24], [25]).

A partir de los trabajos de Gromov durante los años 70 y más tarde de Kanai en los 80, se sabe que los grafos pueden modelizar bien las variedades (ver, por ejemplo, [2], [12], [19], [26], [29], [30], [31], [40], [41], [45] para entender las importantes conexiones entre teoría de grafos y teoría del potencial en variedades riemannianas). Surge, en este contexto, el concepto de *hiperbolicidad en sentido de Gromov* que trata de sintetizar las propiedades esenciales que tienen en común muchos grafos y las variedades con curvatura negativa. Este concepto ha sido estudiado y desarrollado por numerosos autores como, por ejemplo, Balogh, Bonk, Buckley, Heinonen, Koskela, Naor, Peres, Schramm, Schroeder, Sheffield, Visl y Vuorinen (ver [7], [8], [20], [34], [46], [47], [48], [49]).

Concretamente, la hiperbolicidad se define de la siguiente manera: un espacio métrico geodésico es δ -hiperbólico si cualquier lado de cualquier triángulo geodésico T está contenido

en un δ -entorno de la unión de los otros dos lados. Más adelante veremos las definiciones de estos conceptos.

Por otro lado, la teoría de espacios de Gromov, que nació motivada inicialmente por el estudio de grupos finitamente generados ha demostrado ser de enorme importancia práctica. En sus comienzos esta teoría fue aplicada principalmente al estudio de grupos automáticos (ver por ejemplo el capítulo 3 de [35]), que juegan un importante papel en ciencias de la computación (de hecho, los grupos que son espacios de Gromov, son a su vez grupos automáticos fuertemente geodésicos; ver [50]).

Sin embargo, en los últimos años se ha producido un importante cambio en la forma de trabajar en espacios de Gromov. Dicho cambio consiste en enfocar el tema desde un punto de vista más analítico y geométrico, en lugar del tradicional punto de vista algebraico; esto ha permitido obtener uno de los resultados más importantes de la teoría: el teorema de Mario Bonk que caracteriza los espacios de Gromov como aquellos espacios métricos geodésicos que satisfacen la propiedad de estabilidad geodésica. Dicha propiedad puede expresarse de forma intuitiva de la siguiente manera: cerca de una quasi-geodésica hay siempre una geodésica con los mismos extremos, con constantes uniformes (ver por ejemplo [6] ó [22] para una definición precisa de estabilidad geodésica, y [6] para un enunciado preciso del teorema).

Esta importante propiedad de los espacios de Gromov es la clave de su más moderna e importante aplicación: ayudar a garantizar la seguridad de la transmisión de información por internet (ver [27] y [28]).

Una estrategia clásica para preservar la seguridad en el envío de información por internet es dividir el mensaje en una gran cantidad de partes, y enviar cada parte por un “camino” diferente; la reconstrucción del mensaje resulta mucho más sencilla si las diferentes partes del mensaje llegan prácticamente al mismo tiempo, es decir, si los diferentes caminos usados para el envío tienen aproximadamente la misma longitud. Y aquí es donde juega un papel

importante la hiperbolicidad, ya que puede probarse que el grafo que modeliza internet es hiperbólico en sentido de Gromov, y eso implica que próximas a cualquier geodésica g (el camino más corto entre dos puntos) pueden encontrarse gran cantidad de quasi-geodésicas (caminos uniendo los dos extremos de g con longitud no mucho mayor que la de g).

La hiperbolicidad también juega un importante papel en la propagación de virus por la red (ver [28]).

De hecho, el Departamento de Defensa de Estados Unidos está interesado en prevenir lo que podría ser un ataque informático a cierta escala (lo que denominan con el exótico nombre de *Electronic Pearl Harbor*) y, de hecho, ha subvencionado la investigación en espacios de Gromov de Edmond Jonckheere (doctor en Ingeniería Eléctrica y Full Professor of Electrical Engineering and Mathematics, University of Southern California, Los Angeles).

Un nuevo campo de aplicación de los grafos hiperbólicos, también dentro del marco de la seguridad, son los denominados conjuntos seguros.

Otro campo de aplicación de la hiperbolicidad es el análisis filogenético, área con un gran desarrollo en la actualidad, que trata de construir árboles o grafos que representen los datos sobre el ADN (ver [10]). Un resultado básico de esta disciplina establece que un espacio métrico (en particular, el que aparece al considerar la distancia de Hamming d en un espacio X de alineamientos específicos de sucesiones de ADN) puede representarse por un árbol con pesos apropiado si y sólo si satisface la condición

$$d(x, y) + d(u, v) \leq \max \{d(x, u) + d(y, v), d(x, v) + d(y, u)\}$$

para todo $x, y, u, v \in X$.

Recordemos que la hiperbolicidad de Gromov puede definirse de forma equivalente me-

diante la condición

$$d(x, y) + d(u, v) \leq \max \{d(x, u) + d(y, v), d(x, v) + d(y, u)\} + 2\delta$$

para todo $x, y, u, v \in X$.

Una forma alternativa de entender la importancia de los espacios hiperbólicos es verlos como espacios que se parecen mucho a los árboles: de hecho, los árboles son precisamente los espacios 0-hiperbólicos (ver, por ejemplo, [22, p. 30]). Esta similitud hace que los espacios de Gromov disfruten de interesantes propiedades en común con los árboles (ver, por ejemplo, [22, p. 33]).

A continuación introducimos unas definiciones necesarias.

Definición 1.2.1. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es una curva continua en un espacio métrico (X, d) , podemos definir la longitud de γ como

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

Definición 1.2.2. Si X es un espacio conexo por arcos en el que tenemos definida la longitud de cada curva, podemos definir la distancia interior como

$$d_X(x, y) := \inf \{L(\gamma) : \gamma \subset X \text{ es una curva continua uniendo } x \text{ e } y\}.$$

Si D es un subconjunto cerrado de X , consideramos siempre en D la distancia interior obtenida por la restricción de las curvas de X al conjunto D , esto es

$$d_D(z, w) := \inf \{L_X(\gamma) : \gamma \subset D \text{ es una curva continua uniendo } z \text{ y } w\} \geq d_X(z, w).$$

Consecuentemente, $L_D(\gamma) = L_X(\gamma)$ para toda curva $\gamma \subset D$.

Para el estudio de los espacios hiperbólicos de Gromov usaremos la notación de [22]. Veamos algunos resultados básicos sobre estos espacios.

Definición 1.2.3. *Una curva g uniendo los puntos x e y en un espacio métrico se dice geodésica si $L(g) = d(x, y)$. Denotamos por $[xy]$ una geodésica uniendo x e y ; como pueden existir varias geodésicas uniendo dos puntos, esta notación puede resultar ambigua, pero es muy conveniente.*

Definición 1.2.4. *Un espacio métrico X es geodésico si dos elementos cualesquiera de X pueden unirse por una geodésica.*

Definición 1.2.5. *Si X es un espacio métrico geodésico y $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ es un polígono con lados $J_j \subseteq X$, decimos que J es δ -thin si para todo $x \in J_i$ tenemos que $d(x, \cup_{j \neq i} J_j) \leq \delta$. Denotamos por $\delta(J)$ la constante de hiperbolicidad de J , es decir, $\delta(J) := \inf\{\delta \geq 0 : J \text{ es } \delta\text{-thin}\}$. Si $x_1, x_2, x_3 \in X$, un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ es la unión de tres geodésicas $J_1 = [x_1x_2]$, $J_2 = [x_2x_3]$ y $J_3 = [x_3x_1]$. El espacio X es δ -hiperbólico (o verifica la condición de Rips con constante δ) si todo triángulo geodésico en X es δ -thin. Denotamos por $\delta(X)$ la constante de hiperbolicidad de X , es decir, $\delta(X) := \sup\{\delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico en } X\}$. Decimos que X es hiperbólico si es δ -hiperbólico para alguna constante $\delta \geq 0$.*

Obsérvese que si X es hiperbólico, entonces $\delta(X) = \inf\{\delta \geq 0 : X \text{ es } \delta\text{-hiperbólico}\}$.

Observación 1.2.6. *En un espacio δ -hiperbólico X todo polígono geodésico de n lados es $(n - 2)\delta$ -thin. Basta ver que el polígono se descompone en $(n - 2)$ triángulos geodésicos.*

Observación 1.2.7. *Existen muchas definiciones diferentes de hiperbolicidad de Gromov (ver, por ejemplo, [22]). Pero todas estas definiciones son equivalentes en el sentido de que si X es δ_A -hiperbólico con respecto a la definición A , entonces es también δ_B -hiperbólico con respecto a la definición B , y existen constantes universales c_1, c_2 tales que $c_1\delta_A \leq \delta_B \leq c_2\delta_A$*

(ver, por ejemplo, [22, p. 41]). No obstante, fijado un $\delta \geq 0$, el conjunto de grafos δ -hiperbólicos con respecto a la definición A, es diferente, en general, del conjunto de grafos δ -hiperbólicos con respecto a la definición B. Hemos escogido esta definición (Definición 1.2.5) porque tiene un significado geométrico muy profundo (ver, por ejemplo, [22, capítulo 3]). En esta memoria siempre usaremos como definición de espacio hiperbólico la Definición 1.2.5.

Obviamente todo triángulo T es δ -thin, con $\delta = \text{diam}_X(T)$, pero no todo espacio X es hiperbólico. La clave está en que las constantes de todos los triángulos deben estar uniformemente acotadas. Por tanto, el concepto “thin” es un concepto global y no local.

Observación 1.2.8. *Cualquier biángulo, es decir, un triángulo con dos vértices iguales, en un espacio δ -hiperbólico es obviamente δ -thin.*

Conviene destacar que decidir cuándo un espacio es hiperbólico es algo muy difícil, en general. Primeramente, notemos que tenemos que considerar un triángulo geodésico arbitrario T , calcular la distancia mínima entre un punto arbitrario P de T y la unión de los otros dos lados que no contienen el punto P . Luego, tomar el supremo sobre todas las posibles elecciones de P y después sobre todas las posibles elecciones de T . Esto quiere decir que si el espacio es, por ejemplo, una variedad n -dimensional y seleccionamos dos puntos P y Q en lados diferentes de un triángulo T , la función que mide la distancia entre P y Q es una función F que tiene $(3n + 2)$ -variables ($3n$ variables describen los tres vértices de T y dos variables describen los puntos P y Q en la curva dada por T). Para poder demostrar que nuestro espacio es hiperbólico tendríamos que tomar el mínimo de F en la variable que describe Q y el supremo sobre las restantes $3n + 1$ variables o, al menos, probar que es finita. Sin tener en cuenta la dificultad de resolver un problema minimax, notemos que el principal obstáculo es que no conocemos, ni siquiera de forma aproximada, donde están localizadas las geodésicas en el espacio.

El siguiente concepto que introducimos es una clase de aplicaciones que va a jugar un papel fundamental en la teoría de espacios hiperbólicos.

Este tipo de aplicaciones son importantes porque preservan la hiperbolicidad, como se muestra en los siguientes resultados.

Definición 1.2.9. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es una (α, β) -quasi-isometría (con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$) si para todo $x, y \in X$:

$$\alpha^{-1}d_X(x, y) - \beta \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \alpha d_X(x, y) + \beta.$$

Se dice que f es una quasi-isometría si es una (α, β) -quasi-isometría para algunas constantes α y β . En el caso de tener $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ se dice que f es una isometría.

Observación 1.2.10. Las quasi-isometrías son funciones muy flexibles (ni siquiera tienen que ser continuas como muestra el ejemplo a continuación) y, sin embargo, son una herramienta fundamental para determinar la hiperbolicidad de un espacio.

Ejemplo 1.2.11. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ es una $(1, 1)$ -quasi-isometría, aunque f no es continua en los números naturales.

Definición 1.2.12. Sean X un espacio métrico, Y y Z dos subconjuntos no vacíos de X y ε un número real positivo. Se llama ε -entorno o ε -vecindad de Y en X y se denota $\mathcal{V}_\varepsilon(Y)$, al conjunto $\{x \in X : d_X(x, Y) \leq \varepsilon\}$.

Se llama distancia de Hausdorff entre Y y Z , y se denota por $\mathcal{H}(Y, Z)$, al número definido por:

$$\mathcal{H}(Y, Z) := \inf\{\varepsilon > 0 : Y \subset \mathcal{V}_\varepsilon(Z) \text{ y } Z \subset \mathcal{V}_\varepsilon(Y)\}.$$

Un subconjunto Y de X es ε -full, si $\mathcal{V}_\varepsilon(Y) = X$.

Observación 1.2.13. La distancia de Hausdorff no es una distancia en el sentido estricto,

en primer lugar porque puede tomar valores infinitos, y en segundo lugar porque $\mathcal{H}(Y, Z) = 0$ no implica necesariamente $Y = Z$, pero para nuestro estudio esto no tiene importancia.

Definición 1.2.14. *Dos espacios métricos X e Y son quasi-isométricos si existen una quasi-isometría $f : X \rightarrow Y$ y un real $\varepsilon \geq 0$ tales que $f(X)$ es ε -full en Y .*

Definición 1.2.15. *Una (α, β) -quasi-geodésica en un espacio métrico X es una (α, β) -quasi-isometría $\gamma : I \rightarrow X$, donde I es un intervalo de \mathbb{R} .*

Por tanto, una geodésica es una $(1, 0)$ -quasi-geodésica.

Una primera propiedad fundamental de los espacios hiperbólicos es la siguiente:

Teorema 1.2.16 (Estabilidad geodésica). *Existe una constante $H = H(\delta, \alpha, \beta)$ tal que para todo espacio métrico geodésico δ -hiperbólico X , para todo $x, y \in X$ y para todas las (α, β) -quasi-geodésicas g y h uniendo x e y , se tiene que $\mathcal{H}(g, h) \leq H$.*

El corolario a continuación es una consecuencia directa de la estabilidad geodésica.

Corolario 1.2.17. *Cualquier triángulo con lados (α, β) -quasi-geodésicos en un espacio métrico geodésico δ -hiperbólico es $(\delta + 2H)$ -thin, donde H es la constante en el Teorema 1.2.16, que solo depende de α , β y δ .*

Decimos que una propiedad se verifica *cuantitativamente* si se verifica con una constante que sólo depende de las constantes que han aparecido en las hipótesis.

Teorema 1.2.18 (Invariancia de la hiperbolicidad por quasi-isometrías). *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos geodésicos.*

- i) Si Y es hiperbólico y existe una quasi-isometría de X en Y , entonces X es hiperbólico, cuantitativamente.*

ii) Si X e Y son quasi-isométricos, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y lo es, cuantitativamente.

A continuación veamos algunos ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos:

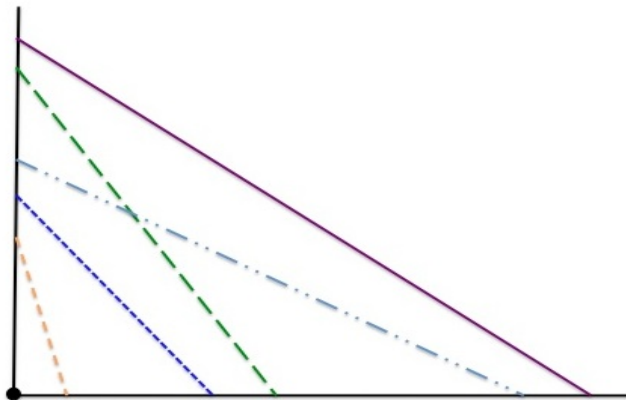
Ejemplo 1.2.19. Un espacio vectorial normado es hiperbólico si y sólo si tiene dimensión uno.

Esto es consecuencia de los hechos siguientes.

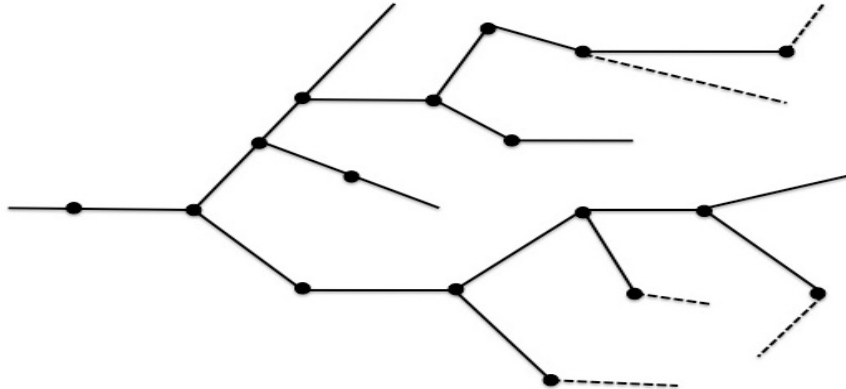
Ejemplo 1.2.20. \mathbb{R} es 0-hiperbólico: en efecto, todo punto de cualquier triángulo T contenido en la recta real pertenece simultáneamente a dos lados y, por tanto, podemos concluir que T es 0-thin.



Ejemplo 1.2.21. \mathbb{R}^2 no es hiperbólico: es obvio que en el plano se pueden trazar triángulos T con $\delta(T)$ arbitrariamente grande, por lo que \mathbb{R}^2 no es hiperbólico. De forma similar puede razonarse para dimensiones superiores.



Ejemplo 1.2.22. *Todo árbol métrico con aristas de longitud arbitraria es 0-hiperbólico. En efecto, como en el caso de la recta real, todo punto de cualquier triángulo contenido en un árbol pertenece simultáneamente a dos lados (ver [22], p. 29).*



Ejemplo 1.2.23. *Todo espacio métrico acotado X es $(\text{diam}X)$ -hiperbólico, ver ([22], p. 29).*

Ejemplo 1.2.24. *Toda variedad riemanniana completa simplemente conexa con curvatura seccional acotada superiormente por $-k^2$, con k una constante positiva, es hiperbólica (ver [22], p. 52).*

Sobre la constante de hiperbolicidad en grafos

2.1 Hiperbolicidad, lazos y aristas múltiples

En esta sección probamos que, para estudiar la hiperbolicidad de grafos, es suficiente considerar grafos sin lazos ni aristas múltiples.

Necesitaremos el siguiente resultado (ver [\[43, Lema 2.1\]](#)):

Lema 2.1.1. *Sea un espacio métrico geodésico X . Si todo triángulo geodésico en X que es un ciclo simple, es δ -thin, entonces X es δ -thin.*

Un *ciclo* es una curva simple cerrada, es decir, un camino en el cual el último vértice coincide con el primero y que no tiene autointersecciones.

Este lema tiene la siguiente consecuencia.

Corolario 2.1.2. *En cualquier grafo G ,*

$$\delta(G) = \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico que es un ciclo} \}.$$

Observación 2.1.3. *Algunos autores (ver por ejemplo [10, 32]) consideran solamente triángulos geodésicos formados por los vértices del grafo G . Haciendo eso, obtienen una definición equivalente (en el sentido de la observación 1.2.7) de la nuestra si todas las aristas en G tienen longitud 1. No obstante, como consideramos grafos con aristas de longitud arbitraria, debemos considerar triángulos geodésicos con vértices en G .*

Definición 2.1.4. *Dado un grafo G , decimos que una familia de subgrafos $\{G_n\}_n$ de G es una tree-decomposition de G si $\cup_n G_n = G$, $G_n \cap G_m$ es un vértice o el conjunto vacío para cada $n \neq m$, y si el grafo R es un árbol; para cada n consideremos un punto v_n (abstracto, no contenido en G_n), $V(R) = \{v_n\}_n$ y $[v_n, v_m] \in E(R)$ si y sólo si $G_n \cap G_m \neq \emptyset$.*

El siguiente resultado permite obtener información global sobre la hiperbolicidad de un grafo a partir de información local.

Teorema 2.1.5. *Sea G un grafo y sea $\{G_n\}_n$ una tree-decomposition de G . Entonces $\delta(G) = \sup_n \delta(G_n)$.*

Prueba. Observemos que, como $\{G_n\}_n$ es una tree-decomposition de G , si g es un ciclo en G , entonces existe n tal que $g \subseteq G_n$. Usando el Corolario 2.1.2, tenemos

$$\begin{aligned} \delta(G) &= \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico que es un ciclo} \} \\ &= \sup_n \{ \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico que es un ciclo en } G_n \} \} \\ &= \sup_n \delta(G_n). \end{aligned}$$

□

El Teorema 2.1.5 tiene la siguiente consecuencia.

Corolario 2.1.6. *Sea G_0 un grafo con $\{v_n\}_n \subseteq V(G_0)$ y $\{T_n\}_n$ un conjunto de árboles con un vértice fijo $x_n \in V(T_n)$ para cada n . El grafo G obtenido pegando G_0 y $\{T_n\}_n$, identificando v_n con x_n para cada n , verifica $\delta(G) = \delta(G_0)$.*

Observación 2.1.7. *El conjunto $\{v_n\}_n$ puede ser finito o numerable.*

Prueba. Está claro que G_0 y $\{T_n\}_n$ es una tree-decomposition de G . Como cualquier árbol es 0-hiperbólico, el Teorema 2.1.5 da el resultado. \square

Del Corolario 2.1.6 deducimos que, a la hora de estudiar la hiperbolicidad de grafos, basta considerar solamente grafos que tienen grado mínimo al menos dos. En tal caso, si

$$l := \inf \{L(\beta) : \beta \in E(G) \text{ con } \overline{G \setminus \beta} \text{ conexo}\},$$

tenemos $\delta(G) \geq \frac{l}{2}$; si, además, G no tiene aristas múltiples, entonces $\delta(G) \geq \frac{3l}{4}$.

Dado un grafo G , definimos $A(G)$ como el grafo G sin sus lazos, y $B(G)$ como el grafo G sin sus aristas múltiples, obtenido sustituyendo cada arista múltiple por una única con la longitud mínima de las aristas correspondientes a esta arista múltiple.

El Teorema 2.1.5 permite obtener el resultado siguiente que reduce el estudio de la hiperbolicidad de un grafo con lazos a la hiperbolicidad del grafo sin sus lazos.

Teorema 2.1.8. *Si G es un grafo con lazos, entonces G es hiperbólico si y sólo si $A(G)$ es hiperbólico y $\sup\{L(g) : g \text{ es un lazo de } G\} < \infty$. Además,*

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(A(G)), \frac{1}{4} \sup\{L(g) : g \text{ es un lazo de } G\} \right\}.$$

En particular, si todas las aristas tienen longitud k , entonces

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(A(G)), \frac{k}{4} \right\}.$$

Prueba. Esta claro que $A(G)$ y los lazos de G constituyen una tree-decomposition de G . Notemos que todo lazo g verifica $\delta(g) = \frac{L(g)}{4}$. Entonces el Teorema 2.1.5 da la primera fórmula. Los otros enunciados son consecuencia directa de esta fórmula. \square

Definición 2.1.9. Sea $\{K_n\}_n$ una sucesión de conjuntos cerrados en un espacio métrico X . Decimos que $\{K_n\}_n$ es una exhaustion de X si $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo n y dado cualquier cerrado acotado $K \subset X$, existe N con $K \subseteq K_N$.

A continuación obtenemos otro resultado global a partir de información local.

Teorema 2.1.10. Supongamos que existe $\delta \geq 0$ y una exhaustion $\{K_n\}_n$ de un espacio métrico geodésico X tal que K_n es δ -hiperbólico para todo n . Entonces X es δ -hiperbólico.

Prueba. Sea $T = [xy] \cup [yz] \cup [zx]$ cualquier triángulo geodésico en X , y sea $u \in [xy]$. El entorno $\mathcal{V}_\delta(T)$ está contenido en K_N para algún N . Como T es un triángulo geodésico en X , también es un triángulo geodésico en K_N . Como K_N es δ -hiperbólico, existe $v \in [yz] \cup [zx]$ tal que $d_X(u, v) \leq d_{K_N}(u, v) \leq \delta$. \square

Definición 2.1.11. Un subgrafo Γ de G se denomina isométrico si $d_\Gamma(x, y) = d_G(x, y)$ para todo $x, y \in \Gamma$.

Obsérvese que esta condición es equivalente a $d_\Gamma(u, v) = d_G(u, v)$ para todo vértice $u, v \in V(\Gamma)$.

Lema 2.1.12. Si Γ es un subgrafo isométrico de G , entonces $\delta(\Gamma) \leq \delta(G)$.

Prueba. Obsérvese que por hipótesis $d_\Gamma(x, y) = d_G(x, y)$ para todo $x, y \in \Gamma$; por tanto, todo triángulo geodésico en Γ es un triángulo geodésico en G . Consecuentemente, $\delta(\Gamma) \leq \delta(G)$. \square

El siguiente resultado completa el Lema 2.1.12.

Teorema 2.1.13. *Supongamos que Γ es un subgrafo de un grafo G tal que existen $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 0$ con $d_\Gamma(x, y) \leq \alpha d_G(x, y) + \beta$, para todo $x, y \in \Gamma$. Si G es hiperbólico, entonces Γ es hiperbólico. Además, si existe una constante c de tal manera que toda componente conexa E de $G \setminus \Gamma$ satisface $\text{diam}_G E \leq c$, entonces G es hiperbólico si y sólo si Γ es hiperbólico.*

Prueba. Por el Teorema 1.2.18, basta con observar que la inclusión $i : \Gamma \longrightarrow G$ es una (α, β) -quasi-isometría, ya que $d_G(x, y) \leq d_\Gamma(x, y) \leq \alpha d_G(x, y) + \beta$ para todo $x, y \in \Gamma$. Por otra parte, si toda componente conexa E de $G \setminus \Gamma$ satisface $\text{diam}_G E \leq c$, entonces i es c -full. \square

Teorema 2.1.14. *Si G es un grafo con aristas múltiples, entonces G es hiperbólico si y sólo si $B(G)$ es hiperbólico y $J := \sup\{L(\beta) : \beta \text{ es una arista múltiple de } G\} < \infty$. Además, si $j := \inf\{d(x, y) : x, y \text{ están unidos por una arista múltiple de } G\}$, entonces*

$$\max \left\{ \delta(B(G)), \frac{J+j}{4} \right\} \leq \delta(G) \leq \delta(B(G)) + J.$$

Por otro lado, si todas las aristas de G tienen longitud k , entonces

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(B(G)), \frac{k}{2} \right\} = \max \left\{ \delta(A(B(G))), \frac{k}{2} \right\}.$$

Si todas las aristas de G tienen longitud k y $B(G)$ no es un árbol, entonces $\delta(G) = \delta(B(G)) = \delta(A(B(G)))$.

Prueba. En primer lugar demostraremos las desigualdades que involucran a $\delta(G)$.

Como $B(G)$ es un subgrafo isométrico de G , el Lema 2.1.12 da $\delta(B(G)) \leq \delta(G)$.

Consideremos vértices x, y unidos por una arista múltiple de G .

Sea γ_1 una arista en G que une x e y , y $\gamma_2 := [xy]$, con longitudes L y l ($L \geq l$), respectivamente. Si tomamos $z \in \gamma_1$ tal que $d(x, z) = \frac{L+l}{2}$, obtenemos un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ en G . Elegimos $u \in \gamma_1$ tal que $d(x, u) = \frac{L+l}{4} = d(u, z)$, entonces $d(u, [zy] \cup [xy]) = d(u, \{x, z\}) = \frac{L+l}{4}$; consecuentemente, $\delta(G) \geq \delta(T) \geq \frac{L+l}{4} \geq \frac{L+j}{4}$. Tomando el supremo en L , concluimos que $\delta(G) \geq \frac{J+j}{4}$. Luego la primera desigualdad está probada.

Consideremos un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ en G que es un ciclo. Si x, y, z pertenecen a la unión de dos aristas que unen los mismos extremos, entonces todo lado de T tiene longitud menor o igual que J y, consecuentemente, T es $\frac{J}{2}$ -thin.

Si x, y, z pertenecen a diferentes aristas, definimos los puntos $x', y', z' \in B(G)$ como sigue: si $x \in B(G)$, entonces $x' = x$. Si $x \notin B(G)$, entonces x está en una arista múltiple $\beta(x)$ de G que une $a(x), b(x) \in V(G)$, $[a(x), b(x)] \in E(B(G))$ y $\beta(x)$ no es más corta que $[a(x), b(x)]$; por tanto, $L(\beta(x)) =: L_x \geq l_x := d(a(x), b(x))$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d(x, a(x)) \leq d(x, b(x))$. Denotemos la distancia entre x y $a(x)$ a lo largo de $\beta(x)$ por $\alpha_x \leq L_x/2$; entonces definimos x' como el punto en $[a(x), b(x)]$ tal que $L([a(x)x']) = \alpha_x - \frac{L_x - l_x}{2}$. Por una parte, observemos que $\alpha_x - \frac{L_x - l_x}{2} \leq \frac{L_x}{2} - \frac{L_x - l_x}{2} = \frac{l_x}{2}$; por otra parte, como $[xb(x)] \subset \beta(x)$, deducimos que $L_x - \alpha_x \leq \alpha_x + l_x$ y entonces $\frac{L_x - l_x}{2} \leq \alpha_x$; luego es posible definir x' . Los puntos y', z' se definen de una manera similar.

Consideremos ahora $u \in B(G)$ con $[xu] = [xa(x)] \cup [a(x)u]$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x, a(x)) + d(a(x), u) &\leq d(x, b(x)) + d(b(x), u) \\ \alpha_x + d(a(x), u) &\leq L_x - \alpha_x + d(b(x), u) \\ \alpha_x - \frac{L_x - l_x}{2} + d(a(x), u) &\leq l_x - \alpha_x + \frac{L_x - l_x}{2} + d(b(x), u) \\ d(x', a(x)) + d(a(x), u) &\leq d(x', b(x)) + d(b(x), u), \end{aligned}$$

y concluimos que $[x'u] = [x'a(x)] \cup [a(x)u]$. Un argumento similar prueba que si $[xu] = [xb(x)] \cup [b(x)u]$, entonces $[x'u] = [x'b(x)] \cup [b(x)u]$.

Por tanto, si $a(x)$ pertenece a la geodésica $[xy]$, entonces también pertenece a la geodésica $[x'y']$ y, si $b(x) \in [xy]$, entonces $b(x) \in [x'y']$; para y y z se verifica un resultado similar. Por tanto, $T' = \{x', y', z'\}$ es un triángulo geodésico en $B(G)$ que es un ciclo; además, T y T' coinciden salvo quizás en las aristas que contienen los vértices de T y T' .

Supongamos ahora que y y z pertenecen a $\beta(x)$. El caso $y, z \in \beta(x)$ ha sido verificado al principio de esta prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y \in \beta(x)$ y $z \notin \beta(x)$. También podemos suponer que $d_{\beta(x)}(x, a(x)) < d_{\beta(x)}(y, a(x))$. Definimos $x' = a(x)$ e $y' = a(x)$; también definimos z' como en el caso precedente. Está claro que $a(x) \in [x'z']$ y $b(x) \in [y'z']$.

Consideremos un punto p en el triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ en G . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $p \in [xy]$. Si $p \notin \beta(x) \cup \beta(y)$, entonces $d_G(p, [yz] \cup [zx]) \leq d_{B(G)}(p, [y'z'] \cup [z'x']) + J$. Si $p \in \beta(x)$, entonces $d_G(p, [yz] \cup [zx]) \leq d_G(p, x) \leq J$. Si $p \in \beta(y)$, entonces el mismo argumento da $d_G(p, [yz] \cup [zx]) \leq J$. Por lo tanto, $\delta(G) \leq \delta(B(G)) + J$.

El primer enunciado del teorema es una consecuencia directa de estas desigualdades para $\delta(G)$.

Finalmente, supongamos que todas las aristas de G tienen longitud k . Obsérvese que la primera desigualdad para $\delta(G)$ da en este caso $\delta(G) \geq \max\{\delta(B(G)), \frac{k}{2}\}$. Consideremos un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ en G que es un ciclo y x', y' y z' como en el caso general. Si x, y, z pertenecen a la unión de dos aristas que unen los mismo extremos, entonces T es $\frac{k}{2}$ -thin. En caso contrario, consideremos el grafo $B'(G)$ sin aristas múltiples cambiando en $B(G)$ las aristas que contienen x', y' y z' por las aristas que contienen x, y y z . Con esta elección obtenemos $\delta(T) \leq \delta(B'(G)) = \delta(B(G))$, ya que $B'(G)$ es isométrico a $B(G)$. Por lo

tanto, $\delta(G) \leq \max\{\delta(B(G)), \frac{k}{2}\}$ y, en consecuencia, $\delta(G) = \max\{\delta(B(G)), \frac{k}{2}\}$.

La segunda igualdad es una consecuencia directa de esta primera y el Teorema 2.1.8.

La última conclusión se deduce directamente de estas igualdades. \square

2.2 Cálculo explícito de la constante de hiperbolicidad de algunos grafos

El siguiente resultado relaciona la constante de hiperbolicidad δ con un parámetro importante de un grafo: el diámetro. Es un resultado sencillo pero extremadamente útil, como veremos a lo largo de esta tesis.

Teorema 2.2.1. *En cualquier grafo G se verifica la desigualdad $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam}_G G$ y, además, la igualdad se alcanza.*

Prueba. Consideremos un lado geodésico γ en cualquier triángulo geodésico $T \subset G$. Denotemos por x, y los puntos extremos de γ , y por γ_1, γ_2 los otros lados de T . Para cualquier $p \in \gamma$, está claro que

$$d(p, \gamma_1 \cup \gamma_2) \leq d(p, \{x, y\}) \leq \frac{1}{2} L(\gamma) \leq \frac{1}{2} \text{diam}_G G,$$

y consecuentemente, $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam}_G G$. \square

La igualdad en el Teorema 2.2.1 se alcanza en muchos grafos, como muestra el Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.2. *Los siguientes grafos con aristas de longitud 1 tienen estos valores precisos de δ :*

- Los grafos camino verifican $\delta(P_n) = 0$ para todo $n \geq 1$.
- Los grafos ciclo verifican $\delta(C_n) = n/4$ para todo $n \geq 3$.
- Los grafos completos verifican $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$, $\delta(K_3) = 3/4$, $\delta(K_n) = 1$ para todo $n \geq 4$.
- Los grafos bipartitos completos verifican $\delta(K_{1,1}) = \delta(K_{1,2}) = \delta(K_{2,1}) = 0$ y $\delta(K_{m,n}) = 1$ para todo $m, n \geq 2$.
- El grafo de Petersen P verifica $\delta(P) = 3/2$.
- El grafo rueda W_n con n vértices verifica $\delta(W_4) = \delta(W_5) = 1$, $\delta(W_n) = 3/2$ para todo $7 \leq n \leq 10$, y $\delta(W_n) = 5/4$ para $n = 6$ y para todo $n \geq 11$.

Además, los grafos C_n y K_n para todo $n \geq 3$, $K_{m,n}$ para todo $m, n \geq 2$, el grafo de Petersen P y W_n para todo $4 \leq n \leq 10$, verifican $\delta(G) = \frac{1}{2} \text{diam } G$.

Prueba. Está claro que $\delta(P_n) = 0$, $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$ y $\delta(K_{1,1}) = \delta(K_{1,2}) = \delta(K_{2,1}) = 0$, ya que estos grafos son árboles.

Como $\text{diam } C_n = n/2$, el Teorema 2.2.1 da $\delta(C_n) \leq n/4$. Consideremos un biángulo con dos vértices $\{x, y\}$ a distancia $n/2$, con lados γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1 \cup \gamma_2 = C_n$. El punto medio p de γ_1 satisface $d(p, \gamma_2) = d(p, \{x, y\}) = n/4$. Consecuentemente, $\delta(C_n) = n/4$. Tenemos también $\delta(K_3) = 3/4$, ya que $K_3 = C_3$.

Si $n \geq 4$, entonces el diámetro de los grafos completos K_n es $\text{diam } K_n = 2$. Por lo tanto, el Teorema 2.2.1 da $\delta(K_n) \leq 1$. Consideremos un ciclo g de longitud 4 en K_n . Sea x el punto medio de una arista fija de g ; consideremos el punto $y \in g$ a distancia 2 de x y el biángulo con vértices $\{x, y\}$ y lados γ_1, γ_2 tales que $\gamma_1 \cup \gamma_2 = g$. El punto medio p de γ_1 satisface $d(p, \gamma_2) = d(p, \{x, y\}) = 1$. Por tanto, $\delta(K_n) = 1$.

El argumento para $K_{m,n}$, con $m, n \geq 2$, es similar a éste último.

Fijemos dos vértices no adyacentes x, y en el pentágono “exterior” P_0 del grafo de Petersen P y consideremos el camino de longitud tres $g_1 \subset P_0$ uniendo x e y . Sea g_2 el camino de longitud tres no contenido en P_0 uniendo x e y . Sea p el punto medio de g_1 . Entonces tenemos $\delta(P) \geq d(p, g_2) = d(p, \{x, y\}) = 3/2$.

Obsérvese que $\text{diam } V(P) = 2$. Dados dos puntos $p_1, p_2 \in P$, denotemos por v_i un vértice con $d(p_i, v_i) \leq 1/2$ para $i = 1, 2$. Entonces $d(p_1, p_2) \leq d(p_1, v_1) + \text{diam } V(P) + d(p_2, v_2) \leq 1/2 + 2 + 1/2 = 3$, y $\text{diam } P \leq 3$. Por tanto, el Teorema 2.2.1 da $\frac{3}{2} \leq \delta(P) \leq \frac{1}{2} \text{diam } P \leq \frac{3}{2}$, y deducimos $\delta(P) = \frac{3}{2}$ y $\text{diam } P = 3$.

El grafo rueda W_4 es isométrico a K_4 , y por tanto $\delta(W_4) = 1$. El Teorema 2.2.1 da $\delta(W_n) \leq \frac{1}{2} \text{diam } W_n$. No es difícil comprobar que $\text{diam } W_4 = \text{diam } W_5 = 2$, $\text{diam } W_6 = 5/2$ y $\text{diam } W_n = 3$ para todo $n \geq 7$. Como W_5 contiene un ciclo g de longitud 4, entonces $\delta(W_5) \geq 1$, en efecto, sean x e y dos puntos de g tales que $d(x, y) = L(g)/2$, entonces $\{x, y\}$ es un biángulo con vértices x e y y de lados γ_1 y γ_2 ($L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = L(g)/2$). Está claro que el punto medio p de γ_1 satisface $d(p, \gamma_2) = d(p, \{x, y\}) = 1$; como $\delta(W_5) \leq \frac{1}{2} \text{diam } W_5 = 1$, concluimos que $\delta(W_5) = 1$.

Consideremos el ciclo C en W_n de longitud $n - 1$ que contiene todos los vértices menos el vértice central.

Sea x el punto medio de cualquier arista en C , y consideremos los puntos y y z en C a distancias $(n - 1)/2$ y $(n - 1)/4$ de x , respectivamente. Entonces $T := \{x, y, z\}$ es triángulo geodésico con $[xy] \cup [yz] \cup [zx] = C$, si $n \in \{6, 7\}$ (recordemos que $\text{diam } W_6 = 5/2$ y $\text{diam } W_7 = 3$). El punto medio p de $[xy]$ verifica $d(p, [yz] \cup [zx]) = d(p, \{x, y\}) = (n - 1)/4$, y por consiguiente, $\delta(W_n) \geq (n - 1)/4$ si $n \in \{6, 7\}$. Por tanto, $\delta(W_6) \geq 5/4$ y $\delta(W_7) \geq 3/2$. Como $\text{diam } W_6 = 5/2$ y $\text{diam } W_7 = 3$, tenemos que $\delta(W_6) = 5/4$ y $\delta(W_7) = 3/2$.

Sea x el punto medio de cualquier arista en C , y consideremos los puntos y y z en C a distancia 3 y $(n-4)/2$, respectivamente, de x en C . Entonces $T := \{x, y, z\}$ es un triángulo geodésico con $[xy] \cup [yz] \cup [zx] = C$ si $n \in \{8, 9, 10\}$ (recordemos que $\text{diam } W_n = 3$ para todo $n \geq 7$). El punto medio p de $[xy]$ verifica $d(p, [yz] \cup [zx]) = d(p, \{x, y\}) = 3/2$, y por consiguiente, $\delta(W_n) \geq 3/2$ si $n \in \{8, 9, 10\}$. Como $\text{diam } W_n = 3$ para todo $n \geq 7$, tenemos que $\delta(W_n) = 3/2$ si $n \in \{8, 9, 10\}$.

Si $n \geq 11$, entonces el ciclo C en W_n tiene longitud $n-1 \geq 10$, y no es un triángulo geodésico, ya que cualquier geodésica γ verifica $L(\gamma) \leq \text{diam } W_n = 3$. Consideremos el ciclo C' en W_n de longitud 9 que contiene ocho vértices consecutivos en C y el vértice central v_0 en W_n . Sea x el punto en C' a distancia $9/2$ de v_0 . Consideremos los puntos y y z en C' a distancia 3 de v_0 . Entonces $T := \{x, y, z\}$ es un triángulo geodésico con $[xy] \cup [yz] \cup [zx] = C'$, ya que $n \geq 11$. El punto p en $[xy]$ con $d(p, x) = 5/4$ verifica $d(p, [yz] \cup [zx]) = d(p, x) = 5/4$, y consecuentemente, $\delta(W_n) \geq \delta(T) \geq 5/4$ si $n \geq 11$. Estamos probando que este triángulo es, de hecho, un triángulo extremal.

Consideremos cualquier triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ en W_n con $n \geq 11$. Por el Corolario 2.1.2, podemos suponer que T es también un ciclo. Como el ciclo T no es C , entonces debe ser un ciclo C'' en W_n de longitud $m \geq 3$ que contiene $m-1$ vértices consecutivos en C (los cuales llamaremos v_1, \dots, v_{m-1}) y el vértice central v_0 en W_n . Obsérvese que $m \leq 9$, ya que cualquier geodésica γ verifica $L(\gamma) \leq \text{diam } W_n = 3$.

Supongamos primero que $x = v_0$ es un vértice de T . Como todo punto $a \in W_n$ verifica $d(a, v_0) \leq 3/2$, entonces $L([xy]), L([xz]) \leq 3/2$ y, por tanto, $d(p_1, [xz] \cup [yz]) \leq d(p_1, \{x, y\}) \leq 3/4$ para todo $p_1 \in [xy]$ y $d(p_2, [xy] \cup [yz]) \leq d(p_2, \{x, z\}) \leq 3/4$ para todo $p_2 \in [xz]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d(y, v_1) \leq d(z, v_1)$.

Si $d(y, v_0) < 1$, denotemos por y' el punto con $y' \in [v_2, v_3]$ y $d(y, y') = 2$. Entonces

$z \in [v_1, v_2] \cup [v_2 y']$, ya que

$$d(y, y') = d(y, v_1) + d(v_1, v_2) + d(v_2, y') = 2,$$

$$d(v_2, y') = 1 - d(y, v_1),$$

$$d(v_3, y') = 1 - d(v_2, y') = d(y, v_1) = 1 - d(y, v_0),$$

$$d(y, y') = d(y, v_0) + d(v_0, v_3) + d(v_3, y') = 2;$$

por lo tanto, $L([yz]) \leq 2$ y $d(p_3, [xy] \cup [xz]) \leq d(p_3, \{y, z\}) \leq 1$ para todo $p_3 \in [yz]$.

Si $1 \leq d(y, v_0) < 3/2$, entonces $y \in [v_1, v_2]$; denotemos por y'' el punto que verifica $y'' \in [v_3, v_4]$ y $d(y, y'') = 5/2$. Por tanto, $z \in [y v_2] \cup [v_2, v_3] \cup [v_3 y'']$, ya que

$$d(y, y'') = d(y, v_2) + d(v_2, v_3) + d(v_3, y'') = 5/2,$$

$$d(v_3, y'') = 3/2 - d(y, v_2),$$

$$d(v_4, y'') = 1 - d(v_3, y'') = 1 - 3/2 + d(y, v_2) = 1/2 - d(y, v_1),$$

$$d(y, y'') = d(y, v_1) + d(v_1, v_0) + d(v_0, v_4) + d(v_4, y'') = 5/2.$$

Luego, $L([yz]) \leq 5/2$ y $d(p_3, [xy] \cup [xz]) \leq 5/4$ para todo $p_3 \in [yz]$.

Si $d(y, v_0) = 3/2$, entonces y es el punto medio de $[v_1, v_2]$; denotemos por y''' el punto medio de $[v_4, v_5]$. Como $d(y, y''') = 3 = \text{diam } W_n$, tenemos que $z \in [y v_2] \cup [v_2, v_3] \cup [v_3, v_4] \cup [v_4 y''']$. Si $p_3 \in [yz]$ verifica $d(p_3, v_3) \geq 1/4$, entonces $d(p_3, [xy] \cup [xz]) \leq d(p_3, \{y, z\}) \leq 3/2 - 1/4 = 5/4$. Si $p_3 \in [yz]$ verifica $d(p_3, v_3) \leq 1/4$, entonces $d(p_3, [xy] \cup [xz]) \leq d(p_3, v_0) \leq d(p_3, v_3) + d(v_3, v_0) \leq 1/4 + 1 = 5/4$.

Luego si v_0 es un vértice de T , hemos probado que $\delta(T) \leq 5/4$. Si v_0 no es un vértice de T , un argumento similar también da $\delta(T) \leq 5/4$. Por tanto, $\delta(W_n) \leq 5/4$ para todo $n \geq 11$. Por tanto, $\delta(W_n) = 5/4$ para todo $n \geq 11$.

Finalmente, ya que conocemos las constantes de hiperbolicidad de estos grafos, es fácil

comprobar que los grafos C_n y K_n para todo $n \geq 3$, $K_{m,n}$ para todo $m, n \geq 2$, y $\delta(W_n)$ para todo $4 \leq n \leq 10$, verifican $\delta(G) = \frac{1}{2} \text{diam } G$. \square

Es interesante observar el comportamiento inesperado de $\delta(W_n)$ en función de n . Esto pone de manifiesto la dificultad del estudio de la constante de hiperbolicidad. La conclusión final del Teorema 2.2.2 muestra que no es fácil caracterizar los grafos que verifican $\delta(G) = \frac{1}{2} \text{diam } G$ (aunque G tenga todas las aristas con longitud 1).

Estamos interesados en otros tipos de grafos G para los que $\delta(G) = \frac{1}{2} \text{diam } G$.

Teorema 2.2.3. *Sea $C_{a,b,c}$ un grafo con dos vértices y tres aristas de longitudes $a \leq b \leq c$ que los unen. Entonces $\delta(C_{a,b,c}) = (c + \min\{b, 3a\})/4$.*

Prueba. Denotemos por x_1, x_2 los vértices de $C_{a,b,c}$, y por A, B, C las aristas de longitudes a, b, c , respectivamente.

Supongamos primero que $b \leq 3a$. Sea x_0 el punto en C con $d(x_0, x_1) = (c + a)/2$ e y_0 el punto en B con $d(y_0, x_1) = (b - a)/2$. Consideremos las geodésicas $[x_0x_1] \subset C$, $[x_1y_0] \subset B$ y $[x_0y_0] = [x_0x_1] \cup [x_1y_0]$. Observemos que $L([x_0y_0]) = (c + b)/2$. Sea p el punto en $[x_0x_1] \subset C$ con $d(p, x_0) = d(p, y_0) = (c + b)/4$. Entonces el biángulo geodésico $B = \{x_0, y_0\}$ dado por las geodésicas $[x_0x_1] \cup [x_1y_0]$ y $[x_0x_2] \cup [x_2y_0]$ tiene $\delta(B) \geq (c + b)/4$, ya que $d(p, x_2) = (c + a)/2 - (c + b)/4 + a = (c - b + 6a)/4 \geq (c + b)/4$ (ya que $b \leq 3a$), y por tanto, $d(p, [x_0x_2] \cup [x_2y_0]) = d(p, \{x_0, y_0, x_2\}) = (c + b)/4$. Como $\text{diam } C_{a,b,c} = (c + b)/2$, tenemos que $\delta(C_{a,b,c}) \leq (c + b)/4$ por el Teorema 2.2.1. Por lo tanto, en este caso tenemos $\delta(C_{a,b,c}) = (c + b)/4 = (c + \min\{b, 3a\})/4$.

Supongamos ahora que $b > 3a$. Consideremos un triángulo geodésico T ; con el fin de calcular $\delta(C_{a,b,c})$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que T es un ciclo, por el Corolario 2.1.2. Si la curva cerrada dada por T es $C \cup A$, entonces $\delta(T) \leq (c + a)/4 < (c + 3a)/4$

y la primera desigualdad se obtiene tomando T como un biángulo geodésico. Si la curva cerrada dada por T es $B \cup A$, entonces $\delta(T) \leq (b+a)/4 < (c+3a)/4$ y la primera desigualdad se obtiene tomando T como un biángulo geodésico.

Consideremos un triángulo geodésico arbitrario $T := \{x, y, z\}$ contenido en $C \cup B$, y sea p cualquier punto de T . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p pertenece al lado geodésico $[xy]$ de T .

Supongamos primero que $[xy] \subset B$; entonces $[xy]$ está contenido en el ciclo $B \cup A$ de longitud $b + a$; como $[xy]$ es una geodésica, entonces

$$L([xy]) = d(x, y) \leq \frac{1}{2} L(B \cup A) = \frac{b+a}{2} < \frac{c+3a}{2},$$

$$d(p, [xz] \cup [yz]) \leq d(p, \{x, y\}) \leq \frac{1}{2} L([xy]) < \frac{c+3a}{4}.$$

De manera similar, si $[xy] \subset C$, entonces $d(p, [xz] \cup [yz]) \leq (c+a)/4 < (c+3a)/4$. Por lo tanto, por simetría, podemos suponer que $x_1 \in [xy]$, $x \in C$, $y \in B$ y $p \in [xx_1]$.

Definamos $U := d(x, x_1)$ y $V := d(y, x_1)$. Como $[xx_1]$ está contenida en el ciclo $C \cup A$ de longitud $c + a$, se tiene $L([xx_1]) = d(x, x_1) \leq (c+a)/2$. Entonces tenemos que $U \in [0, (c+a)/2]$. Como $[x_1y] \subset B \cup A$ y $[xy] \subset C \cup B$ deducimos, de una forma similar, que $V \in [0, (b+a)/2]$ y $U + V \leq (c+b)/2$. Sean γ_2, γ_3 las otras geodésicas en T . Denotemos por t la distancia $d(p, x) =: t$.

Definamos $U_0 := (c-a)/2$ y $V_0 := (b+a)/2$; sabemos que $V \leq V_0$.

Supongamos que $U \leq U_0$. Como $V \leq V_0$, tenemos que $U + V \leq (c+b)/2$. Entonces

$d(p, \gamma_2 \cup \gamma_3) = \min \{t, U - t + a, U - t + V\}$ y tenemos (ya que $U \leq U_0$, $V \leq V_0$ y $a \leq V_0$)

$$\begin{aligned} \max_{p \in [xx_1]} d(p, \gamma_2 \cup \gamma_3) &= \max_{t \in [0, U]} \min \{t, U - t + a, U - t + V\} \\ &\leq \max_{t \in [0, U_0]} \min \{t, U_0 - t + a, U_0 - t + V_0\} \\ &= \max_{t \in [0, U_0]} \min \{t, U_0 - t + a\} = \frac{U_0 + a}{2} = \frac{c + a}{4} < \frac{c + 3a}{4}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $(c - a)/2 < U$; recordemos que $U \leq (c + a)/2$. Dado que necesitamos $U + V \leq (c + b)/2$, entonces

$$V \leq \min \left\{ \frac{b + a}{2}, \frac{c + b}{2} - U \right\} = \frac{c + b}{2} - U =: V_1,$$

y

$$\begin{aligned} \max_{p \in [xx_1]} d(p, \gamma_2 \cup \gamma_3) &= \max_{t \in [0, U]} \min \{t, U - t + a, U - t + V\} \\ &\leq \max_{t \in [0, U]} \min \{t, U - t + a, U - t + V_1\} \\ &= \max_{t \in [0, U]} \min \left\{ t, U - t + a, \frac{c + b}{2} - t \right\}. \end{aligned}$$

Como

$$U + a \leq \frac{c + a}{2} + a = \frac{c + 3a}{2} < \frac{c + b}{2},$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \max_{p \in [xx_1]} d(p, \gamma_2 \cup \gamma_3) &\leq \max_{t \in [0, U]} \min \left\{ t, U - t + a, \frac{c + b}{2} - t \right\} \\ &= \max_{t \in [0, U]} \min \{t, U - t + a\} \\ &\leq \max_{t \in [0, U]} \min \left\{ t, \frac{c + 3a}{2} - t \right\} = \frac{c + 3a}{4}. \end{aligned}$$

Dado que todas las desigualdades pueden alcanzarse, deducimos que $\max_{p \in [xx_1]} d(p, \gamma_2 \cup \gamma_3) = (c + 3a)/4$. Por lo tanto, tenemos $\delta(C_{a,b,c}) = (c + 3a)/4 = (c + \min\{b, 3a\})/4$. \square

Proposición 2.2.4. $\delta(C_{a,b,c}) = \frac{1}{2} \text{diam } C_{a,b,c}$ si y sólo si $b \leq 3a$.

Prueba. Usando el Teorema 2.2.3 y $\text{diam } C_{a,b,c} = (c+b)/2$, se tiene $\delta(C_{a,b,c}) = \frac{1}{2} \text{diam } C_{a,b,c}$ si y sólo si $\frac{c+b}{4} = \frac{1}{2} \text{diam } C_{a,b,c} = \delta(C_{a,b,c}) = \frac{c+\min\{b,3a\}}{4}$, y esto es cierto si y sólo si $b \leq 3a$. \square

En un trabajo posterior (ver [33, Proposición 20]) los autores, usando el Teorema 2.2.3, obtienen el siguiente resultado general. Se incluye una prueba por completitud.

Corolario 2.2.5. Denotemos por C_{a_1, a_2, \dots, a_k} el grafo con dos vértices y k aristas que los unen con longitudes $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Entonces

$$(i) \quad \delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = \frac{a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}}{4}.$$

$$(ii) \quad \delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) = \frac{1}{2} \text{diam } C_{a_1, a_2, \dots, a_k} \text{ si y sólo si } a_{k-1} \leq 3a_1.$$

Prueba. Denotemos por x_1, x_2 los vértices de C_{a_1, a_2, \dots, a_k} , y por A_1, A_2, \dots, A_k las aristas con longitudes a_1, a_2, \dots, a_k , respectivamente.

Consideremos un triángulo geodésico T ; con el fin de calcular $\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k})$ sin pérdida de generalidad podemos suponer que T es un ciclo, por el Corolario 2.1.2. Entonces la curva cerrada dada por T es $A_i \cup A_j$ con $1 \leq i < j \leq k$.

Si $i = 1$, entonces $A_1 \cup A_j$ es un subgrafo isométrico de C_{a_1, a_2, \dots, a_k} . Si $i > 1$, entonces $A_1 \cup A_i \cup A_j$ es un subgrafo isométrico a C_{a_1, a_2, \dots, a_k} . Por lo tanto, por el Lema 2.1.12 y el

Teorema 2.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}\delta(C_{a_1, a_2, \dots, a_k}) &= \max \left\{ \max_{1 < j \leq k} \delta(C_{a_1, a_j}), \max_{1 < i < j \leq k} \delta(C_{a_1, a_i, a_j}) \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{1 < j \leq k} \frac{a_j + a_1}{4}, \max_{1 < i < j \leq k} \frac{a_j + \min\{a_i, 3a_1\}}{4} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{a_k + a_1}{4}, \frac{a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}}{4} \right\} \\ &= \frac{a_k + \min\{a_{k-1}, 3a_1\}}{4}.\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Grafos hiperbólicos en sentido de Gromov

3.1 Cotas para la constante de hiperbolicidad de un grafo

En esta sección obtenemos buenas cotas de la constante de hiperbolicidad de un grafo y los valores exactos de esta constante para algunas familias importantes de grafos.

Un camino γ entre dos puntos de un grafo se llama *punte* si los vértices interiores de γ tienen grado 2. En particular, cualquier arista es un puente, ya que no tiene vértices interiores.

Teorema 3.1.1. *Supongamos que γ es un puente en un grafo G y que γ' es una godésica en la clausura de $G \setminus \gamma$ que une los mismos puntos que γ . Entonces*

$$\max\{L(\gamma), L(\gamma')\} \leq 4\delta(G).$$

Prueba. Denotemos por a y b los puntos extremos de γ .

Supongamos primero que γ es una geodésica que une a y b ; entonces $L(\gamma) \leq L(\gamma')$. Sea c un punto de γ' tal que $d_G(a, c) = d_G(b, c) = L(\gamma')/2$; como γ' es una geodésica en la clausura de $G \setminus \gamma$, entonces γ' es la unión de las dos geodésicas (en G) $[ac]$ y $[cb]$. Consideremos el triángulo geodésico T con lados $\gamma, [ac], [cb]$. Sea u el punto medio de $[ac]$. Como γ es un puente y γ' es una geodésica en clausura de $G \setminus \gamma$, tenemos $d_G(u, \{a, c\}) = d_G(u, \gamma \cup [cb])$. Luego $\delta(T) \geq d_G(u, \{a, c\}) = L(\gamma')/4$, y concluimos $L(\gamma) \leq L(\gamma') \leq 4\delta(G)$.

Supongamos ahora que γ no es una geodésica; entonces γ' es una geodésica en G (ya que γ es un puente), y $L(\gamma') \leq L(\gamma)$. Usando el argumento precedente, cambiando el papel de γ y γ' , deducimos también que $L(\gamma') \leq L(\gamma) \leq 4\delta(G)$. \square

Definición 3.1.2. *Una curva γ es un ciclo minimal si γ es un ciclo tal que para cualquier par de puntos de γ , existe una geodésica γ' que los une con $\gamma' \subset \gamma$. Dicho de otra forma, un ciclo es minimal si es un subgrafo isométrico.*

Observación 3.1.3. *Todo puente está contenido en un ciclo minimal.*

Teorema 3.1.4. *Si G es cualquier grafo, entonces*

$$\delta(G) \geq \frac{1}{4} \sup\{L(\gamma) : \gamma \text{ es un ciclo minimal}\}.$$

Prueba. Consideremos cualquier ciclo minimal γ fijo. Sean $x, y \in \gamma$ tales que $d_G(x, y) = L(\gamma)/2$. Entonces $T = \{x, y\}$ es un biángulo (ya que γ es un ciclo minimal), con dos geodésicas γ_1, γ_2 verificando $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$. Consideremos $u \in \gamma_1$ con $d_G(u, x) = d_G(u, y) = L(\gamma)/4$. Como γ es un ciclo minimal, entonces $d_G(u, \gamma_2) = d_G(u, \{x, y\}) = L(\gamma)/4$, y $\delta(G) \geq \delta(T) \geq L(\gamma)/4$. Con esto el teorema queda probado. \square

Es interesante obtener desigualdades que involucren la constante de hiperbolicidad y otros parámetros importantes de un grafo. En este sentido obtenemos los siguientes teoremas.

Teorema 3.1.5. *Sea G un grafo con aristas de longitud 1. Si existe un ciclo g en G con longitud $L(g) \geq 5$ y un vértice $w \in g$ con grado dos, entonces $\delta(G) \geq 5/4$.*

Prueba. Denotemos por $u, v \in g$ los vértices que son los vecinos de w , y por g_1 la subcurva de g de longitud 2 que une u y v y que contiene a w . Como la clausura h de $g \setminus g_1$ es una curva en G que une u y v con $L(h) \geq 3$ y $h \cap g_1 = \{u, v\}$, el siguiente conjunto M no es vacío

$$M := \{ \sigma \text{ es una curva en } G \text{ uniendo } u \text{ y } v \text{ con } L(\sigma) \geq 3 \text{ y } \sigma \cap g_1 = \{u, v\} \}.$$

Consideremos una curva g_2 en M verificando $L(g_2) = \min\{L(\sigma) : \sigma \in M\}$; como $g_2 \in M$, tenemos $L(g_2) \geq 3$.

Sea z el punto medio de g_2 ; está claro que los dos subarcos de g_2 que unen z con u y con v son geodésicas por la propiedad minimizante de g_2 . Como w tiene grado dos y u, v son los vecinos de w , los dos subarcos γ_1, γ_2 de $\gamma := g_1 \cup g_2$ que unen z con w son geodésicas.

Consideremos el biángulo $\{w, z\}$ con lados γ_1, γ_2 , y los puntos $p \in \gamma_1$ a distancia $5/4$ de w . Como $L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = L(\gamma)/2 \geq 5/2$, deducimos que $d(p, \{w, z\}) \geq 5/4$. Si σ es cualquier curva que une p y $\gamma_2 \setminus \{w, z\}$, entonces $L(\sigma \cap \gamma_1) \geq 1/4$. Sea $q \in V(G)$ el último punto de σ en γ_1 ; entonces $d(p, \gamma_2) = L(\sigma \cap \gamma_1) + d(q, \gamma_2) \geq 1/4 + 1 = 5/4$. Entonces $\delta(G) \geq 5/4$. \square

Teorema 3.1.6. *Sea G cualquier grafo con m aristas. Entonces $\delta(G) \leq \sum_{k=1}^m l_k/4$, donde $l_k = L(e_k)$ para toda arista $e_k \in E(G)$. Además, $\delta(G) = \sum_{k=1}^m l_k/4$ si y sólo si G es isomorfo a C_m .*

Prueba. No es difícil verificar la conclusión del teorema para los casos $m = 1$ (entonces el grafo extremal es un vértice con un lazo) y el caso $m = 2$ (en este caso el grafo extremal tiene dos vértices y una arista doble).

Supongamos ahora que $m \geq 3$.

Sean T cualquier triángulo geodésico fijo, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ las geodésicas que unen los vértices del triángulo, y $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ la curva cerrada dada por T . Con el fin de calcular $\delta(G)$, podemos suponer que γ es ciclo, por el Corolario 2.1.2.

Tenemos $L(\gamma) \leq \sum_{k=1}^m l_k$, por tanto $L(\gamma_j) \leq \sum_{k=1}^m l_k/2$, para todo j . Si $x \in \gamma_j =: [yz]$, entonces $d(x, \{y, z\}) \leq L(\gamma_j)/2 \leq \sum_{k=1}^m l_k/4$ y consecuentemente $\delta(T) \leq \sum_{k=1}^m l_k/4$. Por tanto, $\delta(G) \leq \sum_{k=1}^m l_k/4$.

Si $\delta(G) = \sum_{k=1}^m l_k/4$, entonces todas las desigualdades en el argumento precedente deben ser igualdades. En particular, tenemos que $L(\gamma) = \sum_{k=1}^m l_k$ y deducimos $G = \gamma$. Por tanto, concluimos que G es un ciclo y, consecuentemente, que es isomorfo a C_m . \square

Deducimos el siguiente resultado para grafos con aristas de longitud 1:

Corolario 3.1.7. *Sea G cualquier grafo con m aristas. Si todas las aristas tienen longitud 1, entonces $\delta(G) \leq m/4$. Además $\delta(G) = m/4$ si y sólo si G es isométrico a C_m .*

Además, tenemos la siguiente mejora del Corolario 3.1.7.

Teorema 3.1.8. *Sea G cualquier grafo con m aristas. Si todas las aristas tienen longitud 1 y G no es isométrico a C_m , entonces $\delta(G) \leq (m-1)/4$. Además, $\delta(G) = (m-1)/4$ si y sólo si G es isométrico a C_{m-1} con una arista adicional e_0 , y se tiene que e_0 es un lazo o que el otro vértice de e_0 tiene grado 1 o que e_0 une dos vértices diferentes de C_{m-1} a distancia (en C_{m-1}) menor o igual que 3.*

Prueba. Sean T un triángulo geodésico, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ las geodésicas que unen los vértices del triángulo, y $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ la curva cerrada dada por T . Con el fin de calcular $\delta(G)$, por Corolario 2.1.2, podemos suponer que γ es un ciclo.

Si $L(\gamma) = m$, entonces $\gamma = G$ y G es isométrico a C_m , lo que es una contradicción.

Luego, $L(\gamma) \leq m - 1$ y $L(\gamma_j) \leq (m - 1)/2$, para todo j . Si $x \in \gamma_j =: [yz]$, entonces $d(x, \{y, z\}) \leq L(\gamma_j)/2 \leq (m - 1)/4$ y consecuentemente $\delta(T) \leq (m - 1)/4$ y $\delta(G) \leq (m - 1)/4$.

Si $\delta(G) = (m - 1)/4$, entonces todas las desigualdades en el argumento anterior deben ser igualdades. Entonces tenemos que $L(\gamma) = m - 1$. Como γ es un ciclo, concluimos que G es isométrico a C_{m-1} con una arista adicional e_0 .

Una posibilidad es que e_0 sólo sea incidente en un vértice de C_{m-1} . Entonces tenemos o bien que e_0 es un lazo o bien que el otro vértice de e_0 tiene grado 1. Ambos casos son posibles, ya que $\delta(G) = (m - 1)/4$ por el Teorema 2.1.5 (en ambos casos, $\{\gamma, e_0\}$ es una tree-decomposition de G).

De otro modo, e_0 une dos vértices diferentes de C_{m-1} , y G es isométrico a algún $C_{1,b,c}$, con $b, c \in \mathbb{Z}^+$, $1 + b + c = m$ y $b \leq c$. El Teorema 2.2.3 da $\delta(C_{1,b,c}) = (c + \min\{b, 3\})/4$. Luego, $\delta(G) = (m - 1)/4$ si y sólo si $c + \min\{b, 3\} = m - 1$, es decir, $\min\{b, 3\} = b$ ó $b \leq 3$. \square

3.2 Hiperbolicidad y adición de aristas

Estamos interesados ahora en obtener relaciones entre las constantes de hiperbolicidad de un grafo G y un grafo G' obtenido añadiendo varias aristas a G . En primer lugar, obsérvese que no es posible obtener un resultado de este tipo sin hipótesis adicionales: Si G es el grafo camino P_n y G' es el grafo P_n con una arista que une los dos vértices de P_n con grado uno, entonces G' es isométrico al grafo C_n : por tanto, $\delta(G) = 0$ y $\delta(G') = \frac{n}{4}$.

Vemos entonces que es posible alterar enormemente la constante de hiperbolicidad de un grafo si añadimos una arista que conecte dos puntos que no pertenecen a un ciclo.

Sin embargo, podemos obtener un resultado similar uniendo puntos de ciclos. Si $G =$

$P_n \times P_2$ y G' es el grafo G con una arista que une dos vértices de G con grado dos a distancia n , entonces se puede comprobar que $\delta(G) = \frac{3}{2}$ y $\delta(G') \geq \frac{n+1}{4}$.

Si añadimos varias aristas en lugar de una sola, la situación no mejora. Si $G = C_n$, $n \geq 11$, entonces podemos añadir varias aristas para obtener un grafo G' isométrico al grafo rueda W_n con n vértices. Luego, $\delta(G) = \frac{n}{4}$ y $\delta(G') = \frac{5}{4}$ (ver Teorema 2.2.2).

Sin embargo, no es difícil ver que un grafo es hiperbólico si y sólo si el grafo resultante obtenido añadiendo o eliminando una cantidad finita de aristas es hiperbólico.

Estamos interesados en encontrar formas de añadir (o eliminar) una cantidad finita de aristas que sólo suponga pequeños cambios en las constantes de hiperbolicidad.

Empezamos el estudio de este tema con un resultado muy general, que es una consecuencia directa de [43, Teorema 2.4].

Teorema 3.2.1. *Sea G un grafo y sea $\{g_n\}_n$ una colección (finita o numerable) de subgrafos de G (no necesariamente conexos) con $\text{diam}_G(g_n) \leq c_1$ para todo n , y $d_G(g_m, g_n) \geq c_2$ para todo $m \neq n$. Sea $\{G_n\}_n$ una colección de grafos con $V(G_n) \cap V(G) \subseteq V(g_n)$, $G_n \cup g_n$ conexos, $\text{diam}_{G_n \cup g_n}(g_n) \leq c_1$ y $\delta(G_n \cup g_n) \leq c_1$ para todo n . Entonces $G' := G \cup (\cup_n G_n)$ es δ' -hiperbólico si y sólo si G es δ -hiperbólico, cuantitativamente.*

De los Teoremas 2.2.1 y 3.2.1 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2. *Sea G un grafo y sea $\{g_n\}_n$ una colección (finita o numerable) de subgrafos de G (no necesariamente conexos) con $\text{diam}_G(g_n) \leq c_1$ para todo n , y $d_G(g_m, g_n) \geq c_2$ para todo $m \neq n$. Sea $\{G_n\}_n$ una colección de grafos (no necesariamente conexos) con $V(G_n) \cap V(G) \subseteq V(g_n)$ y $\text{diam}_{G_n \cup g_n}(G_n \cup g_n) \leq c_1$ para todo n . Entonces $G' := G \cup (\cup_n G_n)$ es δ' -hiperbólico si y sólo si G es δ -hiperbólico, cuantitativamente.*

Prueba. Como $\text{diam}_{G_n \cup g_n}(G_n \cup g_n) \leq c_1$, dado cualquier par de puntos en $G_n \cup g_n$ existe un

camino que los une en $G_n \cup g_n$ con longitud menor o igual que c_1 ; entonces $G_n \cup g_n$ es conexo. Tenemos también $\text{diam}_{G_n \cup g_n}(g_n) \leq c_1$ para todo n . Además, $\delta(G_n \cup g_n) \leq c_1/2$ para todo n , por el Teorema 2.2.1. Por lo tanto, el resultado es una consecuencia del Teorema 3.2.1. \square

Tenemos ejemplos que demuestran que la conclusión de este teorema falla si eliminamos algunas hipótesis.

A pesar de los ejemplos que aparecen al principio de esta sección, que demuestran demuestran que no es fácil controlar las constantes de hiperbolicidad, del Teorema 3.2.2 deducimos el siguiente resultado, que permite garantizar la hiperbolicidad de un grafo obtenido de un grafo hiperbólico añadiendo aristas (posiblemente una cantidad infinita).

Teorema 3.2.3. *Sea G un grafo y sea $\{g_n\}_n$ una colección (finita o numerable) de subgrafos de G con $\text{diam}_{g_n}(g_n) \leq c_1$ para todo n , y $d_G(g_m, g_n) \geq c_2$ para todo $m \neq n$. Sea $\{G_n\}_n$ una colección de aristas $G_n = \{e_n^1, \dots, e_n^{j_n}\}$ con $V(G_n) \subseteq V(g_n)$ y $L(e_n^j) \leq c_1$ para todo n y $1 \leq j \leq j_n$. Entonces $G' := G \cup (\cup_n G_n)$ es δ' -hiperbólico si y sólo si G es δ -hiperbólico, cuantitativamente.*

Prueba. Tenemos $\text{diam}_G(g_n) \leq \text{diam}_{g_n}(g_n) \leq c_1$ para todo n . También tenemos $\text{diam}_{G_n \cup g_n}(G_n \cup g_n) \leq \text{diam}_{g_n}(g_n) + \max_{1 \leq j \leq j_n} L(e_n^j) \leq 2c_1$ para todo n . Por lo tanto, el resultado es una consecuencia del Teorema 3.2.2. \square

Obtenemos directamente el siguiente resultado para los grafos cuyas aristas tienen longitud k .

Teorema 3.2.4. *Sea G un grafo con aristas de longitud k y sea $\{g_n\}_n$ una colección (finita o numerable) de subgrafos disjuntos de G con $\text{diam}_{g_n}(g_n) \leq c_1$ para todo n . Sea $\{G_n\}_n$ una colección de aristas $G_n = \{e_n^1, \dots, e_n^{j_n}\}$ de longitud k , con $V(G_n) \subseteq V(g_n)$ para todo n . Entonces $G' := G \cup (\cup_n G_n)$ es δ' -hiperbólico si y sólo si G es δ -hiperbólico, cuantitativamente.*

Para probar el Teorema 3.2.6 necesitaremos el siguiente resultado conocido.

Lema 3.2.5. ([44, Lema 3.1]) *Sean X un espacio métrico geodésico y $\varepsilon \geq 0$. Si γ es una curva que une $x, y \in X$ con $L(\gamma) \leq d(x, y) + \varepsilon$, entonces γ es una $(1, \varepsilon)$ -quasi-geodésica con su parametrización de longitud de arco.*

Teorema 3.2.6. *Sean G un grafo y $\{g_j\}_{j=1}^m$ una colección de ciclos minimales en G . Denotemos por G' el grafo obtenido añadiendo a G las aristas $\{e_j\}_{j=1}^m$, con $e_j := [z_j, w_j]$, $z_j, w_j \in g_j$ y $L(e_j) \leq c d_G(z_j, w_j)$ para $1 \leq j \leq m$. Si G es δ -hiperbólico, entonces G' es δ' -hiperbólico, donde δ' es una constante que sólo depende de δ , c y m .*

Prueba. En primer lugar, observemos que, por el Teorema 3.1.4,

$$\delta \geq \frac{1}{4} L(g_j) \geq \frac{1}{2} d_G(z_j, w_j) \geq \frac{1}{2c} L(e_j),$$

para todo $1 \leq j \leq m$.

Observemos también que $d_{G'}(x, y) \leq d_G(x, y)$ para todo $x, y \in G$.

Consideremos un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ en G' con lados $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ (γ_i es el lado opuesto a x_i). Por el Corolario 2.1.2, podemos suponer que T es un ciclo. Podemos elegir puntos $x'_1, x'_2, x'_3 \in T \cap G$ con $d_{G'}(x_i, x'_i) \leq \max_j L(e_j)/2 \leq c\delta$. Consideremos las curvas $\{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$ tales que $\gamma'_1 \cup \gamma'_2 \cup \gamma'_3 = T$, γ'_1 une x'_2 y x'_3 , γ'_2 une x'_1 y x'_2 , y γ'_3 une x'_1 y x'_1 .

Si γ'_i está contenida en G para algún $1 \leq i \leq 3$, definimos $\gamma''_i := \gamma'_i$. Si γ'_i no está contenida en G para algún $1 \leq i \leq 3$, definimos γ''_i como la curva obtenida de γ'_i de la siguiente forma: si e_j está contenida en γ'_i para algún $1 \leq j \leq m$, entonces reemplazamos cada e_j por una geodésica en G que une z_j y w_j . Por tanto, γ''_i está contenida en G y

$$L(\gamma''_1) \leq d_{G'}(x'_2, x'_3) + \frac{m}{2} \max_j L(g_j) \leq d_G(x'_2, x'_3) + 2m\delta.$$

Por lo tanto, el Lema 3.2.5 da que γ_1'' es una $(1, 2m\delta)$ -quasi-geodésica en G . El mismo argumento da que γ_i'' es una $(1, 2m\delta)$ -quasi-geodésica en G para todo $1 \leq i \leq 3$. Denotemos por T'' el triángulo (quasi-geodésico) en G dado por $\gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3''$.

EL Corolario 1.2.17 da que T'' es $(\delta + 2H(\delta, 1, 2m\delta))$ -thin en G (aquí H es la constante en el Teorema 1.2.16).

Consideremos ahora un punto $x \in T$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in \gamma_1$. Entonces existe $x'' \in \gamma_1''$ con $d_{G'}(x, x'') \leq \max_j L(e_j) \leq 2c\delta$. Por lo tanto, existe $y'' \in \gamma_2'' \cup \gamma_3''$ con $d_G(x'', y'') \leq \delta + 2H(\delta, 1, 2m\delta)$. Tenemos que existe $y \in \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $d_{G'}(y'', y) \leq \max_j L(e_j) \leq 2c\delta$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} d_{G'}(x, y) &\leq d_{G'}(x, x'') + d_{G'}(x'', y'') + d_{G'}(y'', y) \leq d_{G'}(x, x'') + d_G(x'', y'') + d_{G'}(y'', y) \\ &\leq 2c\delta + \delta + 2H(\delta, 1, 2m\delta) + 2c\delta = (4c + 1)\delta + 2H(\delta, 1, 2m\delta), \end{aligned}$$

y $\delta(T) \leq (4c + 1)\delta + 2H(\delta, 1, 2m\delta)$ para todo triángulo geodésico T en G' . Concluimos que $\delta(G') \leq (4c + 1)\delta + 2H(\delta, 1, 2m\delta)$. \square

3.3 Grafos cúbicos

Determinar si un grafo infinito es hiperbólico es un problema muy difícil. Por lo tanto, será útil podernos restringir a estudiar sólo un conjunto de grafos “normalizados”: los grafos cúbicos. Este es el objetivo principal de los siguientes resultados, aunque creemos que son interesantes por sí mismos.

El siguiente teorema es válido para todo grafo G localmente finito; puede ser no conexo o puede tener lazos y/o aristas múltiples, y las aristas pueden tener longitudes arbitrarias. Este resultado también tiene consecuencias geométricas (ver Teoremas 3.3.6 y 3.3.7).

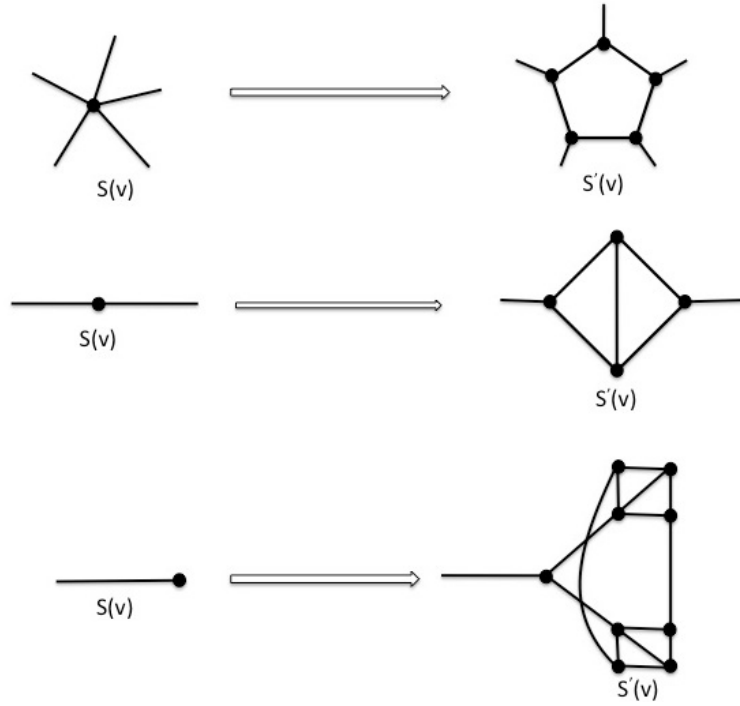
Teorema 3.3.1. *Todo grafo G es quasi-isométrico a un grafo 3-regular. De hecho, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un grafo 3-regular G' y una $(1 + \varepsilon, \varepsilon)$ quasi-isometría $f : G \rightarrow G'$ que es ε -full.*

Prueba. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que G es conexo ya que, en caso contrario, podemos trabajar con las componentes conexas de G . Fijemos $\varepsilon > 0$. Dividiendo una arista como unión de aristas añadiendo varios vértices si es necesario, podemos suponer que $L(e) \leq \varepsilon$ para toda arista $e \in E(G)$ incidente en algún vértice con grado dos. Asociamos a cada vértice v el conjunto conexo $S(v)$, que es v con media-arista de cada una de las aristas incidentes en v . Si $\deg(v) \geq 4$ y las longitudes de las aristas incidentes en v son $\{l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v)}\}$, entonces definimos $S'(v)$ como la estructura que es la unión de un grafo isomorfo a $C_{\deg(v)}$ con $\deg(v)$ aristas de longitudes $l' = \varepsilon \min\{1, l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v)}\} / \deg(v)$, y $\deg(v)$ semi-aristas de longitud $l_j/2$ (cada semi-arista está pegada a un vértice diferente del grafo isométrico a $C_{\deg(v)}$, ver Figura).

Si $\deg(v) = 3$, entonces $S'(v) := S(v)$.

Si $\deg(v) = 2$, entonces definimos $S'(v)$ como la estructura que es la unión de dos semi-aristas de longitudes $l_1/4, l_2/4$, cuatro vértices y cinco aristas de longitudes $l_1/4, l_1/4, l_2/4, l_2/4, \min\{l_1, l_2\}/4$ (ver Figura; si $l_j/4$ es la longitud de una semi-arista, entonces las dos aristas que la cortan tienen también longitud $l_j/4$ ($j = 1, 2$), y la arista “vertical” en la Figura tiene longitud $\min\{l_1, l_2\}/4$).

Finalmente, si $\deg(v) = 1$, y la arista incidente en v tiene longitud l entonces definimos $S'(v)$ como la estructura en la Figura con una semi-arista de longitud $l/2$ y trece aristas de longitud $\varepsilon/4$ (entonces el grafo que es la unión de estas trece aristas tiene diámetro menor que ε).



Definamos en cada caso una función $f_v : S(v) \rightarrow S'(v)$ como sigue:

Si $\deg(v) \geq 4$, definimos $f_v(v) = v'$, donde v' es cualquier vértice fijo en $S'(v)$. f_v aplica isométricamente cada semi-arista semi-abierta (la semi-arista sin el vértice v) de longitud $l_j/2$, para $j = 1, 2, \dots, \deg(v)$ de $S(v)$ en la semi-arista de longitud $l_j/2$ de $S'(v)$.

Si $\deg(v) = 3$, entonces f_v es la identidad.

Si $\deg(v) = 2$, entonces definimos $f_v(v) = w$, donde w es uno de los vértices en $S'(v)$ unido por la arista vertical en la Figura. f_v aplica isométricamente cada semi-arista de longitud $l_j/2$ de $S(v)$ en la unión de la semi-arista y la arista incidente en w con longitudes $l_j/4$ en $S'(v)$, para $j = 1, 2$.

Si $\deg(v) = 1$, entonces f_v aplica isométricamente la semi-arista de longitud $l/2$ de $S(v)$ en la semi-arista de longitud $l/2$ en $S'(v)$.

Sea G' el grafo obtenido a partir de G sustituyendo cada $S(v)$ por $S'(v)$, para todo $v \in V(G)$.

Definimos ahora una función global $f : G \rightarrow G'$ dada por $f|_{S(v)} = f_v$, para todo $v \in V(G)$. Probaremos a continuación que esta función f es una quasi-isometría. Está claro que $d_G(x, y) \leq d_{G'}(f(x), f(y))$, para todo $x, y \in G$.

Si $\deg(v) \leq 3$, entonces $d_{G'}(f(x), f(y)) = d_G(x, y)$, para todo $x, y \in S(v)$.

Si $\deg(v) \geq 4$, entonces

$$\begin{aligned} d_{G'}(f(x), f(y)) &\leq d_G(x, y) + \frac{\deg(v)}{2} \cdot \frac{\varepsilon \min\{1, l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v)}\}}{\deg(v)} = \\ &= d_G(x, y) + \frac{\varepsilon \min\{1, l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v)}\}}{2}, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

para todo $x, y \in S(v)$. Fijemos ahora $x, y \in G$. Consideremos $v, w \in V(G)$ tales que $x \in S(v)$, $y \in S(w)$, y una geodésica γ en G uniendo x con y (entonces, $L(\gamma) = d_G(x, y)$). Sean $S(v) = S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_n) = S(w)$ las estructuras que γ corta, en este orden.

Si $n = 1$, entonces (3.3.1) da

$$d_{G'}(f(x), f(y)) \leq d_G(x, y) + \varepsilon/2.$$

Si $n = 2$, sea $z := S(v_1) \cap S(v_2)$; tenemos

$$\begin{aligned} d_{G'}(f(x), f(y)) &\leq d_{G'}(f(x), f(z)) + d_{G'}(f(z), f(y)) \leq \\ &\leq d_G(x, z) + \varepsilon/2 + d_G(z, y) + \varepsilon/2 = d_G(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Si $n \geq 3$, sea $z_j := S(v_j) \cap S(v_{j+1})$ para $1 \leq j \leq n-1$; entonces

$$d_{G'}(f(x), f(y)) \leq d_{G'}(f(x), f(z_1)) + \sum_{j=1}^{n-2} d_{G'}(f(z_j), f(z_{j+1})) + d_{G'}(f(z_{n-1}), f(y)).$$

Como $d_G(z_j, z_{j+1})$ es igual a la media de dos longitudes de aristas incidentes en v_{j+1} , tenemos

$$\frac{\min\{1, l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v_{j+1})}\}}{2} \leq \min\{1, l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v_{j+1})}\} \leq d_G(z_j, z_{j+1}).$$

Entonces (3.3.1) da $d_{G'}(f(z_j), f(z_{j+1})) \leq (\varepsilon + 1)d_G(z_j, z_{j+1})$; consecuentemente,

$$\begin{aligned} d_{G'}(f(x), f(y)) &\leq d_G(x, z_1) + \varepsilon/2 + (\varepsilon + 1) \sum_{j=1}^{n-2} d_G(z_j, z_{j+1}) + d_G(z_{n-1}, y) + \varepsilon/2 \leq \\ &\leq (\varepsilon + 1)d_G(x, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Consecuentemente, f es una $(\varepsilon + 1, \varepsilon)$ -quasi-isometría.

Probaremos ahora que f es ε -full. Consideremos $z \in G'$; entonces $z \in S'(v)$, para algún $v \in V(G)$.

Si $\deg(v) \geq 3$, entonces $d_{G'}(z, f(G)) \leq \varepsilon \min\{1, l_1, l_2, \dots, l_{\deg(v)}\} / \deg(v) \leq \varepsilon$.

Si $\deg(v) = 2$, entonces $d_{G'}(z, f(G)) \leq \max\{l_1/4, l_2/4\} \leq \varepsilon/4$.

Si $\deg(v) = 1$, entonces $d_{G'}(z, f(G)) < \varepsilon$. Por tanto, f es ε -full, y eso completa la prueba. \square

Tenemos también los siguientes resultados.

Lema 3.3.2. *Cualquier grafo con grado máximo Δ y con aristas con longitudes en el inter-*

valo $[l_1, l_2]$ es quasi-isométrico a un grafo 3-regular con aristas de longitud 1. Además, las constantes en la quasi-isometría sólo dependen de l_1 , l_2 y Δ .

Prueba. Consideremos un grafo G verificando las hipótesis del Lema, y el grafo G_0 isomorfo a G y tal que toda arista de G_0 tiene longitud 1. Aplicando una dilatación a cada arista, está claro que G_0 y G son quasi-isométricos, y que las constantes en la quasi-isometría sólo depende de l_1 y l_2 . Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que toda arista en G tiene longitud 1. Como cualquier vértice en G satisface $\deg(v) \leq \Delta$, obtenemos el resultado sustituyendo en la prueba del Teorema 3.3.1 el grafo G' por un grafo G'' isomorfo a G' y tal que toda arista de G'' tiene longitud 1 (y entonces las constantes en la segunda quasi-isometría dependen sólo de Δ). \square

Teorema 3.3.3. *Cualquier grafo G con grado máximo Δ y con $L(e) \geq c_0 > 0$ para toda arista $e \in E(G)$ es quasi-isométrico a un grafo 3-regular con aristas de longitud 1. Además, las constantes en la quasi-isometría dependen sólo de c_0 y Δ .*

Prueba. Dividiendo cada arista e con $L(e) > 2c_0$ en unión de aristas con longitudes en el intervalo $[c_0, 2c_0]$ añadiendo varios vértices, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $c_0 \leq L(e) \leq 2c_0$ para cada arista $e \in E(G)$. Por tanto, el Lema 3.3.2 da el resultado. \square

Estos resultados tienen también aplicaciones geométricas.

Definición 3.3.4. *Decimos que un espacio métrico (X, d) es un path-metric si para todo $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un camino g uniendo x e y con $L(g) \leq d(x, y) + \varepsilon$.*

En la Sección 1.3 de [9] encontramos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5. *Fijemos cualquier $\varepsilon > 0$. Todo espacio path-metric (X, d) es $(1 + \varepsilon, 2)$ -quasi-isométrico a un grafo (posiblemente no localmente finito) en el cual toda arista tiene longitud 1.*

Estamos interesados ahora en espacios path-metric localmente compactos; obsérvese que estos espacios son siempre geodésicos.

Por tanto, los Teoremas 3.3.1 y 3.3.5 dan el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6. *Cualquier espacio path-metric localmente compacto (X, d) es quasi-isométrico a un grafo 3-regular.*

Prueba. Vamos a probar que el grafo asociado a X por el Teorema 3.3.5 es localmente finito. Por tanto, los Teoremas 3.3.1 y 3.3.5 darán el resultado.

El grafo asociado a X por el Teorema 3.3.5 se construye de la siguiente forma: para $t > 0$ suficientemente pequeño, tomamos un packing maximal P de X por bolas disjuntas de radio t ; formamos un grafo cuyos vértices corresponden a las bolas de P , y uniendo dos vértices por una arista de longitud 1, si los centros de las correspondientes bolas están a distancia a lo sumo 1. Buscando una contradicción, supongamos que este grafo no es localmente finito, es decir, que existe un vértice v con $\deg(v) = \infty$ (ya que toda arista tiene longitud 1). Sea $x \in X$ el centro de la bola correspondiente a v , y $\{x_n\}_n$ los centros de las bolas correspondientes a los vecinos de v en el grafo. Por tanto, $\{x_n\}_n$ es una sucesión contenida en la bola cerrada B con centro x y radio 2 y, como B es compacta, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ que es una sucesión de Cauchy. Este hecho contradice $d(x_m, x_n) \geq 2t$ para $m \neq n$. Esta es la contradicción que buscábamos, y por tanto, el grafo asociado a X por el Teorema 3.3.5 es localmente finito. \square

Teorema 3.3.7. *Cualquier variedad riemanniana n -dimensional cuya curvatura de Ricci está acotada inferiormente por $-(n-1)k^2$, es quasi-isométrica a un grafo 3-regular con aristas de longitud 1. Además, las constantes en la quasi-isometría sólo dependen de n y k .*

Prueba. El Lema 2.3 en [29] asegura que el grafo asociado a X por el Teorema 3.3.5 tiene una cota superior para el grado de sus vértices, que sólo depende de n y k . Por tanto, los Teoremas 3.3.3 y 3.3.5 dan el resultado. \square

Hiperbolicidad de grafos de teselación y esqueletos de CW complejos

4.1 Hiperbolicidad de grafos de teselación

Empezamos esta sección con los siguientes conceptos.

Intuitivamente, una *variedad topológica* es un espacio topológico que localmente tiene la estructura topológica de \mathbb{R}^n , para algún n . Un *complejo celular* o *CW complejo* es un tipo de espacio topológico que en cierta manera se asemeja a una variedad topológica. Son espacios muy utilizados en Topología (especialmente en Topología Algebraica) y en Geometría Diferencial.

Definición 4.1.1. *Una n -célula es un conjunto cerrado cuyo interior es homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n . Las 2-células se denominan caras, las 1-células se denominan aristas, y las 0-células se denominan vértices.*

Por CW 2-complejo designaremos un espacio topológico conexo que es unión de 2-células con las siguientes propiedades:

- Los interiores de las 2-células son disjuntos.
- La intersección de 2-células es el conjunto vacío o una unión finita de 1-células y/o 0-células.

El 1-esqueleto de un CW 2-complejo es el grafo obtenido como la unión de las 1-células que constituyen las fronteras de las 2-células.

Un grafo de teselación es el 1-esqueleto de un CW 2-complejo contenido en una superficie riemanniana \mathcal{S} (con o sin borde) tal que todo punto en \mathcal{S} está contenido en alguna cara del complejo. Las aristas del grafo de teselación son caminos rectificables en \mathcal{S} y sus longitudes son las inducidas por la métrica en \mathcal{S} (no tienen por qué ser geodésicas en \mathcal{S}).

En esta sección probamos la equivalencia entre la hiperbolicidad de un grafo de teselación de una superficie \mathcal{S} y la hiperbolicidad de \mathcal{S} (ver el Teorema 4.1.2). Con este primer resultado deducimos consecuencias para grafos planares de teselación; se puede pensar que estos tipos de grafos nunca son hiperbólicos, ya que el plano no es hiperbólico (y entonces la teoría sería trivial). Sin embargo, encontramos un resultado sorprendente: existe un grafo planar de teselación que es hiperbólico (ver el Teorema 4.1.9). Obtenemos otro resultado sorprendente en el contexto de grafos generales: si aumentamos la longitud de las aristas de un grafo no hiperbólico es posible obtener un grafo hiperbólico (ver el Teorema 4.1.8).

Aunque las superficies riemannianas quedan fuera de los objetivos de esta tesis, necesitamos algunos conceptos geométricos básicos en este capítulo.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio plano (es decir, un conjunto abierto y conexo en \mathbb{C}). Una métrica riemanniana definida en Ω , viene dada por una expresión de la forma $ds^2 = E(x, y)dx^2 +$

$2F(x, y)dx dy + G(x, y)dy^2$, donde E, F y G son funciones C^∞ tales que $EG - F^2 > 0$ en Ω . Se dice que la métrica es conforme cuando $F = 0$ y $E = G$. En este caso, puede escribirse $ds^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$ y λ se denomina la densidad de la métrica.

Una métrica conforme siempre es múltiplo de la euclídea, es decir, $ds = \lambda(x, y)|dz|$, donde $|dz|$ denota la longitud euclídea.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es una curva continuamente diferenciable a trozos, se define su longitud con respecto a la métrica λ como:

$$L_\lambda(\gamma) := \int_\gamma \lambda(z)|d(z)|. \quad (4.1.1)$$

Dados dos puntos $p, q \in \Omega$, se define la distancia en la métrica λ entre p y q como

$$d_\Omega(p, q) := \inf\{L_\lambda(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_\Omega(p, q)\},$$

siendo $\mathcal{C}_\Omega(p, q)$ el conjunto formado por todas las curvas continuamente diferenciables a trozos parametrizadas de forma que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$.

Es posible demostrar que la función $d_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia y (X, d_Ω) es un espacio métrico. En el caso particular $\lambda \equiv 1$ y $\Omega = \mathbb{C}$, entonces d_Ω es, precisamente, la distancia euclídea.

En el disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ puede definirse una métrica conforme mediante la siguiente densidad:

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (4.1.2)$$

A esta métrica se le suele denominar *hiperbólica* o de *Poincaré*.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ es una curva continuamente diferenciable a trozos su longitud con respecto a esta métrica es

$$L_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz| = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt.$$

El disco con esta métrica constituye el modelo de Poincaré del plano hiperbólico, en el que las geodésicas son los arcos de circunferencia perpendiculares a $\partial\mathbb{D}$, y que tiene curvatura constante $K = -1$.

Teorema 4.1.2. *Sea \mathcal{S} una superficie riemanniana con curvatura satisfaciendo $K \geq -k^2$ para alguna constante k . Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathcal{S} con caras $\{F_n\}$ tales que existen conjuntos Λ_1, Λ_2 que son una partición del conjunto de índices n y constantes positivas c_1, c_2 , verificando las siguientes propiedades: $\text{diam}_G \partial F_n \leq c_1$, $\text{diam}_{\mathcal{S}} F_n \leq c_1$ y $A_{\mathcal{S}}(F_n) \geq c_2$ para todo $n \in \Lambda_1$, y $d_{\partial F_n}(x, y) \leq c_1 d_{\mathcal{S}}(x, y)$ para todo $x, y \in \partial F_n$ y para todo $n \in \Lambda_2$. Si \mathcal{S} es hiperbólico, entonces G es hiperbólico, cuantitativamente.*

Además, si $\text{diam}_{\mathcal{S}} F_n \leq c_1$ para todo $n \in \Lambda_2$, entonces \mathcal{S} es hiperbólico si y sólo si G es hiperbólico, cuantitativamente.

Prueba. Vamos a probar que la inclusión $i : G \rightarrow \mathcal{S}$ es una quasi-isometría. Si $\text{diam}_{\mathcal{S}} F_n \leq c_1$ para todo $n \in \Lambda_2$, entonces i es c_1 -full. Estos hechos implican las conclusiones del Teorema 4.1.2, usando el Teorema 1.2.18.

Está claro que $d_{\mathcal{S}}(x, y) = d_{\mathcal{S}}(i(x), i(y)) \leq d_G(x, y)$ para todo $x, y \in G$.

Fijemos ahora $x, y \in G$ y sea σ una geodésica uniendo x e y en \mathcal{S} . Si $F_n \cap \sigma \neq \emptyset$, entonces tenemos $F_n \subseteq \mathcal{V}_{\text{diam } F_n}(\sigma) \subseteq \mathcal{V}_{c_1}(\sigma)$. Consideremos una aplicación recubridora universal $\pi : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ y un elevamiento $\tilde{\sigma}$ de σ en $\tilde{\mathcal{S}}$. Si g es la métrica riemanniana en \mathcal{S} y consideramos en $\tilde{\mathcal{S}}$, como usualmente, el pullback π^*g de g por π , entonces π es una

isometría local y $A_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_{c_1}(\sigma)) \leq A_{\tilde{\mathcal{S}}}(\mathcal{V}_{c_1}(\tilde{\sigma}))$. Como π es una isometría local, la curvatura en $\tilde{\mathcal{S}}$ satisface también $K_{\tilde{\mathcal{S}}} \geq -k^2$. Si \mathcal{S}^* es la superficie completa simplemente conexa con curvatura constante $K_{\mathcal{S}^*} = -k^2$ y σ^* es una geodésica en \mathcal{S}^* con $L_{\mathcal{S}^*}(\sigma^*) = L_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\sigma})$, entonces es fácil comprobar que $A_{\tilde{\mathcal{S}}}(\mathcal{V}_{c_1}(\tilde{\sigma})) \leq A_{\mathcal{S}^*}(\mathcal{V}_{c_1}(\sigma^*))$ usando las coordenadas de Fermi (ver, por ejemplo, [11, p. 247]) y los argumentos habituales de comparación de la curvatura (ver, por ejemplo, [38, Lemma 3.5]). Es bien conocido (ver, por ejemplo, [18, p. 208]) que $A_{\mathcal{S}^*}(\mathcal{V}_{c_1}(\sigma^*)) = \frac{2}{k} \sinh(kc_1) L_{\mathcal{S}}(\sigma) + \frac{4\pi}{k^2} \sinh^2\left(\frac{kc_1}{2}\right)$, ya que $\mathcal{V}_{c_1}(\sigma^*)$ es la unión de dos “semi-bolas” y un “rectángulo”. Si $\mathcal{N}(\sigma)$ denota la cantidad de piezas F_n con $n \in \Lambda_1$ que σ corta entonces obtenemos

$$c_2 \mathcal{N}(\sigma) \leq A_{\mathcal{S}}(\mathcal{V}_{c_1}(\sigma)) \leq \frac{2}{k} \sinh(kc_1) L_{\mathcal{S}}(\sigma) + \frac{4\pi}{k^2} \sinh^2\left(\frac{kc_1}{2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{N}(\sigma) \leq \frac{2 \sinh(kc_1)}{kc_2} d_{\mathcal{S}}(x, y) + \frac{4\pi \sinh^2\left(\frac{kc_1}{2}\right)}{k^2 c_2}.$$

Sean $[x_1x_2], [x_3x_4], \dots, [x_{2m-1}x_{2m}]$ las geodésicas contenidas en σ tales que $[x_{2j-1}x_{2j}] = \sigma \cap F_{n_j}$ con $n_j \in \Lambda_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} d_G(x, y) &\leq \sup_{n \in \Lambda_1} \{\text{diam}_G \partial F_n\} \mathcal{N}(\sigma) + \sum_{j=1}^m d_{\partial F_{n_j}}(x_{2j-1}, x_{2j}) \\ &\leq c_1 \mathcal{N}(\sigma) + c_1 \sum_{j=1}^m d_{\mathcal{S}}(x_{2j-1}, x_{2j}) \\ &\leq \left(\frac{2c_1 \sinh(kc_1)}{kc_2} + c_1 \right) d_{\mathcal{S}}(x, y) + \frac{4\pi c_1 \sinh^2\left(\frac{kc_1}{2}\right)}{k^2 c_2}, \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Observación 4.1.3. *Si la curvatura satisface $-k^2 \leq K \leq 0$, podemos eliminar la hipótesis $\text{diam}_{\mathcal{S}} F_n \leq c_1$ para $n \in \Lambda_1$ del enunciado del Teorema 4.1.2, ya que en este caso $\text{diam}_{\mathcal{S}} F_n \leq \text{diam}_{\mathcal{S}} \partial F_n \leq \text{diam}_G \partial F_n \leq c_1$. Si $K > 0$, entonces $\text{diam}_{\mathcal{S}} F_n$ puede ser mayor que $\text{diam}_{\mathcal{S}} \partial F_n$.*

El Teorema 4.1.2 (con $\Lambda_2 = \emptyset$) y la Observación 4.1.3 tienen la siguiente consecuencia directa.

Corolario 4.1.4. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$ tales que $\text{diam}_G \partial F_n \leq c_1$ y $A_S(F_n) \geq c_2$ para algunas constantes positivas c_1, c_2 , y para todo n . Entonces G no es hiperbólico.*

Proposición 4.1.5. *Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (con su métrica euclídea usual), $A_n := \{z : |z| = n\}$ para $n \geq 1$ y $B_{k,n} := \{z : n \leq |z| \leq n+1, \arg z = \frac{2k\pi}{[e^n]}\}$ para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$. Si G es el grafo obtenido como la unión de $\{A_n\}$ y $\{B_{k,n}\}$ para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$, entonces G no es hiperbólico.*

Prueba. Consideremos la inclusión $i : G \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es obvio que i es 1-full y que

$$d_{\mathbb{R}^2}(x, y) \leq d_G(x, y)$$

para todo $x, y \in G$.

Si $x, y \in G$ pertenecen a la misma circunferencia de radio m y \widehat{xy} denota el arco más corto en dicha circunferencia uniendo x e y , entonces

$$d_G(x, y) \leq L_{\mathbb{R}^2}(\widehat{xy}) \leq \frac{\pi}{2} d_{\mathbb{R}^2}(x, y).$$

Supongamos ahora que $x \in V(G)$ pertenece a la circunferencia de radio m e $y \in V(G)$ pertenece a la circunferencia de radio n con $m \neq n$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m < n$. Sea $z \in G$ el punto en la circunferencia de radio m tal que $\arg z = \arg y$;

entonces $d_{\mathbb{R}^2}(y, z)$ es la distancia en \mathbb{R}^2 de y a la circunferencia de radio m . Entonces

$$\begin{aligned} d_G(x, y) &\leq d_G(x, z) + d_G(z, y) \leq d_G(x, z) + n - m + \sum_{j=m}^{n-1} \frac{2\pi}{[e^j]} \\ &\leq \frac{\pi}{2} d_{\mathbb{R}^2}(x, z) + n - m + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi}{2^j}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$d_G(x, y) \leq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) d_{\mathbb{R}^2}(x, y) + 2\pi.$$

Si x e y no son vértices de G , entonces existen $x', y' \in V(G)$ tales que $d_G(x, x') \leq \pi$, $d_G(y, y') \leq \pi$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} d_G(x, y) &\leq d_G(x, x') + d_G(x', y') + d_G(y, y') \leq d_G(x', y') + 2\pi \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) d_{\mathbb{R}^2}(x', y') + 4\pi \leq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) [d_{\mathbb{R}^2}(x, y) + d_{\mathbb{R}^2}(x, x') + d_{\mathbb{R}^2}(y, y')] + 4\pi \\ &\leq \frac{\pi + 2}{2} d_{\mathbb{R}^2}(x, y) + \pi^2 + 6\pi. \end{aligned}$$

Como la inclusión i es una quasi-isometría 1-full, deducimos que \mathbb{R}^2 y G son quasi-isométricos. Consecuentemente, G no es hiperbólico. \square

Proposición 4.1.6. *Consideremos $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con su distancia de Poincaré $d_{\mathbb{D}}$ dada por la densidad conforme $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ y definamos $r_n = \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes subconjuntos de \mathbb{D} , $A_n^* := \{z : d_{\mathbb{D}}(z, 0) = n\} = \{z : |z| = r_n\}$ para $n \geq 1$ y $B_{k,n}^* := \{z : n \leq d_{\mathbb{D}}(z, 0) \leq n + 1, \arg z = \frac{2k\pi}{[e^n]}\}$ para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$. Si G^* es el grafo obtenido como la unión de $\{A_n^*\}$ y $\{B_{k,n}^*\}$ para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$, entonces G^* es hiperbólico.*

Prueba. Es obvio que G^* es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{D} y vamos a comprobar que G^* verifica las hipótesis del Teorema 4.1.2 con $\Lambda_2 = \emptyset$. Sean $\{F_m\}$ las caras de esta teselación. Es conocido que la curvatura de la métrica de Poincaré es $K = -1$ (ver, por ejemplo, [1, p. 12]).

Entonces, por la Observación 4.1.3, es suficiente comprobar que $L_{\mathbb{D}}(\partial F_m) \leq c_1$ y $A_{\mathbb{D}}(F_m) \geq c_2$ para algunas constantes $c_1, c_2 > 0$, ya que en este caso $\text{diam}_{\mathbb{D}} F_m \leq \frac{1}{2}L_{\mathbb{D}}(\partial F_m) \leq \frac{1}{2}c_1$.

Un cálculo estándar da $L_{\mathbb{D}}(\partial B_{\mathbb{D}}(0, n)) = 2\pi \sinh n$ y $A_{\mathbb{D}}(B_{\mathbb{D}}(0, n)) = 4\pi \sinh^2(n/2)$ (ver, por ejemplo, [18, p. 208] y [21, p. 138]).

Si $F_m \subseteq \{z : n \leq d_{\mathbb{D}}(z, 0) \leq n + 1\}$ para algún $n \geq 1$, entonces

$$L_{\mathbb{D}}(\partial F_m) = 2 + 2\pi \frac{\sinh n + \sinh(n + 1)}{[e^n]} \leq 2 + 2\pi \frac{\sinh n + \sinh(n + 1)}{e^n - 1}.$$

Como la función $f(x) = \frac{\sinh x + \sinh(x + 1)}{e^x - 1}$ decrece para $x \geq 1$, obtenemos

$$L_{\mathbb{D}}(\partial F_m) \leq 2 + 2\pi \frac{\sinh 1 + \sinh 2}{e - 1} := c_1.$$

Además,

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{D}}(F_m) &= 4\pi \frac{\sinh^2(\frac{n+1}{2}) - \sinh^2(\frac{n}{2})}{[e^n]} = \frac{2\pi(\cosh(n + 1) - \cosh n)}{[e^n]} \\ &\geq \frac{2\pi(\cosh(n + 1) - \cosh n)}{e^n}. \end{aligned}$$

Como la función $g(x) = \frac{\cosh(x + 1) - \cosh x}{e^x}$ crece para $x \geq 1$, tenemos

$$A_{\mathbb{D}}(F_m) \geq \frac{2\pi(\cosh 2 - \cosh 1)}{e} := c_2.$$

Como \mathbb{D} es hiperbólico (ver, por ejemplo [22, p. 52]), el Teorema 4.1.2 permite concluir que G^* es hiperbólico. \square

En [13, Proposition 4.8] y [33, Theorem 17] encontramos el siguiente resultado.

Teorema 4.1.7. *Para cualquier grafo G se verifican las siguientes desigualdades*

$$\frac{1}{4}g(G) \leq \delta(G) \leq \frac{1}{4}C(G).$$

A la vista de este resultado (y otros de este tipo) parece razonable pensar que si alargamos los ciclos de un grafo, entonces estamos aumentando su constante de hiperbolicidad. Por tanto, resulta natural conjeturar lo siguiente:

Si alargamos las aristas de un grafo no hiperbólico obtenemos también un grafo no hiperbólico.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado sorprendente.

Teorema 4.1.8. *Existe un isomorfismo $f : G_1 \longrightarrow G_2$ entre un grafo no hiperbólico G_1 y un grafo hiperbólico G_2 tal que $L_{G_2}(f(e)) \geq L_{G_1}(e)$ para todo $e \in E(G_1)$.*

Prueba. Consideremos el grafo no hiperbólico $G_1 = G$ en la Proposición 4.1.5, el grafo hiperbólico $G_2 = G^*$ en la Proposición 4.1.6 y el isomorfismo natural $f : G \longrightarrow G^*$ tal que $f(A_n) = A_n^*$ y $f(B_{k,n}) = B_{k,n}^*$ para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$. Está claro que $L_G(B_{k,n}) = L_{G^*}(B_{k,n}^*) = 1$ para todo $n \geq 1$. Denotemos por $e_{k,n}$ la arista en A_n uniendo los puntos finales en A_n de $B_{k,n}$ y $B_{k+1,n}$, y por $e_{k,n}^*$ la arista en A_n^* uniendo los puntos finales en A_n^* de $B_{k,n}^*$ y $B_{k+1,n}^*$. Entonces, es suficiente comprobar que $L_{G^*}(e_{k,n}^*) \geq L_G(e_{k,n})$, lo cual se deduce de los siguientes cálculos:

$$L_{G^*}(e_{k,n}^*) = \frac{1}{[e^n]} L_{\mathbb{D}}(\partial B_{\mathbb{D}}(0, n)) = \frac{2\pi \sinh n}{[e^n]} > \frac{2\pi n}{[e^n]} = L_G(e_{k,n}),$$

para todo $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$. □

El Teorema 4.1.8 tiene la siguiente sorprendente consecuencia.

Teorema 4.1.9. *Existe un grafo G de teselación de \mathbb{R}^2 tal que toda arista es una geodésica euclídea y que es hiperbólico.*

Prueba. Consideremos el grafo no hiperbólico $G_2 = G$ en la Proposición 4.1.5 y el grafo hiperbólico $G_1 = G^*$ en la Proposición 4.1.6. Usando las notaciones de la prueba del Teorema 4.1.8, si sustituimos cada arista $e_{k,n}$ de G_2 por un polígono euclídeo (contenido en un entorno suficientemente estrecho de $e_{k,n}$) de longitud igual a $L_{\mathbb{D}}(e_{k,n}^*)$ para $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq [e^n] - 1$, obtenemos el grafo de teselación que buscábamos. \square

Definición 4.1.10. *Una arista e de un grafo G se llama una tree-edge si $G \setminus \{e\}$ no es conexo. Denotamos por $\text{NTE}(G)$ el conjunto de todas las aristas que no son tree-edges de G .*

El Teorema 4.1.8 muestra que, en general, los isomorfismos entre grafos no conservan la hiperbolicidad. Sin embargo, el siguiente resultado da un resultado parcial sobre la conservación de hiperbolicidad de grafos isomorfos.

Teorema 4.1.11. *Sean $f : G \rightarrow G'$ un isomorfismo de grafos y c_1, c_2 constantes positivas tales que $c_1 L_{G'}(f(e)) \leq L_G(e) \leq c_2 L_{G'}(f(e))$ para toda $e \in \text{NTE}(G)$. Entonces G es hiperbólico si y sólo si G' es hiperbólico, cuantitativamente.*

Prueba. Podemos definir f en todo punto de G como una dilatación en cada arista: si $x \in [u, v] \in E(G)$, entonces definimos $f(x)$ como el punto en $[f(u), f(v)] \in E(G')$ con

$$d_{G'}(f(x), f(u)) = d_G(x, u) \cdot L_{G'}([f(u), f(v)]) / L_G([u, v]).$$

Sean $\{G_n\}_n$ las componentes conexas de $G \setminus \cup_m \{e_m\}$, donde $\{e_m\}_m$ son las tree-edges de G . Está claro que $\{G_n\}_n \cup \{e_m\}_m$ es una tree-decomposition de G . Sean $G'_n = f(G_n)$ y $e'_m := f(e_m)$; entonces $\{G'_n\}_n \cup \{e'_m\}_m$ es una tree-decomposition de G' .

Supongamos que G' es δ -hiperbólico; entonces G'_n es hiperbólico para todo n por el Teorema 2.1.5

Sea $T = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ un triángulo geodésico en G_n . Definimos $\gamma'_j := f(\gamma_j)$ para $j = 1, 2, 3$; como γ'_j puede ser una geodésica o no en G'_n consideramos γ''_j la geodésica en G'_n uniendo los extremos de γ'_j para cada $j = 1, 2, 3$. Es fácil comprobar que las curvas γ'_j son $(a, 0)$ -quasi-geodésicas en G'_n con $a := \max\{c_1^{-1}, c_2\}$.

Por otro lado, el triángulo $T'' := \gamma''_1 \cup \gamma''_2 \cup \gamma''_3$ en G'_n es un triángulo geodésico. Consideremos cualquier $u \in T$ fijo; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u \in \gamma_1$. Por el Teorema 1.2.16, existe un punto $w \in \gamma''_1$ con $d_{G'_n}(f(u), w) \leq H$, donde $H = H(\delta, a, 0)$. Como T'' es δ -thin existe $y \in \gamma''_2 \cup \gamma''_3$ tal que $d_{G'_n}(w, y) \leq \delta$. Por el Teorema 1.2.16, existe un punto $p \in \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $d_{G'_n}(y, f(p)) \leq H$, y concluimos

$$d_{G_n}(u, p) \leq c_2 d_{G'_n}(f(u), f(p)) \leq c_2 (d_{G'_n}(f(u), w) + d_{G'_n}(w, y) + d_{G'_n}(y, f(p))) \leq c_2(2H + \delta).$$

Por tanto, obtenemos

$$d_{G_n}(u, \gamma_2 \cup \gamma_3) \leq d_{G_n}(u, p) \leq c_2(2H + \delta),$$

y

$$\delta(G_n) \leq c_2(2H + \delta).$$

Por el Teorema 2.1.5 sabemos que

$$\delta(G) = \sup_n \delta(G_n) \leq c_2(2H + \delta),$$

y G es hiperbólico. La otra implicación se deduce del razonamiento anterior reemplazando f por f^{-1} . \square

El siguiente resultado complementa el Teorema 4.1.11.

Teorema 4.1.12. Sean G y G' grafos con $\inf\{L_G(e) : e \in NTE(G)\} > 0$ y $f : G \rightarrow G'$ un isomorfismo de grafos tal que $L_{G'}(f(e)) \geq cL_G(e)$ para toda $e \in NTE(G)$ y alguna constante positiva c . Entonces G' es hiperbólico si y sólo si G es hiperbólico y $\beta' := \sup\{L_{G'}(e') : e' \in NTE(G')\} < \infty$.

Prueba. Observemos en primer lugar que basta con probar las dos afirmaciones siguientes: si $\beta' < \infty$, entonces G es hiperbólico si y sólo si G' es hiperbólico; si $\beta' = \infty$, entonces G' no es hiperbólico.

Si $\beta' < \infty$, sea $\alpha := \inf\{L_G(e) : e \in NTE(G)\}$; entonces tenemos para toda $e \in NTE(G)$

$$\frac{\alpha c}{\beta'} L_{G'}(f(e)) \leq cL_G(e) \leq L_{G'}(f(e)).$$

Por tanto, el Teorema 4.1.11 da el resultado.

Supongamos ahora que $\beta' = \infty$ y probemos que G' no es hiperbólico. Consideremos $[x, y] \in NTE(G')$ y sea γ una geodésica en $G' \setminus [x, y]$ uniendo x e y .

Supongamos en primer lugar que $L_{G'}([x, y]) \leq L_{G'}(\gamma)$; entonces $[x, y]$ es una geodésica en G' . Sea z el punto medio de γ , es decir, el punto de γ que verifica $d_{G'}(x, z) = d_{G'}(y, z) = L_{G'}(\gamma)/2$. Es fácil comprobar que el triángulo $T_1 := [x, y] \cup [xz] \cup [yz]$ es un triángulo geodésico en G' , debido a la propiedad minimizante de γ . Si u es el punto medio de $[x, y]$, entonces $\delta(G') \geq \delta(T_1) \geq d_{G'}(u, [xz] \cup [yz]) = d_{G'}(u, \{x, y\}) = L_{G'}([x, y])/2$.

Supongamos ahora que $L_{G'}([x, y]) > L_{G'}(\gamma)$; entonces γ es una geodésica en G' . Sea v el punto medio de $[x, y]$. Es fácil comprobar que $T_2 := [xv] \cup [vy] \cup \gamma$ es un triángulo geodésico en G' . Si w es el punto medio de $[xv]$, entonces $\delta(G') \geq \delta(T_2) \geq d_{G'}(w, [vy] \cup \gamma) = d_{G'}(w, \{x, v\}) = L_{G'}([x, y])/4$. Por tanto, en cualquier caso, hemos probado que $\delta(G') \geq$

$L_{G'}(e)/4$ para toda $e \in NTE(G')$. Ahora tomando el supremo en $e \in NTE(G')$, concluimos que G' no es hiperbólico, como se quería. \square

La siguiente consecuencia del Teorema 4.1.12 muestra que bajo una hipótesis razonable se puede evitar la “desagradable” situación que aparecía en el Teorema 4.1.8.

Corolario 4.1.13. *Sean G y G' grafos con $\inf\{L_G(e) : e \in NTE(G)\} > 0$ y $f : G \rightarrow G'$ un isomorfismo de grafos tal que $L_{G'}(f(e)) \geq cL_G(e)$ para toda $e \in NTE(G)$ y alguna constante positiva c . Si G no es hiperbólico entonces G' no es hiperbólico.*

4.2 Hiperbolicidad de grafos planares.

Esta sección está dedicada a encontrar resultados que garantizan la no hiperbolicidad de grafos planares de teselación. De hecho, obtenemos resultados adicionales sobre hiperbolicidad de grafos de teselación de \mathbb{R}^2 ; evidentemente, dichos grafos son siempre planares. Los resultados principales de esta sección son los Teoremas 4.2.1 y 4.2.9, ya que son las herramientas necesarias para probar los otros resultados.

Denotamos por $\text{int}(F)$ el interior topológico del conjunto F .

Teorema 4.2.1. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$. Denotemos por c_n el ciclo más corto en G homótopo a ∂F_n en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(F_n)$. Si $\sup_n L(c_n) = \infty$, entonces G no es hiperbólico.*

Prueba. Probemos en primer lugar que c_n es un subgrafo isométrico de G para todo n . Buscando una contradicción supongamos que existe n tal que c_n no es un subgrafo isométrico de G . Entonces existen $x, y \in c_n$ y una curva γ en G uniéndolos con $L(\gamma) < d_{c_n}(x, y)$; por tanto, si g_1 y g_2 son las dos curvas uniendo x e y con $g_1 \cup g_2 = c_n$, tenemos $L(\gamma) <$

$\min\{L(g_1), L(g_2)\}$. Como c_n es homótopo a ∂F_n en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(F_n)$, tenemos que o bien $\gamma \cup g_1$ ó $\gamma \cup g_2$ es homótopo a ∂F_n en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(F_n)$. Como $\max\{L(\gamma \cup g_1), L(\gamma \cup g_2)\} < L(c_n)$, tenemos la contradicción buscada, y concluimos que cada c_n es un subgrafo isométrico de G para todo n .

Fijemos n . Si γ_1 y γ_2 son dos curvas con $\gamma_1 \cup \gamma_2 = c_n$ y $L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = L(c_n)/2$, entonces $B = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ es un biángulo geodésico en c_n . Si denotamos por z el punto medio de γ_1 , entonces $\delta(B) \geq d_{c_n}(z, \gamma_2) = L(c_n)/4$. El Lema 2.1.12 da $\delta(G) \geq \delta(c_n) \geq \delta(B) \geq L(c_n)/4$ para todo n y deducimos que G no es hiperbólico. \square

Corolario 4.2.2. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$. Supongamos que existe una subsucesión de caras $\{F_{n_k}\}_k$ tales que todas son polígonos convexos y además $\sup_k L(\partial F_{n_k}) = \infty$. Entonces G no es hiperbólico.*

Prueba. Ya que cada F_{n_k} es polígono convexo, tenemos $c_{n_k} = \partial F_{n_k}$, donde c_{n_k} son los ciclos más cortos arriba mencionados en el Teorema 4.2.1. Aplicando este Teorema se obtiene directamente la conclusión. \square

Corolario 4.2.3. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$. Si existe una sucesión de bolas $\{B_n\}$ con radio r_n tales que $B_n \subseteq F_n$ para todo n y $\sup_n r_n = \infty$, entonces G no es hiperbólico.*

Prueba. Consideremos los ciclos c_n como en el Teorema 4.2.1. Para cada n es obvio que $L(c_n) \geq L(\partial B_n) = 2\pi r_n$. Por lo tanto, $\sup_n L(c_n) = \infty$ y el Teorema 4.2.1 da la conclusión. \square

Teorema 4.2.4. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$. Supongamos que toda F_n puede ser obtenida a partir de un conjunto finito de caras $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_m$ mediante traslaciones, rotaciones y dilataciones. Entonces, G no es hiperbólico.*

Prueba. Ya que toda cara F_n puede ser obtenida a partir de un conjunto finito de piezas $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_m$ mediante traslaciones, rotaciones y dilataciones, existe una constante positiva c_1 tal que $d_{\partial F_n}(x, y) \leq c_1 d_{\mathbb{R}^2}(x, y)$ para todo $x, y \in \partial F_n$ y para todo n .

Consideremos los ciclos c_n como en el Teorema 4.2.1. Si $\sup_n L(\partial F_n) = \infty$, entonces $\sup_n L(c_n) = \infty$ y el Teorema 4.2.1 da el resultado. Supongamos ahora que $\sup_n L(\partial F_n) < \infty$. Como

$$\sup_n \text{diam}_{\mathbb{R}^2} F_n = \text{diam}_{\mathbb{R}^2} \partial F_n \leq \frac{1}{2} \sup_n L(\partial F_n) < \infty,$$

y \mathbb{R}^2 no es hiperbólico, el Teorema 4.1.2 (con $\Lambda_1 = \emptyset$) permite concluir que G no es hiperbólico. \square

El mismo argumento usado en la prueba del Teorema 4.2.4 da los siguientes resultados.

Teorema 4.2.5. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras convexas $\{F_n\}$. Si $\inf_n A(F_n) > 0$, entonces G no es hiperbólico.*

Teorema 4.2.6. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$. Si toda cara F_n es un polígono regular, entonces G no es hiperbólico.*

Corolario 4.2.7. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras $\{F_n\}$. Si toda cara F_n es un cuadrado, entonces G no es hiperbólico.*

Para poder probar nuestro siguiente teorema, necesitaremos el siguiente resultado bien conocido (y no trivial).

Lema 4.2.8. *Dados un conjunto abierto convexo $C \subset \mathbb{R}^2$ y cualquier curva $g \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ uniendo dos puntos $x, y \in \partial C$, existe una curva $\gamma \subset \partial C$ uniendo x, y con $L(\gamma) \leq L(g)$.*

Teorema 4.2.9. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras convexas $\{F_n\}$. Supongamos que existen bolas $B_n \subset F_n$ con radios r_n tales que $L(\partial F_n) \leq c_1 r_n$ para alguna constante positiva c_1 y para todo n . Entonces G no es hiperbólico.*

Prueba. Por el Corolario 4.2.2, podemos suponer que existe una constante k_1 con $L(\partial F_n) \leq 2k_1$ para todo n . Observemos que $\text{diam}_{\mathbb{R}^2} F_n \leq \frac{1}{2}L(\partial F_n) =: R_n \leq k_1$ para todo n . Si denotamos por B_n^* la bola cerrada centrada en el mismo punto que B_n y de radio R_n , entonces tenemos $B_n \subset F_n \subset B_n^*$ y

$$\frac{R_n}{r_n} \leq \frac{\frac{1}{2}L(\partial F_n)}{c_1^{-1}L(\partial F_n)} = \frac{c_1}{2}. \quad (4.2.1)$$

Consideremos $z, w \in \partial F_n$. Queremos probar que existe una constante c que sólo depende de c_1 tal que $d_{F_n}(z, w) \leq cd_{\mathbb{R}^2}(z, w)$. Por otra parte, si $d_{\mathbb{R}^2}(z, w) \geq r_n$, entonces

$$d_{F_n}(z, w) \leq \frac{1}{2}L(\partial F_n) \leq \frac{1}{2}L(\partial F_n) \frac{d_{\mathbb{R}^2}(z, w)}{r_n} \leq \frac{c_1}{2}d_{\mathbb{R}^2}(z, w).$$

Por otro lado, consideremos el caso $d_{\mathbb{R}^2}(z, w) < r_n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que 0 es el centro de B_n y B_n^* . Como $d_{\mathbb{R}^2}(z, w) < r_n$, tenemos que $|\arg z - \arg w| < \pi/2$; consideremos las líneas rectas S_z y S_w que contienen las aristas en ∂F_n tales que $z \in S_z$ y $w \in S_w$; sea ζ el punto $\zeta := S_z \cap S_w$ (observemos que $[z\zeta] \not\subseteq G$ y $[\zeta w] \not\subseteq G$ si las aristas en ∂F_n que contienen z y w no son adyacentes).

Como F_n es convexo, el Lema 4.2.8 da que

$$\frac{d_{F_n}(z, w)}{d_{\mathbb{R}^2}(z, w)} \leq \frac{L([z\zeta] \cup [\zeta w])}{d_{\mathbb{R}^2}(z, w)}.$$

Para acotar $L([z\zeta] \cup [\zeta w])/d_{\mathbb{R}^2}(z, w)$, vamos a calcular el máximo

$$\max \left\{ \frac{L([u\zeta] \cup [\zeta v])}{d_{\mathbb{R}^2}(u, v)} : u \in [z\zeta], v \in [\zeta w] \right\}. \quad (4.2.2)$$

Denotemos por α el ángulo en ζ de los segmentos $[z\zeta]$ y $[\zeta w]$ ($0 < \alpha \leq \pi$). Por (4.2.1) y $d_{\mathbb{R}^2}(z, w) < r_n$, deducimos que $\alpha \geq \alpha_0$, donde α_0 es una constante que sólo depende de c_1 . No es difícil comprobar que el máximo en (4.2.2) se alcanza si $u \in [z\zeta]$ y $v \in [\zeta w]$ con

$d_{\mathbb{R}^2}(u, \zeta) = d_{\mathbb{R}^2}(v, \zeta)$, y que es igual a $1/\sin(\alpha/2)$. Por tanto, concluimos que

$$\frac{d_{F_n}(z, w)}{d_{\mathbb{R}^2}(z, w)} \leq \frac{L([z\zeta] \cup [\zeta w])}{d_{\mathbb{R}^2}(z, w)} \leq \max \left\{ \frac{L([u\zeta] \cup [\zeta v])}{d_{\mathbb{R}^2}(u, v)} : u \in [z\zeta], v \in [\zeta w] \right\} = \frac{1}{\sin(\alpha/2)} \leq \frac{1}{\sin(\alpha_0/2)}.$$

Por lo tanto,

$$d_{F_n}(z, w) \leq \max \left\{ \frac{c_1}{2}, \frac{1}{\sin(\alpha_0/2)} \right\} d_{\mathbb{R}^2}(z, w),$$

para todo $z, w \in \partial F_n$ y para todo n . Como $\text{diam}_{\mathbb{R}^2} F_n \leq k_1$ para todo n , el Teorema 4.1.2 (con $\Lambda_1 = \emptyset$) finaliza la prueba. \square

Definición 4.2.10. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras convexas $\{F_n\}$. Definamos*

$$l_n := \min\{L_G(e)/e \in E(G), e \subset \partial F_n\},$$

$$L_n := \max\{L_G(e)/e \in E(G), e \subset \partial F_n\},$$

$$\alpha_n := \min\{\text{ángulos interiores en los vértices de } \partial F_n\},$$

$$N_n := \text{card}\{e \in E(G)/e \subset \partial F_n\}.$$

Teorema 4.2.11. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras convexas $\{F_n\}$. Supongamos que $L(\partial F_n) \leq c_1 l_n$ y $\alpha_n \geq c_2$ para algunas constantes positivas c_1, c_2 y para todo n . Entonces G no es hiperbólico.*

Prueba. Para cada n fijo, consideremos dos aristas adyacentes e_n^1, e_n^2 contenidas en ∂F_n . Por hipótesis, el ángulo interior α en el punto $e_n^1 \cap e_n^2$ de ∂F_n satisface $\alpha \geq c_2$ y $L_G(e_n^1), L_G(e_n^2) \geq c_1^{-1} L(\partial F_n)$. Si A_n es la envolvente convexa euclídea en \mathbb{R}^2 de $e_n^1 \cup e_n^2$, entonces existe una constante positiva c_3 que sólo depende de c_1 y c_2 y una bola euclídea $B_n \subset A_n \subseteq F_n$ con radio r_n tal que $L(\partial F_n) \leq c_3 r_n$. Entonces el Teorema 4.2.9 da el resultado. \square

Del Teorema 4.2.11 obtenemos directamente el siguiente resultado.

Corolario 4.2.12. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras convexas $\{F_n\}$. Supongamos que $L_n \leq c_1 l_n$, $N_n \leq c_1$ y $\alpha_n \geq c_2$ para algunas constantes positivas c_1, c_2 y para todo n . Entonces G no es hiperbólico.*

También obtenemos los siguientes resultados del Corolario 4.2.12.

Corolario 4.2.13. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras triangulares $\{F_n\}$. Supongamos que $\alpha_n \geq c_2$ para alguna constante positiva c_2 y para todo n . Entonces G no es hiperbólico.*

Corolario 4.2.14. *Supongamos que un grafo G es el 1-esqueleto de una teselación de \mathbb{R}^2 con caras rectangulares $\{F_n\}$. Supongamos que $L_n \leq c_1 l_n$ para alguna constante positiva c_1 y para todo n . Entonces G no es hiperbólico.*

4.3 Hiperbolicidad de CW 2-complejos y sus grafos duales

En esta sección consideramos grafos G que son el 1-esqueleto de un CW 2-complejo C . Obsérvese que esta clase de grafos contiene como casos particulares los grafos planares y los grafos obtenidos como triangulaciones (o como descomposición en polígonos más generales) de cualquier superficie completa (con o sin frontera).

Probamos la equivalencia entre la hiperbolicidad de los 1-esqueletos de CW 2-complejos y sus grafos duales, bajo ciertas hipótesis razonables (ver el Teorema 4.3.1).

El grafo dual G^* de un tal grafo G es un grafo que tiene un vértice $p_j \in V(G^*)$ para cada cara P_j de C , y una arista uniendo p_i y p_j para cada arista en $P_i \cap P_j$ (si hay k aristas en $P_i \cap P_j$, entonces $[p_i, p_j]$ es una arista múltiple de orden k). Por definición, todas las aristas

de G^* tienen longitud 1.

Presentamos a continuación el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.3.1. *Sean G un grafo que es el 1-esqueleto de un CW 2-complejo C , y G^* su grafo dual. Si todo vértice $v \in V(G)$ verifica $\deg(v) \leq \Delta$, toda arista $e \in E(G)$ verifica $k_1 \leq L(e) \leq k_2$ y cada cara de C tiene a lo sumo M aristas, entonces toda componente conexa de G^* es δ^* -hiperbólica si y sólo si G es δ -hiperbólico, cuantitativamente.*

Prueba. Es sencillo verificar que si G_0 es un grafo isomorfo a G tal que todas sus aristas tienen longitud 1, entonces cualquier isomorfismo $g : G \rightarrow G_0$ es una $(\max\{k_2, k_1^{-1}\}, 0)$ quasi-isometría suprayectiva. Por tanto, gracias al Teorema 1.2.18, sin pérdida de generalidad podemos suponer que todas las aristas de G tienen longitud 1.

Supongamos en primer lugar que G^* es un grafo conexo. Probaremos el resultado demostrando que existe una $(\max\{\Delta, M/2\}, \max\{2\Delta, M\})$ -quasi-isometría $f : G \rightarrow G^*$, que es $(1/2)$ -full.

Como el grafo G es el 1-esqueleto de un 2-complejo C , con caras $\{P_n\}_n$, entonces $\{p_n\}_n = V(G^*)$. Para cada n , escribimos $\partial P_n = \{e_n^1, \dots, e_n^{j_n}\}$ (con $j_n \leq M$ por hipótesis). Denotemos por w_n^j el punto medio de la arista en G^* que corresponde a e_n^j , y definimos $P_n^* := \cup_{j=1}^{j_n} [p_n w_n^j]$. Está claro que $G^* = \cup_n P_n^*$.

Definimos una función $f : G \rightarrow G^*$ como sigue: la imagen por f del interior de cada e_n^j es w_n^j , para todo n y $j = 1, \dots, j_n$; para cada vértice $v \in V(G)$, elijamos una arista $e \in E(G)$ incidente en v , y definamos $f(v)$ como la imagen por f del interior de e .

Consideremos $x, y \in P_n$. Si $f(x), f(y) \in P_n^*$, entonces

$$d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq \text{diam}_{G^*}(P_n^*) = 1.$$

Si tenemos $f(x) \in P_n^*$, $f(y) \notin P_n^*$, entonces y es un vértice de G y $p_n, f(y)$ pertenecen a un ciclo en G^* con longitud $\deg(v) \leq \Delta$; por tanto,

$$d_{G^*}(p_n, f(y)) \leq \Delta/2 \quad \text{y} \quad d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq (\Delta + 1)/2.$$

Si $f(x) \notin P_n^*$, $f(y) \in P_n^*$, entonces también tenemos $d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq (\Delta + 1)/2$. Si $f(x), f(y) \notin P_n^*$, entonces $d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq \Delta$. Por tanto,

$$d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq \Delta, \quad \text{para todo } n \text{ y } x, y \in P_n. \quad (4.3.1)$$

Fijemos ahora $x, y \in G$ y una geodésica γ en G uniendo x con y (entonces, $L_G(\gamma) = d_G(x, y)$). Sea \mathbb{P} el conjunto de colecciones de caras $P = \{P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_r}\}$ con $\gamma \subset \cup_{m=1}^r \partial P_{j_m}$; decimos que r es el tamaño de la colección P y lo denotamos por $s(P) := r$. Consideremos $P' \in \mathbb{P}$ con $s(P') = \min_{P \in \mathbb{P}} s(P) =: k$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que P_1, P_2, \dots, P_k son las caras en P' y que γ corta P_1, P_2, \dots, P_k en este orden (con $x \in P_1, y \in P_k$). Nótese que $L_G(\gamma \cap \partial P_j) \geq 1$ para $1 < j < k$, $L_G(\gamma \cap \partial P_1) > 0$ y $L_G(\gamma \cap \partial P_k) > 0$.

Si $k = 1$, entonces (4.3.1) da $d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq \Delta$.

Si $k = 2$ y $z \in P_1 \cap P_2$, entonces tenemos

$$d_{G^*}(f(x), f(y)) \leq d_{G^*}(f(x), f(z)) + d_{G^*}(f(z), f(y)) \leq \Delta + \Delta = 2\Delta.$$

Si $k \geq 3$, entonces definimos $z_j \in P_j \cap P_{j+1}$ como el punto más próximo a x desde $P_j \cap P_{j+1}$,

para $1 \leq j \leq k-1$; tenemos $d_G(z_j, z_{j+1}) \geq 1$ y

$$\begin{aligned}
d_{G^*}(f(x), f(y)) &\leq d_{G^*}(f(x), f(z_1)) + \sum_{j=1}^{k-2} d_{G^*}(f(z_j), f(z_{j+1})) + d_{G^*}(f(z_{k-1}), f(y)) \\
&\leq \Delta + \sum_{j=1}^{k-2} \Delta + \Delta \leq 2\Delta + \Delta \sum_{j=1}^{k-2} d_G(z_j, z_{j+1}) \\
&= 2\Delta + \Delta d_G(z_1, z_{k-1}) = 2\Delta + \Delta d_G(x, y).
\end{aligned}$$

Consideremos una geodésica γ^* en G^* uniendo $f(x)$ con $f(y)$ (entonces, $L_{G^*}(\gamma^*) = d_{G^*}(f(x), f(y))$). Sean $P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*$ las piezas que γ^* corta (con $L_{G^*}(\gamma^* \cap P_j^*) > 0$), en este orden (con $f(x) \in P_1^*, f(y) \in P_m^*$).

Si $m = 1$, entonces $f(x), f(y) \in P_1^*$ y $x, y \in P_1$; como cada cara de C tiene a lo sumo M aristas, tenemos $d_G(x, y) \leq M/2$. Por lo tanto, $d_{G^*}(f(x), f(y)) \geq 0 \geq d_G(x, y) - M/2$.

Si $m = 2$, definimos $w := \gamma^* \cap P_1^* \cap P_2^*$; consideremos el punto medio z de e y la arista $e \subseteq P_1 \cap P_2$ tal que f aplica el interior de e en w . Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
d_{G^*}(f(x), f(y)) &= d_{G^*}(f(x), w) + d_{G^*}(w, f(y)) = d_{G^*}(f(x), f(z)) + d_{G^*}(f(z), f(y)) \\
&\geq d_G(x, z) - M/2 + d_G(z, y) - M/2 \geq d_G(x, y) - M.
\end{aligned}$$

Si $m \geq 3$, definimos $w_j := \gamma^* \cap P_j^* \cap P_{j+1}^*$ para $1 \leq j \leq m-1$; consideremos el punto medio z_j de e_j y la arista $e_j \subseteq P_j \cap P_{j+1}$ tal que f aplica el interior de e_j en w_j , para $1 \leq j \leq m-1$.

Entonces tenemos $d_G(z_j, z_{j+1}) \leq M/2$, $d_{G^*}(w_j, w_{j+1}) = 1$, y

$$\begin{aligned}
d_{G^*}(f(x), f(y)) &= d_{G^*}(f(x), w_1) + \sum_{j=1}^{m-2} d_{G^*}(w_j, w_{j+1}) + d_{G^*}(w_{m-1}, f(y)) \\
&= d_{G^*}(f(x), f(z_1)) + \sum_{j=1}^{m-2} 1 + d_{G^*}(f(z_{m-1}), f(y)) \\
&\geq d_G(x, z_1) - \frac{M}{2} + \frac{2}{M} \sum_{j=1}^{m-2} \frac{M}{2} + d_G(z_{m-1}, y) - \frac{M}{2} \\
&\geq \frac{2}{M} d_G(x, z_1) + \frac{2}{M} \sum_{j=1}^{m-2} d_G(z_j, z_{j+1}) + \frac{2}{M} d_G(z_{m-1}, y) - M \\
&\geq \frac{2}{M} d_G(x, y) - M.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, f es una $(\max\{\Delta, M/2\}, \max\{2\Delta, M\})$ -quasi-isometría. Además, f es $(1/2)$ -full, ya que el punto medio de toda arista de G^* pertenece a $f(G)$. Esto completa la prueba si G^* es un grafo conexo, por el Teorema 1.2.18.

Decimos que un vértice $v \in V(G)$ es un vértice de conexión si $G \setminus \{v\}$ no es conexo. Denotemos por $\{G_n\}_n$ las clausuras de las componentes conexas de G sin sus vértices de conexión. Es obvio que $G = \cup_n G_n$ y que $\{G_n^*\}_n$ son las componentes conexas de G^* .

Como el Teorema 2.1.5 da $\delta(G) = \sup_n \delta(G_n)$, y hemos demostrado la conclusión deseada para cada G_n (ya que G_n^* es un grafo conexo), obtenemos el resultado en el caso general. \square

Los ejemplos que vienen a continuación (con G^* conexo) demuestran que la conclusión del Teorema 4.3.1 falla si eliminamos cualquier hipótesis de su enunciado.

Ejemplo 4.3.2. Consideremos la sucesión de grafos rueda $\{W_n\}_{n=4}^\infty$. Elijamos dos vértices $a_n^n, b_n^n \in V(W_n)$ (diferentes del vértice central de W_n) con $d_{W_n}(a_n^n, b_n^n) = 1$ para $n \geq 5$, y dos vértices $a_{n+1}^n, b_{n+1}^n \in V(W_n)$ (diferentes del vértice central de W_n) con $d_{W_n}(a_{n+1}^n, b_{n+1}^n) = 1$ para $n \geq 4$ y $\{a_{n+1}^n, b_{n+1}^n\} \cap \{a_n^n, b_n^n\} = \emptyset$ para $n \geq 5$. Definimos G como la unión de

$\{W_n\}_{n=4}^\infty$ obtenida identificando $[a_{n+1}^n, b_{n+1}^n]$ con $[a_{n+1}^{n+1}, b_{n+1}^{n+1}]$ para $n \geq 4$. Como el vértice central de cada W_n tiene grado $n - 1$, el grado de G no es acotado. Está claro ver que G es quasi-isométrico al grafo G' obtenido como la unión de $\{W_n\}_{n=4}^\infty$ identificando a_{n+1}^n con a_{n+1}^{n+1} para $n \geq 4$. Los Teoremas 2.1.5 y 2.2.2 permiten decir que G' es hiperbólico, ya que $\delta(G') = \sup_n \delta(W_n) = 3/2$. Por tanto, G es también hiperbólico, por el Teorema 1.2.18.

Su grafo dual G^* es isométrico a la unión de grafos ciclos $\{C_n\}_{n=3}^\infty$ tales que cada C_n está unido con C_{n+1} por un grafo isométrico al grafo camino P_2 para $n \geq 3$. Los Teoremas 2.1.5 y 2.2.2 nos permiten concluir que G^* no es hiperbólico, ya que $\delta(G^*) = \sup_n \delta(C_n) = \sup_n n/4 = \infty$, aunque G es hiperbólico.

Ejemplo 4.3.3. Consideremos la sucesión de grafos $\{C_n \times P_2\}_{n=3}^\infty$ representados en \mathbb{R}^2 por una copia exterior de C_n unida con una copia interior de C_n por n aristas. Elijamos dos vértices $a_n^n, b_n^n \in V(C_n \times P_2)$ (en la copia exterior de C_n) con $d_{C_n \times P_2}(a_n^n, b_n^n) = 1$ para $n \geq 4$, y dos vértices $a_{n+1}^n, b_{n+1}^n \in V(C_n \times P_2)$ (en la copia exterior de C_n) con $d_{C_n \times P_2}(a_{n+1}^n, b_{n+1}^n) = 1$ para $n \geq 3$ y $\{a_{n+1}^n, b_{n+1}^n\} \cap \{a_n^n, b_n^n\} = \emptyset$ para $n \geq 4$. Definimos G como la unión de $\{C_n \times P_2\}_{n=3}^\infty$ obtenida identificando $[a_{n+1}^n, b_{n+1}^n]$ con $[a_{n+1}^{n+1}, b_{n+1}^{n+1}]$ para $n \geq 3$. Obsérvese que “la cara central” de cada $C_n \times P_2$ (cuyo borde es la copia interior de C_n) tiene n aristas, y por lo tanto no hay cota superior para el número de aristas de las caras en G . Está claro que G es quasi-isométrico al grafo G' obtenido como la unión de $\{C_n \times P_2\}_{n=3}^\infty$ identificando a_{n+1}^n con a_{n+1}^{n+1} para $n \geq 3$. Como $C_n \times P_2$ tiene un subgrafo isométrico que es isomorfo a C_n , el Lema 2.1.12 da $\delta(C_n \times P_2) \geq \delta(C_n)$. Los Teoremas 2.1.5 y 2.2.2 permiten asegurar que G' no es hiperbólico, ya que $\delta(G') = \sup_n \delta(C_n \times P_2) \geq \sup_n \delta(C_n) = \sup_n n/4 = \infty$. Por tanto, G no es hiperbólico.

Su grafo dual G^* es isométrico a la unión de grafos rueda $\{W_n\}_{n=4}^\infty$ tal que cada W_n se une con W_{n+1} por un grafo isométrico al grafo camino P_2 para $n \geq 3$. Los Teoremas 2.1.5 y 2.2.2 aseguran la hiperbolicidad de G^* , ya que $\delta(G^*) = \sup_n \delta(W_n) = 3/2$, aunque G no es hiperbólico.

Problemas abiertos

Para finalizar, expondremos algunos futuros problemas de investigación, que son una continuación natural de los trabajos contenidos en esta tesis.

- Caracterizar los grafos hiperbólicos.
 1. El principal objetivo sería demostrar que un grafo G es δ -hiperbólico si y sólo si es (a, b) -cordal (es decir, en todo camino cerrado C en G de longitud mayor que a existe un “atajo” de longitud menor que b , donde por atajo entre dos puntos $u, v \in C$ entendemos un camino en G más corto que la longitud de cualquiera de los dos caminos en C que unen u y v). Aunque el problema es muy ambicioso, disponemos de algunos resultados parciales que apuntan a que la conjetura es cierta.
 2. Otro posible objetivo sería probar que un grafo es hiperbólico si y sólo si los “biángulos” (los triángulos en los que dos de los vértices coinciden) son δ -thin para alguna constante $\delta \geq 0$.
 3. Un objetivo más modesto en esta misma dirección sería encontrar criterios que garanticen o descarten la hiperbolicidad

- La constante de hiperbolicidad es, en cierto sentido, una medida de cuánto se parece un grafo a un árbol (de hecho, los árboles son los únicos grafos que son 0-hiperbólicos). Sería razonable, por tanto, caracterizar los grafos que tienen constante de hiperbolicidad pequeña.
- Caracterizar los grafos G cuyas aristas tienen todas la misma longitud y para los que se verifica la igualdad $\delta(G) = \frac{1}{2} \text{diam } G$ (recordemos que siempre se verifica la desigualdad $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$).
- Relacionar la constante de hiperbolicidad con diversos parámetros importantes en teoría de grafos.

Parámetros importantes de un grafo son el número de vértices, el número de aristas, el grado máximo, el grado mínimo, el diámetro, el cuello (el ínfimo de las longitudes de los caminos cerrados), la circunferencia (el supremo de las longitudes de los caminos cerrados), los autovalores de cualquiera de las matrices asociadas al grafo (como la matriz de adyacencia o la del operador de Laplace discreto), el número de independencia, el número de dominación, las diversas constantes isoperimétricas, el diferencial, . . . El objetivo sería encontrar desigualdades que relacionen alguno de estos parámetros (o varios de ellos simultáneamente) con la constante de hiperbolicidad del grafo, encontrando y clasificando aquellos grafos para los que se alcanza la igualdad. Este problema ha sido resuelto por completo para algunos parámetros (como el número de vértices o el número de aristas), pero permanece abierto para la mayoría de ellos.

- En nuestro artículo [4] hemos sido capaces de reducir el estudio de la hiperbolicidad en un grafo general a estudiar la hiperbolicidad en un grafo cúbico (todo vértice tiene exactamente tres vecinos en el grafo), sin lazos y sin aristas múltiples. Por tanto, resulta natural plantearse el siguiente problema: ¿Cuándo un grafo cúbico simple es hiperbólico?
- Probar que ninguna teselación del plano con rectángulos es hiperbólica. De hecho,

intentaremos probar una conjetura mucho más ambiciosa: ninguna teselación del plano con polígonos convexos es hiperbólica.

- Estudiar cuándo un subgrafo de un grafo hiperbólico es hiperbólico.
- Sea G un grafo con aristas de longitud 1; si definimos

$$\delta_v(G) := \sup\{\delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico en } G \text{ con vértices en } V(G)\},$$

¿qué relación existe entre $\delta_v(G)$ y $\delta(G)$?

Referencias

- [1] Ahlfors, L. V., *Conformal invariants*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [2] Alvarez, V., Rodríguez, J.M., Yakubovich, V.A., *Subadditivity of p -harmonic “measure” on graphs*, *Michigan Math. J.* **49** (2001), 47-64.
- [3] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., *Mathematical properties of Gromov hyperbolic graphs*. *AIP Conference Proceedings*. Vol. **1281** (2010), 575-578.
- [4] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., *Gromov hyperbolic graphs*. *Enviado para su publicación*.
- [5] Bondy, J. A., Murty, U.S.R., *Graph Theory with Applications*. MacMillan Press, London, 1976.
- [6] Bonk, M., *Quasi-geodesics segments and Gromov hyperbolic spaces*, *Geometriae Dedicata* **62** (1996), 281–298.
- [7] Bonk, M., Heinonen, J., Koskela, P., *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces*. *Astérisque* **270** (2001).
- [8] Bonk, M., Schramm, O., *Embeddings of Gromov hyperbolic spaces*, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), 266-306.

- [9] Bowditch, B. H., *Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces* *Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste, 1990* (ed. E. Ghys, A. Haefliger and A. Verjovsky; World Scientific, River Edge, NJ, 1991) 64-167.
- [10] Brinkmann, G., Koolen J., Moulton, V., *On the hyperbolicity of chordal graphs*, *Ann. Comb.* **5** (2001), 61-69.
- [11] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1984.
- [12] Cantón, A., Fernández, J. L., Pestana, D., Rodríguez, J. M., *On harmonic functions on trees*, *Potential Analysis* **15** (2001), 199-244.
- [13] Carballosa, W., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Villeta, M., *Gromov hyperbolicity of line graphs*. Submitted.
- [14] Chartrand, G., Lesniak, L. *Graphs and digraphs*, 3rd ed., Chapman and Hall, London, 1996.
- [15] Diestel, R., *Graph Theory, Springer-Verlag, New York, 2005*.
- [16] Diestel, R., *Graph decompositions: a study in infinite graph theory*, Clarendon Press, 1990.
- [17] Espinoza, R.G., Lluch, A.B., *Introducción a la Teoría de Grafos*, Editorial Equinoccio, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela, 1997.
- [18] Fenchel, W., *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1989.
- [19] Fernández, J. L., Rodríguez, J. M., *Area growth and Green's function of Riemann surfaces*, *Arkiv för Matematik* **30** (1992), 83-92.
- [20] Foertsch, T., Schroeder, V., *A product construction for hyperbolic metric spaces*, *Illinois J. Math.* **49** (2005), 793-810.

- [21] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*. Univeritext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [22] Ghys, E., de la Harpe, P., *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics 83, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.
- [23] Goodaire, E. G., *Discrete mathematics with graph theory*, 2nd. Ed., Prentice Hall, 2002.
- [24] Gromov, M., *Hyperbolic groups*, in “*Essays in group theory*”. Edited by S. M. Gersten, M. S. R. I. Publ. **8**. Springer, 1987, 75-263.
- [25] Gromov, M. (with appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes), *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser, 1999.
- [26] Holopainen, I., Soardi, P. M., *p-harmonic functions on graphs and manifolds*, *Manuscripta Math.* **94** (1997), 95-110.
- [27] Jonckheere, E., Lohsoonthorn, P., *A hyperbolic geometry approach to multipath routing*, *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2002)*, Lisbon, Portugal, July 2002. FA5-1.
- [28] Jonckheere, E. A., *Contrôle du trafic sur les réseaux à géométrie hyperbolique—Une approche mathématique à la sécurité de l'acheminement de l'information*, *Journal Européen de Systèmes Automatisés* **37(2)** (2003), 145-159.
- [29] Kanai, M., *Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds*, *J. Math. Soc. Japan* **37** (1985), 391-413.
- [30] Kanai, M., *Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds*, *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), 227-238.

- [31] Kanai, M., *Analytic inequalities and rough isometries between non-compact Riemannian manifolds*, in “Curvature and Topology of Riemannian manifolds” (Katata, 1985). Lecture Notes in Math. **1201**. Springer (1986), 122-137.
- [32] Koolen, J. H., Moulton, V., *Hyperbolic Bridged Graphs*, *Europ. J. Combinatorics* **23** (2002), 683-699.
- [33] Michel, J., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Villeta, M., *Hyperbolicity and parameters of graphs*. Por aparecer en *Ars Comb.*
- [34] Naor, A., Peres, Y., Schramm, O., Sheffield, S., *Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces*, *Duke Math. J.* **134** (2006), 165-197.
- [35] Oshika, K., *Discrete groups*, AMS Bookstore, 2002.
- [36] Ore, O., *Graphs and their uses*, Volumen 34, published in Washington by the Mathematical Association of America, 1963.
- [37] Ore, O., *Theory of graphs*. American Mathematical Society, Providence, 1962, R.I.
- [38] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Structure Theorem for Riemannian surfaces with arbitrary curvature*. Por aparecer en *Math. Z.*
- [39] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., *Gromov hyperbolic tessellation graphs*. Enviado para su publicación.
- [40] Rodríguez, J. M., *Isoperimetric inequalities and Dirichlet functions of Riemann surfaces*, *Publ. Mat.* **38** (1994), 243-253.
- [41] Rodríguez, J. M., *Two remarks on Riemann surfaces*, *Publ. Mat.* **38** (1994), 463-477.
- [42] Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M., Villeta, M., *On the hyperbolicity constant in graphs*, *Discrete Mathematics* **311**, Issue 4 (2011), 211-219.

- [43] Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces*, *Acta Math. Hung.* **103** (2004), 53-84.
- [44] Rodríguez, J. M., Tourís, E., *A new characterization of Gromov hyperbolicity for Riemann surfaces*, *Publ. Mat.* **50** (2006), 249-278.
- [45] Soardi, P. M., *Rough isometries and Dirichlet finite harmonic functions on graphs*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **119** (1993), 1239-1248.
- [46] Väisälä, J., *Hyperbolic and uniform domains in Banach spaces*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **30** (2005), no. 2, 261-302.
- [47] Väisälä, J., *Gromov hyperbolic spaces*, *Expo. Math.* **23** (2005), no. 3, 187-231.
- [48] Vuorinen, M., *Conformal invariants and quasiregular mappings*, *J. Anal. Math.* **45** (1985), 69-115.
- [49] Wenger, S., *Gromov hyperbolic spaces and the sharp isoperimetric constant*, *Invent. Math.* **171** (2008), 227-255.
- [50] Wikipedia, página http://en.wikipedia.org/wiki/Negatively_curved_group
- [51] Wilson, R. J., *Introduction to graph theory*, Longman, 168 p., 1975.
- [52] Wikipedia, página http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Glosario_en_teoría_de_grafos