Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

Tesis Doctoral

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE POLINOMIOS ORTOGONALES TIPO SOBOLEV

Ana Pilar Foulquié Moreno

Abril 1997

Dirigida por

Francisco Marcellán

Tesis dirigida por el Dr. F. Marcellán Español, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, siguiendo el programa de tercer ciclo en Ingeniería Matemática, impartido en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Carlos III de Madrid.

Abril 1997.

A mis Padres y Hermanos
Por ser incondicionales
desde siempre

A Amílcar
Por mostrarme el camino

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Antecedentes

La teoría de los polinomios ortogonales es de creciente interés para físicos, ingenieros y matemáticos, ya que constituye uno de los casos más simples de sistemas ortogonales, con importantes repercusiones en teoría de representación de grupos cuánticos, entropía de información, teoría de códigos, combinatoria, teoría de predicción lineal de series temporales, análisis armónico y teoría de aproximación, entre otros.

Una aplicación, de las más interesantes, es sobre las condiciones de convergencia del desarrollo de Fourier de una función f dada en términos de una sucesión de polinomios ortogonales.

También aparecen éstos en el contexto de la aproximación racional. Dada una función holomorfa en un dominio del plano complejo, la intentamos aproximar por una sucesión de funciones racionales, esto es, fracciones donde el numerador y el denominador son polinomios.

Históricamente este tipo de aproximación tiene su origen en el desarrollo en fracciones continuas de números reales. Por ejemplo Euler expresó el número trascendente e en la forma

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}}$$

Objetivos de la aproximación racional son la modelización del tipo de singularidades de la función dada, la construcción explícita de prolongaciones analíticas, la aproximación en dominios más amplios y, por último, mejorar resultados de convergencia (aceleración).

Cuando estos aproximantes racionales se construyen con polos libres aparece la noción de aproximante de Padé. Se demuestra que los denominadores de éstos (los denotamos por Q_n) constituyen una familia ortogonal respecto a un producto escalar de tipo no hermitiano, de tal manera que vienen definidos por

$$\int_\gamma Q_n(z) z^\nu \alpha(z) dz = 0\,, \quad \nu = 0, \dots, n-1\,,$$

donde γ representa una curva cerrada de Jordan, frontera de un entorno del punto del infinito, y α es una función holomorfa en este entorno.

Es, pues, importante para resolver los problemas anteriores, conocer el comportamiento asintótico de estas familias de polinomios ortogonales.

Otro tipo de ortogonalidad es la hermitiana, y aquí los polinomios ortogonales surgen como solución al problema extremal

$$\int_\Gamma |Q_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| = \min_{T_n = x^n + \dots} \int_\Gamma |T_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi|\,,$$

donde Γ es un arco o curva de Jordan, $\rho(\xi) \geq 0$, es una función peso y $|d\xi|$ representa el elemento diferencial de longitud del arco.
El polinomio extremal verifica la siguiente relación

$$\int_\Gamma Q_n(\xi) \overline{\xi^\nu} \rho(\xi) |d\xi| = 0\,, \quad \nu = 0, \dots, n-1\,.$$

Los primeros resultados sobre comportamiento asintótico fueron obtenidos por Bernstein y G. Szegő (véase [75]). Estos autores consideran polinomios ortogonales mónicos, esto es, con coeficiente conductor unidad, en la circunferencia unidad

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(e^{i\theta}) \overline{e^{ik\theta}} d\nu(\theta) = 0\,, \quad k = 0, \dots, n-1\,,$$

respecto a medidas $d\nu$ cuya parte absolutamente continua $p(\theta)d\theta$ satisface (*condición de Szegő*)

$$\int_0^{2\pi} \ln p(\theta) d\theta > -\infty\,,$$

en particular también verifican que $p > 0$ a.e. Esta condición puede ser enunciada de forma equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\phi_n(0)|^2 < \infty .$$

Para este tipo de medidas (que denominamos de la clase de Szegő), podemos definir la siguiente función

$$D_p(z) = \exp\left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} \ln p(\theta) d\theta \right\},$$

llamada función de Szegő que verifica

a) $D_p(z) \in H_2$

b) $D_p(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} D_p(re^{i\theta})$ existe a.e. y $|D_p(e^{i\theta})|^2 = p(\theta)$

c) $D_p(z) \neq 0, \qquad |z| < 1, D_p(0) > 0$.

De la teoría desarrollada por Szegő en [75] son de particular importancia para nosotros los siguientes resultados relativos a la asintótica fuerte para $\{\phi_n\}$ (véase [75], Teoremas 12.1.2 y 12.1.4)

a) <u>En la región $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$</u>

$$\phi_n(z) = \frac{\overline{D_p(0)}}{\overline{D_p(1/\overline{z})}} z^n [1 + o(1)] . \tag{0.1}$$

Este límite se verifica uniformemente en compactos de esta región.

b) <u>En el soporte de la medida</u>

$$\phi_n(e^{i\theta}) = \frac{\overline{D_p(0)}}{\overline{D_p(e^{i\theta})}} e^{in\theta} + o(1)$$

donde $o(1)$ es entendido en el sentido de convergencia en $\mathcal{L}_{2,\nu}$

Además, el que la medida $d\nu$ satisfaga la condición de Szegő es equivalente a que los polinomios no son densos en L^2_ν. Si denotamos por H^2_ν la clausura de este conjunto en L^2_ν, podemos caracterizarlo como funciones integrables respecto a $d\nu$ que son valores frontera de funciones holomorfas en el círculo unidad, (véase [34, 58]).

Estos resultados de comportamiento asintótico en la circunferencia unidad han sido generalizados por H. Widom, [76] a curvas del plano complejo. La condición de Szegő tomaría la forma

$$\int_\Gamma \ln \rho(\xi)|\Phi'(\xi)|\,|d\xi| > -\infty\,,$$

donde Φ es la aplicación conforme que lleva el exterior de la curva Γ en el exterior de la circunferencia unidad.

Otro hecho a destacar y que aparece en la literatura, [27, 75] es la relación entre los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y los ortogonales en un intervalo acotado de la recta real. A partir esta relación obtenemos el comportamiento asintótico de los segundos en función de los primeros.

Posteriormente se han conseguido ciertas extensiones de los resultados anteriormente expuestos. En [68, 69], E. Rakhmanov obtuvo para medidas $d\nu$ en la circunferencia unidad, una condición suficiente $\nu' > 0$, de forma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = z\,, \tag{0.2}$$

se cumpla, uniformemente en compactos de la región $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

P. Nevai [56] da una condición necesaria y suficiente sobre los coeficientes de reflexión $\{\phi_n(0)\}_{n\geq 0}$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(0) = 0 \tag{0.3}$$

de manera que (0.2) se verifique, uniformemente en compactos de la región $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$. A la clase de medidas $d\nu$ cuya sucesión $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios ortogonales mónicos verifica (0.3) la vamos a denotar por $\mathcal{N}$ (clase de Nevai).

Estos resultados también son llevados a intervalos acotados de la recta real. Un problema abierto es extender este tipo de resultados a curvas arbitrarias del plano complejo. La dificultad estriba en que todavía no se ha encontrado una demostración de (0.2) que no dependa estrechamente del hecho de ser $z\overline{z} = 1$ sobre la circunferencia unidad.

Otra forma de interpretar (0.1), siguiendo la notación anterior, es como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n(z)}{z^n} = \overline{\frac{D_p(0)}{D_p(1/\overline{z})}}, \quad \ln p \in \mathrm{L}^1,$$

donde $\{z^n\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a la medida de Lebesgue en la circunferencia unidad.

Una posible extensión del resultado anterior es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n(hd\nu, z)}{\phi_n(d\nu, z)} = \overline{\frac{D_h(0)}{D_h(1/\overline{z})}}, \quad \ln h \in \mathrm{L}^1,$$

donde $\{\phi_n(hd\nu, z)\}$ y $\{\phi_n d\nu, z)\}$ denotan la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a las medidas $hd\nu$ y $d\nu$, respectivamente. Se han obtenido resultados parciales, imponiendo restricciones a la función h [52, 53].

El caso de intervalos no acotados en la recta real también ha sido estudiado [39, 70]. Se introduce un cambio de variable para considerar el problema en el círculo y aparecen medidas complejas y variantes. Recientemente, esta técnica ha servido para extender los resultados de Rakhmanov en la circunferencia a un arco de ella, [12]. En este trabajo se propone como extensión de la clase de Nevai, la clase de los polinomios cuyos coeficientes de reflexión verifican

$$\lim_{n\to\infty} |\phi_n(0)| = a, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}(0)}{\phi_n(0)} = b, \tag{0.4}$$

donde $a \in (0, 1]$. Bajo condiciones más restrictivas

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(0) = \alpha \quad 0 < |\alpha| < 1$$

ha sido determinado el soporte de la medida asociada a esta sucesión de polinomios (véase [28, Teoremas 6 y 10]). Concretamente, si

$$|\phi_n(0) - \alpha| = O(r^n)\, r < 1$$

entonces el soporte de la medida asociada consiste en un arco γ de la circunferencia unidad y un número finito de puntos de masa, (véase [63, 64] y [65, Teoremas

4.1 y 4.2]). Posteriormente, en [8] se ha probado la equivalencia de (0.4) y el siguiente comportamiento asintótico relativo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_{n+1}(z)}{\phi_n(z)} = \frac{1}{2}\left[(z+b)+\sqrt{(z-b)^2+4zba^2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = \sqrt{1-a^2}$$

donde la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de $\mathbb{C}\setminus \operatorname{supp} \nu$, la determinación de la raíz es tal que $\sqrt{1}=1$ y el conjunto de puntos de acumulación de $\operatorname{supp}\nu$ es un arco de la circunferencia unidad. En [8] también se generaliza este tipo de resultado a medidas cuyo conjunto de puntos de acumulación de su soporte lo constituyen una unión de arcos de la circunferencia unidad.

Aportaciones y Estructuración

En esta Tesis vamos a estudiar el comportamiento asintótico de sucesiones ortogonales respecto a generalizaciones de los productos escalares antes descritos. Estos nuevos productos escalares son los llamados productos escalares de Sobolev. Podemos distinguir entre

- Caso Sobolev continuo

$$\langle f,g\rangle = \int_{\gamma_0} f(z)g(z)d\alpha_0(z) + \int_{\gamma_1} f'(z)g'(z)d\alpha_1(z) + \ldots + \int_{\gamma_m} f^{(m)}(z)g^{(m)}(z)d\alpha_m(z)$$

donde $d\alpha_0,\ldots,d\alpha_m$ son medidas positivas de soporte infinito y $\gamma_0,\ldots,\gamma_m$ son curvas frontera de un entorno del punto del infinito, o bien.

$$\langle f,g\rangle = \int_{\Gamma_0} f(\xi)\overline{g(\xi)}\rho_0(\xi)|d\xi| + \int_{\Gamma_1} f'(\xi)\overline{g'(\xi)}\rho_1(\xi)|d\xi| + \ldots + \int_{\Gamma_m} f^{(m)}(\xi)\overline{g^{(m)}(\xi)}\rho_m(\xi)|d\xi|,$$

donde $\rho_0,\ldots,\rho_m$ son funciones de peso absolutamente continuas de soporte infinito y $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_m$ son curvas o arcos de Jordan.

- Caso Sobolev discreto

$$\langle f,g\rangle = \int_\gamma f(z)g(z)\alpha(z)dz + f(Z)Ag(Z)^T,$$

o bien,

$$\langle f,g\rangle = \int_\Gamma f(\xi)\overline{g(\xi)}\rho(\xi)|d\xi| + f(Z)Ag(Z)^H,$$

donde

$$f(Z) = \left(f(z_1),\ldots,f^{(l_1)}(z_1),\ldots,f(z_m),\ldots,f^{(l_m)}(z_m)\right),$$

$$g(Z) = \left(g(z_1),\ldots,g^{(l_1)}(z_1),\ldots,g(z_m),\ldots,g^{(l_m)}(z_m)\right).$$

Durante los diez últimos años se ha asistido a un notable desarrollo de la teoría de polinomios ortogonales respecto a dichos modelos de productos escalares no estándar. Unas adecuadas visiones de conjunto son [41] y [54].

En el primero de ellos, se presenta el estado del arte hasta 1991 y se hace un especial énfasis en el caso discreto con medida α soportada en la recta real. En esa dirección se han analizado relaciones de recurrencia de orden superior a tres, que satisfacen los correspondientes polinomios ortogonales así como representaciones de los mismos en función de los polinomios estándar ortogonales respecto a la medida α. Básicamente, satisfacen propiedades de cuasi–ortogonalidad lo que se traduce en resultados relativos a la distribución de los ceros. Esta distribución está ligada a la localización de los puntos de masa aunque, salvo en un número prefijado, para cada n estos ceros se encuentran en el soporte de la medida (véase [1, 2, 67]). Asímismo, se ha analizado el comportamiento asintótico relativo de dichos polinomios respecto a los estándar, en un caso de partida con una sóla masa localizada en el soporte, en su frontera y en el exterior, respectivamente ([49]) para medidas regulares (también llamadas de Nevai–Blumenthal) y extendidas para medidas complejas y varias masas en [40].

Asímismo, y en casos particulares de medidas de Jacobi, se han obtenido estimaciones de dichos polinomios en el intervalo $[-1,1]$ tanto respecto a la norma del supremo como de carácter puntual (véase [23] y [44] en el caso Gegenbauer con masas iguales en los extremos del intervalo y [5] para una sóla masa pero en el caso Jacobi general).

En [54] se analiza el concepto de coherencia en el caso continuo introducido en [30] desde una perspectiva computacional. De este modo, es posible presentar una teoría unificada respecto a los diferentes casos existentes en la literatura.

El objetivo de esta Memoria consiste en:

1. Analizar propiedades asintóticas de polinomios ortogonales respecto a productos de Sobolev discretos con tres modelos diferentes de soporte: la recta real, la circunferencia unidad y arcos o curvas de Jordan. En el primer caso hemos obtenido resultados novedosos relativos a

- Comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev en el intervalo $[-1, 1]$ con respecto a la norma $L^2(\omega(\cos\theta)|\sin\theta|d\theta, [-\pi, \pi])$, donde $\omega(\cos\theta)|\sin\theta|$ satisface la condición de Szegő.
- Comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales de Sobolev en los puntos aislados del soporte. Este resultado extiende el obtenido por Nikishin en [57, (17), p. 2691] en un caso de ortogonalidad estándar.

El segundo caso constituye una presentación global sobre la circunferencia unidad y unifica resultados previos en casos sencillos analizados [15, 38].

El tercer caso es una aproximación a la teoría iniciada por Kaliaguine en [31, 32], en el caso hermitiano y que hemos resuelto sin necesidad de utilizar expresiones de los núcleos a través de fórmulas de Christoffel–Darboux que constituyen el elemento clave en la demostración de la aportación anterior.

2. Estudiar el concepto de coherencia en el marco más general posible, estableciendo cúal es la idea base de la coherencia (propiedades relativas a coeficientes de conexión). Asímismo se prueba por un procedimiento alternativo un resultado de A. Martínez [50] en el caso de la coherencia para medidas de soporte compacto en $\mathbb{R}$. Finalmente se analiza la coherencia sobre la circunferencia unidad y se obtiene un resultado relativo a los compañeros coherentes de medidas de Bernstein–Szegő.

3. Analizar problemas de ajuste por mínimos cuadrados respecto a normas de Sobolev en dos casos particulares (medida de Lebesgue y de Laguerre) que extienden, respectivamente, una contribución previa de E. A. Cohen [16] y resultados relativos a intervalos no acotados en el pionero trabajo de D. C. Lewis [37]. Finalmente estudiamos el comportamiento de los coeficientes de Fourier para funciones definidas en espacios de Sobolev con ciertos pesos vinculados a medidas clásicas.

Notación y Nomenclatura

Como regla general, utilizaremos $\{p_n\}$ para denotar las sucesiones de polinomios ortonormales y $\{P_n\}$ cuando nos refiramos a las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos (esto es, $P_n = x^n +$ términos de menor grado). Además de esto, denotaremos por Π_n el conjunto de polinomios con coeficientes complejos, de grado menor o igual que n.

El sistema de numeración usado será el usual, es decir, numeración Romana para los capítulos e Indo–árabe para las secciones. Cuando nos refiramos a las ecuaciones, escribiremos siempre su referencia entre paréntesis y para la numeración referente a Definiciones, Teoremas, Corolarios, Lemas, Proposiciones y Problemas presentaremos la referencia tal cual aparece ella en el enunciado. Así, si deseamos referirnos a la ecuación tercera de la segunda sección, dentro del capítulo III al cual pertenece esta sección referida, escribiremos (2.3). Si nos encontrásemos en otro capítulo nos referiremos a esta ecuación por (III.2.3).

Adoptaremos el símbolo de Halmos ■ para denotar el final de una demostración.

Vamos representar el conjunto de los números naturales por $\mathbb{N}$, el conjunto de los números enteros por $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números reales por $\mathbb{R}$ y el conjunto de los números complejos por $\mathbb{C}$. Denotaremos además los números enteros positivos por $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$.

Agradecimientos

La realización de una tesis doctoral no es solamente el resultado de un gran esfuerzo individual. Es decisivo el marco de trabajo que la envuelve y que constituye el entorno de investigación que el doctorando encuentra. También es importante la calidad de las relaciones humanas que se establecen durante este proceso, relaciones que nos ayudan a mantener en muchas ocasiones la motivación y el entusiasmo. En este sentido creo que he tenido grandes oportunidades. Es por esto que quiero hacer un agradecimiento público a todas las personas que han contribuido y han enriquecido enormemente mi labor investigadora durante todo este tiempo.

Quiero comenzar agradeciendo a mi director de Tesis, el profesor Francisco Marcellán, su orientación, disponibilidad y constante apoyo, así como por la posibilidad que nos ha ofrecido de trabajar con otros investigadores y de realizar estancias de investigación durante este período.

Al profesor Alexandre Ivanovich Aptekarev, que visitó nuestro departamento durante el curso lectivo de 1994–95. Quiero destacar su gran calidad humana y científica, su apoyo constante en el estudio de la teoría de los polinomios ortogonales, además de una orientación y discusión continuada de los problemas de investigación que aparecen tratados en esta Tesis.

A los profesores Guillermo López Lagomasino, que realizó una cuidada revisión del manuscrito previo, a Franz Peherstorfer por su disponibilidad en las tres visitas que realicé en la Universidad de Linz y a Gabriela Sansigre, por su apoyo constante.

A mis compañeros de doctorado, Bernardo, Jesús, Diego, Enrique, Paco, Pedro, Niurka, Renato, Miguel, Jorge, Nancho, Esteban, Vicente, Héctor y especialmente a Manolo; a mis amigas María José y María Consuelo y por último quiero agradecer a Amílcar todos los esfuerzos que me ha dedicado.

CAPÍTULO I

Sobolev Discreto en la Recta Real

En este capítulo, vamos a estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión de los polinomios ortogonales, respecto a un producto de Sobolev discreto con soporte en la recta real. La medida relativa a las derivadas es atómica e soportada fuera del intervalo de ortogonalidad. Hemos obtenido en [22] el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales que depende de la localización de los puntos de soporte anteriores. En ese sentido generalizamos el resultado de Nikishin [57, (17), p. 2691] para productos escalares estándar, donde considera una medida con parte absolutamente continua y parte discreta.

La técnica de esta demostración está inspirada en el trabajo de A. I. Aptekarev y E. M. Nikishin [7]. En este trabajo, los autores estudian el comportamiento asintótico, de las sucesiones de polinomios ortogonales respecto a medidas matriciales, con una parte absolutamente continua que verifica una extensión de la condición de Szegő y con una parte discreta. En este caso los coeficientes de estos polinomios son a su vez matrices y estos autores llegan a fórmulas asintóticas análogas a las que se obtienen en el caso escalar. Hemos intentado establecer una conexión entre este estudio, y el trabajo de A. Durán y W. Van Assche [19], en donde los polinomios ortogonales respecto a productos discretos de Sobolev en la recta real, son a su vez ortogonales respecto a una medida matricial con una parte absolutamente continua y con parte discreta. Sin embargo no hemos podido establecer esta relación ya que la parte absolutamente continua de la medida matricial que obtenemos es degenerada, en el sentido que su determinante es idénticamente nulo, por lo que no satisface la condición de Szegő propuesta en [7].

También incluimos el estudio de un producto de Sobolev discreto, en el que la medida que aparece es la asociada a los polinomios Gegenbauer (o ultraesféricos). En este caso, fundamentalmente, vamos a transponer para los nuevos polinomios Gegenbauer–Sobolev, los resultados ya conocidos que verifican los polinomios Gegenbauer, (véase [23]).

1. Comportamiento Asintótico en el Soporte de la Medida

DEFINICIÓN 1.1. Sea μ una medida positiva de Borel, cuyo soporte S_μ contiene un número infinito de números reales ($S_\mu \subset \mathbb{R}$). Un *producto de Sobolev discreto* viene dado por:

$$\langle h, g\rangle = \int h(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j} M_{j,i}h^{(i)}(c_j)g^{(i)}(c_j)$$

donde $c_j \in \mathbb{R}, M_{j,i} \geq 0, m, N_j \in \mathbb{Z}^+$.

En [40], ha sido considerada una generalización de este producto discreto de Sobolev

$$\langle h, g\rangle = \int h(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j} h^{(i)}(c_j)\mathcal{L}_{j,i}(g; c_j) \tag{1.1}$$

donde $\mathcal{L}_{j,i}(g; c_j)$ es la actuación del operador diferencial de coeficientes constantes $\mathcal{L}_{j,i}$ sobre la función g, particularizado en $c_j \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{L}_{j,N_j} \neq 0$, $j = 1, \dots, m$. Dado $j = 1, \dots, m$, denotemos por J_j el orden mayor de los operadores diferenciales $\mathcal{L}_{j,i}, i = 0, \dots, N_j$.

Podemos expresar

$$\mathcal{L}_{j,i}(g; x) = \sum_{k=0}^{J_j} \gamma^j_{i,k} g^{(k)}(x).$$

Para cada j , consideramos $\mu_j = (\gamma^j_{i,k})$, $i = 0, \dots, N_j$, $k = 0, \dots, J_j$, la matriz cuyos elementos son los coeficientes del operador $\mathcal{L}_{j,i}$. Denotemos por $\mu_j{}^*$ la matriz obtenida a partir de μ_j suprimiendo todas las filas y columnas de ceros. Siguiendo [40] decimos que (1.1) es regular si para cada $j = 1, \dots, m$, la matriz μ_j^* es una matriz cuadrada con determinante diferente de cero. Denotamos el tamaño de μ_j^* por I_j y $I = \sum_{j=1}^{m} I_j$.

Una motivación para esta definición viene de la siguiente relación de ortogonalidad

$$0 = \int p(x)Q_n(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j} A_{j,i}(p(z)Q_n(z))^{(i)}|_{z=c_j}, \quad p \in \mathbb{P}_{n-1}$$

donde $A_{j,i}$ pueden, eventualmente, ser números complejos.

Los polinomios $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ son los denominadores de la diagonal principal de la sucesión de los aproximantes de Padé de la función meromorfa de tipo Stieltjes

$$f(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{N_j} A_{j,i}\frac{i!}{(z-c_j)^{i+1}}, \quad A_{j,N_j} \neq 0.$$

Si denotamos por $\{L_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a μ, Gončar ([29]) demuestra el siguiente resultado. Supongamos que $S_\mu \subset [-1,1]$ y μ es tal que

$$\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} \rightrightarrows \frac{\varphi(z)}{2}, \quad \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

entonces

$$\frac{Q_n(z)}{L_n(z)} \rightrightarrows \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{(\varphi(z)-\varphi(c_j))^2}{2\varphi(z)(z-c_j)}\right)^{N_j+1}, \quad \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

donde $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$, $\sqrt{x^2-1} > 0$ cuando $|x| > 1$.

Denotemos por $S_n, n \in \mathbb{Z}_+$, el polinomio mónico de menor grado tal que

$$\langle p, S_n\rangle = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Si el producto escalar es definido positivo, entonces el grado de S_n es n y todos los polinomios S_n son distintos. En general, esto no es cierto y para valores distintos de n podemos tener el mismo S_n.

A pesar de un gran esfuerzo para investigar las propiedades de los polinomios ortogonales tipo Sobolev (véase [48] con más de 100 referencias en este campo) no se ha avanzado mucho en la obtención de resultados asintóticos bajo condiciones generales en el producto escalar (esto es, en la medida y en los puntos de masa). La primera contribución esencial ha sido realizada en [40]. En dicho trabajo se introduce una nueva clase de medidas

DEFINICIÓN 1.2. Sea μ una medida compleja. Debido a que el producto escalar asociado a este tipo de medidas no tiene carácter definido positivo, denotamos por Q_n el polinomio mónico de menor grado que verifica

$$\int Q_n(z)z^k d\mu(z) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

y denotamos por

$$q_n = \frac{Q_n}{\left(\int Q_n^2(z)d\mu(z)\right)^{1/2}}$$

el n-ésimo polinomio ortonormal, donde $\left(\int Q_n^2(z)d\mu(z)\right)^{1/2}$ denota una de las dos raíces complejas. Decimos que $\mu \in M_{\mathbb{C}}(0,1)$ si se cumple

$$xq_n(x) = \alpha_{n+1}q_{n+1}(x) + \beta_n q_n(x) + \alpha_n q_{n-1}(x), \quad n \geq n_0, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$$

con

(i)

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \tag{1.2}$$

(ii)

$$\int |q_n(x)q_{n+m}(x)||d\mu(x)| \leq C < \infty$$

donde el soporte de μ es $[-1,1] \cup E$, y E es un conjunto contable de puntos aislados en $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$, con $E' \subset [-1,1]$, (véase [9]).

La sucesión $\{q_n\}_{n\geq 0}$ tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\frac{q_{n+1}^{(\nu)}(z)}{q_n^{(\nu)}(z)} \rightrightarrows \varphi(z), \quad K \subset \mathbb{C}\backslash S_\mu \tag{1.3}$$

donde

$$\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}, \quad \sqrt{x^2-1} > 1 \text{ con } |x| > 1.$$

y

$$\frac{1}{n}\frac{q_n^{(\nu+1)}(z)}{q_n^{(\nu)}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad K \subset \mathbb{C}\backslash S_\mu$$

Para esta clase de medidas, se ha desarrollado un método para el análisis de asintótica relativa de los polinomios ortogonales tipo Sobolev con respecto a los polinomios ortogonales estándar. Más concretamente, ha sido probado el siguiente Teorema [40, Teorema. 4].

TEOREMA 1.1. *Consideremos un producto escalar regular del tipo* (1.1) *tal que* $\mu \in M_{\mathbb{C}}(0,1)$ *y* $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C} \backslash S_\mu$. *Sea* $\{L_n\}_{n\geq 0}$ *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a* μ *y sea* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a* (1.1). *Para* n *suficientemente grande, el grado de* S_n *es* n *y se cumple, para cada* $\nu \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{S_n^{(\nu)}(z)}{L_n^{(\nu)}(z)} \rightrightarrows \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{(\varphi(z) - \varphi(c_j))^2}{2\varphi(z)(z - c_j)} \right)^{I_j}, \quad K \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash S_\mu \tag{1.4}$$

Usando el Teorema de Rouché, podemos deducir de (1.4), que cualquier entorno de S_μ contenido en un compacto de la región $\mathbb{C} \backslash \{c_1, \ldots, c_m\}$ tiene, para n suficientemente grande, $n - I$ ceros de S_n ($I = \sum_{j=1}^{m} I_j$), (de forma abreviada diremos que $n - I$ ceros de S_n se acumulan en S_μ), mientras que cualquier entorno de c_j, para $j = 1, \ldots, m$, contiene, para n suficientemente grande, exactamente I_j ceros de S_n (en este caso de forma abreviada diremos que c_j atrae I_j ceros de S_n).

Podemos destacar el siguiente Corolario de [40, Cor.2]

COROLARIO 1.1. *Bajo las hipótesis del teorema anterior, para* n *suficientemente grande se cumple* $\langle S_n, S_n \rangle \neq 0$. *Sea* η_n *el coeficiente principal de* l_n, *el* n*-ésimo polinomio ortonormal con respecto a* μ. *Entonces* $\gamma_n = \langle S_n, S_n \rangle^{-\frac{1}{2}}$ *puede definirse de forma que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\eta_n} = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\varphi(c_j)^{I_j}}$$

y, en particular,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 2$$

La ventaja de este tipo de resultado es lo siguiente. Supongamos que conocemos el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios ortogonales, entonces podremos deducir el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios ortogonales tipo Sobolev. Para ilustrar esto con un ejemplo, podemos considerar $d\mu(x) = \omega(x)dx$ donde $\omega(x)$ es una función positiva e integrable en

$[-1,1]$ que satisface la condición de Szegő :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln \omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx > -\infty$$

Denotamos por $\{l_n\}_{n\geq 0}$, con $l_n(x) = \eta_n x^n+$ términos de menor grado, $\eta_n > 0$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al peso $\omega(x)$

$$\int_{-1}^{1} l_n(x) l_m(x)\omega(x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Es bien sabido [75] que la función:

$$D_\omega(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} \ln[\omega(\cos t)|\operatorname{sen} t|]dt\right\} \tag{1.5}$$

llamada función de Szegő verifica

a) $D_\omega(z) \in H_2$
b) $D_\omega(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} D_\omega(re^{i\theta})$ existe a.e. y $|D_\omega(e^{i\theta})|^2 = \omega(\cos\theta)|\operatorname{sen}(\theta)|$
c) $D_\omega(z) \neq 0$, $|z| < 1$ y $D_\omega(0) > 0$.

Tenemos el siguiente comportamiento asintótico para $\{l_n\}_{n\geq 0}$ (véase [75, Teoremas 12.1.2,12.1.4]

a) <u>Fuera del soporte de la medida</u>

$$l_n(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z^n}\frac{1}{D_\omega(z)}[1+o(1)], \quad |z|<1,$$

b) <u>En el soporte de la medida</u>

$$l_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{D_\omega(e^{i\theta})}e^{-in\theta} + \frac{1}{\overline{D_\omega(e^{i\theta})}}e^{in\theta}\right] + o(1),$$

donde $o(1)$ debe ser entendido en el sentido de la convergencia en $\mathcal{L}_{2,\omega}$.

c) <u>El coeficiente principal</u>

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^n\frac{1}{D_\omega(0)}[1+o(1)].$$

Si conectamos estos resultados con el Teorema 1.1 obtenemos, como consecuencia inmediata, la asintótica fuerte de la sucesión de polinomios ortogonales tipo Sobolev fuera del soporte de la medida

COROLARIO 1.2. *Para n suficientemente grande, $s_n = \gamma_n S_n$. Entonces, para $|z| < 1$*

$$s_n(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z^n}\frac{\prod_{j=1}^m \beta_j(z)^{I_j}}{D_\omega(z)}[1+o(1)]$$

uniformemente para $z \in K \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{z_j\}_{j=1}^m$, donde

$$\beta_j(z) := \frac{z_j - z}{(1 - zz_j)}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = x + \sqrt{x^2-1} & |\varphi(x)| > 1 \\ \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) = x & \varphi(x) = \frac{1}{z} \\ \frac{1}{2}(z_j+\frac{1}{z_j}) = c_j & \varphi(c_j) = \frac{1}{z_j} \end{cases}$$

Debemos destacar que el Teorema 1.1 no nos permite concluir nada acerca de la asintótica de la sucesión de polinomios ortogonales tipo Sobolev en el soporte de la medida. Esto no es de extrañar porque los elementos de la matriz μ_j no aparecen en este Teorema pero, como mostraremos más adelante, la asintótica en los puntos de masa depende estrechamente de ellos. Así, la investigación de propiedades de asintótica fuerte requiere desarrollar una técnica más específica. En este capítulo trataremos de ello. Hemos probado:

TEOREMA 1.2. *Sea ω una función positiva e integrable que verifica la condición de Szegő, $\int_{-1}^{1} \frac{\ln \omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx > -\infty$. Consideremos un producto escalar (1.1) en el caso regular $\{c_j\}_{j=1}^m \in \mathbb{C}\backslash S_\mu$, donde $d\mu(x) = \omega(x)dx$. Para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, sea $\{S_n\}_{n\geq N}$ con $S_n(x) = x^n+$ términos de menor grado, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a (1.1), y $\gamma_n = \langle S_n, S_n\rangle^{-1/2}$. Sea $s_n = \gamma_n S_n$, entonces tenemos el siguiente comportamiento asintótico para $\{s_n\}_{n\geq N}$:*

a) *<u>En el intervalo $[-1,1]$</u>*

$$\left\| s_n(\cos\theta) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\beta(e^{i\theta})}}e^{-in\theta} + \frac{1}{\overline{\left[\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\beta(e^{-i\theta})}\right]}}e^{in\theta}\right]\right\| = o(1)$$

donde $\|.\|$ es la norma en $L^2(\omega(\cos\theta)|\operatorname{sen}\theta|d\theta, [-\pi,\pi])$ y

$$\beta(z) := \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{z_j - z}{(1 - z z_j)} \right]^{I_j},$$

b) *En los puntos de masa $\{c_j\}_{j=1}^m$, en el caso que $J_j = N_j = I_j - 1$*

$$\begin{pmatrix} s_n(c_j) \\ s_n'(c_j) \\ \vdots \\ s_n^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix} = (\mu_j)^{-1} (G_j)^{-1} \begin{pmatrix} h_n(c_j) \\ h_n'(c_j) \\ \vdots \\ \frac{1}{J_j!} h_n^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix} [1 + o(1)],$$

donde

$$h_n(x) := \tilde{h}_n(\frac{1}{\varphi(x)}), \quad \varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\tilde{h}_n(z) := -\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{M-1}} D_\omega(z) \frac{1}{z - \frac{1}{z}} z^{n-M} \prod_{k=1}^{m} \frac{(z z_k - 1)^{2(J_k+1)}}{z_k^{J_k+1}},$$

G_j son matrices de tamaño $J_j + 1 \times J_j + 1$, para $j = 1, \ldots, m$, que vienen descritas de la siguiente manera

$$G_j(k,l) = \begin{cases} 0 & , J_j + 2 - k > l, \\ \binom{l-1}{J_j+1-k} (J_j + 1 - k)! g_j^{(l-(J_j+2-k))}(c_j) & , J_j + 2 - k \leq l, \end{cases}$$

y

$$g_j(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} (x - c_i)^{J_i+1}.$$

Para ilustrar este resultado hemos incluído los siguientes corolarios

COROLARIO 1.3. *Si $N_j = 0$ y $J_j = 0$, esto es,*

$$\langle h, g \rangle = \int_{-1}^{1} h(x) g(x) \omega(x) dx + \sum_{j=1}^{m} \gamma^j h(c_j) g(c_j), \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad \gamma^j > 0$$

y usamos la siguiente normalización, para el coeficiente principal

$$\gamma_n = \frac{2^n}{D_\omega(0)} \frac{\prod_{j=1}^m |z_j|}{\sqrt{2\pi}} [1 + o(1)],$$

obtenemos,

$$s_n(c_j) = \frac{1}{\gamma^j} \prod_{\substack{k=1,\ldots,m \\ k \neq j}} \frac{2 z_j z_k}{(z_j - z_k)(z_j z_k - 1)} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{m-1}} D_\omega(z) \frac{z_j^{n-m}}{z_j - 1/z_j} \prod_{k=1}^{m} \frac{(z_j z_k - 1)^2}{|z_k|}.$$

Si denotamos

$$F(z) = \frac{D_\omega(z)}{\prod_{k=1}^{m} \frac{(z-z_k)|z_k|}{(zz_k-1)z_k)}},$$

se cumple

$$s_n(c_j) = \frac{z_j^{n-1}}{\gamma^j}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{Res}_{z=z_j} F(z)[1+o(1)].$$

Este resultado, que obtenemos como un caso particular de nuestro estudio, ha sido anteriormente obtenido por E. M. Nikishin en [57, (17), p. 2691].

COROLARIO 1.4. *Si consideramos*

$$\langle h,g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)\omega(x)dx + \gamma_{00}h(c)g(c) + \gamma_{11}h'(c)g'(c)\,, \quad c\in\mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

en este caso $F(z) = \frac{D_\omega(z)}{(z-z_1)^2}(zz_1-1)^2$ *y*

$$\begin{pmatrix} s_n(c) \\ s_n'(c) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2\pi}z_1^n}{\gamma_{00}\gamma_{11}} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{11} \\ \gamma_{00} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{z_1^2-1}{z_1^3}\mathrm{Res}_{z=z_1}((z-z_1)F(z)) \\ \frac{1}{z_1}\mathrm{Res}_{z=z_1}F(z) + [\frac{1}{z_1^3}(n-1) - \frac{2}{z_1^2-1}]\mathrm{Res}_{z=z_1}((z-z_1)F(z)) \end{pmatrix}[1+o(1)].$$

El método desarrollado en la demostración del Teorema 1.2 se basa en la investigación del comportamiento asintótico de los coeficientes de una modificación polinomial del polinomio ortogonal tipo Sobolev en términos de los polinomios ortogonales estándar

$$w_M(x)S_n(x) = L_{n+M}(x) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j}L_{n+M-j}(x)\,,$$

donde $w_M(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-c_j)^{N_j+1}$ y $M = \text{grado}\, w_M$.

Como paso intermedio, interesante en sí, probamos

LEMA 1.1. *Consideremos un producto escalar regular de tipo* (1.1) *tal que* $\mu\in M_{\mathbb{C}}(0,1)$ *y* $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{C}\backslash S_\mu$. *Para todo* n *lo suficientemente grande, sea* $S_n(x)$ *el polinomio ortogonal mónico Sobolev de grado* n *con respecto a este producto* *escalar. Sea* $\{L_n\}_{n\geq N}$ *con* $L_n(x) = x^n +$ *términos de menor grado, el polinomio ortogonal mónico de grado* n *con respecto a* $d\mu(x)$*. Se cumple que*

$$w_M(x)S_n(x) = L_{n+M}(x) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j}L_{n+M-j}(x) \tag{1.6}$$

donde $w_M(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - c_j)^{N_j+1}$, grado $w_M(x) = M$*. Además, existen los límites*

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,j} \qquad \textit{para } 1 \leq j \leq m.$$

Este lema proporciona un análogo de la condición (1.2) de $M_{\mathbb{C}}(0,1)$ en el sentido que existen los límites de los coeficientes de una relación de recurrencia. El caso particular del lema anterior cuando $J_j = N_j = 0$ fue probado por E. M. Nikishin en [57]. La próxima sección está dedicada a la demostración del Lema 1.1 y del Teorema 1.2.

1.1. Demostración de los Resultados Principales.

<u>Demostración del Lema 1.1</u>. La demostración se estructura en dos etapas.

1.Es fácil ver que el polinomio S_n verifica las condiciones de ortogonalidad de tipo Sobolev si y sólo si

$$0 = \langle w_M(z)p(z), S_n(z)\rangle = \int p(z)w_M(z)S_n(z)d\mu(z), \text{ grado} p \leq n - M - 1 \tag{1.7}$$

y

$$0 = \langle z^k, S_n(z)\rangle\,, \quad k = 0, \ldots, M-1\,. \tag{1.8}$$

Tomamos

$$p_n(z) = \frac{a^*_{n,0}L_{n+M}(z) + \sum_{j=1}^{2M} a^*_{n,j}L_{n+M-j}(z)}{w_M(z)}\,.$$

Podemos encontrar coeficientes adecuados de modo de p_n sea un polinomio. Esto significa que tenemos un sistema lineal homogéneo de M ecuaciones en los coeficientes $\{a^*_{n,j}\}$, $j = 0, \ldots, 2M$. Tal polinomio evidentemente satisface (1.7). Supongamos además que estos coeficientes sean tales que (1.8) tenga lugar. Esto da otro sistema lineal homogéneo de M ecuaciones en $\{a^*_{n,j}\}$, $j = 0, \ldots, 2M$. Como tenemos $2M + 1$ incógnitas, el sistema completo tiene solución no trivial.

Entre todas las posibles soluciones tomemos una cualquiera de grado mínimo. Como S_n corresponde al polinomio de grado mínimo y mónico, tenemos que

$$S_n = \alpha_n p_n \,.$$

Pero para $n \geq n_0$ sabemos que grado $S_n = n$ (pues $\langle S_n, S_n \rangle \neq 0$, véase Corolario 1.1), luego $a^*_{n,0} \neq 0$ y

$$w_M(z)S_n(z) = L_{n+M}(z) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} L_{n+M-j}(z)$$

con $a_{n,j} = \frac{a^*_{n,j}}{a_{n,0}}$.

2. Para probar la existencia del límite de $a_{n,j}$ para $j = 1, \ldots, 2M$, seguimos la técnica usada en [40]. Sea

$$w_M(z)S_n(z) = L_{n+M}(z) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} L_{n+M-j}(z).$$

Podemos considerar

$$\Omega_n(z) = \frac{w_M(z)S_n(z)}{L_{n-M}(z)} \quad \text{y} \quad a^*_n = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{2M} |a_{n,j}|}.$$

Definimos

$$\Omega^*_n = a^*_n \Omega_n = a^*_n \frac{L_{n+M}(z)}{L_{n-M}(z)} + \sum_{j=1}^{2M} a^*_{n,j} \frac{L_{n+M-j}(z)}{L_{n-M}(z)} \tag{1.9}$$

donde $a^*_{n,j} = a^*_n a_{n,j}$. Esta nueva sucesión $\{a^*_{n,j}\}$ está uniformemente acotada. Sea Λ un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que para $j = 1, \ldots, 2M$

$$\lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} a^*_{n,j} = a^*_j \text{ y } \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} a^*_n = a^*_0.$$

Tomando límites en (1.9), cuando $n \to \infty, n \in \Lambda$ y usando (1.3) y (1.4)

$$a^*_0 \prod_{j=1}^{m} (z - c_j)^{N_j+1-I_j} (\varphi(z) - \varphi(c_j))^{2I_j} \frac{\varphi(z)^{M-I}}{2^{M+I}}$$
$$= a^*_0 \left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^{2M} + \sum_{j=1}^{2M} a^*_j \left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^{2M-j}$$

para $z \in \mathbb{C}\backslash S_\mu$. Si tenemos en cuenta que $|a_n^*| + \sum_{j=1}^{2M} |a_{n,j}^*| = 1$, se sigue que $|a_0^*| + \sum_{j=1}^{2M} |a_j^*| = 1$, lo que implica que al menos uno de los coeficientes a_j^*, $j = 0, \ldots, 2M$ es distinto de cero.

Ahora, el hecho que $\{\varphi^k\}$ para $k = 0, \ldots, 2M$, es un conjunto de funciones linealmente independientes (ya que φ es una función analítica e inyectiva) y la relación anterior implican que $a_0^* \neq 0$.

En particular, esto implica que $\{a_{n,j}\}$ para $j = 1, \ldots, 2M$ está uniformemente acotada en n, de forma que para probar la existencia de límite sólo necesitamos demostrar la unicidad de los puntos de acumulación para cada $j = 1, \ldots, 2M$.

Sea Λ un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que para $j = 1, \ldots, 2M$, los límites $\lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} a_{n,j} = a_j$ existen. Tomando $\lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} \Omega_n(z)$ obtenemos

$$\prod_{j=1}^{m} (z - c_j)^{N_j+1-I_j} (\varphi(z) - \varphi(c_j))^{2I_j} \frac{\varphi(z)^{M-I}}{2^{M+I}} = \left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^{2M} + \sum_{j=1}^{2M} a_j \left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^{2M-j}$$

para $z \in \mathbb{C}\backslash S_\mu$. Como el segundo miembro no depende de la subsucesión considerada, de esta última ecuación se sigue la unicidad de los valores límite a_j, para $j = 1, \ldots, 2M$.

De esta última ecuación se sigue la unicidad para los a_j. ■

<u>Demostración del Teorema 1.2</u>. En primer lugar vamos a deducir el comportamiento asintótico en el intervalo $[-1, 1]$.

Sea

$$w_M(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - c_j)^{N_j+1}.$$

Expresamos $S_n w_M$ en términos de $\{L_n\}_{n\geq 0}$.

$$S_n(z) w_M(z) = L_{n+M}(z) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} L_{n+M-j}(z). \tag{1.10}$$

Dividimos por S_n

$$\begin{aligned} w_M(z) &= \frac{L_{n+M}(z)}{S_n(z)} + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} \frac{L_{n+M-j}(z)}{S_n(z)} \\ &= \frac{L_{n+M}(z)}{L_n(z)} \frac{L_n(z)}{S_n(z)} + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} \frac{L_{n+M-j}(z)}{L_n(z)} \frac{L_n(z)}{S_n(z)}. \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos límite en un conjunto compacto fuera del soporte de μ, usando (1.4) así como la existencia de $\lim a_{n,j} = a_j$, (Lema 1.1)

$$w_M(z) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{2\varphi(z)(z-c_j)}{(\varphi(z)-\varphi(c_j))^2} \right)^{I_j} \left[\left(\frac{\varphi(z)}{2} \right)^M + \sum_{j=1}^{2M} a_j \left(\frac{\varphi(z)}{2} \right)^{M-j} \right].$$

O sea,

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{m} (\varphi(z)-\varphi(c_j))^{2I_j} (z-c_j)^{N_j+1-I_j} \\ &\qquad = 2^I \varphi^I(z) \left[\left(\frac{\varphi(z)}{2} \right)^M + \sum_{j=1}^{2M} a_j \left(\frac{\varphi(z)}{2} \right)^{M-j} \right]. \end{aligned}$$

Ahora si denotamos $\varphi(z) = t$, obtenemos la ecuación que verifican los a_j, $j = 1, \dots, 2M$,

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{m} (t-\varphi(c_j))^{2I_j} \left(\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) - c_j \right)^{N_j+1-I_j} \\ &\qquad = 2^I t^I \left[\left(\frac{t}{2} \right)^M + \sum_{j=1}^{2M} a_j \left(\frac{t}{2} \right)^{M-j} \right]. \qquad (1.11) \end{aligned}$$

Si volvemos a (1.10) y hacemos $z = \cos\theta$ tenemos

$$S_n(\cos\theta) w_M(\cos\theta) = L_{n+M}(\cos\theta) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} L_{n+M-j}(\cos\theta).$$

Ahora, usando el comportamiento asintótico fuerte de L_n en $[-1,1]$ deducimos

$$
\begin{aligned}
&S_n(\cos\theta)w_M(\cos\theta)\\
&\quad= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{D_\omega(e^{i\theta})}e^{-i(n+M)\theta}+\frac{1}{\overline{D_\omega(e^{i\theta})}}e^{i(n+M)\theta}\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}2^{n+M}\frac{1}{D_\omega(0)}}\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{2M}a_j\frac{D_\omega(0)}{2^{n+M-j}}\left[\frac{1}{D_\omega(e^{i\theta})}e^{-i(n+M-j)\theta}+\frac{1}{\overline{D_\omega(e^{i\theta})}}e^{i(n+M-j)\theta}\right]+o(1)\\
&\quad=\frac{D_\omega(0)}{2^{n+M}}\left[\frac{1}{D_\omega(e^{i\theta})}e^{-i(n+M)\theta}+\frac{1}{\overline{D_\omega(e^{i\theta})}}e^{i(n+M)\theta}\right]\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{2M}a_j\frac{D_\omega(0)}{2^{n+M-j}}\left[\frac{1}{D_\omega(e^{i\theta})}e^{-i(n+M-j)\theta}+\frac{1}{\overline{D_\omega(e^{i\theta})}}e^{i(n+M-j)\theta}\right]+o(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{D_\omega(0)}{D_\omega(e^{i\theta})}\left[\frac{e^{-in\theta}}{2^n}\left[\frac{1}{2^M}e^{-iM\theta}+\sum_{j=1}^{2M}a_j\frac{1}{2^{M-j}}e^{-i(M-j)\theta}\right]\right]\\
&\quad+\frac{D_\omega(0)}{\overline{D_\omega(e^{i\theta})}}\left[\frac{e^{in\theta}}{2^n}\left[\frac{1}{2^M}e^{iM\theta}+\sum_{j=1}^{2M}a_j\frac{1}{2^{M-j}}e^{i(M-j)\theta}\right]\right]+o(1).
\end{aligned}
$$

Usando la notación

$$
\begin{cases}
e^{i\theta}=z\\
\frac{1}{\varphi(c_j)}=z_j\\
\frac{1}{2}(z_j+\frac{1}{z_j})=c_j
\end{cases}
$$

entonces, por (1.11)

$$
\begin{aligned}
S_n(\cos\theta) &= \frac{\frac{D_\omega(0)}{D_\omega(z)}\left[\frac{1}{2^nz^n}\prod_{j=1}^m\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z_j}\right]^{2I_j}\frac{z^I}{2^I}\right]}{\prod_{j=1}^m\left[\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-\frac{1}{2}(z_j+\frac{1}{z_j})\right]^{I_j}}\\
&\quad+\frac{\frac{D_\omega(0)}{\overline{D_\omega(z)}}\left[\frac{z^n}{2^n}\prod_{j=1}^m\left[z-\frac{1}{z_j}\right]^{2I_j}\frac{1}{2^Iz^I}\right]}{\prod_{j=1}^m\left[\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-\frac{1}{2}(z_j+\frac{1}{z_j})\right]^{I_j}}+o(1)\\
&= \frac{D_\omega(0)}{D_\omega(z)}\left[\frac{1}{2^nz^n}\prod_{j=1}^m\left[\frac{z_j-z}{z_j(1-zz_j)}\right]^{I_j}\right]\\
&\quad+\frac{D_\omega(0)}{\overline{D_\omega(z)}}\left[\frac{z^n}{2^n}\prod_{j=1}^m\left[\frac{zz_j-1}{z_j(z-z_j)}\right]^{I_j}\right]+o(1).
\end{aligned}
$$

Si denotamos

$$\alpha(z) = \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{z_j - z}{z_j(1 - zz_j)}\right]^{I_j},$$

tenemos que

$$S_n(\cos\theta) = \frac{D_\omega(0)}{\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\alpha(e^{i\theta})}} \frac{1}{2^n} e^{-in\theta} + \frac{D_\omega(0)}{\left[\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\alpha(e^{-i\theta})}\right]} \frac{1}{2^n} e^{in\theta} + o(1). \tag{1.12}$$

Para n suficientemente grande, el coeficiente principal de s_n lo denotamos por γ_n. Usando el Corolario 1.1, se sigue

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^n \frac{1}{D_\omega(0)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} \varphi(c_j)^{I_j}} + o(1).$$

Junto con (1.12) tenemos

$$s_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{m} z_j{}^{I_j} \left[\frac{1}{\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\alpha(e^{i\theta})}} e^{-in\theta} + \frac{1}{\left[\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\alpha(e^{-i\theta})}\right]} e^{in\theta}\right] + o(1).$$

Si denotamos

$$\beta(z) := \prod_{j=1}^{m} \left[\frac{z_j - z}{(1 - zz_j)}\right]^{I_j},$$

entonces

$$s_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\beta(e^{i\theta})}} e^{-in\theta} + \frac{1}{\left[\frac{D_\omega(e^{i\theta})}{\beta(e^{-i\theta})}\right]} e^{in\theta}\right] + o(1)$$

donde $o(1)$ es con respecto a la norma $L_{2,\omega}$.

Como último paso vamos a deducir el comportamiento asintótico de $s_n^{(k)}(c_j), 0 \leq k \leq J_j, 1 \leq j \leq m$.

Consideramos

$$S_n(x) w_M(x) = L_{n+M}(x) + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j} L_{n+M-j}(x).$$

Usando la notación introducida en el Lema 1.1, sea

$$g_j(x) := \frac{w_M(x)}{(x - c_j)^{J_j+1}} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} (x - c_i)^{J_i+1}.$$

De la propiedad de ortogonalidad, con respecto al producto escalar Sobolev, para $n > M-1$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle g_j(x)(x-c_j)^{J_j}, S_n(x)\rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{w_M(x)S_n(x)}{x-c_j} d\mu(x) + \begin{pmatrix} 0, & \ldots, & 0, & J_j! g_j(c_j) \end{pmatrix} \mu_j \begin{pmatrix} S_n(c_j) \\ \vdots \\ S_n^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix}, \\
0 &= \langle g_j(x)(x-c_j)^{J_j-1}, S_n(x)\rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{w_M(x)S_n(x)}{(x-c_j)^2} d\mu(x) \\
&+ \begin{pmatrix} 0, & \ldots, & 0, & (J_j-1)! g_j(c_j), & \binom{J_j}{J_j-1}(J_j-1)! g'(c_j) \end{pmatrix} \mu_j \begin{pmatrix} S_n(c_j) \\ \vdots \\ S_n^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
0 &= \langle g_j(x), S_n(x)\rangle \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{w_M(x)S_n(x)}{(x-c_j)^{J_j+1}} d\mu(x) \\
&\qquad + \begin{pmatrix} g_j(c_j), & g_j'(c_j), & \ldots, & g_j^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix} \mu_j \begin{pmatrix} S_n(c_j) \\ \vdots \\ S_n^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta la matriz G_j que aparece en el enunciado del Teorema, podemos expresar, para cada j, $1 \leq j \leq m$, las ecuaciones anteriores en forma matricial.

$$
G_j \mu_j \begin{pmatrix} s_n(c_j) \\ \vdots \\ s_n^{(J_j)}(c_j) \end{pmatrix} = -\gamma_n \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} \frac{w_M(x)S_n(x)}{(x-c_j)} \omega(x)dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^{1} \frac{w_M(x)S_n(x)}{(x-c_j)^{J_j+1}} \omega(x)dx \end{pmatrix}. \tag{1.13}
$$

Para obtener el comportamiento asintótico es entonces suficiente estudiar el comportamiento asintótico del segundo miembro de la ecuación (1.13).

Utilizando el cambio de variable $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \lambda$, el comportamiento asintótico de

L_n en $[-1,1]$ así como (1.11), tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \frac{w_M(x)S_n(x)}{(x-c_j)}\omega(x)dx \\
&\quad = \left[\int_{-1}^{1} \frac{L_{n+M}(x)}{(x-\lambda)}\omega(x)dx + \sum_{j=1}^{2M} a_{n,j}\int_{-1}^{1} \frac{L_{n+M-j}(x)}{(x-\lambda)}\omega(x)dx\right]_{\lambda=c_j} \\
&= \left[\frac{z^n}{2^n}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^M + \sum_{j=1}^{2M} a_j\left(\frac{z}{2}\right)^{M-j}\right]\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_\omega(z)D_\omega(0)d\theta}{(\cos\theta-\lambda)}\right]_{\substack{\lambda=c_j\\ z=z_j}} [1+o(1)] \\
&\quad = \left[\frac{4\pi}{z-\frac{1}{z}}D_\omega(z)D_\omega(0)\frac{z^{n-M}}{2^{n+M}}\prod_{k=1}^{m}\left(z-\frac{1}{z_k}\right)^{2(J_k+1)}\right]_{z=z_j}[1+o(1)],
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{L_n(x)}{x-\lambda}\omega(x)dx &= \frac{1}{L_n(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{L_n^2(x)}{x-\lambda}\omega(x)dx \\
= \frac{D_\omega(0)}{2^n}D_\omega(z)z^n\int_{-\pi}^{\pi}&\frac{1}{|D_\omega(e^{i\theta})|^2}\frac{\omega(\cos\theta)\,|\operatorname{sen}\theta|}{\cos\theta-\lambda}d\theta\,[1+o(1)].
\end{aligned}$$

Si denotamos por

$$h_n(z) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2^{M-1}}D_\omega(z)\frac{1}{z-\frac{1}{z}}z^{n-M}\prod_{k=1}^{m}\frac{(zz_k-1)^{2(J_k+1)}}{z_k^{J_k+1}}$$

se cumple

$$-\gamma_n\int_{-1}^{1}\frac{w_M(x)S_n(x)}{(x-c_j)}\omega(x)dx = h_n(z_j)[1+o(1)].$$

Para las otras coordenadas del segundo miembro de (1.13) usamos otra vez el hecho que si $f_n = g_n[1+o(1)]$, donde f_n, g_n son funciones analíticas y la sucesión g_n está uniformemente acotada, se cumple que $f_n' = g_n'[1+o(1)]$ y

$$-\int_{-1}^{1}\frac{w_M(x)s_n(x)}{(x-\lambda)^{k+1}}\omega(x)dx = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[h_n(z)\right]_{\lambda=c_j}[1+o(1)].$$

Teniendo esto en cuenta, obtenemos

$$G_j\mu_j\begin{pmatrix} s_n(c_j)\\ s_n'(c_j)\\ \vdots\\ s_n^{(J_j)}(c_j)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_n(z)\,|_{\lambda=c_j}\\ \frac{d}{d\lambda}h_n(z)\,|_{\lambda=c_j}\\ \vdots\\ \frac{1}{J_j!}\frac{d^{J_j}}{d\lambda^{J_j}}h_n(z)\,|_{\lambda=c_j}\end{pmatrix}[1+o(1)].$$

■

OBSERVACIÓN. Queremos hacer notar que, para obtener el comportamiento asintótico en el intervalo $[-1,1]$, no hemos usado la condición $I_j - 1 = J_j = N_j$. En los puntos $\{c_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, esta condición es necesaria, al menos para poder aplicar la técnica desarrollada en la demostración

2. Polinomios Gegenbauer–Sobolev

En [10], H. Bavinck y H. G. Meijer introducen un producto escalar no estándar, en el que aparecen derivadas

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f g \, d\mu_\alpha + M\left[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)\right] \\ + N\left[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)\right] \quad (2.1)$$

donde $M \geq 0, N \geq 0$ y

$$d\mu_\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{(2\alpha+1)}\Gamma^2(\alpha+1)}(1-x^2)^\alpha dx \quad , \alpha > -1$$

es la medida de probabilidad asociada a los polinomios Gegenbauer (o ultraesféricos).

(2.1) representa un caso particular del caso simétrico analizado en [3].

En [10], los autores estudian la representación de los polinomios ortogonales con respecto a (2.1) en términos de los polinomios ultraesféricos, su expresión como funciones hipergeométricas ${}_4F_3$ así como obtienen una ecuación diferencial lineal de segundo orden que satisfacen dichos polinomios.

En un segundo artículo [11], estos autores han probado que los ceros de estos polinomios son reales y simples. Para $N > 0$ y el grado del polinomio suficientemente grande, prueban que existe exactamente un par de ceros reales $\pm\rho_n$ fuera del intervalo $(-1, 1)$. Además, obtienen una relación de recurrencia a cinco términos que satisfacen estos polinomios. En el caso que $N = 0$, como recaemos en el caso de ortogonalidad estándar, los ceros de los polinomios son reales y simples, pertenecen al intervalo $(-1, 1)$ y estos polinomios verifican una relación de recurrencia a tres términos.

El objetivo que nos proponemos es el de obtener estimaciones para tales polinomios de Sobolev, tanto desde el punto de vista de comportamiento puntual, como con respecto a la norma uniforme. De hecho, generalizamos un trabajo previo a éste ($\alpha = 0$), [45].

La estructura de esta sección es la siguiente. En la subsección 2 resumimos algunos resultados sobre los polinomios ultraesféricos que vamos a necesitar así como algunas propiedades básicas de los polinomios ortogonales con respecto a (2.1). En la subsección 3 obtenemos una estimación para la norma de los polinomios $\left\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 0}$ ortogonales con respecto a (2.1). En la subsección 4 encontramos estimaciones para tales polinomios en el intervalo $(-1,1)$, para la norma uniforme, así como para su comportamiento en los extremos del intervalo. También encontramos una estimación uniforme para el comportamiento asintótico de estos polinomios en subconjuntos compactos de la región $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

En las próximas subsecciones vamos a denotar $f(n) \approx g(n)$ cuando existan constantes universales $C, D \in \mathbb{R}^+$ tales que $Cf(n) \leq g(n) \leq Df(n)$ para n suficientemente grande.

2.1. Polinomios Gegenbauer: Propiedades Básicas.

Si consideramos el polinomio ultraesférico n-ésimo dado por la fórmula de Rodrigues

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{2^n\Gamma(n+\alpha+1)}(1-x^2)^{-\alpha}D^n\left((1-x^2)^{n+\alpha}\right)$$

$\alpha > -1$, es entonces bien conocido que

$$\int_{-1}^{1} R_n^{(\alpha)}(x)R_m^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^{\alpha}dx = 0$$

para $m \neq n$.

Además $R_n^{(\alpha)}(1) = 1$.

Por otro lado, para $k = 0, 1, \dots,$

$$D^k R_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^k (n+2\alpha+1)_k (-n)_k}{2^k (\alpha+1)_k} R_{n-k}^{(\alpha+k)}(x). \tag{2.2}$$

Aquí $(a)_n$ viene definido por

$$\begin{aligned}(a)_n &:= a(a+1)\dots(a+n-1) \\ &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\end{aligned}$$

para $n \geq 1$.

Teniendo en cuenta la representación de los polinomios de Gegenbauer como una función hipergeométrica,

$$R_n^{(\alpha)}(x) = {}_2F_1(-n, n+2\alpha+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2})$$

deducimos que el coeficiente principal $k_n(\alpha)$ de $R_n^{(\alpha)}$ es

$$k_n(\alpha) := \frac{(n+2\alpha+1)_n}{2^n (\alpha+1)_n} = \frac{\Gamma(2n+2\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{2^n \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}.$$

Esto significa que el cuadrado de la norma de $R_n^{(\alpha)}$ en el espacio $L^2_{(1-x^2)^\alpha}$ es

$$\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 := \int_{-1}^{1} |R_n^{(\alpha)}(x)|^2 (1-x^2)^\alpha dx = \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1) n!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)} \tag{2.3}$$

(véase [75, fórmula (4.7.15), p. 81]).

Además,

$$\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 \approx n^{-(2\alpha+1)}$$

y, como consecuencia, para $k \geq 1$,

$$\|R_{n-2k}^{(\alpha+2k)}\|_{\alpha+2k}^2 \approx n^{-(2\alpha+4k+1)}. \tag{2.4}$$

Este tipo de estimación va a ser muy útil en lo que vamos a exponer a continuación. Los polinomios de Gegenbauer satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$x R_n^{(\alpha)}(x) = \beta_n^{(\alpha)} R_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} R_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_n^{(\alpha)} &= \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1}, \\ \gamma_n^{(\alpha)} &= \frac{n}{2n+2\alpha+1}. \end{aligned}$$

También vamos a usar (véase [75, fórmula (8.21.10), p. 196])

$$R_n^{(\alpha)}(\cos\theta) = \frac{n!\Gamma(\alpha+1)}{n^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)} k(\theta)\cos(N\theta+\gamma) + O(n^{-(\alpha+3/2)}) \tag{2.5}$$

donde

$$\begin{aligned} k(\theta) &= \pi^{-1/2}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \\ N &= n+\alpha+1/2 \\ \gamma &= -(\alpha+\frac{1}{2})\pi/2 \quad 0<\theta<\pi\,. \end{aligned}$$

La cota para el término de error se cumple uniformemente en el intervalo $[\epsilon, \pi-\epsilon]$.

Finalmente, teniendo en cuenta la normalización que hemos impuesto en la sucesión $\{R_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, se sigue

$$\max_{-1\leq x\leq 1}(1-x^2)^k|D^{2k}R_n^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha n^{2k}\,. \tag{2.6}$$

En términos de los polinomios ultraesféricos $\{R_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$, H. Bavinck y H.G. Meijer encontraron la siguiente representación para los polinomios $\{B_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ ortogonales con respecto a (2.1).

LEMA 2.1.

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \quad (a_n x^2 D^2 + b_n x D + c_n)\, R_n^{(\alpha)}(x) \tag{2.7}$$

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \quad \left(\tfrac{a_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}(1-x^2)^2 D^4 + d_n(1-x^2)D^2 + e_n\right) R_n^{(\alpha)}(x) \tag{2.8}$$

donde

$$a_n = MN\frac{4(2\alpha+3)_n(2\alpha+3)_{n-2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)n!(n-2)!} + N\frac{2(2\alpha+3)_{n-1}}{(\alpha+1)(n-1)!}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} b_n &= -MN\frac{4(2\alpha+3)_n(2\alpha+3)_{n-2}(n^2+(2\alpha+1)n-3\alpha-3)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)n!(n-2)!} \\ &\quad -M\frac{2(2\alpha+2)_{n-1}}{n!} - N\frac{(2\alpha+3)_{n-1}(n^2+(2\alpha+1)n-4\alpha-4)}{(\alpha+1)(n-1)!} \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + MN\frac{(2\alpha+3)_{n+1}(2\alpha+3)_{n-1}}{(n-1)!(n-3)!(\alpha+1)(\alpha+2)^2(\alpha+3)} \\ &\quad +M\frac{2(2\alpha+3)_{n-1}}{(n-1)!} + N\frac{(2\alpha+3)_{n-1}(n-2)(n+2\alpha+3)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(n-1)!} \\ &\quad ((\alpha+2)n^2+(\alpha+2)(2\alpha+1)n+2\alpha+2), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$d_n = -\frac{N}{2}\frac{(2\alpha+3)_{n-1}(n-2)(n+2\alpha+3)}{(\alpha+1)(\alpha+3)(n-1)!} - 2M\frac{(2\alpha+3)_{n-2}}{n!}, \tag{2.12}$$

$$e_n = B_n^{(\alpha)}(1) = 1 - \frac{N}{2}\frac{(2\alpha+3)_{n+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(n-3)!}. \tag{2.13}$$

Como una consecuencia directa de la representación anterior, deducimos que el coeficiente principal de $B_n^{(\alpha)}$ es

$$u_n(\alpha) = k_n(\alpha)\left[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}a_n - n(n-1)d_n + e_n\right].$$

2.2. Estimaciones para la norma de los polinomios Gegenbauer–Sobolev.

Si denotamos por $\left\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al producto escalar (2.1), esto es

$$\begin{aligned}\delta_{n,m} = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)} \int_{-1}^{1} \hat{B}_n^{(\alpha)}(x)\hat{B}_m^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ + M\left[\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)\hat{B}_m^{(\alpha)}(1) + \hat{B}_n^{(\alpha)}(-1)\hat{B}_m^{(\alpha)}(-1)\right] \\ + N\left[\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)\{\hat{B}_m^{(\alpha)})\}'(1) + \{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(-1)\{\hat{B}_m^{(\alpha)}\}'(-1)\right]\end{aligned}$$

entonces

$$\hat{B}_n^{(\alpha)}(x) = \lambda_n B_n^{(\alpha)}(x)$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_n^{-2} = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)} \int_{-1}^{1} \left[B_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 (1-x^2)^{(\alpha)} dx \\ + 2M\left[B_n^{(\alpha)}(1)\right]^2 + 2N\left[\{B_n^{(\alpha)}\}'(1)\right]^2 .\end{aligned}$$

En primer lugar vamos a calcular esta integral. De hecho, usando (2.8)

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \left[B_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 (1-x^2)^\alpha dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{a_n^2(1-x^2)^4\left[D^4R_n^{(\alpha)}(x)\right]^2}{16(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2}(1-x^2)^\alpha dx \\ &+ \int_{-1}^{1} d_n^2(1-x^2)^2\left[D^2R_n^{(\alpha)}(x)\right]^2(1-x^2)^\alpha dx + \int_{-1}^{1} e_n^2\left[R_n^{(\alpha)}(x)\right]^2(1-x^2)^\alpha dx \\ &+ \frac{2a_nd_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3D^4R_n^{(\alpha)}(x)D^2R_n^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ &+ \frac{2a_ne_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2D^4R_n^{(\alpha)}(x)R_n^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ &+ 2d_ne_n\int_{-1}^{1}(1-x^2)D^2R_n^{(\alpha)}(x)R_n^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^\alpha dx \\ &= I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6 . \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.2)

$$I_1 = \frac{a_n^2(-n)_4^2(n+2\alpha+1)_4^2}{16^3(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2(\alpha+1)_4^2}\int_{-1}^{1}\left[R_{n-4}^{(\alpha+4)}(x)\right]^2(1-x^2)^{\alpha+4}dx$$
$$= \frac{a_n^2(-n)_4^2(n+2\alpha+1)_4^2}{16^3(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2(\alpha+1)_4^2}\|R_{n-4}^{(\alpha+4)}\|_{\alpha+4}^2$$
$$= \frac{a_n^2(-n)_4^2(n+2\alpha+1)_4^2}{16^3(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2(\alpha+1)_4^2}\frac{2^{2\alpha+9}\Gamma^2(\alpha+5)(n-4)!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+5)}.$$

De forma similar, usando (2.2)

$$I_2 = \frac{d_n^2(-n)_2^2(n+2\alpha+1)_2^2}{16(\alpha+1)_2^2}\int_{-1}^{1}\left[R_{n-2}^{(\alpha+2)}(x)\right]^2(1-x^2)^{\alpha+2}dx$$
$$= \frac{d_n^2(-n)_2^2(n+2\alpha+1)_2^2}{16(\alpha+1)_2^2}\|R_{n-2}^{(\alpha+2)}\|_{\alpha+2}^2$$
$$= \frac{d_n^2(-n)_2^2(n+2\alpha+1)_2^2}{16(\alpha+1)_2^2}\frac{2^{2\alpha+5}\Gamma^2(\alpha+3)(n-2)!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+3)},$$

$$I_3 = e_n^2\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 = e_n^2\frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)n!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)},$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{a_nd_n(-n)_2(n+2\alpha+1)_2}{8(\alpha+2)_2(\alpha+1)_2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left[D^4R_n^{(\alpha)}(x)\right]R_{n-2}^{(\alpha+2)}(x)(1-x^2)^{\alpha+2}dx\\
&= -\frac{a_nd_n}{2(\alpha+2)_2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(-n)_2(n+2\alpha+1)_2}{4(\alpha+1)_2}\frac{k_n(\alpha)}{k_{n-2}(\alpha+2)}\|R_{n-2}^{(\alpha+2)}\|_{\alpha+2}^2\\
&= -\frac{a_nd_nn^2(n-1)^2}{8(\alpha+2)_2(\alpha+1)_2}(n-2)(n-3)(n+2\alpha+1)_2\\
&\quad \frac{k_n(\alpha)}{k_{n-2}(\alpha+2)}\frac{2^{2\alpha+5}\Gamma^2(\alpha+3)(n-2)!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+3)},\\
I_5 &= \frac{2a_ne_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}n(n-1)(n-2)(n-3)\int_{-1}^{1}\left[R_n^{(\alpha)}(x)\right]^2(1-x^2)^\alpha\\
&= \frac{2a_ne_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}n(n-1)(n-2)(n-3)\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2\\
&= \frac{2a_ne_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)}n(n-1)(n-2)(n-3)\frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)n!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)},\\
I_6 &= -2d_ne_nn(n-1)\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2\\
&= -2d_ne_nn(n-1)\frac{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)n!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Como conclusión, (2.14) se puede expresar

$$
\begin{aligned}
&= a_n^2\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2(n+2\alpha+1)_4^2}{16^3(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2(\alpha+1)_4^2}\|R_{n-4}^{(\alpha+4)}\|_{\alpha+4}^2\\
&+\frac{n^2(n-1)^2d_n}{(\alpha+1)_2}\left[\frac{(n+2\alpha+1)_2^2d_n}{16(\alpha+1)_2}-\frac{(n-2)(n-3)a_n}{8(\alpha+2)_2}\frac{k_n(\alpha)}{k_{n-2}(\alpha+2)}\right]\|R_{n-2}^{(\alpha+2)}\|_{\alpha+2}^2\\
&\qquad+e_n\left[e_n-2n(n-1)d_n+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(\alpha+2)(\alpha+3)}a_n\right]\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{16}\frac{(n+2\alpha+1)_4}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2}a_n^2\right.\\
&+\frac{16n(n-1)(\alpha+1)(\alpha+2)}{(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2)}d_n\left[\frac{d_n(n+2\alpha+1)_2^2}{16(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{(n-2)(n-3)a_n}{8(\alpha+2)(\alpha+3)}\frac{k_n(\alpha)}{k_{n-2}(\alpha+2)}\right]\\
&\qquad\left.+e_n\left[e_n-2n(n-1)d_n+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(\alpha+2)(\alpha+3)}a_n\right]\right\}\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha^2 .
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
B_n^{(\alpha)}(1) &= e_n , \qquad (2.15)\\
\{B_n^{(\alpha)}\}'(1) &= -2d_n\{R_n^{(\alpha)}\}''(1)+e_n\{R_n^{(\alpha)}\}'(1)\\
&= \{R_n^{(\alpha)}\}'(1)+\frac{(2\alpha+3)_n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(n-2)!}M\\
&= \frac{n}{2}\frac{(n+2\alpha+1)}{\alpha+1}R_{n-1}^{(\alpha+1)}(1)+\frac{(2\alpha+3)_n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(n-2)!}M\\
&= \frac{n}{2}\frac{(n+2\alpha+1)}{\alpha+1}+\frac{(2\alpha+3)_n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(n-2)!}M . \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^{-2} &= 2Me_n^2+2N\left(\frac{n(n+2\alpha+1)}{2(\alpha+1)}+\frac{(2\alpha+3)_n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(n-2)!}M\right)^2\\
&+ \frac{\Gamma(2\alpha+2)n!}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{16}\frac{(n+2\alpha+1)_4}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2}a_n^2\right.\\
&+ n(n-1)(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2)d_n^2-\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}a_nd_n\\
&+ \left.e_n^2-2n(n-1)e_nd_n+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(\alpha+2)(\alpha+3)}a_ne_n\right\} . \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Para estimar λ_n^{-2}, vamos a distinguir los siguientes tres casos.

1. $M > 0$, $N > 0$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= 4MN\frac{n(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\frac{2\alpha+n+2}{2\alpha+n+1}\alpha_n^2 + 2N\frac{n}{\alpha+1}\alpha_n\,, \\ d_n &= -\frac{N}{2}\frac{n(n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+3)}(n+2\alpha+3)\alpha_n - 2M\frac{1}{2\alpha+n+1}\alpha_n\,, \\ e_n &= 1-\frac{N}{2}\frac{n(n-1)(n-2)(n+2\alpha+3)(n+2\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\alpha_n\,, \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_n = \frac{\Gamma(2\alpha+n+2)}{\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(n+1)}\,.$$

Pero, de acuerdo con el comportamiento asintótico de la función Gamma (véase [59, fórmula 8.16, p. 88]),

$$\Gamma(x) \approx e^{-x}x^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

entonces

$$\alpha_n \approx n^{2\alpha+1}\,, \tag{2.18}$$

y

$$a_n \approx n^{4\alpha+4}\,, \tag{2.19}$$

$$d_n \approx n^{2\alpha+4}\,, \tag{2.20}$$

$$e_n \approx n^{2\alpha+6}\,. \tag{2.21}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lambda_n^{-2} &= 2Me_n^2 + 2N\left(\frac{n(n+2\alpha+1)}{2(\alpha+1)} + \frac{(n+2\alpha+2)n(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}M\alpha_n\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2\alpha+2}\frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1}\frac{1}{\alpha_n}\left\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{16}\frac{(n+2\alpha+1)_4}{(\alpha+2)^2(\alpha+3)^2}a_n^2\right. \\ &+ n(n-1)(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2)d_n^2 - \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}a_nd_n \\ &+ \left. e_n^2 - 2n(n-1)e_nd_n + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(\alpha+2)(\alpha+3)}a_ne_n\right\} \\ &\approx n^{6\alpha+15}\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

2. $M = 0,\ N > 0$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2Nn}{(\alpha+1)}\alpha_n\,, \\ d_n &= -\frac{N}{2}\frac{n(n-2)}{(\alpha+1)(\alpha+3)}(n+2\alpha+3)\alpha_n\,, \\ e_n &= 1-\frac{N}{2}\frac{n(n-1)(n-2)(n+2\alpha+3)(n+2\alpha+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\alpha_n\,. \end{aligned}$$

Así pues,

$$a_n \approx n^{2\alpha+2}\,, \tag{2.23}$$

$$d_n \approx n^{2\alpha+4}\,, \tag{2.24}$$

$$e_n \approx n^{2\alpha+6}\,. \tag{2.25}$$

y

$$\lambda_n^{-2} \approx n^{2\alpha+11}\,. \tag{2.26}$$

3. $M > 0,\ N = 0$

Entonces

$$a_n = 0\,, \tag{2.27}$$

$$d_n = -\frac{2M\alpha}{2\alpha+n+1}\,, \tag{2.28}$$

$$e_n = 1\,. \tag{2.29}$$

Por tanto,

$$\lambda_n^{-2} \approx n^{2\alpha+3}\,. \tag{2.30}$$

Como conclusión

PROPOSICIÓN 2.1.

$$\lambda_n = \|B_n^{(\alpha)}\|_2^{-1} \approx \begin{cases} n^{-3\alpha-\frac{15}{2}} & M>0 \quad N>0 \\ n^{-\alpha-\frac{11}{2}} & M=0 \quad N>0 \\ n^{-\alpha-\frac{3}{2}} & M>0 \quad N=0 \end{cases}$$

COROLARIO 2.1. *El coeficiente principal $v_n(\alpha)$ of $\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)$ verifica*

$$v_n(\alpha) \approx 2^n .$$

DEMOSTRACIÓN. El coeficiente principal de $\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)$ es

$$\lambda_n k_n(\alpha) \left[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4(\alpha+2)(\alpha+3)} a_n - n(n-1)d_n + e_n . \right]$$

Vamos a distinguir los siguientes tres casos.

1. $M > 0,\ N > 0$

$$v_n(\alpha) \approx n^{-3\alpha-\frac{15}{2}} 2^{n+2\alpha+\frac{1}{2}} n^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{4\alpha+8} = 2^{n+2\alpha+\frac{1}{2}} .$$

2. $M = 0,\ N > 0$

$$v_n(\alpha) \approx n^{-\alpha-\frac{11}{2}} 2^{n+2\alpha+\frac{1}{2}} n^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{2\alpha+6} = 2^{n+2\alpha+\frac{1}{2}} .$$

3. $M > 0,\ N = 0$

$$v_n(\alpha) \approx n^{-\alpha-\frac{3}{2}} 2^{n+2\alpha+\frac{1}{2}} n^{-\alpha-\frac{1}{2}} n^{2\alpha+2} = 2^{n+2\alpha+\frac{1}{2}} .$$

∎

2.3. Comportamiento Asintótico de los polinomios de Gegenbauer–Sobolev. Vamos a deducir una fórmula similar a (2.5) para los polinomios $B_n^{(\alpha)}$. Usando (2.2) y (2.8) se cumple

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{a_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)} \frac{(n+2\alpha+1)_4(-n)_4}{2^4(\alpha+1)_4} (1-x^2)^2 R_{n-4}^{\alpha+4}(x) \\ &+ d_n \frac{(n+2\alpha+1)_2(-n)_2}{2^2(\alpha+1)_2} (1-x^2) R_{n-2}^{\alpha+2}(x) \\ &+ e_n R_n^{\alpha}(x) . \end{aligned}$$

Haciendo $x = \cos\theta$ y teniendo en cuenta que $1 - x^2 = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
& B_n^{(\alpha)}(\cos\theta) \\
&= \frac{a_n(n+2\alpha+1)_4(-n)_4}{4(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+1)_4}\left[\frac{(n-4)!\Gamma(\alpha+1)}{(n-4)^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}k(\theta)cos(N\theta+\gamma)+O(n^{-(\alpha+\frac{11}{2})})\right] \\
& -d_n\frac{(n+2\alpha+1)_2(-n)_2}{2^2(\alpha+1)_2}\left[\frac{(n-2)!\Gamma(\alpha+1)}{(n-2)^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}k(\theta)cos(N\theta+\gamma)+O(n^{-(\alpha+\frac{7}{2})})\right] \\
& \qquad +e_n\left[\frac{n!\Gamma(\alpha+1)}{n^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}k(\theta)cos(N\theta+\gamma)+O(n^{-(\alpha+\frac{3}{2})})\right].
\end{aligned}
$$

Vamos a distinguir los siguientes tres casos.

1. $M > 0,\ N > 0$. Usando

$$
\begin{aligned}
a_n &= 4MN\frac{(2\alpha+3)_n(2\alpha+3)_{n-2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)n!(n-2)!}+O(n^{2\alpha+2}), \\
d_n &\approx n^{2\alpha+4}, \\
e_n &\approx n^{2\alpha+6},
\end{aligned}
$$

obtenemos que

$$
\begin{aligned}
B_n^{(\alpha)}(\cos\theta) &= MN\frac{(2\alpha+3)_n(2\alpha+3)_{n-2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)n!(n-2)!}\frac{(n+2\alpha+1)_4(-n)_4}{(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+1)_4} \\
& \cdot\frac{(n-4)!\Gamma(\alpha+1)}{(n-4)^{1/2}\Gamma(n+\alpha+1)}k(\theta)cos(N\theta+\gamma)+O(n^{-(\alpha+\frac{11}{2})})+O(n^{\beta})
\end{aligned}
$$

donde

$$
\beta = \begin{cases} 3\alpha+\frac{13}{2} & \alpha \geq -\frac{1}{2} \\ \alpha+\frac{11}{2} & -1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \end{cases}
$$

y N, γ son las mismas constantes que aparecen en (2.5). La cota para el término de error se cumple uniformemente en el intervalo $[\epsilon, \pi-\epsilon]$.

2. $M = 0,\ N > 0$. Haciendo el mismo tipo de cálculos se cumple

$$
\begin{aligned}
B_n^{(\alpha)}(\cos\theta) &= \frac{N}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{(2\alpha+3)_{n-1}}{(\alpha+1)}n^5 \\
& \cdot\left(\frac{(n-4)^{-1/2}}{(\alpha+1)_4}+\frac{(n-2)^{-1/2}}{(\alpha+1)}-n^{-1/2}\right)k(\theta)cos(N\theta+\gamma)+O(n^{\alpha+\frac{9}{2}})
\end{aligned}
$$

y N, γ son las mismas constantes que aparecen en (2.5). La cota para el término de error se cumple uniformente en el intervalo $[\epsilon, \pi-\epsilon]$.

3. $M > 0,\ N = 0$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(\cos\theta) &= 2M\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{(2\alpha+3)_{n-2}(n+2\alpha+1)_2}{(\alpha+1)_2(n-2)^{1/2}}n^5k(\theta)cos(N\theta+\gamma) \\ &+ O(n^\beta) \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \begin{cases} \alpha+\frac{1}{2} & \alpha \geq -\frac{1}{2} \\ -(\alpha+\frac{1}{2}) & -1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

y N, γ son las mismas constates que aparecen en (2.5). La cota para el término de error se cumple uniformemente en el intervalo $[\epsilon, \pi-\epsilon]$.

Como los polinomios $\{D^4R_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 4}$ son ortogonales con respecto a la función peso $(1-x^2)^{\alpha+4}$, usando (2.5) obtenemos

$$(1-x^2)^2|D^4R_n^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha n^{-\alpha+\frac{7}{2}}(1-x^2)^{-(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})} \tag{2.31}$$

donde la constante C_α es independiente de $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (-1,1)$. De la misma forma

$$(1-x^2)|D^2R_n^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha n^{-\alpha+\frac{3}{2}}(1-x^2)^{-(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})} \tag{2.32}$$

donde, otra vez, la constante $C_\alpha > 0$ es independiente de $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (-1,1)$.

Usando (2.8), (2.31), (2.32), se cumple la siguiente estimación

PROPOSICIÓN 2.2.

$$|B_n^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha \left\{\frac{a_n}{(\alpha+2)(\alpha+3)}n^{-\alpha+\frac{7}{2}} + |d_n|n^{-\alpha+\frac{3}{2}} + |e_n|n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\right\}(1-x^2)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}$$

donde la constante $C_\alpha > 0$ es independiente de $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (-1,1)$.

A continuación, vamos a deducir una estimación para los polinomios ortonormales $\left\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 0}$ respecto de la norma uniforme. Teniendo en cuenta la expresión de $\left\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 0}$ en términos de $\left\{B_n^{(\alpha)}\right\}_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned}
|\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)| &= \lambda_n |B_n^{(\alpha)}(x)| \\
&\leq \lambda_n \left\{ \frac{a_n}{4(\alpha+2)(\alpha+3)} \max_{-1\leq x\leq 1} (1-x^2)^2 |D^4 R_n^{(\alpha)}(x)| \right. \\
&\quad + |d_n| \max_{-1\leq x\leq 1} (1-x^2)|D^2 R_n^{(\alpha)}(x)| \\
&\quad \left. + |e_n| \max_{-1\leq x\leq 1} |R_n^{(\alpha)}(x)| \right\} .
\end{aligned}$$

Pero, de (2.6), obtenemos

$$|\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha \lambda_n \left\{ a_n n^4 + |d_n| n^2 + |e_n| \right\} .$$

Además

PROPOSICIÓN 2.3.

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha n^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad , n \in \mathbb{N}$$

DEMOSTRACIÓN. Como en las proposiciones anteriores, vamos a distinguir los siguientes tres casos.

1. $M > 0$, $N > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\max_{-1\leq x\leq 1} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)| &\leq C_\alpha n^{-(3\alpha+\frac{15}{2})} \left\{ n^{4\alpha+8} + n^{2\alpha+6} \right\} \\
&= C_\alpha n^{\alpha+\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

2. $M = 0$, $N > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\max_{-1\leq x\leq 1} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)| &\leq C_\alpha n^{-(\alpha+\frac{11}{2})} n^{2\alpha+6} \\
&= C_\alpha n^{\alpha+\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

3. $M > 0$, $N = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\max_{-1\leq x\leq 1} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(x)| &\leq C_\alpha n^{-(\alpha+\frac{3}{2})} n^{2\alpha+2} \\
&= C_\alpha n^{\alpha+\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

■

Finalmente, la comparación de la anteriores dos estimaciones nos lleva al análisis del comportamiento de $|\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)|$ así como del de $|\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)|$.

PROPOSICIÓN 2.4.

$$|\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)| \approx \begin{cases} n^{-\alpha-\frac{3}{2}} & si\ M>0, N>0, or\ M>0, N=0 \\ n^{\alpha+\frac{1}{2}} & si\ M=0, N>0 \end{cases}$$

$$|\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)| \approx \begin{cases} n^{-\alpha-\frac{7}{2}} & si\ M>0, N>0, or\ M=0, N>0 \\ n^{\alpha+\frac{5}{2}} & si\ M>0, N=0 \end{cases}$$

Vamos a destacar que para $\alpha = 0$ recuperamos la Proposición 3.4 de [45].

DEMOSTRACIÓN. Teniendo en cuenta (2.15), y (2.16),

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)| &= \lambda_n e_n \\ |\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)| &= \lambda_n \left[\frac{n(n+2\alpha+1)}{2(\alpha+1)} + \frac{(2\alpha+3)_n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(n-2)!}M\right]. \end{aligned}$$

Así

(i) Si $M>0$, $N>0$, entonces

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)| &\approx n^{-\alpha-\frac{3}{2}}, \\ |\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)| &\approx n^{-\alpha-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

(ii) Si $M=0$, $N>0$, entonces

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)| &\approx n^{\alpha+\frac{1}{2}}, \\ |\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)| &\approx n^{-\alpha-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

(iii) Si $M>0$, $N=0$, entonces

$$\begin{aligned} |\hat{B}_n^{(\alpha)}(1)| &\approx n^{-\alpha-\frac{3}{2}}, \\ |\{\hat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1)| &\approx n^{\alpha+\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

∎

Como último paso, vamos a deducir el comportamiento asintótico de la sucesión $\{B_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ uniformemente en conjuntos compactos de la región $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

Definimos $l_n^{(\alpha)} := \frac{R_n^{(\alpha)}}{\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha}$ y dividiendo (2.7) por $\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha} &= \frac{a_n(n+2\alpha+1)_2 n(n-1)}{2^2(\alpha+1)_2}\frac{\|R_{n-2}^{(\alpha+2)}\|_{\alpha+2}}{\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha}x^2\, l_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) \\
&+ b_n\frac{(n+2\alpha+1)n}{2(\alpha+1)}\frac{\|R_{n-2}^{(\alpha+2)}\|_{\alpha+2}}{\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha}x\, l_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \\
&+ c_n l_n^{(\alpha)}(x)\,.
\end{aligned}$$

Es bien conocido, usando (1.5), el siguiente comportamiento asintótico para $\{l_n^{(\alpha)}\}$

$$l_n^{(\alpha)}(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z^n}\frac{1}{D_\omega(z)}[1+o(1)]\,, \quad |z|<1 \tag{2.33}$$

donde $o(1)$ se verifica uniformemente en la región interior de la circunferencia unidad y D_ω es la función de Szegő.

Si usamos (2.33) vamos a distinguir los siguientes tres casos, y para cada uno de ellos el resultado se verifica uniformemente en los subconjuntos compactos de la región $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

1. $M>0$, $N>0$

$$\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{n^{4\alpha+8}\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha} \approx l_n^{(\alpha)}(x)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{n^{4\alpha+8}R_n^{(\alpha)}(x)} \approx 1\,.$$

2. $M>0$, $N=0$

$$\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{n^{2\alpha+2}\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha} \approx l_n^{(\alpha)}(x)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{n^{2\alpha+2}R_n^{(\alpha)}(x)} \approx 1\,.$$

3. $M = 0$, $N > 0$

$$\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{n^{2\alpha+6}\|R_n^{(\alpha)}\|_\alpha} \approx l_n^{(\alpha)}(x)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{B_n^{(\alpha)}(x)}{n^{2\alpha+6}R_n^{(\alpha)}(x)} \approx 1\,.$$

CAPÍTULO II

Sobolev Discreto en la Circunferencia Unidad

1. Introducción

Hemos tratado de completar los resultados obtenidos para polinomios ortogonales Sobolev en la recta real haciendo un estudio en el caso que el soporte de la medida de ortogonalidad sea la circunferencia unidad. Estamos recorriendo el camino en sentido inverso a como fue tratado este tipo de problemas en el caso de ortogonalidad estándar aunque, como se verá en el desarrollo del Capítulo, el estudio se hace de manera totalmente independiente, ya que no tenemos una fórmula que nos conecte polinomios ortogonales Sobolev en un intervalo de la recta real, con polinomios ortogonales Sobolev en la circunferencia unidad. De hecho estamos convencidos que tal fórmula es poco probable que exista, ya que si observamos la relación que establece E. M. Nikishin en [57, pag. 2702] vemos que parte de una medida con parte absolutamente continua y parte discreta y obtiene una fórmula del tipo estándar, pero para ello tiene que considerar un producto escalar indefinido en la circunferencia unidad, por lo que se ve que la transposición del caso estándar al caso Sobolev parece poco natural.

Vamos a comenzar definiendo el tipo de producto escalar con el que vamos a trabajar.

DEFINICIÓN 1.1. Sea μ una medida de probabilidad cuyo soporte es un subconjunto infinito del intervalo $[0, 2\pi]$. Un producto escalar Sobolev en el caso discreto, con soporte en la circunferencia unidad viene dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\mu(\theta) + f(Z)Ag(Z)^H \tag{1.1}$$

donde $f(Z) = (f(z_1), \ldots, f^{(l_1)}(z_1), \ldots, f(z_m), \ldots, f^{(l_m)}(z_m))$, A es una matriz $M \times M$ hermitiana definida positiva o una matriz diagonal por bloques hermitiana semidefinida positiva, donde el bloque i-ésimo es una matriz de tamaño $l_i + 1 \times l_i + 1$, $M = l_1 + \cdots + l_m + m$ y $|z_i| > 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Debido al carácter definido positivo o semidefinido positivo de la matriz A, existe una sucesión de polinomios $\{\psi_n\}_{n\geq 0}$ con $\psi_n(z) = \gamma_n z^n +$ términos de menor grado, $\gamma_n > 0$, ortonormal con respecto a (1.1).

Como primer problema, estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de esta sucesión con respecto a la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ cuando la medida $\mu \in \mathcal{N}$ (véase [24]).

Como segundo problema, consideraremos el estudio del comportamiento asintótico fuerte de la sucesión de los polinomios ortogonales Sobolev en el soporte de la medida, cuando $d\mu = p(\theta)d\theta$ pertenezca a la clase de Szegő (véase [25]). Para abordar este estudio hemos tenido que solventar dificultades surgidas del carácter hermitiano del producto escalar, por lo que hemos necesitado un nuevo conjunto de polinomios para considerar en él el desarrollo de la modificación polinómica del polinomio ortogonal de Sobolev.

El estudio del primer problema ha sido considerado en casos particulares de productos Sobolev discretos. Queremos, en primer lugar, destacar ejemplos de este estudio en la recta real, que ya han sido mencionados en el anterior Capítulo, tales como [49] porque en ese trabajo, que trata un caso muy concreto podemos, ver que los autores aplican una técnica algebraica que puede ser extendida a nuestro caso. Otro trabajo que queremos mencionar es [4]; de él obtenemos algunas expresiones con determinantes que nos serán muy útiles. Los resultados que vamos a obtener en este trabajo son análogos a los obtenidos en [40], pero usando una técnica analítica completamente diferente. Si suponemos que los polinomios ortogonales Sobolev son de grado n para n suficientemente grande, podemos obtener el caso no regular que ha sido enunciado en el comentario final de [39] y que estos autores no demuestran.

Casos concretos de productos escalares de Sobolev en el caso discreto con soporte en la circunferencia unidad también han sido estudiados con anterioridad. En [15] ha sido analizado el caso $m = 1$ y $l_1 = 1$ cuando $\mu \in \mathcal{N}$ y $|z_1| = 1$. La asintótica del cociente y el comportamiento del coeficiente principal fueron los problemas considerados. Otro trabajo que queremos destacar es [38], donde se analiza el caso de una derivada en m puntos distintos.

2. Enunciado de Resultados de Asintótica Relativa

Sea μ una medida de probabilidad cuyo soporte es un subconjunto infinito del intervalo $[0, 2\pi]$, denotemos por $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ con $\varphi_n(z) = k_n z^n +$ términos de grado menor, $k_n > 0$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a μ y por $\{\varphi_n^*\}_{n\geq 0}$ con $\varphi_n^*(z) = z^n\overline{\varphi_n(1/\overline{z})}$, la sucesión de polinomios recíprocos asociados a ésta. Sea $\{\psi_n\}_{n\geq 0}$ con $\psi_n(z) = \gamma_n z^n +$ términos de grado menor, $\gamma_n > 0$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a (1.1). Vamos a enunciar los siguientes resultados.

TEOREMA 2.1. *Consideremos un producto escalar del tipo* (1.1) *tal que* $\mu \in \mathcal{N}$ *y la matriz* A *es hermitiana definida positiva. Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^{m} |z_i|^{l_i+1}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\psi_n^{(k)}(z)}{\varphi_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\overline{z_i}(z-z_i)}{|z_i|(z\overline{z_i}-1)} \right)^{l_i+1}, \ |z| > 1, k = 0, 1, \dots, \tag{2.2}$$

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} \rightrightarrows 0, \ |z| < 1.$$

COROLARIO 2.1. *Como consecuencia inmediata de este Teorema y usando* (2.8) *obtenemos*

$$\frac{\psi_n^{(k+1)}(z)}{n\psi_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{z} \quad , \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \setminus \{z_j\}_{j=1}^{m} \quad , k = 0, 1, \dots .$$

TEOREMA 2.2. *Sea un producto escalar del tipo* (1.1) *tal que* $\mu \in \mathcal{N}$ *y la matriz* A *es hermitiana semidefinida positiva y diagonal por bloques, de tamaño* $(l_i + 1) \times (l_i + 1)$, *que denotamos por* A_i *para* $i = 1, \dots, m$, *donde cada uno de ellos es una matriz semidefinida positiva de rango* n_i. *Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^{m} |z_i|^{n_i}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\psi_n^{(k)}(z)}{\varphi_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\overline{z_i}(z-z_i)}{|z_i|(z\overline{z_i}-1)} \right)^{n_i}, \ |z| > 1, k = 0, 1, \dots, \tag{2.4}$$

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} \rightrightarrows 0, \; |z| < 1.$$

COROLARIO 2.2. *Como consecuencia inmediata de este Teorema y usando* (2.8) *obtenemos*

$$\frac{\psi_n^{(k+1)}(z)}{n\psi_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{z} \qquad , \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \setminus \{z_j\}_{j=1}^m, \; k = 0, 1, \dots .$$

2.1. Notación y Resultados Auxiliares. Para facilitar la lectura de los resultados vamos a utilizar una notación que simplifica enormemente las expresiones que siguen. Para una función $f(z)$ de una sola variable y el vector $X = (x_{1,0}, \dots, x_{1,l_1}, \dots, x_{m,0}, \dots, x_{m,l_m})$, denotamos por:

$$f(X) = (f(x_{1,0}), \dots, f^{(l_1)}(x_{1,l_1}), \dots, f(x_{m,0}), \dots, f^{(l_m)}(x_{m,l_m})) .$$

Así por ejemplo, si $Z = (\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{l_1+1}, \dots, \underbrace{z_m, \dots, z_m}_{l_m+1})$

$$K(z, Z) = (K(z, z_1), \dots, K^{(0,l_1)}(z, z_1), \dots, K(z, z_m), \dots, K^{(0,l_m)}(z, z_m)) ,$$

donde $K(z, w)$ es una función de dos variables.

$$K^{(i)}(z, Z)$$
$$= (K^{(i,0)}(z, z_1), \dots, K^{(i,l_1)}(z, z_1), \dots, (K^{(i,0)}(z, z_m), \dots, K^{(i,l_m)}(z, z_m)) .$$

y

$$K^{(i,j)}(z, w) = \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial^j}{\partial w^j} K(z, w)$$

Esta notación la vamos a mantener para capítulos posteriores.

A continuación, vamos a recordar la relación de recurrencia que verifican los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, la fórmula de Christoffel–Darboux, y algunos resultados sobre el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales respecto a medidas pertenecientes a la clase de Nevai, que vamos a necesitar en las siguientes secciones, además de enunciar resultados auxiliares a los cuales recurriremos para la demostración de los Teoremas 2.1 y 2.2.

Sea μ una medida de probabilidad cuyo soporte es un subconjunto infinito del intervalo $[0, 2\pi]$. Sea $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ con $\varphi_n(z) = k_n z^n +$ términos de grado menor, $k_n > 0$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a esta medida. Es bien conocido que estos polinomios verifican una relación de recurrencia de la siguiente forma

$$k_n \varphi_{n+1}(z) = k_{n+1} z \varphi_n(z) + \varphi_{n+1}(0)\varphi_n^*(z)\,, \tag{2.5}$$

o, equivalentemente,

$$k_n \varphi_{n+1}^*(z) = k_{n+1}\varphi_n^*(z) + \overline{\varphi_{n+1}(0)} z \varphi_n(z)\,.$$

Sean

$$K_n(z,\eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\eta)}$$

los polinomios núcleos asociados a μ. Denotamos por

$$K_n^{(i,j)}(z,\eta) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k^{(i)}(z)\overline{\varphi_k^{(j)}(\eta)}\,.$$

Haciendo uso de (2.5), podemos expresar $K_n(z,\eta)$ de la siguiente forma, que es conocida en la literatura como *Identidad de Christoffel-Darboux*

$$K_n(z,w) = \frac{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(w)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}}{1-\overline{w}z} \tag{2.6}$$

Supongamos que $\mu \in \mathcal{N}$. Es bien conocido el siguiente comportamiento asintótico (véase [69])

$$\frac{\varphi_{n+1}^{(k)}(z)}{\varphi_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows z \qquad , |z| > 1,\ k = 0, 1, \dots\,, \tag{2.7}$$

$$\frac{\varphi_n^{(k+1)}(z)}{n\varphi_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \frac{1}{z} \qquad , |z| > 1,\ k = 0, 1, \dots\,. \tag{2.8}$$

También queremos destacar el siguiente resultado que aparece en la demostración de [52, Teorema 4]

$$\frac{\varphi_n^*(z)}{\varphi_n(z)} \rightrightarrows 0 \qquad , |z| > 1\,, \tag{2.9}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} \rightrightarrows 0 \qquad ,|z|<1. \tag{2.10}$$

Ahora vamos a incluir algunos resultados auxiliares.

LEMA 2.1. *Si $\mu \in \mathcal{N}$ se verifica*

$$\frac{K_n^{(i,j)}(z,\xi)}{\varphi_n^{(i)}(z)\overline{\varphi_n^{(j)}(\xi)}} \rightrightarrows \frac{1}{z\overline{\xi}-1} \qquad ,|z|,|\xi|>1,\ i,j=0,1,\dots .$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. En primer lugar, de (2.8), tenemos

$$\frac{\varphi_n^{(q)}(z)}{\varphi_n^{(p)}(z)} \rightrightarrows 0 \qquad ,|z|>1,\ p>q. \tag{2.11}$$

Para $p,q=0,1,2,\dots$, se cumple

$$\frac{\varphi_n^{*\,(q)}(z)}{\varphi_n^{(p)}(z)} \rightrightarrows 0 \qquad ,|z|>1,\ p\geq q. \tag{2.12}$$

Sólo necesitamos demostrar

$$\frac{\varphi_n^{*\,(p)}(z)}{\varphi_n^{(p)}(z)} \rightrightarrows 0 \qquad ,|z|>1. \tag{2.13}$$

Para $p=1$ tenemos (2.9). Supongamos que para $p=k$ se cumple la hipótesis de inducción; entonces de

$$\frac{\varphi_n^{*\,(k+1)}(z)}{\varphi_n^{(k+1)}(z)} = \frac{\varphi_n^{(k)}(z)}{\varphi_n^{(k+1)}(z)}\left(\frac{\varphi_n^{*\,(k)}(z)}{\varphi_n^{(k)}(z)}\right)' + \frac{\varphi_n^{*\,(k)}(z)}{\varphi_n^{(k)}(z)}$$

deducimos que para $p=k+1$ también se cumple. De ésto se sigue (2.13). A continuación, usando (2.6), veamos que para $s,t=0,1,\dots$

$$K_n^{(s,t)}(z,w) = \overline{\frac{\partial^t}{\partial w^t}\overline{\frac{\partial^s}{\partial z^s}\left(\frac{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(w)}-\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}}{1-\overline{w}z}\right)}} =$$

$$\sum_{l=0}^{s}\sum_{r=0}^{t} C_s^t C_t^r \overline{\frac{\partial^{(t-r)}}{\partial w^{(t-r)}}}\,\overline{\frac{\partial^{(s-l)}}{\partial w^{(s-l)}}\frac{1}{1-\overline{w}z}}\left\{\varphi_n^{*\,(l)}(z)\overline{\varphi_n^{*\,(r)}(w)}-\varphi_n^{(l)}(z)\overline{\varphi_n^{(r)}(w)}\right\}, \tag{2.14}$$

usando (2.11) y (2.12) concluimos la demostración del Lema . ∎

Como corolario del Lema anterior y usando (2.11) obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 2.3.

$$\frac{K_n^{(i,j)}(z,\xi)}{\varphi_n^{(p)}(z)\overline{\varphi_n^{(q)}(\xi)}} \rightrightarrows 0, \ |z|,|\xi|>1,$$

para $p \geq i, q > j$ *ó* $p > i, q \geq j$.

LEMA 2.2. *Si* $\mu \in \mathcal{N}$ *entonces*

$$\frac{K_n^{(0,j)}(z,\xi)}{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^{(j)}(\xi)}} \rightrightarrows 0 \qquad , |z|<1, |\xi|>1, \ j=0,1,\dots .$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Es consecuencia de (2.10) y (2.14). ∎

LEMA 2.3. *Si* $\mu \in \mathcal{N}$*, tenemos*

$$\frac{1}{\varphi_n^{(i)}(z)} \rightrightarrows 0 \qquad , |z|>1, \ i=0,1,\dots .$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Es una consecuencia inmediata de

$$\frac{\varphi_{n+1}^{(i)}(z)}{\varphi_n^{(i)}(z)} \rightrightarrows z \qquad , |z| \geq 1 .$$

∎

El siguiente lema, que aparece en [4] nos será de gran utilidad

LEMA 2.4. *Sea* Q *una matriz* $M \times M$ *invertible (o regular), y* u, x *dos vectores columna de tamaño* M*. Se cumple la siguiente igualdad*

$$1 - x^T Q^{-1}\overline{u} = \frac{\det\left[Q - \overline{u}x^T\right]}{\det Q}.$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Consideramos las siguientes igualdades matriciales

$$\begin{pmatrix} Q & \overline{u} \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M\times M} & -Q^{-1}\overline{u} \\ (0,\dots,0) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^T & 1 - x^T Q^{-1}\overline{u} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{M\times M} & -\overline{u} \\ (0,\dots,0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \overline{u} \\ x^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q - \overline{u}x^T & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^T & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando determinantes en ambos miembros de las igualdades obtenemos el resultado. ■

Para terminar esta sección de resultados auxiliares, nos gustaría incluir el siguiente resultado, que prueba el carácter definido positivo de $\mathbb{K}_n[Z]$, matriz que usaremos en la demostración de los Teoremas 2.1 y 2.2. Para probar esta afirmación calculamos el valor de un determinante que puede ser visto como una generalización del determinante de Van der Monde, apelando a técnicas de variable compleja.

TEOREMA 2.3. *Sea $\mathbb{K}_n[Z]$ la matriz de tamaño $M \times M$ definida de la siguiente forma*

$$\begin{pmatrix} K_n(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(l_1,0)}(z_1,z_1) & \dots & K_n(z_m,z_1) & \dots & K_n^{(l_m,0)}(z_m,z_1) \\ K_n^{(0,1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(l_1,1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(0,1)}(z_m,z_1) & \dots & K_n^{(l_m,1)}(z_m,z_1) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_n^{(0,l_1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(l_1,l_1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(0,l_1)}(z_m,z_1) & \dots & K_n^{(l_m,l_1)}(z_m,z_1) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_n(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(l_1,0)}(z_1,z_m) & \dots & K_n(z_m,z_m) & \dots & K_n^{(l_m,0)}(z_m,z_m) \\ K_n^{(0,1)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(l_1,1)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(0,1)}(z_m,z_m) & \dots & K_n^{(l_m,1)}(z_m,z_m) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_n^{(0,l_m)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(l_1,l_m)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(0,l_m)}(z_m,z_m) & \dots & K_n^{(l_m,l_m)}(z_m,z_m) \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Esta matriz es definida positiva, para $n \geq M$, cuando los puntos z_i, $i = 1, \dots, m$ son distintos.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Consideremos la siguiente matriz

$$G := \begin{pmatrix} \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) & \dots & \varphi_{n-1}(z_1) \\ \varphi_0'(z_1) & \varphi_1'(z_1) & \dots & \varphi_{n-1}'(z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0^{(l_1)}(z_1) & \varphi_1^{(l_1)}(z_1) & \dots & \varphi_{n-1}^{(l_1)}(z_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(z_m) & \varphi_1(z_m) & \dots & \varphi_{n-1}(z_m) \\ \varphi_0'(z_m) & \varphi_1'(z_m) & \dots & \varphi_{n-1}'(z_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0^{(l_m)}(z_m) & \varphi_1^{(l_m)}(z_m) & \dots & \varphi_{n-1}^{(l_m)}(z_m) \end{pmatrix}$$

de modo que se cumple

$$\mathbb{K}_n[Z] = \overline{G}G^T.$$

Usando esta descomposición, si denotamos por x un vector fila de M componentes, se cumple que

$$\overline{x}\overline{G}G^T x^T = \overline{xG}(xG)^T \geq 0\,.$$

Por tanto, para demostrar que $\mathbb{K}_n[Z]$ es definida positiva, basta ver que

$$\overline{xG}(xG)^T = 0 \Rightarrow x \equiv 0$$

y esto último, es equivalente a probar que las filas de la matriz G forman un conjunto de vectores linealmente independiente.

Teniendo en cuenta que dado $n \in \mathbb{Z}_+$ podemos encontrar coeficientes $a_{n,j}$ para $0 \leq j \leq n-1$, de forma que

$$\varphi_n(z) = k_n z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j}\varphi_j(z)\,.$$

Haciendo operaciones elementales por columnas, podemos reducir el problema a demostrar que las filas de la matriz

$$\tilde{G} := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & (n-1)z_1^{n-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-l_1-1)!} z_1^{n-l_1-1} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & z_m^{n-1} \\ 0 & 1 & 2z_m & 3z_m^2 & \dots & (n-1)z_m^{n-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-l_m-1)!} z_m^{n-l_m-1} \end{pmatrix}$$

forman un conjunto linealmente independiente. Para ello vamos a seleccionar el menor principal de orden $M \times M$, que denotaremos por

$$A_m := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & (M-1)z_1^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_1-1)!} z_1^{M-l_1-1} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & z_m^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_m & 3z_m^2 & \dots & (M-1)z_m^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_m-1)!} z_m^{M-l_m-1} \end{pmatrix}$$

y vamos a considerar la siguiente función analítica

$$f(z) := \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & (M-1)z_1^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_1-1)!} z_1^{M-l_1-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & z_{m-1} & z_{m-1}^2 & z_{m-1}^3 & \dots & z_{m-1}^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_{m-1} & 3z_{m-1}^2 & \dots & (M-1)z_{m-1}^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_{m-1}-1)!} z_{m-1}^{M-l_{m-1}-1} \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \dots & z^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 & \dots & (M-1)z^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_m-1)!} z^{M-l_m-1} \end{vmatrix} . \tag{2.16}$$

Se cumple que $\det A_m = f(z_m)$, luego basta probar que $f(z_m) \neq 0$.

Para ello vamos a probar por inducción que toda función f definida de forma análoga a (2.16), se puede factorizar de la siguiente forma

$$f(z) = C \prod_{j=1}^{m-1} (z - z_j)^{(l_j+1)(l_m+1)}$$

donde C es una constante en $\mathbb{R}$. Comenzamos probando el caso $m = 1$. En este caso definimos la siguiente función analítica

$$f(z) := \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & (M-1)z_1^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_1-1)!} z_1^{M-l_1-1} \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \dots & z^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 & \dots & (M-1)z^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_2-1)!} z^{M-l_2-1} \end{vmatrix}$$

donde $M = l_1 + l_2 + 2$. Además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $l_1 \geq l_2$. Calculemos el desarrollo de Taylor de este polinomio en el punto $z = z_1$. Usando la regla de derivación de los determinantes tenemos que

$$f^{(k)}(z_1) = 0 \qquad 0 \leq k \leq (l_1 + 1)(l_2 + 1) - 1$$

Además, esta función no es idénticamente nula ya que

$$f^{((l_1+1)(l_2+1))}(z) = C \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{l_1+1} & \dots & z_1^{M-1} \\ 0 & 1 & \dots & (l_1+1)z_1^{l_1} & \dots & (M-1)z_1^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & (l_1+1)! & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_1-3)!} z_1^{M-l_1-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (M-1)!z \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (M-1)! \end{vmatrix}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante no nula.

Esto implica que $f^{((l_1+1)(l_2+1))}(z_1) \neq 0$, y además si tenemos en cuenta que

$$f^{((l_1+1)(l_2+1))+1}(z) \equiv 0$$

concluimos que $f(z) = C(z - z_1)^{(l_1+1)(l_2+1)}$, donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante no nula.

Usando este mismo razonamiento vamos a suponer que la hipótesis de inducción es cierta para $m = k$ y vamos a probar que también lo es para $m = k + 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $l_1 \geq l_2 \leq \dots \geq l_k \geq l_{k+1}$.

Denotamos la función analítica

$$f(z) := \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_1 & 3z_1^2 & \dots & (M-1)z_1^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_1)!} z_1^{M-l_1-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & z_k & z_k^2 & z_k^3 & \dots & z_k^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z_k & 3z_k^2 & \dots & (M-1)z_k^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_k)!} z_k^{M-l_k-1} \\ 1 & z & z^2 & z^3 & \dots & z^{M-1} \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 & \dots & (M-1)z^{M-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(M-1)!}{(M-l_{k+1})!} z^{M-l_{k+1}-1} \end{vmatrix}$$

Usando de nuevo la regla de derivación de los determinantes, tenemos para $j = 1, \dots, k$,

$$f^{(l)}(z_j) = 0 \qquad 0 \leq l \leq (l_j+1)(l_{k+1}+1) - 1$$

y usando la hipótesis de inducción podemos garantizar que

$$f^{(l)}(z_j) \neq 0 \qquad l = (l_j+1)(l_{k+1}+1).$$

De esto podemos concluir que

$$f(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{(l_j+1)(l_{k+1}+1)} g(z),$$

donde g es una función analítica $g(z) \not\equiv 0$. De la expresión de f como determinante deducimos que esta función es un polinomio de grado a lo más $\sum_{j=1}^{k}(l_j+1)(l_{k+1}+1)$, por lo que $g(z) \equiv$ constante $\neq 0$ y obtenemos el resultado.

OBSERVACIÓN. Hay que destacar que en la demostración anterior no hemos usado la propiedad de ortogonalidad de la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, sólo el hecho que $\forall n \geq 0$, grado $\varphi_n = n$.

■

2.2. Demostración de Resultados Principales de Asintótica Relativa. En primer lugar vamos a deducir algunas expresiones algebraicas que usaremos en la demostración de ambos teoremas.

Expresamos ψ_n en términos de $\{\varphi_j\}_{j\geq 0}$

$$\psi_n(z) = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,n}\varphi_k(z)\,. \tag{2.17}$$

Para $k = 0, \dots, n-1$

$$a_{k,n} = \int_0^{2\pi} \psi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_k(e^{i\theta})}d\mu(\theta) = -\psi_n(Z)A\varphi_k(Z)^H\,.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.17)

$$\begin{aligned}\psi_n(z) = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(z) - \psi_n(Z)A\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(Z)^H\varphi_k(z) \\ = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(z) - \psi_n(Z)AK_n(z,Z)^T.\end{aligned} \tag{2.18}$$

A continuación derivamos sucesivamente y sustituímos $z = z_1, \dots, z = z_m$, para eliminar $\psi_n(Z)$. De la expresión anterior

$$\psi_n^{(s)}(z_i) = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n^{(s)}(z_i) - \psi_n(Z)AK_n^{(s)}(z_i, Z)^T$$

para $i = 1, \dots, m,\ s = 0, 1, \dots, l_i$. De esta forma obtenemos

$$\psi_n(Z) = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(Z) - \psi_n(Z)A\mathbb{K}_n[Z]\,, \tag{2.19}$$

donde $\mathbb{K}_n[Z]$ es la matriz definida en (2.15).

De (2.19) obtenemos

$$\psi_n(Z)\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right] = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(Z)\,,$$

donde $I_{M\times M}$ denota la matriz identidad $M \times M$. Dado que $\mathbb{K}_n[Z]$ es una matriz definida positiva (Teorema 2.3), si usamos además que la matriz A es definida o semidefinida positiva. esto es suficiente para garantizar que la matriz $I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]$ tiene inversa, por lo que

$$\psi_n(Z) = \frac{\gamma_n}{k_n}\varphi_n(Z)\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]^{-1}\,.$$

Sustituímos esta expresión en (2.18), multiplicamos por $\frac{k_n}{\gamma_n}$ y dividimos por $\varphi_n(z)$. De esta forma obtenemos

$$\frac{k_n}{\gamma_n}\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = 1 - \varphi_n(Z)\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]^{-1} A\frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n(z)}^T . \tag{2.20}$$

Por otro lado, también tenemos

$$\langle \psi_n, \varphi_n\rangle = \int_0^{2\pi} \psi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}d\mu(\theta) + \psi_n(Z)A\varphi_n(Z)^H ,$$

$$\frac{k_n}{\gamma_n} = \frac{\gamma_n}{k_n} + \psi_n(Z)A\varphi_n(Z)^H .$$

Ahora, multiplicando por $\frac{k_n}{\gamma_n}$ y sustituyendo $\psi_n(Z)$, obtenemos

$$\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = 1 + \frac{k_n}{\gamma_n}\varphi_n(Z)\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]^{-1} A\varphi_n(Z)^H . \tag{2.21}$$

Vamos a expresar (2.20) y (2.21) como cociente de determinantes usando el Lema 2.4. Así

$$\frac{k_n}{\gamma_n}\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z] - A\frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n(z)}^T\varphi_n(Z)\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} \tag{2.22}$$

$$\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z] + A\varphi_n(Z)^T\varphi_n(Z)\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]}$$

$$\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_{n+1}[Z]\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} \tag{2.23}$$

Ahora, usando (2.22) y (2.23), vamos a deducir el comportamiento asintótico de $\frac{k_n}{\gamma_n}$ y $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$ para $|z| > 1$.

Si denotamos por $\vec{\xi_i} = (\xi_{i,0}, \xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,l_i})$ para $i = 1, \ldots, m$, y $\vec{\xi} = (\vec{\xi_1}, \ldots, \vec{\xi_m})$, vamos a considerar $\mathbb{K}_n[\xi]$ como la siguiente matriz $M \times M$

$$\begin{pmatrix}
K_n(\xi_{1,0},\xi_{1,0}) & \cdots & K_n^{(l_1,0)}(\xi_{1,l_1},\xi_{1,0}) & \cdots & K_n(\xi_{m,0},\xi_{1,0}) & \cdots & K_n^{(l_m,0)}(\xi_{m,l_m},\xi_{1,0}) \\
K_n^{(0,1)}(\xi_{1,0},\xi_{1,1}) & \cdots & K_n^{(l_1,1)}(\xi_{1,l_1},\xi_{1,1}) & \cdots & K_n^{(0,1)}(\xi_{m,0},\xi_{1,1}) & \cdots & K_n^{(l_m,1)}(\xi_{m,l_m},\xi_{1,1}) \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
K_n^{(0,l_1)}(\xi_{1,0},\xi_{1,l_1}) & \cdots & K_n^{(l_1,l_1)}(\xi_{1,l_1},\xi_{1,l_1}) & \cdots & K_n^{(0,l_1)}(\xi_{m,0},\xi_{1,l_1}) & \cdots & K_n^{(l_m,l_1)}(\xi_{m,l_m},\xi_{1,l_1}) \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
K_n(\xi_{1,0},\xi_{m,0}) & \cdots & K_n^{(l_1,0)}(\xi_{1,l_1},\xi_{m,0}) & \cdots & K_n(\xi_{m,0},\xi_{m,0}) & \cdots & K_n^{(l_m,0)}(\xi_{m,l_m},\xi_{m,0}) \\
K_n^{(0,1)}(\xi_{1,0},\xi_{m,1}) & \cdots & K_n^{(l_1,1)}(\xi_{1,l_1},\xi_{m,1}) & \cdots & K_n^{(0,1)}(\xi_{m,0},\xi_{m,1}) & \cdots & K_n^{(l_m,1)}(\xi_{m,l_m},\xi_{m,1}) \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
K_n^{(0,l_m)}(\xi_{1,0},\xi_{m,l_m}) & \cdots & K_n^{(l_1,l_m)}(\xi_{1,l_1},\xi_{m,l_m}) & \cdots & K_n^{(0,l_m)}(\xi_{m,0},\xi_{m,l_m}) & \cdots & K_n^{(l_m,l_m)}(\xi_{m,l_m},\xi_{m,l_m})
\end{pmatrix}.$$

Usando la notación introducida anteriormente, esta matriz puede ser descrita de la siguiente forma

$$\mathbb{K}_n[\xi] = \left(\; K_n(\xi_{1,0},\vec{\xi})^T \ldots K_n^{(l_1)}(\xi_{1,l_1},\vec{\xi})^T \ldots K_n(\xi_{m,0},\vec{\xi})^T \ldots K_n^{(l_m)}(\xi_{m,l_m},\vec{\xi})^T \; \right).$$

Podemos afirmar que esta matriz, cuando $\xi_{i,j} \neq \xi_{k,l}$, para $(i,j) \neq (k,l)$, siguiendo una técnica de demostración totalmente análoga a la que usamos para probar el Teorema 2.3, es definida positiva para $n \geq N$, donde N depende del orden de derivadas que aparecen en esta deficinión. Si usamos además que la matriz A es definida o semidefinida positiva, esto es suficiente para garantizar que la matriz $I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[\xi]$, para $n > N$ tiene inversa. Notemos que cuando $\vec{\xi_i} = (z_i, \ldots, z_i)$ para $i = 1, \ldots, m$, entonces $\mathbb{K}_n[\xi] = \mathbb{K}_n[Z]$. Denotamos mediante $\vec{z_i} = (z_i, \ldots, z_i)$ el $l_i + 1$ vector fila para $i = 1, \ldots, m$.

- **Demostración del Teorema 2.1.**

En este caso A es una matriz definida positiva. Podemos expresar (2.23) de la siguiente forma

$$\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \frac{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_{n+1}[Z]\right]}{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[Z]\right]}.$$

Vamos a analizar el comportamiento asintótico de $\frac{k_n}{\gamma_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{\det[A^{-1}+\mathbb{K}_{n+1}[Z]]}{\det[A^{-1}+\mathbb{K}_n[Z]]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det[A^{-1}+\mathbb{K}_{n+1}[\xi]]}{\det[A^{-1}+\mathbb{K}_n[\xi]]}.$$

Si introducimos la matriz diagonal

$$\Lambda_n = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\varphi_n(\xi_{1,0})},\frac{1}{\varphi_n'(\xi_{1,1})},\dots,\frac{1}{\varphi_n^{(l_1)}(\xi_{1,l_1})},\dots,\frac{1}{\varphi_n(\xi_{m,0})},\dots,\frac{1}{\varphi_n^{(l_m)}(\xi_{m,l_m})}\right),$$

tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[\overline{\Lambda_{n+1}}A^{-1}\Lambda_{n+1}+\overline{\Lambda_{n+1}}\mathbb{K}_{n+1}[\xi]\Lambda_{n+1}\right]}{\det\left[\overline{\Lambda_n}A^{-1}\Lambda_n+\overline{\Lambda_n}\mathbb{K}_n[\xi]\Lambda_n\right]}\frac{\det\left[\overline{\Lambda_n}\Lambda_n\right]}{\det\left[\overline{\Lambda_{n+1}}\Lambda_{n+1}\right]}.$$

Podemos intercambiar los límites porque tenemos convergencia uniforme.

$$= \lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[\overline{\Lambda_{n+1}}A^{-1}\Lambda_{n+1}+\overline{\Lambda_{n+1}}\mathbb{K}_{n+1}[\xi]\Lambda_{n+1}\right]}{\det\left[\overline{\Lambda_n}A^{-1}\Lambda_n+\overline{\Lambda_n}\mathbb{K}_n[\xi]\Lambda_n\right]}\frac{\det\left[\overline{\Lambda_n}\Lambda_n\right]}{\det\left[\overline{\Lambda_{n+1}}\Lambda_{n+1}\right]}.$$

Usando los Lemas 2.3 y 2.1 consideramos

$$\lim_{n\to\infty}\det\left[\overline{\Lambda_{n+1}}A^{-1}\Lambda_{n+1}+\overline{\Lambda_{n+1}}\mathbb{K}_{n+1}[\xi]\Lambda_{n+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\det\left[\overline{\Lambda_{n+1}}\mathbb{K}_{n+1}[\xi]\Lambda_{n+1}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{|\xi_{1,0}|^2-1} & \frac{1}{\xi_{1,1}\overline{\xi_{1,0}}-1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{m,l_m}\overline{\xi_{1,0}}-1}\\ \frac{1}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{1,1}}-1} & \frac{1}{|\xi_{1,1}|^2-1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{m,l_m}\overline{\xi_{1,1}}-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{1}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{m,l_m}}-1} & \frac{1}{\xi_{1,1}\overline{\xi_{m,l_m}}-1} & \cdots & \frac{1}{|\xi_{m,l_m}|^2-1} \end{vmatrix}.$$

Este determinante es distinto de cero como fue probado en [38, Lema 5].

Teniendo esto en cuenta, y usando (2.7) tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}} \prod_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=0,\dots,l_i}} |\xi_{i,j}|^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^{m}|z_i|^{l_i+1}.$$

Usando el mismo tipo de argumentos, y con la notación anterior, vamos a deducir el comportamiento asintótico de $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$.

Determinaremos, en primer lugar,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[A^{-1}+\mathbb{K}_n[Z]-\frac{K_n(z,Z)^T}{\varphi_n(z)}\varphi_n(Z)\right]}{\det\left[A^{-1}+\mathbb{K}_n[Z]\right]}. \tag{2.24}$$

Sea

$$\mathbb{T}_n[\xi] := \mathbb{K}_n[\xi] - \frac{K_n(z,\vec{\xi})^T}{\varphi_n(z)}\varphi_n(\vec{\xi}),$$

de manera que (2.24) es igual a

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[A^{-1}+\mathbb{T}_n[\xi]\right]}{\det\left[A^{-1}+\mathbb{K}_n[\xi]\right]}.$$

Si multiplicamos y dividimos por $\det[\overline{\Lambda_n}\Lambda_n]$

$$=\lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[\overline{\Lambda_n}A^{-1}\Lambda_n+\overline{\Lambda_n}\mathbb{T}_n[\xi]\Lambda_n\right]}{\det\left[\overline{\Lambda_n}I_{M\times M}\Lambda_n+\overline{\Lambda_n}\mathbb{K}_n[Z]\Lambda_n\right]}.$$

Podemos intercambiar los límites porque tenemos convergencia uniforme

$$=\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[\overline{\Lambda_n}\mathbb{T}_n[\xi]\Lambda_n\right]}{\det\left[\overline{\Lambda_n}\mathbb{K}_n[Z]\Lambda_n\right]}$$

$$
= \lim_{\substack{\vec{\xi_i}\to\vec{z_i}\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}} \frac{\det\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{|\xi_{1,0}|^2-1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{m,l_m}\overline{\xi_{1,0}}-1} \\ \frac{1}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{1,1}}-1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{m,l_m}\overline{\xi_{1,1}}-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{m,l_m}}-1} & \cdots & \frac{1}{|\xi_{m,l_m}|^2-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{z\overline{\xi_{1,0}}-1} & \cdots & \frac{1}{z\overline{\xi_{1,0}}-1} \\ \frac{1}{z\overline{\xi_{1,1}}-1} & \cdots & \frac{1}{z\overline{\xi_{1,1}}-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{z\overline{\xi_{m,l_m}}-1} & \cdots & \frac{1}{z\overline{\xi_{m,l_m}}-1} \end{pmatrix}\right]}{\begin{vmatrix} \frac{1}{|\xi_{1,0}|^2-1} & \frac{1}{\xi_{1,1}\overline{\xi_{1,0}}-1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{m,l_m}\overline{\xi_{1,0}}-1} \\ \frac{1}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{1,1}}-1} & \frac{1}{|\xi_{1,1}|^2-1} & \cdots & \frac{1}{\xi_{m,l_m}\overline{\xi_{1,1}}-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{m,l_m}}-1} & \frac{1}{\xi_{1,1}\overline{\xi_{m,l_m}}-1} & \cdots & \frac{1}{|\xi_{m,l_m}|^2-1} \end{vmatrix}},
$$

$$
= \lim_{\substack{\vec{\xi_i}\to\vec{z_i}\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}} \prod_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=0,\dots,l_i}} \frac{\overline{\xi_{i,j}}(z-\xi_{i,j})}{z\overline{\xi_{i,j}}-1} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{z_i}(z-z_i)}{(z\overline{z_i}-1)}\right)^{l_i+1}.
$$

Junto con (2.1) y (2.22) deducimos que

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{z_i}(z-z_i)}{|z_i|(z\overline{z_i}-1)}\right)^{l_i+1};
$$

lo que coincide con (2.2) para $k=0$. Para cualquier k el resultado se sigue por inducción, teniendo en cuenta la siguiente igualdad

$$
\frac{q}{q'}\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q},
$$

donde p y q son funciones derivables. Podemos demostrar también que

$$
\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} \rightrightarrows 0 \qquad , |z|<1 .
$$

De (2.20) se sigue que

$$
\frac{k_n}{\gamma_n}\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} - \varphi_n(Z)\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]^{-1} A\frac{K_n(z,Z)^T}{\varphi_n^*(z)} .
$$

Usando el Lema 2.4 obtenemos

$$
\frac{k_n}{\gamma_n}\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} - 1 + \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z] - A\frac{K_n(z,Z)^T}{\varphi_n^*(z)}\varphi_n(Z)\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} .
$$

Ahora bien,

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[Z] - \frac{K_n(z,Z)^T}{\varphi_n^*(z)}\varphi_n(Z)\right]}{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[Z]\right]}
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{\xi_i \to z_i \\ i=1,\dots,m \\ \xi_{i,j} \neq \xi_{i,l} \\ j\neq l}} \frac{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[\xi] - \frac{K_n(z,\vec{\xi})^T}{\varphi_n^*(z)}\varphi_n(\vec{\xi})\right]}{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[\xi]\right]} .$$

Usando el mismo tipo de argumentos que antes y teniendo en cuenta el Lema 2.2

$$\frac{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[Z] - \frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n^*(z)}^T \varphi_n(Z)\right]}{\det\left[A^{-1} + \mathbb{K}_n[Z]\right]} \rightrightarrows 1 \qquad , |z| < 1 .$$

De este modo queda probado el Teorema 2.1.

- **Demostración del Teorema 2.2**

En este caso A es una $M \times M$ matriz diagonal por bloques semidefinida positiva. Denotemos

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{l_1+1\times l_2+1} & \cdots & 0_{l_1+1\times l_m+1} \\ 0_{l_2+1\times l_1+1} & A_2 & \cdots & 0_{l_2+1\times l_m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{l_m+1\times l_1+1} & 0_{l_m+1\times l_2+1} & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

donde A_i es una $(l_i+1) \times (l_i+1)$ matriz semidefinida positiva. Denotemos por n_i el rango de esta matriz y $N = \sum_{i=1}^m n_i$. Existe una matriz $M \times M$, invertible y diagonal por bloques

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0_{l_1+1\times l_2+1} & \cdots & 0_{l_1+1\times l_m+1} \\ 0_{l_2+1\times l_1+1} & P_2 & \cdots & 0_{l_2+1\times l_m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_{l_m+1\times l_1+1} & 0_{l_m+1\times l_2+1} & \cdots & P_m \end{pmatrix}$$

donde P_i es una matriz triangular superior, tal que $A_i = P_i^H A_i^c P_i$ y A_i^c es la matriz canónica equivalente a A_i, es decir una matriz diagonal, con n_i elementos iguales a 1 y $l_i + 1 - n_i$ iguales a cero. Esta matriz siempre la podemos conseguir haciendo operaciones elementales en la matriz inicial, las que hacemos por filas, hacemos las conjugadas de éstas por columnas y en este caso debido a que A_i es semidefinida positiva, podemos garantizar que no necesitamos permutar filas, puesto que si nos aparece un pivote igual a cero todos los elementos debajo de él también serán iguales a cero. La matriz P es invertible ya que es el resultado de hacer transformaciones elementales sucesivas a la matriz identidad. De este modo tenemos que

$$A_c := \begin{pmatrix} A_1^c & 0_{l_1+1\times l_2+1} & \dots & 0_{l_1+1\times l_m+1} \\ 0_{l_2+1\times l_1+1} & A_2^c & \dots & 0_{l_2+1\times l_m+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{l_m+1\times l_1+1} & 0_{l_m+1\times l_2+1} & \dots & A_m^c \end{pmatrix}$$

y $A = P^H A_c P$. Teniendo en cuenta la estructura de la matriz P así como las propiedades de los determinantes, se cumple

$$\begin{aligned} &\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right] \\ &\quad = \det[P^H]\det\left[P^{H^{-1}} + A_cP\mathbb{K}_n[Z]\right] = \det\left[I_{M\times M} + A_cP\mathbb{K}_n[Z]P^H\right] \\ &\qquad = \det\left[I_{N\times N} + \tilde{A}_cP\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right] = \det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right] \end{aligned}$$

donde $\tilde{A}_c$ es ahora una matriz $N\times M$

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1^c & 0_{n_1\times l_2+1} & \dots & 0_{n_1\times l_m+1} \\ 0_{n_2\times l_1+1} & \tilde{A}_2^c & \dots & 0_{n_2\times l_m+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{n_m\times l_1+1} & 0_{n_m\times l_2+1} & \dots & \tilde{A}_m^c \end{pmatrix}.$$

$\tilde{A}_i^c$ es la matriz $n_i\times(l_i+1)$ que resulta de A_i^c cuando eliminamos las filas de ceros y $\tilde{P}$ es una matriz $N\times M$ diagonal por bloques

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 & 0_{n_1\times(l_2+1)} & \dots & 0_{n_1\times(l_m+1)} \\ 0_{n_2\times(l_1+1)} & \tilde{P}_2 & \dots & 0_{n_2\times(l_m+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{n_m\times(l_1+1)} & 0_{n_m\times(l_2+1)} & \dots & \tilde{P}_m \end{pmatrix}$$

siendo $\tilde{P}_i$ la matriz de tamaño $n_i\times(l_i+1)$ que obtenemos de P_i cuando eliminamos la fila k-ésima si hemos eliminado de A_i^c la fila k-ésima. Por ejemplo, si hemos eliminado de A_i^c la segunda y cuarta fila entonces eliminamos de P_i la segunda y cuarta fila.

Denotemos

$$\tilde{P}_i = \begin{pmatrix} a_i^{1,0} & a_i^{1,1} & \dots & a_i^{1,l_i} \\ a_i^{2,0} & a_i^{2,1} & \dots & a_i^{2,l_i} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_i^{n_i,0} & a_i^{n_i,1} & \dots & a_i^{n_i,l_i} \end{pmatrix}.$$

Para la fila j-ésima de $\tilde{P}_i$, $j = 1, \ldots, n_i$, denotamos por $p_{i,j}$ el índice tal que

$$a_i^{j,p_{i,j}} \neq 0 \quad a_i^{j,k} = 0, \quad p_{i,j} < k \leq l_i.$$

Usando esta notación tenemos que

$$\tilde{\mathbb{K}}_n[Z] := \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H$$

es una matriz $N \times N$ que podemos describir por bloques. El elemento (k,l) de esta matriz es de tamaño $n_k \times n_l$ para $k,l = 1,\ldots,m$, y lo podemos escribir de la siguiente forma

$$\left(\sum_{\substack{i=0,\ldots,p_{k,r} \\ j=0,\ldots,p_{l,s}}} a_k^{r,i} K_n^{(j,i)}(z_l, z_k)\overline{a_l^{s,j}} \right)_{\substack{r=1,\ldots,n_k \\ s=1,\ldots,n_l}} .$$

Ahora introducimos una nueva matriz de tamaño $N \times N$ que denotamos por $\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]$, con la misma estructura por bloques que la anterior $\tilde{\mathbb{K}}_n[Z]$. Describimos el bloque (k,l) de tamaño $n_k \times n_l$ para $k,l = 1,\ldots,m$, de la siguiente forma

$$\left(\sum_{\substack{i=0,\ldots,p_{k,r} \\ j=0,\ldots,p_{l,s}}} a_k^{r,i} K_n^{(j,i)}(\xi_{l,s-1}, \xi_{k,r-1})\overline{a_l^{s,j}} \right)_{\substack{r=1,\ldots,n_k \\ s=1,\ldots,n_l}} ,$$

Siguiendo una notación similar al caso anterior $\vec{\xi_i} = (\xi_{i,0}, \xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i-1})$ para $i = 1,\ldots,m$, notemos que cuando $\vec{\xi_i} = (z_i,\ldots,z_i)$ para $i = 1,\ldots,m$, entonces $\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi] = \tilde{\mathbb{K}}_n[Z]$. Denotamos por $\vec{z_i} = (z_i,\ldots,z_i)$ el vector fila de dimensión n_i para $i = 1,\ldots,m$.

También consideramos la siguiente matriz diagonal

$$F_n = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\varphi_n^{(p_{1,1})}(\xi_{1,0})} \cdots \frac{1}{\varphi_n^{(p_{1,n_1})}(\xi_{1,n_1-1})} \cdots \frac{1}{\varphi_n^{(p_{m,1})}(\xi_{m,0})} \cdots \frac{1}{\varphi_n^{(p_{m,n_m})}(\xi_{m,n_m-1})} \right).$$

Ahora podemos obtener el comportamiento asintótico de $\frac{k_n}{\gamma_n}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[I_{M\times M}+A\mathbb{K}_{n+1}[Z]\right]}{\det\left[I_{M\times M}+A\mathbb{K}_n[Z]\right]}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[I_{N\times N}+\tilde{P}\mathbb{K}_{n+1}[Z]\tilde{P}^H\right]}{\det\left[I_{N\times N}+\tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right]} = \lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\ldots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[I_{N\times N}+\tilde{\mathbb{K}}_{n+1}[\xi]\right]}{\det\left[I_{N\times N}+\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]\right]}\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\ldots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1}+\overline{F_{n+1}}\tilde{\mathbb{K}}_{n+1}[\xi]F_{n+1}\right]}{\det\left[\overline{F_n}F_n+\overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right]}\frac{\det\left[\overline{F_n}F_n\right]}{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1}\right]}.
\end{aligned}
$$

Podemos intercambiar los límites porque tenemos convergencia uniforme y la anterior expresión queda de la siguiente forma

$$
\lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\ldots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1}+\overline{F_{n+1}}\tilde{\mathbb{K}}_{n+1}[\xi]F_{n+1}\right]}{\det\left[\overline{F_n}F_n+\overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right]}\frac{\det\left[\overline{F_n}F_n\right]}{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1}\right]}.
$$

Teniendo en cuenta el Corolario 2.3

$$
\lim_{n\to\infty}\det\left[\overline{F_n}F_n+\overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right] = \lim_{n\to\infty}\det\left[\overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right]
$$

$$
= \begin{vmatrix}
\frac{|a_1^{1,p_{1,1}}|^2}{|\xi_{1,0}|^2-1} & \frac{a_1^{1,p_{1,1}}\overline{a_1^{2,p_{1,2}}}}{\xi_{1,1}\overline{\xi_{1,0}}-1} & \cdots & \frac{a_1^{1,p_{1,1}}\overline{a_m^{m,p_{m,m}}}}{\xi_{m,n_m-1}\overline{\xi_{1,0}}-1}\\
\frac{a_1^{2,p_{1,2}}\overline{a_1^{1,p_{1,1}}}}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{1,1}}-1} & \frac{|a_1^{2,p_{1,2}}|^2}{|\xi_{1,1}|^2-1} & \cdots & \frac{a_1^{2,p_{1,2}}\overline{a_m^{m,p_{m,m}}}}{\xi_{m,n_m-1}\overline{\xi_{1,1}}-1}\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
\frac{a_m^{m,p_{m,m}}\overline{a_1^{1,p_{1,1}}}}{\xi_{1,0}\overline{\xi_{m,n_m-1}}-1} & \frac{a_m^{m,p_{m,m}}\overline{a_1^{2,p_{1,2}}}}{\xi_{1,1}\overline{\xi_{m,n_m-1}}-1} & \cdots & \frac{|a_m^{m,p_{m,m}}|^2}{|\xi_{m,n_m-1}|^2-1}
\end{vmatrix}.
$$

Este determinante es distinto de cero como ha sido probado en [38, Lema 5]. Teniendo en cuenta el anterior resultado y usando (2.7) tenemos

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \lim_{\substack{\vec{\xi}_i\to\vec{z}_i\\ i=1,\ldots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\prod_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=0,\ldots,n_i-1}}|\xi_{i,j}|^2,
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^{m}|z_i|^{n_i}.
$$

Usando el mismo tipo de argumentos vamos a calcular el comportamiento asintótico de $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$.
Para comenzar, vamos a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\left[\mathbb{K}_n[Z] - \frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n(z)}^T \varphi_n(Z)\right]\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\left[\mathbb{K}_n[Z] - \frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n(z)}^T \varphi_n(Z)\right]\tilde{P}^H\right]}{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right]}.$$

Consideramos

$$\tilde{\mathbb{T}}_n[Z] := \tilde{P}\left[\mathbb{K}_n[Z] - \frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n(z)}^T \varphi_n(Z)\right]\tilde{P}^H$$

una matriz de tamaño $N\times N$ que puede ser descrita por bloques. El (k,l) elemento de esta matriz es de tamaño $n_k \times n_l$ para $k,l = 1,\dots,m$ y lo podemos escribir de la siguiente forma

$$\left(\sum_{\substack{i=0,\dots,p_{k,r}\\ j=0,\dots,p_{l,s}}} a_k^{r,i}\left(K_n^{(j,i)}(z_l,z_k) - \frac{K_n^{(0,i)}(z,z_k)}{\varphi_n(z)}\varphi_n^{(j)}(z_l)\right)\overline{a_l^{s,j}}\right)_{\substack{r=1,\dots,n_k\\ s=1,\dots,n_l}}.$$

Consideramos una matriz de tamaño $N\times N$ que denotamos por $\tilde{\mathbb{T}}_n[\xi]$, que tiene la misma estructura por bloques que $\tilde{\mathbb{T}}_n[Z]$. Describimos el bloque (k,l) de dimensión $n_k\times n_l$ para $k,l=1,\dots,m$, de la siguiente forma

$$\left(\sum_{\substack{i=0,\dots,p_{k,r}\\ j=0,\dots,p_{l,s}}} a_k^{r,i}\left(K_n^{(j,i)}(\xi_{l,s-1},\xi_{k,r-1}) - \frac{K_n^{(0,i)}(z,\xi_{k,r-1})}{\varphi_n(z)}\varphi_n^{(j)}(\xi_{l,s-1})\right)\overline{a_l^{s,j}}\right)_{\substack{r=1,\dots,n_k\\ s=1,\dots,n_l}}.$$

Siguiendo una notación similar a la del caso anterior

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\left[\mathbb{K}_n[Z] - \frac{K_n(z,Z)}{\varphi_n(z)}^T \varphi_n(Z)\right]\tilde{P}^H\right]}{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{\xi_i\to z_i \\ i=1,\ldots,m \\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l} \\ j\neq l}} \frac{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{\mathbb{T}}_n[\xi]\right]}{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{\mathbb{K}}_n[Z]\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{\xi_i\to z_i \\ i=1,\ldots,m \\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l} \\ j\neq l}} \frac{\det\left[\overline{F_n} I_{N\times N} F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{T}}_n[\xi] F_n\right]}{\det\left[\overline{F_n} I_{N\times N} F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[Z] F_n\right]}.$$

Si intercambiamos los límites, usando la convergencia uniforme, y simplificamos las constantes que aparecen en el numerador y denominador, obtenemos

$$= \lim_{\substack{\xi_i\to z_i \\ i=1,\ldots,m \\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l} \\ j\neq l}} \lim_{n\to\infty} \frac{\det\left[\overline{F_n} I_{N\times N} F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{T}}_n[\xi] F_n\right]}{\det\left[\overline{F_n} I_{N\times N} F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[Z] C_n\right]}$$

$$= \lim_{\substack{\xi_i\to z_i \\ i=1,\ldots,m \\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l} \\ j\neq l}} \prod_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=0,\ldots,n_i-1}} \frac{\overline{\xi_{i,j}}(z-\xi_{i,j})}{z\overline{\xi_{i,j}}-1} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{z_i}(z-z_i)}{(z\overline{z_i}-1)}\right)^{n_i}.$$

Junto con (2.3) y (2.22) deducimos de forma inmediata

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\overline{z_i}(z-z_i)}{|z_i|(z\overline{z_i}-1)}\right)^{n_i},$$

que coincide con (2.4) para $k=0$. Para cualquier k el resultado se sigue por inducción como en el Teorema 2.1. Usando el mismo tipo de argumentos obtenemos

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n^*(z)} \rightrightarrows 0 \qquad , |z|<1.$$

OBSERVACIÓN. La asintótica relativa de ψ_n con respecto a φ_n implica que los puntos z_i para $i=1,\ldots,m$, dependiendo en qué caso estemos, atraen l_i+1 o

n_i ceros de ψ_n para n suficientemente grande. El resto de los ceros se acumulan en el disco unidad.

3. Enunciado de Resultados de Asintótica Fuerte

Vamos a considerar $d\mu(\theta) = p(\theta)d\theta$ donde $p(\theta)$ es una función positiva e integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$ que satisface la condición de Szegő:

$$\int_0^{2\pi} \ln p(\theta)d\theta > -\infty .$$

Denotamos por $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ con $\varphi_n(z) = k_n z^n +$ términos de menor grado, $k_n > 0$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la función de peso $p(\theta)$

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}p(\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}.$$

Para facilitar la lectura, vamos a enunciar algunos resultados de asintótica conocidos para esta sucesión de polinomios y de los cuales vamos a hacer uso.

Es bien conocido que podemos definir la siguiente función [75](llamada función de Szegő):

$$D_p(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} \ln p(\theta)d\theta\right\}$$

que verifica

a) $D_p(z) \in H_2$

b) $D_p(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} D_p(re^{i\theta})$ existe casi siempre y $|D_p(e^{i\theta})|^2 = p(\theta)$

c) $D_p(z) \neq 0, \qquad |z| < 1, D_p(0) > 0$

Tenemos la siguiente asintótica fuerte para $\{\varphi_n\}$ (ver [75], Teoremas 12.1.2 y 12.1.4)

a) <u>En la región $\{z, |z| > 1\}$</u>

$$\varphi_n(z) = \frac{z^n}{\overline{D_p(1/\overline{z})}}[1 + o(1)] \tag{3.1}$$

Donde $o(1)$ se cumple uniformemente en subconjuntos compactos de esta región.

b) En el soporte

$$\varphi_n(e^{i\theta}) = \frac{e^{in\theta}}{\overline{D_p(e^{i\theta})}} + o(1) \tag{3.2}$$

donde $o(1)$ debe ser entendido en el sentido de la convergencia de L_p^2.

c) El coeficiente principal

$$k_n = D_p(0) + o(1)\,.$$

Si combinamos estos resultados con los Teoremas 2.1 y 2.2, obtenemos como consecuencia inmediata la asintótica fuerte de los polinomios ortogonales Sobolev fuera del soporte de la medida de ortogonalidad.

COROLARIO 3.1. *Suponiendo que estamos en las hipótesis del Teorema 2.1 y la medida $d\mu = p(\theta)d\theta$ satisface la condición de Szegő, se cumple*

$$\psi_n(z) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\overline{z_j}(z - z_j)}{|z_j|(z\overline{z_j} - 1)} \right)^{l_j+1} \frac{z^n}{\overline{D_p(1/\bar{z})}} \left[1 + o(1)\right]$$

uniformemente para $z \in K \subset \left[\{z : |z| > 1\} \setminus \{z_j\}_{j=1}^{m}\right]$.

COROLARIO 3.2. *Suponiendo que estamos en las hipótesis del Teorema 2.2 y la medida $d\mu = p(\theta)d\theta$ satisface la condición de Szegő, se cumple*

$$\psi_n(z) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\overline{z_j}(z - z_j)}{|z_j|(z\overline{z_j} - 1)} \right)^{n_j} \frac{z^n}{\overline{D_p(1/\bar{z})}} \left[1 + o(1)\right]$$

uniformemente para $z \in K \subset \{z : |z| > 1\} \setminus \{z_j\}_{j=1}^{m}$.

Además, obtenemos el siguiente resultado acerca del comportamiento asintótico fuerte en el soporte de la medida para la sucesión de polinomios ortogonales de Sobolev

TEOREMA 3.1. *Sea $p(\theta)$ una función positiva e integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$ que verifica la condición de Szegő*

$$\int_0^{2\pi} \ln p(\theta) d\theta > -\infty\,.$$

Sea $\{\psi_n\}_{n\geq 0}$ *con* $\psi_n(z) = \gamma_n z^n +$ *términos de menor grado,* $\gamma_n > 0$*, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a* (1.1). *Se cumple el siguiente comportamiento asintótico para* $\{\psi_n\}_{n\geq 0}$*:*

a) <u>*En el soporte de la medida*</u>

$$\left\| \psi_n(e^{i\theta}) - \beta(z)\frac{e^{in\theta}}{D_p(e^{i\theta})} \right\| = o(1)$$

donde $\|.\|$ *denota la norma en* $L^2(p(\theta)d\theta, [-\pi, \pi])$ *y*

$$\beta(z) := \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{z - z_j}{|z_j|(z - \frac{1}{\bar{z}_j})} \right)^{m_j}$$

donde $m_j = l_j + 1$ *si* A *es una matriz hermitiana definida positiva y* $m_j = n_j$ *si* A *es una matriz hermitiana semidefinida positiva y diagonal por bloques.*

b) <u>*En los puntos de masa* $\{z_j\}_{j=1}^{m}$</u> *(si* A *es una matriz hermitiana definida positiva).*

$$G^H A^T \begin{pmatrix} \psi_n(z_1) \\ \vdots \\ \psi_n^{(l_1)}(z_1) \\ \vdots \\ \psi_n(z_m) \\ \vdots \\ \psi_n^{(l_m)}(z_m) \end{pmatrix} = -D_p(0) \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{|z_i|^{l_i+1}} \begin{pmatrix} h_{n,0}(\frac{1}{\bar{z}_1}) \\ \vdots \\ (l_1)! h_{n,l_1}^{(l_1)}(\frac{1}{\bar{z}_1}) \\ \vdots \\ h_{n,0}(\frac{1}{\bar{z}_m}) \\ \vdots \\ (l_m)! h_{n,l_m}^{(l_m)}(\frac{1}{\bar{z}_m}) \end{pmatrix} [1 + o(1)]$$

donde

$$h_{n,k}(w) = 2\pi w^{n-M+k} \frac{D_p(w)}{D_p(0)} \prod_{j=1}^{m} (w - z_j)^{l_j+1}$$

y se define la matriz G *de la siguiente forma*

$$G = [G_1, G_2, \ldots, G_m]$$

donde G_i *es una matriz de dimensión* $M \times (l_i + 1)$ *dada por*

(i) $G_i(r, s) := 0$
si $1 \leq r \leq \sum_{j=1}^{i-1}(l_j + 1) + l_i + 1 - s$

(ii)

$$G_i(r,s) := \binom{r-1}{l_i+1-s}(l_i+1-s)!(\frac{-1}{z_i})^{l_i+1-s} g_i^{(r-1-(l_i+1-s))}(z_i)$$

si $\sum_{j=1}^{i-1}(l_j+1)+l_i+1-s < r \leq \sum_{j=1}^{i}(l_j+1)$.

y

$$g_i(z) := \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m}\left(\frac{1}{z_j}(z_j-z)\right)^{l_j+1}.$$

El método de la demostración del Teorema 3.1 está basado en la investigación de los coeficientes de una modificación polinómica de los polinomios ortogonales de Sobolev en términos de los polinomios ortogonales

LEMA 3.1. *Consideremos* $\left\{\hat{\psi}_n\right\}_{n\geq 0}$, *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al producto escalar* (1.1). *Sea* $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$, *la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a* μ. *Se cumple*

$$w_M(z)\hat{\psi}_n(z) = \phi_{n+M}(z) + \sum_{j=1}^{M} a_{n,j}\phi_{n+M-j}(z) + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j} z^{M-j}\phi_n^*(z) \qquad (3.3)$$

donde $w_M(z) = \prod_{j=1}^{m}(z-\frac{1}{\overline{z}_j})^{l_j+1}$ *y el grado de* w_M *es igual a* M .
Además, existen los límites

$$\begin{array}{ll} \lim_{n\to\infty} a_{n,j} & \textit{para } 1\leq j\leq M, \\ \lim_{n\to\infty} b_{n,j} & = 0 \ \ \textit{para } 1\leq j\leq M. \end{array}$$

3.1. Demostración de Resultados Principales.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.1. La demostración viene dada en tres pasos.
1. $\{z^M\phi_n(z),\ldots,\phi_n(z), z^{M-1}\phi_n^*(z),\ldots,\phi_n^*(z)\}$, para $n > M$, es un conjunto linealmente independiente. En efecto, consideremos la siguiente identidad

$$\sum_{j=0}^{M} a_{n,j} z^{M-j}\phi_n(z) + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j} z^{M-j}\phi_n^*(z) = 0\,,$$

o, de forma equivalente,

$$\left(\sum_{j=0}^{M} a_{n,j} z^{M-j}\right)\phi_n(z) = -\left(\sum_{j=1}^{M} b_{n,j} z^{M-j}\right)\phi_n^*(z)\,.$$

Teniendo en cuenta que $\{\phi_n\}$ y $\{\phi_n^*\}$ no poseen raíces comunes se sigue el resultado. También se cumple

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{M} a_{n,j}e^{i(M-j)\theta}\phi_n(e^{i\theta})+\sum_{j=1}^{M} b_{n,j}e^{i(M-j)\theta}\phi_n^*(e^{i\theta})\right)\overline{e^{ik\theta}}p(\theta)d\theta=0 \tag{3.4}$$

para $M \le k < n$.

2. Imponemos que

$$q_n(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M} a_{n,j}\phi_{n+M-j}(z)+\sum_{j=1}^{M} b_{n,j}z^{M-j}\phi_n^*(z)}{w_M(z)} \tag{3.5}$$

sea un polinomio. Para hacer esto tenemos M ecuaciones lineales homogéneas en las variables $\{a_{n,j}\}$, $j=0,\ldots,M$ y $\{b_{n,j}\}$, $j=1,\ldots,M$.

También imponemos que

$$0=\langle z^k,q_n(z)\rangle \qquad k=0,\ldots,M-1\,. \tag{3.6}$$

Podemos garantizar una solución no trivial para (3.5) y (3.6) porque tenemos $2M$ ecuaciones lineales homogéneas y $2M+1$ variables. Esta solución, usando que $\{z^M\phi_n(z),\ldots,\phi_n(z),\phi_n^*(z),\ldots,z^{M-1}\phi_n^*(z)\}$ es linealmente independiente, nos da un polinomio no nulo q_n. Usando (3.4), también se cumple

$$\begin{aligned}\langle q_n,z^k\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)^{l_j+1}\rangle &= \int_0^{2\pi} q_n(e^{i\theta})\overline{e^{ik\theta}\prod_{j=1}^{m}(e^{i\theta}-z_j)^{l_j+1}}p(\theta)d\theta\\ &=\int_0^{2\pi} q_n(e^{i\theta})\prod_{j=1}^{m}(1-e^{i\theta}\overline{z_j})^{l_j+1}\overline{e^{i(k+M)\theta}}p(\theta)d\theta=0\end{aligned}$$

para $M \le k+M < n$. Esto implica que q_n es, salvo un factor constante, $\hat{\psi}_n$ y así $a_{n,0}\neq 0$. Tomando la normalización $a_{n,0}=1$ y usando (2.5) se cumple (3.3).

3. Para probar la existencia de límite para las sucesiones $a_{n,j},b_{n,j}$ para $j=1,\ldots,M$, seguimos la técnica usada en [39]. En primer lugar, probemos que la sucesión $\{a_{n,j},b_{n,j}\}$ para $j=1,\ldots,M$, está acotada uniformemente. Supongamos que esto no es cierto y consideremos

$$a_{n,0}^{\sharp}=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\left(|a_{n,j}|+|b_{n,j}|\right)}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_n(z) &:= \tfrac{w_M(z)\hat{\psi}_n(z)}{\phi_n(z)} \\ &= \tfrac{\phi_{n+M}(z)}{\phi_n(z)} + \sum_{j=1}^{M} a_{n,j} \tfrac{\phi_{n+M-j}(z)}{\phi_n(z)} + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j} z^{M-j} \tfrac{\phi_n^*(z)}{\phi_n(z)}. \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} \Omega_n^\sharp(z) &:= a_{n,0}^\sharp \Omega_n(z) \\ &= a_{n,0}^\sharp \tfrac{\phi_{n+M}(z)}{\phi_n(z)} + \sum_{j=1}^{M} a_{n,j}^\sharp \tfrac{\phi_{n+M-j}(z)}{\phi_n(z)} + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j}^\sharp z^{M-j} \tfrac{\phi_n^*(z)}{\phi_n(z)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $a_{n,j}^\sharp = a_{n,0}^\sharp a_{n,j}$ y $b_{n,j}^\sharp = a_{n,0}^\sharp b_{n,j}$ para $j = 1, \ldots, M$.

Esta nueva sucesión $\{a_{n,j}^\sharp, b_{n,j}^\sharp\}$ para $j = 1, \ldots, M$ está uniformemente acotada.

Sea Λ un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que para $j = 1, \ldots, M$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} a_{n,j}^\sharp &= a_j^\sharp\,, \\ \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} b_{n,j}^\sharp &= b_j^\sharp\,, \\ \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} a_{n,0}^\sharp &= 0\,. \end{aligned}$$

Tomando el límite en (3.7), para $|z| > 1$ cuando $n \to \infty, n \in \Lambda$,

$$0 = \sum_{j=1}^{M} a_j^\sharp z^{M-j} \qquad , |z| > 1\,.$$

Consideremos, a continuación,

$$H_n(z) := \frac{w_M(z)\hat{\psi}_n(z)}{\phi_n^*(z)}$$

y

$$\begin{aligned} H_n^\sharp(z) &:= a_{n,0}^\sharp H_n(z) \\ &= a_{n,0}^\sharp \tfrac{\phi_{n+M}(z)}{\phi_n^*(z)} + \sum_{j=1}^{M} a_{n,j}^\sharp \tfrac{\phi_{n+M-j}(z)}{\phi_n^*(z)} + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j}^\sharp z^{M-j}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tomando el límite en (3.8) cuando $n \to \infty, n \in \Lambda$, para $|z| < 1$

$$0 = \sum_{j=1}^{M} b_j^\sharp z^{M-j} \qquad , |z| < 1\,.$$

Si tenemos en cuenta que

$$|a_{n,0}^\sharp| + \sum_{j=1}^{M} \left(|a_{n,j}^\sharp| + |b_{n,j}^\sharp|\right) = 1\,,$$

entonces está claro que

$$\sum_{j=1}^{M}\left(|a_j^\sharp| + |b_j^\sharp|\right) = 1\,,$$

lo que nos da una contradicción.

Concretamente, esto implica que $\{a_{n,j}\}, \{b_{n,j}\}$, para $j = 1, \ldots, M$, están uniformemente acotadas. Para probar la existencia de estos límites sólo necesitamos probar la unicidad de los puntos de acumulación para cada $j = 1, \ldots, M$.
Sea Λ un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que para $j = 1, \ldots, M$, existen los límites

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} a_{n,j} &= a_j, \\ \lim_{n\to\infty, n\in\Lambda} b_{n,j} &= b_j. \end{aligned}$$

Tomando $\lim\limits_{n\to\infty, n\in\Lambda} \Omega_n(z)$ para $|z| > 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty, n\in\Lambda} H_n(z)$ para $|z| < 1$ se obtiene

$$\prod_{j=1}^{m}(z - \frac{1}{\bar{z}_j})^{l_j+1-m_j}(z - z_j)^{m_j} = z^M + \sum_{n=1}^{M} a_j z^{M-j} \tag{3.9}$$

$$0 = \sum_{n=1}^{M} b_j z^{M-j} \tag{3.10}$$

donde $m_j = l_j + 1$ si A es una matriz hermitiana definida positiva y $m_j = n_j$ si A es una matriz hermitiana semidefinida positiva y diagonal por bloques. Estas dos ecuaciones determinan unívocamente $\{a_j, b_j\}$ para $j = 1, \ldots, M$. ■

<u>Demostración del Teorema 3.1</u>. En primer lugar vamos a deducir la asintótica fuerte en el intervalo $[0, 2\pi]$. Volvemos a la ecuación (3.3) y haciendo $z = e^{i\theta}$ tenemos

$$w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta}) = \phi_{n+M}(e^{i\theta}) + \sum_{j=1}^{M} a_{n,j}\phi_{n+M-j}(e^{i\theta}) + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j}e^{i(M-j)\theta}\phi_n^*(e^{i\theta})\,.$$

Ahora, si usamos la asintótica fuerte de ϕ_n en el intervalo $[0, 2\pi]$ donde $o(1)$ es en el sentido de la norma asociada a $L_{2,p(\theta)d\theta}$, así como la existencia de los límites

$\lim a_{n,j} = a_j$, y $\lim b_{n,j} = 0$,(Lema 3.1), entonces se cumple

$$\prod_{j=1}^{m}(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_j})^{l_j+1}\hat{\psi}_n(e^{i\theta}) = \left(e^{iM\theta} + \sum_{j=1}^{m} a_j e^{i(M-j)\theta}\right)\left(\frac{e^{in\theta}}{D_p(0)\overline{D_p(e^{i\theta})}}\right) + o(1).$$

Ahora si usamos (3.9) se cumple

$$\hat{\psi}_n(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{e^{i\theta} - z_j}{e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_j}}\right)^{m_j} \frac{e^{in\theta}}{D_p(0)\overline{D_p(e^{i\theta})}} + o(1).$$

Como último paso, vamos a deducir el comportamiento asintótico para $\phi_n^{(k)}(z_j), 0 \leq k \leq l_j, 1 \leq j \leq m$, cuando la matriz A que aparece en (1.1) es hermitiana definida positiva.

Consideremos

$$w_M(z)\hat{\psi}_n(z) = \phi_{n+M}(z) + \sum_{j=1}^{M} a_{n,j}\phi_{n+M-j}(z) + \sum_{j=1}^{M} b_{n,j} z^{M-j}\phi_n^*(z)$$

donde estamos usando la notación introducida en el Lema 3.1. Si denotamos por

$$g_i(z) := \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m}\left(\frac{1}{z_j}(z_j - z)\right)^{l_j+1},$$

de la propiedad de ortogonalidad para el producto escalar de Sobolev, para $n > M-1$, obtenemos

$$0 = \langle\hat{\psi}_n(z), g_i(z)\left(\frac{1}{z_i}(z_i - z)\right)^{l_i}\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_i}}\overline{e^{i\theta(M-1)}}p(\theta)d\theta + \hat{\psi}_n(Z)A\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (l_i)!(\frac{-1}{z_i})^{l_i}g_i(z_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}},$$

$$0 = \langle\hat{\psi}_n(z), g_i(z)\left(\frac{1}{z_i}(z_i - z)\right)^{l_i-1}\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_i})^2}\overline{e^{i\theta(M-2)}}p(\theta)d\theta + \hat{\psi}_n(Z)A\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (l_i-1)!(\frac{-1}{z_i})^{l_i-1}g_i(z_i) \\ \binom{l_i}{l_i-1}(l_i-1)!(\frac{-1}{z_i})^{l_i-1}g_i'(z_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}},$$

$\vdots$

$$0 = \langle \hat{\psi}_n(z), g_i(z) \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_i})^{l_i+1}} \overline{e^{i\theta(M-l_i-1)}} p(\theta) d\theta + \hat{\psi}_n(Z) A \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_i(z_i) \\ \vdots \\ g_i^{(l_i)}(z_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Teniendo en cuenta la matriz G que aparece en el enunciado del teorema, podemos expresar las ecuaciones anteriores en forma matricial

$$G^H A^T \begin{pmatrix} \hat{\psi}_n(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n^{(l_1)}(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n(z_m) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n^{(l_m)}(z_m) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_1}} \overline{e^{i\theta(M-1)}} p(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_1})^{l_1+1}} \overline{e^{i\theta(M-l_1-1)}} p(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_m}} \overline{e^{i\theta(M-1)}} p(\theta) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_m})^{l_m+1}} \overline{e^{i\theta(M-l_m-1)}} p(\theta) d\theta \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Para obtener una fórmula asintótica nos quedaría estudiar el comportamiento asintótico del segundo miembro de (3.11).

Consideremos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\phi_{n+M-j}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - w} \overline{e^{i\theta(M-1)}} p(\theta) d\theta = \frac{1}{w} \int_0^{2\pi} \phi_{n+M-j}(e^{i\theta}) \overline{\left[\frac{e^{i\theta M}}{\frac{1}{\bar{w}} - e^{i\theta}} \right]} p(\theta) d\theta \, . \quad (3.12)$$

Usando

$$\int_0^{2\pi} \phi_{n+M-j}(e^{i\theta}) \overline{\left[\frac{e^{i\theta M} \left(\phi_{n-j}(\frac{1}{\bar{w}}) - \phi_{n-j}(e^{i\theta}) \right)}{\frac{1}{\bar{w}} - e^{i\theta}} \right]} p(\theta) d\theta = 0 \, ,$$

tenemos que (3.12) es

$$= \frac{1}{w} \frac{1}{\overline{\phi_{n-j}(\frac{1}{\bar{w}})}} \int_0^{2\pi} \phi_{n+M-j}(e^{i\theta}) \overline{\left[\frac{e^{i\theta M} \phi_{n-j}(e^{i\theta})}{\frac{1}{\bar{w}} - e^{i\theta}} \right]} p(\theta) d\theta \, .$$

Del comportamiento asintótico de ϕ_n (3.1), (3.2), para $|w| < 1$, se sigue

$$= w^{n-j-1}\frac{D_p(w)}{D_p(0)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{1}{w}-e^{-i\theta}}[1+o(1)],$$

para $|w| < 1$ y, por tanto,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\phi_{n+M-j}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-w}\overline{e^{i\theta(M-1)}}p(\theta)d\theta = 2\pi w^{n-j}\frac{D_p(w)}{D_p(0)}[1+o(1)].$$

En general, este tipo de argumentos conduce, para $|w| < 1$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\phi_{n+M-j}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-w}\overline{e^{i\theta(M-k)}}p(\theta)d\theta = 2\pi w^{n-j+k-1}\frac{D_p(w)}{D_p(0)}[1+o(1)].$$

Usando este resultado y (3.9), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{z}_i}}\overline{e^{i\theta(M-1)}}p(\theta)d\theta \\
&\quad= \int_0^{2\pi}\frac{\phi_{n+M}(e^{i\theta})+\sum_{j=1}^{M}a_{n,j}\phi_{n+M-j}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{z}_i}}\overline{e^{i\theta(M-1)}}p(\theta)d\theta \\
&\quad+ \int_0^{2\pi}\frac{\sum_{j=1}^{M}\left(b_{n,j}e^{i(M-j)\theta}\right)\phi_n^*(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{z}_i}}\overline{e^{i\theta(M-1)}}p(\theta)d\theta \\
&\quad= 2\pi w^{n-M}\frac{D_p(w)}{D_p(0)}\left[w^M+\sum_{j=1}^{M}a_jw^{M-j}\right]\Big|_{w=\frac{1}{\overline{z}_i}}[1+o(1)] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = h_{n,0}\left(\frac{1}{\overline{z}_i}\right)[1+o(1)]
\end{aligned}$$

donde

$$h_{n,0}(w) = 2\pi w^{n-M}\frac{D_p(w)}{D_p(0)}\prod_{j=1}^{m}(w-z_j)^{l_j+1}.$$

Vamos a calcular ahora

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta}-\frac{1}{\overline{z}_i})^2}\overline{e^{i\theta(M-2)}}p(\theta)d\theta \\
&\qquad= \frac{d}{dw}\left[\int_0^{2\pi}\frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-w}\overline{e^{i\theta(M-2)}}p(\theta)d\theta\right]\Big|_{w=\frac{1}{\overline{z}_i}}.
\end{aligned}$$

Si denotamos por

$$h_{n,1}(w) = 2\pi w^{n-M+1} \frac{D_p(w)}{D_p(0)} \prod_{j=1}^{m} (w - z_j)^{l_j+1},$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - w} \overline{e^{i\theta(M-2)}} p(\theta) d\theta = h_{n,1}(w)[1 + o(1)].$$

Si $f_n = g_n[1 + o(1)]$, donde f_n, g_n son funciones analíticas y g_n está acotada uniformemente, entonces $f_n' = g_n'[1 + o(1)]$, así

$$\int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_i})^2} \overline{e^{i\theta(M-2)}} p(\theta) d\theta = h'_{n,1}(\frac{1}{\overline{z}_i})[1 + o(1)].$$

En general,

$$\int_0^{2\pi} \frac{w_M(e^{i\theta})\hat{\psi}_n(e^{i\theta})}{(e^{i\theta} - \frac{1}{\overline{z}_i})^{k+1}} \overline{e^{i\theta(M-(k-1))}} p(\theta) d\theta = \frac{1}{k!} h_{n,k}^{(k)}(\frac{1}{\overline{z}_i})[1 + o(1)]$$

donde

$$h_{n,k}(w) = 2\pi w^{n-M+k} \frac{D_p(w)}{D_p(0)} \prod_{j=1}^{m} (w - z_j)^{l_j+1}.$$

Teniendo esto en cuenta, obtenemos

$$G^H A^T \begin{pmatrix} \hat{\psi}_n(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n^{(l_1)}(z_1) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n(z_m) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_n^{(l_m)}(z_m) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} h_{n,0}(\frac{1}{\overline{z}_1}) \\ \vdots \\ (l_1)! h_{n,l_1}^{(l_1)}(\frac{1}{\overline{z}_1}) \\ \vdots \\ h_{n,0}(\frac{1}{\overline{z}_m}) \\ \vdots \\ (l_m)! h_{n,l_m}^{(l_m)}(\frac{1}{\overline{z}_m}) \end{pmatrix} [1 + o(1)].$$

■

CAPÍTULO III

Sobolev Discreto en Curvas y Arcos de Jordan

1. Sobolev Discreto en Arcos y Curvas de Jordan

Consideremos el problema de estudiar el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios $P_n(z) = z^n +$ términos de menor grado, que son ortogonales en E, conjunto infinito de puntos del plano complejo, con respecto a la medida $\rho(\xi)|d\xi|$

$$\int_E P_n(\xi)\overline{\xi}^k \rho(\xi)|d\xi| \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

donde $\rho(\xi)$ es una función peso. Este problema ha sido estudiado en los trabajos de P. Korovkin [35], P. K. Suetin [74] en el caso que E sea una curva de Jordan rectificable. El caso más general, cuando E es el conjunto de los puntos del plano complejo formado por la unión finita de arcos y curvas rectificables de Jordan, ha sido estudiado por H. Widom [76]. Posteriormente A. I. Aptekarev [6], ha dado una expresión más explícita para las fórmulas de comportamiento asintótico obtenidas en [76].

A continuación vamos a exponer los resultados relativos a su comportamiento asintótico y para ello vamos a seguir las ideas desarrolladas en [76], donde la propiedad extremal de los polinomios P_n.

$$\int_E |P_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| = \min_{T_n = z^n + \cdots} \int_E |T_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| \tag{1.1}$$

se traslada a una nueva familias de funciones en el espacio funcional $H^2(\Omega, \rho)$, cuya definición damos más adelante.

Para simplificar la notación y dejar las ideas más claramente expuestas vamos a restringirnos al caso que E sea un arco o una curva de Jordan rectificable.

Comenzaremos, pues, por definir el espacio funcional $H^2(\Omega, \rho)$. Supongamos que E sea un arco o una curva de Jordan rectificable en el plano complejo y Ω la región exterior a E. Denotemos por G la región exterior a la circunferencia unidad, esto es, $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Por el teorema de Riemann podemos garantizar la existencia de una aplicación conforme $\Phi : \Omega \to G$ tal que

$$\Phi(\infty) = \infty,$$
$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{C(E)} > 0,$$

donde $C(E)$ se denomina la capacidad de E. Estas dos condiciones determinan unívocamente la función Φ. Denotemos por $\Psi : G \to \Omega$ la aplicación inversa de Φ. Si E es una curva rectificable podemos extender por líimites no tangenciales Φ a E y en este caso se cumple que $|\Phi(\xi)| = 1$ para $\xi \in E$. De hecho $\Phi|_E$ es una biyección entre E y la circunferencia unidad. Cuando E sea un arco rectificable denotaremos por $\Phi_+(\xi)$ y $\Phi_-(\xi)$ las prolongaciones por límites no tangenciales, a ambos lados de este arco.

Denotemos por $H^2(G)$ el espacio de Hardy de funciones holomorfas en G, y tales que

$$\sup_{1<r<\infty} \int_{D_r} |f(z)|^2 |dz| < \infty,$$

donde $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Este espacio ha sido ampliamente estudiado [34]. Si la medida $\rho|d\xi|$ verifica la condición de Szegő

$$\int_E \log \rho(\xi) |\Phi'(\xi)||d\xi| > -\infty \tag{1.2}$$

podemos construir la llamada función de Szegő D_ρ con las siguientes propiedades:

(1) D_ρ es holomorfa en Ω, $D_\rho(z) \neq 0$ en Ω y $D_\rho(\infty) > 0$.

(2) Existen, en casi todo punto, los valores frontera y se cumple

$$|D_{\rho\pm}(\xi)|^{-2} |\Phi'_\pm(\xi)| = \rho(\xi)$$

(En el caso que E sea una curva D_{ρ_-} no tiene sentido y sólo nos referiremos a D_{ρ_+}).

DEFINICIÓN 1.1. Una función f se dice que pertenece al espacio de Hardy $H^2(\Omega, \rho)$ si f es holomorfa en Ω y $fo\Psi/D_\rho o\Psi$ pertenece a $H^2(G)$

Toda función $f \in H^2(\Omega, \rho)$ admite una prolongación porlímites no tangenciales en E, que pertenece a $L_2(\rho)$. Cuando E es un arco denotamos por f_+ y f_- los valores a cada uno de los lados. Definimos la norma en el espacio $H^2(\Omega, \rho)$ por

$$\|f\|_{H^2(\Omega,\rho)} = \left\{ \int_E |f(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| \right\}^{1/2}$$

cuando E es una curva y cuando es un arco por

$$\|f\|_{H^2(\Omega,\rho)} = \left\{ \oint_E |f(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| \right\}^{1/2}$$

donde tomamos la integral a ambos lados de E. Esta distinción en la definición de la norma en el espacio $H^2(\Omega, \rho)$ la tendremos siempre en cuenta aunque usemos la misma notación $\|f\|_{H^2(\Omega,\rho)}$ en ambos casos. Vamos a enunciar el siguiente Lema, cuando E es una curva, que aparece en [31, Lema 2.2] y nos será útil en la demostración posterior de resultados

LEMA 1.1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que pertenecen al espacio $H^2(\Omega, \rho)$ y tal que verifica las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned} f_n(z) &\rightrightarrows f(z), \qquad && z \in \Omega \\ \|f_n\|_{H^2(\Omega,\rho)} &\le C, && n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva. Con estas hipótesis se cumple que

$$f \in H^2(\Omega, \rho)$$

y

$$\|f\|_{H^2(\Omega,\rho)} \le \underline{\lim} \|f_n\|_{H^2(\Omega,\rho)}. \tag{1.3}$$

La propiedad extremal de la sucesión P_n anteriormente enunciada (1.1) puede ser reformulada de la siguiente manera. Denotamos por

$$m_n := \int_E |P_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi|$$

y $\varphi_n = \frac{P_n}{[C(E)\Phi]^n}$, entonces se cumple que

$$\frac{m_n}{C(E)^{2n}} = \int_E |\varphi_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| = \min_{\tilde{\varphi}_n = \frac{T_n}{[C(E)\Phi]^n}} \int_E |\tilde{\varphi}_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi|.$$

Estas funciones $\tilde{\varphi_n}$ pertenecen a un subespacio $H^2(\Omega,\rho)$, si en este espacio consideramos el problema extremal

$$\mu := \|\varphi^*\|^2_{H^2(\Omega,\rho)} = \min_{\substack{\tilde{\varphi}\in H^2(\Omega,\rho)\\ \tilde{\varphi}(\infty)=1}} \|\tilde{\varphi}\|^2_{H^2(\Omega,\rho)}. \tag{1.4}$$

Esta función extremal φ^* es exactamente $\frac{D_\rho}{D_\rho(\infty)}$, y queremos destacar que si $K(z,\infty) := \frac{D_\rho(z)}{\mu}$, entonces para toda $\phi \in H^2(\Omega,\rho)$ se cumple

$$\phi(\infty) := \int_E \phi(\xi)\overline{K(\xi,\infty)}\rho(\xi)|d\xi|$$

donde $\int$ es tomada a ambos lados en el caso que E sea un arco. En [76] se prueba el siguiente resultado

TEOREMA 1.1. *Supongamos que $E \in C^{2+}$ es una curva o arco de Jordan rectificable y que la función peso $\rho(\xi)$ verifica la condición de Szegő* (1.2). *Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{C(E)^{2n}} = \mu, \tag{1.5}$$

$$P_n(z) = [C(E)\Phi(z)]^n\varphi^*(z)\,[1+\epsilon_n(z)] \quad z\in\Omega, \tag{1.6}$$

$$\int_E \left|C(E)^{-n}P_n(\xi) - H_n(\xi)\right|^2 \rho(\xi)|d\xi| \to 0, \tag{1.7}$$

donde

$$H_n(\xi) = \begin{cases} \Phi^n(\xi)\varphi^*(\xi) & ,\ \xi\in E \text{ es una curva} \\ \Phi^n_+(\xi)\varphi^*_+(\xi) + \Phi^n_-(\xi)\varphi^*_-(\xi) & ,\ \xi\in E \text{ es un arco} \end{cases}$$

y $\epsilon_n \to 0$ uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω.

A la vista de los resultados de asintótica relativa que se han enunciado en los dos capítulos anteriores y de los resultados obtenidos por Widom, era natural intentar encuadrar esos resultados dentro de una perspectiva más general. Así comenzamos definiendo el siguiente producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_E f(\xi)\overline{g(\xi)}\rho(\xi)|d\xi| + f(Z)Ag(Z)^H \tag{1.8}$$

donde E es un arco o curva de Jordan rectificable en el plano complejo,

$$f(Z) = \left(f(z_1), \dots, f^{(l_1)}(z_1), \dots, f(z_m), \dots, f^{(l_m)}(z_m)\right),$$

A es una matriz $M \times M$ hermitiana definida o semidefinida positiva, $M = l_1 + \cdots + l_m + m$, $|d\xi|$ denota la longitud de arco y $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots, m$, donde Ω es la región exterior a E. Debido al carácter positivo o semidefinido positivo de la matriz siempre existe una sucesión de polinomios $Q_n(z) = z^n$+términos de menor grado, tal que

$$\langle Q_n, z^k \rangle = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Vamos, pues, a intentar estudiar el comportamiento asintótico de esta sucesión de polinomios. Comencemos por destacar que, de forma análoga al caso estándar, podemos considerar Q_n como solución al problema extremal

$$\begin{aligned} \hat{m}_n &:= \int_E |Q_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| + Q_n(Z) A Q_n(Z)^H \\ &= \min_{T_n = z^n + \dots} \int_E |T_n(\xi)|^2 \rho(\xi) |d\xi| + T_n(Z) A T_n(Z)^H \end{aligned} \tag{1.9}$$

V. A. Kaliaguine [31, 32], siguiendo esta interpretación, analiza dicho problema cuando $l_i = 0$ para $i = 1, \dots, m$, y A es una matriz diagonal, es decir estudia el problema de la asintótica cuando tenemos una ortogonalidad estándar respecto de una medida con parte absolutamente continua ρ y una parte discreta. Para llevar a cabo este estudio utiliza una modificación polinómica de la medida ρ para recaer en una medida absolutamente continua sin parte discreta. En nuestro caso, esta técnica no resulta natural de aplicar, puesto que las derivadas por un lado y la estructura no diagonal de la matriz A dificultan enormemente el análisis de la situación. Esto nos ha llevado a intentar transponer el método desarrollado en el capítulo II y para ello hemos tenido que deducir el comportamiento para los polinomios núcleo, de los que en esta situación general no se conoce una fórmula tipo Christoffel–Darboux. Si denotamos por $\{p_n\}_{n\geq 0}$ con $p_n(z) = k_n z^n$ + términos de menor grado, $k_n > 0$, la sucesión ortonormal de polinomios con respecto a $\rho(\xi)|d\xi|$.

$$\int_E p_n(\xi)\overline{p_m(\xi)}\rho(\xi)|d\xi| = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

entonces definimos los polinomios núcleos asociados a $\rho(\xi)|d\xi|$

$$K_n(z,w) := \sum_{k=0}^{n-1} p_k(z)\overline{p_k(w)}\,.$$

Si denotamos por

$$K_n^{(i,j)}(z,w) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^{(i)}(z)\overline{p_k^{(j)}(w)},$$

hemos probado el siguiente resultado

TEOREMA 1.2. *Supongamos que $E \in C^{2+}$ es una curva o arco de Jordan rectificable y que ρ verifica la condición de Szegő* (1.2), *usando la anterior notación se cumple que*

$$\frac{K_n^{(i,j)}(z,w)}{p_n^{(i)}(z)\overline{p_n^{(j)}(w)}} \rightrightarrows \frac{1}{\Phi(z)\overline{\Phi(w)}-1} \qquad ,z,w \in \Omega,\ i,j = 0,1,\dots \tag{1.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos probando (1.10) para $i,j = 0$. Se cumple, usando (1.5) y (1.6),

$$p_n(z) = [\Phi(z)]^n \frac{\varphi^*(z)}{\left[\int_E |\varphi^*(\xi)|^2\rho(\xi)|d\xi|\right]^{1/2}}[1+\epsilon_n(z)] \quad ,z \in \Omega \tag{1.11}$$

donde $\epsilon_n(z) \to 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. A continuación, considérese la siguiente identidad

$$\frac{K_n(z,w)}{p_n(z)\overline{p_n(w)}} = \frac{K_n(z,w)}{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}} \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}} \frac{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}}{p_n(z)\overline{p_n(w)}}\,.$$

De (1.11) se sigue que

$$\frac{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}}{p_n(z)\overline{p_n(w)}} \rightrightarrows \left[\frac{\varphi^*(z)\overline{\varphi^*(w)}}{\int_E |\varphi^*(\xi)|^2\rho(\xi)d\xi}\right]^{-1}, \quad z,w \in \Omega\,.$$

Además

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}} \rightrightarrows \frac{1}{\Phi(z)\overline{\Phi(w)}-1}, \quad z,w \in \Omega\,.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} K_n(z,w) &= \sum_{k=0}^{n-1} p_k(z)\overline{p_k(w)} \\ &= \frac{\varphi^*(z)\overline{\varphi^*(w)}}{\int_E |\varphi^*(\xi)|^2\rho(\xi)d\xi} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}(1+y_k(z,w)), \end{aligned}$$

donde denotamos

$$y_k(z,w) := \epsilon_k(z) + \overline{\epsilon_k(w)} + \epsilon_k(z)\overline{\epsilon_k(w)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\frac{K_n(z,w)}{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}} \\ &\qquad = \frac{\varphi^*(z)\overline{\varphi^*(w)}}{\int_E |\varphi^*(\xi)|^2\rho(\xi)d\xi} \left[1 + \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}}\right]. \end{aligned}$$

A continuación, probemos que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}} \rightrightarrows 0, \quad z,w\in\Omega. \tag{1.12}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}} \frac{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}}{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}}.$$

Para probar (1.12) sólo es necesario probar que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}} \rightrightarrows 0, \quad z,w\in\Omega.$$

Dados K_1, K_2 conjuntos compactos en la región Ω y $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que para $z \in K_1$, $w \in K_2$ y $n \geq n_0$

$$|y_n(z,w)| < \epsilon.$$

Para $z \in K_1$ y $w \in K_2$

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}} \\ &\qquad = \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}}. \end{aligned}$$

Tomando valores absolutos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}}\right| \\
&\qquad \le \frac{\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)\right|}{|\Phi(z)|^n|\overline{\Phi(w)}|^n} + \frac{\sum_{k=n_0}^{n-1}|\Phi(z)|^k|\overline{\Phi(w)}|^k|y_k(z,w)|}{|\Phi(z)|^n|\overline{\Phi(w)}|^n} \\
&\qquad\qquad \le \frac{M(n_0)}{|\Phi(z)|^n|\overline{\Phi(w)}|^n} + \epsilon\frac{\sum_{k=n_0}^{n-1}|\Phi(z)|^k|\overline{\Phi(w)}|^k}{|\Phi(z)|^n|\overline{\Phi(w)}|^n},
\end{aligned}
$$

donde $M(n_0)$ es una constante positiva que depende de n_0. Si tomamos límite superior en ambos miembros de la desigualdad tenemos que

$$
\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(z)^k\overline{\Phi(w)^k}y_k(z,w)}{\Phi(z)^n\overline{\Phi(w)^n}}\right| \le \epsilon\frac{1}{|\Phi(z)\Phi(w)|-1}.
$$

Por último podemos tomar ϵ arbitrariamente pequeño y obtenemos el resultado. Para $i=1, j=0$ usamos la siguiente identidad que se cumple para f, g, funciones derivables.

$$
\frac{q}{q'}\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q}. \tag{1.13}
$$

Si tenemos en cuenta que

$$
\frac{p_n(z)}{p_n'(z)} \rightrightarrows 0, \qquad z\in\Omega.
$$

se cumple

$$
\frac{K_n^{(1,0)}(z,w)}{p_n'(z)\overline{p_n(w)}} \rightrightarrows \frac{1}{\Phi(z)\overline{\Phi(w)}-1}.
$$

De la misma manera obtenemos (1.10) para valores arbitrarios $i, j \in \{0,1,2,\dots\}$. ■

También hemos necesitado probar el siguiente resultado auxiliar, que enunciamos con condiciones menos restrictivas que aquellas que la sucesión $\{p_n\}_{n\ge 0}$ cumple, en el caso que la función peso $\rho(\xi)$, verifique la condición de Szegő (1.2).

LEMA 1.2. *Sea $\{p_n\}_{n\ge 0}$ una sucesión de polinomios de grado n, tales que*

$$
\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)} \rightrightarrows \Phi(z) \quad , z\in\Omega, \tag{1.14}
$$

donde Φ y Ω han sido definidos anteriormente, y suponemos que para cada compacto $K \subset \Omega$, los ceros del polinomio p_n, para n lo suficientemente grande, no están en K. Se cumple que

$$\frac{p_n^{(k+1)}(z)}{np_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \quad , z \in \Omega. \tag{1.15}$$

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos probando el caso $k = 0$. Tenemos que $\left\{\frac{p_{n+1}}{p_n}\right\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Se cumple que

$$\left(\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)}\right)' \rightrightarrows \Phi'(z) \qquad , z \in \Omega.$$

Por tanto,

$$\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)}\left[\frac{p'_{n+1}(z)}{p_{n+1}(z)} - \frac{p'_n(z)}{p_n(z)}\right] \rightrightarrows \Phi'(z) \qquad , z \in \Omega.$$

De este modo obtenemos

$$\frac{p'_{n+1}(z)}{p_{n+1}(z)} - \frac{p'_n(z)}{p_n(z)} \rightrightarrows \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \qquad , z \in \Omega.$$

Esto implica que

$$\Re\frac{p'_{n+1}(z)}{p_{n+1}(z)} - \Re\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} \rightrightarrows \Re\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \qquad , z \in \Omega, \tag{1.16}$$

y

$$\Im\frac{p'_{n+1}(z)}{p_{n+1}(z)} - \Im\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} \rightrightarrows \Im\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \qquad , z \in \Omega,$$

donde $\Re z$ y $\Im z$ denotan la parte real e imaginaria de z, respectivamente. Usando (1.16) obtenemos

$$\frac{\exp \Re\frac{p'_{n+1}(z)}{p_{n+1}(z)}}{\exp \Re\frac{p'_n(z)}{p_n(z)}} \rightrightarrows \exp \Re\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \qquad , z \in \Omega$$

Si aplicamos [72, Teorema 3.37] se cumple que

$$\left(\exp \Re\frac{p'_n(z)}{p_n(z)}\right)^{1/n} \rightrightarrows \exp \Re\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \qquad , z \in \Omega$$

lo que es equivalente a

$$\Re\frac{p'_n(z)}{np_n(z)} \rightrightarrows \Re\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \qquad , z \in \Omega.$$

Para la parte imaginaria procedemos de la misma forma y obtenemos el resultado para $k = 0$. Para un k arbitrario usamos (1.13). ∎

Una vez que hemos probado estos resultados y siguiendo una línea de demostración totalmente análoga a la del Teorema 2.1 del capítulo II, si denotamos por $\{q_n\}_{n\geq 0}$ con $q_n(z) = \gamma_n z^n +$ términos de menor grado, $\gamma_n > 0$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a (1.8), obtenemos

TEOREMA 1.3. *Consideremos un producto escalar del tipo* (1.8) *tal que* $E \in C^{2+}$ *es un arco o una curva de Jordan rectificable,* ρ *es una función integrable no negativa en* E *que verifica la condición de Szegő* (1.2) *y* A *es una matriz* $M \times M$ *definida positiva. Se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^{m} |\Phi(z_i)|^{l_i+1}, \tag{1.17}$$

$$\frac{q_n^{(k)}(z)}{p_n^{(k)}(z)} \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\overline{\Phi(z_i)}(\Phi(z) - \Phi(z_i))}{|\Phi(z_i)|(\Phi(z)\overline{\Phi(z_i)} - 1)} \right)^{l_i+1} \quad , z \in \Omega, k = 0, 1, \dots , \tag{1.18}$$

De este teorema se sigue de forma inmediata, usando (1.6), (1.17) y (1.18), el siguiente resultado

COROLARIO 1.1.

$$Q_n(z) = [C(E)\Phi(z)]^n \psi^*(z) [1 + \epsilon_n(z)] \tag{1.19}$$

donde $\epsilon_n \to 0$ *uniformemente en subconjuntos compactos de la región* Ω *y*

$$\psi^*(z) := B(z)\varphi^*(z), \tag{1.20}$$

$$B(z) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\overline{\Phi(z_i)}(\Phi(z) - \Phi(z_i))}{\Phi(z)\overline{\Phi(z_i)} - 1} \right)^{l_i+1} \tag{1.21}$$

es un producto de Blaschke y φ^* *viene definida en* (1.4).

Dentro del marco de un problema extremal podemos deducir (1.4), (1.6) y (1.7) para los polinomios ortogonales mónicos en el caso estándar. El resultado enunciado en el Corolario 1.1 también se puede obtener siguiendo una interpretación de este tipo. Si usamos (1.4) y (1.20), podemos considerar ψ^* como solución del siguiente problema extremal

$$\hat{\mu} := \|\psi^*\|^2_{H^2(\Omega,\rho)} = \min_{\psi \in \tilde{H}} \|\psi\|^2_{H^2(\Omega,\rho)}. \tag{1.22}$$

donde $\tilde{H} = \{\psi \in H^2(\Omega,\rho)\colon\ \psi(\infty) = 1, \psi^{(l)}(z_j) = 0,\ 0 \leq l \leq l_j, 1 \leq j \leq m\}$ y

$$\hat{\mu} = \prod_{j=1}^{m} |\Phi(z_j)|^{2(l_j+1)} \mu\,. \tag{1.23}$$

Recordamos que $\mu := \|\varphi^*\|^2_{H^2(\Omega,\rho)}$.

La demostración de este hecho se efectúa de forma similar a como fue llevada a cabo en [31, Lema 4.2].

Siguiendo esta interpretación obtenemos de forma inmediata, usando (1.17) y (1.20),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{m}_n}{C(E)^{2n}} = \hat{\mu}. \tag{1.24}$$

El siguiente teorema completa estos resultados.

TEOREMA 1.4. *Consideremos un producto escalar del tipo* (1.8) *tal que* $E \in C^{2+}$ *es un arco o una curva de Jordan rectificable,* ρ *es una función integrable no negativa en* E *que verifica la condición de Szegő* (1.2) *y* A *una matriz* $M \times M$ *definida positiva. Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \left|C(E)^{-n} Q_n(\xi) - \tilde{H}_n(\xi)\right|^2 \rho(\xi)|d\xi| = 0$$

donde ψ^* *es la función que aparece en* (1.20) *y*

$$\tilde{H}_n(\xi) := \begin{cases} \Phi^n(\xi)\psi^*(\xi) & ,\ \xi \in E \text{ es una curva} \\ \Phi^n_+(\xi)\psi^*_+(\xi) + \Phi^n_-(\xi)\psi^*_-(\xi) & ,\ \xi \in E \text{ es un arco} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\psi_n := \frac{Q_n}{C(E)^n \Phi^n}.$$

De (1.19) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{(j)}(z_i) = 0,\ i = 1\ldots, m,\ j = 0, \ldots, l_i. \tag{1.25}$$

Para demostrar el teorema vamos a comenzar suponiendo que E es una curva de Jordan. Se tiene

$$\|\psi_n\|_\rho^2 \leq \frac{\hat{m}_n}{C(E)^{2n}}$$

donde

$$\hat{m}_n = \int_E |Q_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| + Q_n(Z)AQ_n(Z)^H.$$

Además usando (1.24) se deduce

$$\overline{\lim} \|\psi_n\|_\rho^2 \leq \hat{\mu}\,.$$

Esto implica que la sucesión de funciones $\{\frac{1}{2}(\psi_n + \psi^*)\}$ de $H^2(\Omega, \rho)$ está acotada uniformemente en $L^2(\rho)$. Usando (1.19) obtenemos que

$$\frac{1}{2}(\psi_n + \psi^*) \rightrightarrows \psi^*.$$

Ahora, si aplicamos el Lema 1.1 a esta sucesión podemos afirmar que

$$4\hat{\mu} \leq \underline{\lim} \|\psi_n + \psi^*(z)\|_\rho^2$$

Usando la identidad del paralelogramo llegamos a

$$\overline{\lim} \|\psi_n - \psi^*(z)\|_\rho^2 \leq 2\overline{\lim} \|\psi_n\|_\rho^2 + 2\|\psi^*\|_\rho^2 - 4\hat{\mu} \leq 0$$

y de aquí se sigue el enunciado del teorema.

Vamos a analizar ahora el caso que E sea un arco. Consideramos

$$\begin{aligned}\int_E |C(E)^{-n}Q_n(\xi) - \tilde{H}_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| \\ = \int_E |C(E)^{-n}Q_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| + \int_E |\tilde{H}_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| \\ - 2\Re \int_E C(E)^{-n}Q_n(\xi)\overline{\tilde{H}_n(\xi)}\rho(\xi)|d\xi|\end{aligned}$$

y vamos a estimar cada uno de estos sumandos

$$\int_E |C(E)^{-n}Q_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| = \frac{\hat{m}_n}{C(E)^{2n}} = \hat{\mu} + o(1)$$

$$\int_E |\tilde{H}_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi|$$
$$= \|\psi^*\|^2_{H^2(\Omega,\rho)} + 2\Re \int_E \overline{\Phi^n_+(\xi)\psi^*_+(\xi)}\Phi^n_-(\xi)\psi^*_-(\xi)\rho(\xi)|d\xi| \quad (1.26)$$

El segundo término tiende a 0 cuando $n \to \infty$, basándonos en [76, Lema 12.1,pg 218]. De este modo

$$\int_E |\tilde{H}_n(\xi)|^2 \rho(\xi)|d\xi| = \hat{\mu} + o(1).$$

Ahora vamos a usar las relaciones $\psi^*(z) = B(z)\varphi^*(z)$, $\psi^*(z) = \mu K(z, \infty)$, siendo K el núcleo reproductor, $\hat{\mu} = \prod_{j=1}^m |\Phi(z_j)|^{2(l_j+1)}\mu$ y $\overline{\Phi_+(\xi)} = \frac{1}{\Phi_+(\xi)}$ para $\xi \in E$, en las siguientes transformaciones

$$2\Re \int_E C(E)^{-n} Q_n(\xi)\overline{\tilde{H}_n(\xi)}\rho(\xi)|d\xi|$$
$$= 2\Re \oint_E \frac{Q_n(\xi)}{C(E)^n\Phi^n(\xi)}\overline{\psi^*(\xi)}\rho(\xi)|d\xi|$$
$$= 2\Re \oint_E \psi_n(\xi)\mu\overline{B(\xi)K(\xi,\infty)}\rho(\xi)|d\xi|$$
$$= 2\mu\Re \oint_E \frac{\psi_n(\xi)}{B(\xi)}\mu|B(\xi)|^2\overline{K(\xi,\infty)}\rho(\xi)|d\xi|$$
$$= 2\hat{\mu}\Re \oint_E \frac{\psi_n(\xi)}{B(\xi)}\overline{K(\xi,\infty)}\rho(\xi)|d\xi|.$$

Si tenemos en cuenta que, usando (1.25), podemos escribir

$$\frac{\psi_n(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{l_i} \frac{A_n^{i,k}}{(z - z_i)^k} + r_n(z)$$

donde $\lim_{n\to\infty} A_n^{i,k} = 0$, $r_n(\infty) = 1$, $r_n \in H^2(\Omega, \rho)$, y utilizando la propiedad reproductora del núcleo tenemos que

$$2\Re \int_E C(E)^{-n} Q_n(\xi)\overline{\tilde{H}_n(\xi)}\rho(\xi)|d\xi| = 2\hat{\mu} + o(1)$$

de donde se concluye el enunciado del teorema. ■

Este tipo de resultado también se puede obtener cuando la matriz A que aparece en la definición del producto escalar no es definida positiva. A diferencia de los resultados obtenidos en el capítulo II, vamos a poder dar respuesta al comportamiento asintótico cuando la matriz es semidefinida positiva, sin tener que imponer que además sea diagonal por bloques. Esto es natural ya que la clase de medidas que estamos considerando nos da información del comportamiento de los polinomios en cada uno de los puntos z_i. Sin embargo vamos a imponer además, la restricción $|\Phi(z_1)| > |\Phi(z_2)| > \ldots > |\Phi(z_m)|$, que en el caso que la matriz A sea diagonal por bloques semidefinida positiva, puede suprimirse y solamente impondremos que $z_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Incluimos la demostración del siguiente teorema pero no de los siguientes porque son análogos a los ya enunciados

TEOREMA 1.5. *Consideremos un producto escalar del tipo* (1.8) *tal que* $E \in C^{2+}$ *es un arco o una curva de Jordan rectificable,* ρ *es una función integrable no negativa en* E *que verifica la condición de Szegő* (1.2) *y* A *una matriz* $M \times M$ *semidefinida positiva. Sabemos que existe una matriz* P *de tamaño* $M \times M$, *invertible, que describimos por bloques*

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,m} \\ 0_{l_2+1\times l_1+1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0_{l_m+1\times l_1+1} & 0_{l_m+1\times l_2+1} & \ldots & P_{m,m} \end{pmatrix}$$

$P_{i,j}$ *triangular superior, tal que verifica* $A = P^H A_c P$ *donde*

$$A_c := \begin{pmatrix} A_1^c & 0_{l_1+1\times l_2+1} & \ldots & 0_{l_1+1\times l_m+1} \\ 0_{l_2+1\times l_1+1} & A_2^c & \ldots & 0_{l_2+1\times l_m+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0_{l_m+1\times l_1+1} & 0_{l_m+1\times l_2+1} & \ldots & A_m^c \end{pmatrix}$$

es la matriz canónica equivalente a A, *es decir, una matriz diagonal, donde* A_i^c *tiene* n_i *elementos iguales a* 1 *y* $l_i + 1 - n_i$ *iguales a cero. Denotemos por* $N := \sum_{i=1}^m n_i$. *Suponemos que* $|\Phi(z_1)| > |\Phi(z_2)| > \ldots > |\Phi(z_m)| > 1$. *Se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^m |\Phi(z_i)|^{n_i}, \tag{1.27}$$

$$\frac{q_n^{(k)}(z)}{p_n^{(k)}(z)} \rightrightarrows \prod_{i=1}^m \left(\frac{\overline{\Phi(z_i)}(\Phi(z) - \Phi(z_i))}{|\Phi(z_i)|(\Phi(z)\overline{\Phi(z_i)} - 1)} \right)^{n_i} \quad , z \in \Omega, k = 0, 1, \ldots, \tag{1.28}$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Deducimos las siguientes igualdades de forma totalmente análoga a como fue realizado en el capítulo II

$$\frac{k_n}{\gamma_n}\frac{q_n(z)}{p_n(z)} = \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z] - A\frac{K_n(z,Z)}{p_n(z)}^T p_n(Z)\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} \tag{1.29}$$

$$\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z] + Ap_n(Z)^T p_n(Z)\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]}$$

$$\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_{n+1}[Z]\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} \tag{1.30}$$

donde $\mathbb{K}_n[Z]$ denota la matriz $M \times M$ definida positiva

$$\begin{pmatrix}
K_n(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(l_1,0)}(z_1,z_1) & \dots & K_n(z_m,z_1) & \dots & K_n^{(l_m,0)}(z_m,z_1) \\
K_n^{(0,1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(l_1,1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(0,1)}(z_m,z_1) & \dots & K_n^{(l_m,1)}(z_m,z_1) \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
K_n^{(0,l_1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(l_1,l_1)}(z_1,z_1) & \dots & K_n^{(0,l_1)}(z_m,z_1) & \dots & K_n^{(l_m,l_1)}(z_m,z_1) \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
K_n(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(l_1,0)}(z_1,z_m) & \dots & K_n(z_m,z_m) & \dots & K_n^{(l_m,0)}(z_m,z_m) \\
K_n^{(0,1)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(l_1,1)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(0,1)}(z_m,z_m) & \dots & K_n^{(l_m,1)}(z_m,z_m) \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
K_n^{(0,l_m)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(l_1,l_m)}(z_1,z_m) & \dots & K_n^{(0,l_m)}(z_m,z_m) & \dots & K_n^{(l_m,l_m)}(z_m,z_m)
\end{pmatrix}.$$

De las expresiones (1.29) y (1.30) vamos a deducir el comportamiento asintótico de $\frac{k_n}{\gamma_n}$ y $\frac{q_n(z)}{p_n(z)}$ para $z \in \Omega$.

Siguiendo la notación del enunciado del teorema y teniendo en cuenta la estructura de la matriz P y $I_{M\times M}$, como también las propiedades de los determinantes se cumple

$$\begin{aligned}
&\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right] \\
&\quad = \det[P^H]\det\left[P^{H^{-1}} + A_c P\mathbb{K}_n[Z]\right] = \det\left[I_{M\times M} + A_c P\mathbb{K}_n[Z]P^H\right] \\
&\qquad = \det\left[I_{N\times N} + \tilde{A}_c P\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right] = \det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right]
\end{aligned}$$

donde $\tilde{A}_c$ es ahora una matriz $N \times M$

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix}
\tilde{A}_1^c & 0_{n_1\times l_2+1} & \dots & 0_{n_1\times l_m+1} \\
0_{n_2\times l_1+1} & \tilde{A}_2^c & \dots & 0_{n_2\times l_m+1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0_{n_m\times l_1+1} & 0_{n_m\times l_2+1} & \dots & \tilde{A}_m^c
\end{pmatrix}$$

$\tilde{A}_i^c$ es la matriz $n_i \times (l_i+1)$ que resulta de A_i^c cuando eliminamos las filas de ceros y $\tilde{P} := \tilde{A}_c P$, matriz de tamaño $N \times M$, dada por

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{P_{1,1}} & \tilde{P_{1,2}} & \dots & \tilde{P_{1,m}} \\ 0_{n_2\times(l_1+1)} & \tilde{P_{2,2}} & \dots & \tilde{P_{2,m}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0_{n_m\times(l_1+1)} & 0_{n_m\times(l_2+1)} & \dots & \tilde{P_{m,m}} \end{pmatrix}.$$

Sea

$$\tilde{P_{i,j}} = \begin{pmatrix} a_{i,j}^{1,0} & a_{i,j}^{1,1} & \dots & a_{i,j}^{1,l_j} \\ a_{i,j}^{2,0} & a_{i,j}^{2,1} & \dots & a_{i,j}^{2,l_j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,j}^{n_i,0} & a_{i,j}^{n_i,1} & \dots & a_{i,j}^{n_i,l_j} \end{pmatrix}.$$

Para la fila j-ésima de $\tilde{P_{i,i}}$, $j = 1, \dots, n_i$, denotamos por $p_{i,j}$ el índice tal que

$$a_i^{j,p_{i,j}} \neq 0 \quad a_i^{j,k} = 0\,, \quad p_{i,j} < k \leq l_i.$$

Usando esta notación tenemos que

$$\tilde{\mathbb{K}}_n[Z] := \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H$$

es una matriz $N \times N$ que podemos describir por bloques. El elemento (k,l) de esta matriz es de tamaño $n_k \times n_l$ para $k,l = 1,\dots,m$, y lo podemos escribir de la siguiente forma

$$\left(\sum_{u=k}^{m}\sum_{v=l}^{m}\sum_{\substack{i=0,\dots,l_u\\ j=0,\dots,l_v}} a_{k,u}^{r,i} K_n^{(j,i)}(z_v, z_u)\overline{a_{l,v}^{s,j}}\right)_{\substack{r=1,\dots,n_k\\ s=1,\dots,n_l}}.$$

Ahora introducimos una nueva matriz de tamaño $N \times N$ que denotamos por $\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]$, con la misma estructura por bloques que la anterior $\tilde{\mathbb{K}}_n[Z]$. Describimos el bloque (k,l) de tamaño $n_k \times n_l$ para $k,l = 1,\dots,m$, de la siguiente forma

$$\left(\sum_{u=k}^{m}\sum_{v=l}^{m}\sum_{\substack{i=0,\dots,l_u\\ j=0,\dots,l_v}} a_{k,u}^{r,i} K_n^{(j,i)}(\xi_{v,s-1}, \xi_{u,r-1})\overline{a_{l,v}^{s,j}}\right)_{\substack{r=1,\dots,n_k\\ s=1,\dots,n_l}}$$

Siguiendo una notación similar al caso anterior $\vec{\xi_i} = (\xi_{i,0}, \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n_i-1})$ para $i = 1,\dots,m$, notemos que cuando $\vec{\xi_i} = (z_i,\dots,z_i)$ para $i = 1,\dots,m$, entonces

$\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi] = \tilde{\mathbb{K}}_n[Z]$. Denotamos por $\vec{z_i} = (z_i, \dots, z_i)$ el vector fila de tamaño n_i para $i = 1, \dots, m$.

También consideramos la siguiente matriz diagonal que denotamos por F_n

$$\operatorname{diag}\left(\frac{1}{p_n^{(p_{1,1})}(\xi_{1,0})}, \dots, \frac{1}{p_n^{(p_{1,n_1})}(\xi_{1,n_1-1})}, \dots, \frac{1}{p_n^{(p_{m,1})}(\xi_{m,0})}, \dots, \frac{1}{p_n^{(p_{m,n_m})}(\xi_{m,n_m-1})}\right).$$

De aquí deducimos el comportamiento asintótico de $\frac{k_n}{\gamma_n}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_{n+1}[Z]\right]}{\det\left[I_{M\times M} + A\mathbb{K}_n[Z]\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\mathbb{K}_{n+1}[Z]\tilde{P}^H\right]}{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{P}\mathbb{K}_n[Z]\tilde{P}^H\right]} = \lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi_i}\to\vec{z_i}\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{\mathbb{K}}_{n+1}[\xi]\right]}{\det\left[I_{N\times N} + \tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]\right]} \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{\substack{\vec{\xi_i}\to\vec{z_i}\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\frac{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1} + \overline{F_{n+1}}\tilde{\mathbb{K}}_{n+1}[\xi]F_{n+1}\right]}{\det\left[\overline{F_n}F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right]}\frac{\det\left[\overline{F_n}F_n\right]}{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1}\right]}.
\end{aligned}$$

Podemos intercambiar los límites porque tenemos convergencia uniforme de forma que la anterior expresión es

$$\lim_{\substack{\vec{\xi_i}\to\vec{z_i}\\ i=1,\dots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}}\lim_{n\to\infty}\frac{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1} + \overline{F_{n+1}}\tilde{\mathbb{K}}_{n+1}[\xi]F_{n+1}\right]}{\det\left[\overline{F_n}F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right]}\frac{\det\left[\overline{F_n}F_n\right]}{\det\left[\overline{F_{n+1}}F_{n+1}\right]}.$$

Usando (1.6)

$$\lim_{n\to\infty}\det\left[\overline{F_n}F_n + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right] = \lim_{n\to\infty}\det\left[o(1)I_{N\times N} + \overline{F_n}\tilde{\mathbb{K}}_n[\xi]F_n\right]$$

$$= \begin{vmatrix}
\frac{|a_1^{1,p_{1,1}}|^2}{|\Phi(\xi_{1,0})|^2-1} & \frac{a_1^{1,p_{1,1}}\overline{a_1^{2,p_{1,2}}}}{\Phi(\xi_{1,1})\overline{\Phi(\xi_{1,0})}-1} & \cdots & \frac{a_1^{1,p_{1,1}}\overline{a_m^{m,p_{m,m}}}}{\Phi(\xi_{m,n_m-1})\overline{\Phi(\xi_{1,0})}-1} \\
\frac{a_1^{2,p_{1,2}}\overline{a_1^{1,p_{1,1}}}}{\Phi(\xi_{1,0})\overline{\Phi(\xi_{1,1})}-1} & \frac{|a_1^{2,p_{1,2}}|^2}{|\Phi(\xi_{1,1})|^2-1} & \cdots & \frac{a_1^{2,p_{1,2}}\overline{a_m^{m,p_{m,m}}}}{\Phi(\xi_{m,n_m-1})\overline{\Phi(\xi_{1,1})}-1} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\frac{a_m^{m,p_{m,m}}\overline{a_1^{1,p_{1,1}}}}{\Phi(\xi_{1,0})\overline{\Phi(\xi_{m,n_m-1})}-1} & \frac{a_m^{m,p_{m,m}}\overline{a_1^{2,p_{1,2}}}}{\Phi(\xi_{1,1})\overline{\Phi(\xi_{m,n_m-1})}-1} & \cdots & \frac{|a_m^{m,p_{m,m}}|^2}{|\Phi(\xi_{m,n_m-1})|^2-1}
\end{vmatrix}.$$

Este determinante es distinto de cero [38, Lema 5].

Teniendo en cuenta el anterior resultado y usando (1.6) tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k_n}{\gamma_n}\right)^2 = \lim_{\substack{\xi_i\to z_i\\ i=1,\ldots,m\\ \xi_{i,j}\neq\xi_{i,l}\\ j\neq l}} \prod_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=0,\ldots,n_i-1}} |\Phi(\xi_{i,j})|^2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{\gamma_n} = \prod_{i=1}^{m} |\Phi(z_i)|^{n_i}.$$

Usando el mismo tipo de argumentos, y de forma análoga a como hemos procedido en el capítulo anterior se determina el comportamiento asintótico de $\frac{q_n(z)}{p_n(z)}$. ■

Para terminar incluímos el siguiente teorema que presenta los resultados de comportamiento asintótico para la sucesión de polinomios mónicos $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ de forma análoga a como fueron enunciados este tipo de resultados en el Teorema 1.1.

TEOREMA 1.6. *Si suponemos que se cumplen las hipótesis del Teorema* 1.5, *se cumple*

$$Q_n(z) = [C(E)\Phi(z)]^n\,\psi^*(z)\,[1+\epsilon_n(z)],$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \left|C(E)^{-n}Q_n(\xi) - \tilde{H}_n(\xi)\right|^2 \rho(\xi)|d\xi| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{m}_n}{C(E)^{2n}} = \hat{\mu} \tag{1.31}$$

donde

$$\tilde{H}_n(\xi) := \begin{cases} \Phi^n(\xi)\psi^*(\xi) & ,\ \xi\in E \text{ es una curva}\\ \Phi^n_+(\xi)\psi^*_+(\xi) + \Phi^n_-(\xi)\psi^*_-(\xi) & ,\ \xi\in E \text{ es un arco}\end{cases}$$

$$\hat{\mu} := \|\psi^*(\xi)\|^2_{H^2(\Omega,\rho)} = \min_{\psi\in\tilde{H}}\|\psi(\xi)\|^2_{H^2(\Omega,\rho)} \tag{1.32}$$

y $\tilde{H}$ *es el subconjunto de funciones* ψ *del espacio* $H^2(\Omega,\rho)$ *tales que* $\psi(\infty)=1$ *y* $\psi^{(l)}(z_j)=0$ *para* $0\leq l\leq n_j-1$, $1\leq j\leq m$.

CAPÍTULO IV

Pares Coherentes en Curvas y Arcos de Jordan

1. Pares Coherentes en Curvas o Arcos de Jordan

Sean μ_0, μ_1 medidas positivas de Borel soportadas en E_0 y E_1 arcos o curvas rectificables de Jordan, respectivamente.

Considérese el producto escalar

$$\langle f,g\rangle_S = \langle f,g\rangle_0 + \lambda\langle f',g'\rangle_1\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+\,,$$

donde

$$\langle f,g\rangle_k = \int_{E_k} f(\xi)\overline{g(\xi)}d\mu_k(\xi)\,, \quad k=0,1.$$

Denotaremos por $\{Q_n(\,;\lambda)\}_{n\geq 0}$, $\{P_n\}_{n\geq 0}$, $\{R_n\}_{n\geq 0}$, las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos respecto a $\langle\,,\,\rangle_S$, $\langle\,,\,\rangle_0$, $\langle\,,\,\rangle_1$, respectivamente. Es bien conocido que, en el caso que E_0 y E_1 sean la circunferencia unidad, la matriz de momentos respecto al producto escalar $\langle\,,\,\rangle_k$, tiene una estructura Toeplitz que no conserva la matriz de momentos asociada a $\langle\,,\,\rangle_S$, dado que el operador de multiplicación por z no es unitario.

Por otra parte, en general denotamos

$$\begin{aligned} S_{m,n} &:= \langle z^m, z^n\rangle_S \\ &= c^0_{m,n} + \lambda mn c^1_{m-1,n-1} \end{aligned}$$

donde $\left\{c^k_{m,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los momentos respecto a las medidas $d\mu_k$ para $k=0,1$, respectivamente.

Teniendo en cuenta la anterior expresión, se obtiene la siguiente representación en forma de determinante para los polinomios $Q_n(z;\lambda)$.

$$Q_n(z;\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} c^0_{0,0} & c^0_{1,0} & \cdots & c^0_{n,0} \\ c^0_{0,1} & c^0_{1,1}+\lambda c^1_{0,0} & \cdots & c^0_{n,1}+\lambda n c^1_{n-1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c^0_{0,n-1} & c^0_{1,n-1}+\lambda(n-1)c^1_{0,n-2} & \cdots & c^0_{n,n-1}+\lambda n(n-1)c^1_{n-1,n-2} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c^0_{0,0} & c^0_{1,0} & \cdots & c^0_{n-1,0} \\ c^0_{0,1} & c^0_{1,1}+\lambda c^1_{0,0} & \cdots & c^0_{n-1,1}+\lambda(n-1)c^1_{n-2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c^0_{0,n-1} & c^0_{1,n-1}+\lambda(n-1)c^1_{0,n-2} & \cdots & c^0_{n-1,n-1}+\lambda(n-1)^2c^1_{n-2,n-2} \end{vmatrix}}$$

o, equivalentemente,

$$Q_n(z;\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} c^0_{0,0} & c^0_{1,0} & \cdots & c^0_{n,0} \\ \frac{c^0_{0,1}}{\lambda} & \frac{c^0_{1,1}}{\lambda} + c^1_{0,0} & \cdots & \frac{c^0_{n,1}}{\lambda} + nc^1_{n-1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c^0_{0,n-1}}{\lambda(n-1)} & \frac{c^0_{1,n-1}}{\lambda(n-1)} + c^1_{0,n-2} & \cdots & \frac{c^0_{n,n-1}}{\lambda(n-1)} + nc^1_{n-1,n-2} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c^0_{0,0} & c^0_{1,0} & \cdots & c^0_{n-1,0} \\ \frac{c^0_{0,1}}{\lambda} & \frac{c^0_{1,1}}{\lambda} + c^1_{0,0} & \cdots & \frac{c^0_{n-1,1}}{\lambda} + (n-1)c^1_{n-2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{c^0_{0,n-1}}{\lambda(n-1)} & \frac{c^0_{1,n-1}}{\lambda(n-1)} + c^1_{0,n-2} & \cdots & \frac{c^0_{n-1,n-1}}{\lambda(n-1)} + (n-1)c^1_{n-2,n-2} \end{vmatrix}}.$$

Dado que los coeficientes del polinomio son funciones racionales en λ, por paso al límite para $\lambda \to \infty$, se obtiene un polinomio

$$S_n(z) = \frac{\begin{vmatrix} c^0_{0,0} & c^0_{1,0} & \cdots & c^0_{n,0} \\ 0 & c^1_{0,0} & \cdots & nc^1_{n-1,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c^1_{0,n-2} & \cdots & nc^1_{n-1,n-2} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c^0_{0,0} & c^0_{1,0} & \cdots & c^0_{n-1,0} \\ 0 & c^1_{0,0} & \cdots & (n-1)c^1_{n-2,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & c^1_{0,n-2} & \cdots & (n-1)c^1_{n-2,n-2} \end{vmatrix}} \tag{1.1}$$

que es mónico y de grado n.

PROPOSICIÓN 1.1. *El polinomio $S_n(z)$ satisface las dos condiciones siguientes*

(i) $\langle S_n, 1\rangle_0 = 0, \quad n \geq 1$

(ii) $\langle S'_n, z^k\rangle_1 = 0, \quad 0 \leq k \leq n-2,\ n \geq 2$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de manera inmediata de (1.1). ■

Obsérvese que de la condición (ii) deducimos que $S'_n(z) = nR_{n-1}(z)$.

Por otra parte, dado que $R_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-1,k} \frac{P'_k(z)}{k}$ se tiene que

$$\frac{S'_n(z)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-1,k} \frac{P'_k(z)}{k},$$

e integrando

$$\frac{S_n(z)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-1,k} \frac{P_k(z)}{k} + \alpha_{n-1,0}\,.$$

Pero, de acuerdo con la condición (i) de la Proposición 1.1, $\alpha_{n-1,0} = 0$. Por tanto

$$\frac{S_n(z)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-1,k} \frac{P_k(z)}{k}\,,$$

esto es,

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k} P_k(z) \tag{1.2}$$

donde los $a_{n-1,k} = \frac{n}{k}\alpha_{n-1,k}$ son coeficientes de conexión para las sucesiones $\{R_n\}_{n\geq 0}$ y $\{P'_n\}_{n\geq 0}$.

Por otra parte, del desarrollo en serie de Fourier de S_n respecto de los polinomios $\{Q_n(z;\lambda)\}_{n\geq 0}$ se sigue

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{j=0}^{n} \beta_{n,j}(\lambda) Q_j(z;\lambda) \\ &= Q_n(z;\lambda) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{n,j}(\lambda) Q_j(z;\lambda)\,, \end{aligned}$$

donde, para $0 \leq j \leq n-1$,

$$\beta_{n,j}(\lambda) = \frac{\langle S_n(z), Q_j(z;\lambda)\rangle_S}{\langle Q_j(z;\lambda), Q_j(z;\lambda)\rangle_S} = \frac{\langle S_n(z), Q_j(z;\lambda)\rangle_0}{\langle Q_j(z;\lambda), Q_j(z;\lambda)\rangle_S}\,.$$

En principio no podemos obtener más información. Sin embargo, si en (1.2) imponemos que $a_{n-1,k} = 0$ para $k < n-s$ (con s prefijado), se sigue que $\beta_{n,j}(\lambda) = 0$ para $k < n-s$ y, por tanto, para $n \geq s$

$$\sum_{k=n-s}^{n} a_{n-1,k} P_k(z) = \sum_{j=n-s}^{n} \beta_{n,j}(\lambda) Q_j(z;\lambda)\,. \tag{1.3}$$

Cuando $s = 1$, por analogía al caso en el que las medidas μ_0, μ_1 estén soportadas en la recta real, estas medidas se dice que forman un par coherente. De este modo podemos considerar los dos problemas siguientes,

Problema 1. Describir las medidas μ_0, μ_1 tales que las correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}$ y $\{R_n\}$ están relacionadas mediante

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_n'(z)}{n} + \alpha_{n-1,n-1}\frac{P_{n-1}'(z)}{n-1}. \tag{1.4}$$

Problema 2. Una vez resuelto el apartado anterior, deducir el comportamiento asintótico de la sucesión $\{Q_n(\,;\lambda)\}$, sabiendo que

$$P_n(z) + \frac{n}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}P_{n-1}(z) = Q_n(z;\lambda) + \beta_{n,n-1}(\lambda)Q_{n-1}(z;\lambda), \tag{1.5}$$

donde

$$\begin{aligned}\beta_{n,n-1}(\lambda) &= \frac{n}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}\frac{\langle P_{n-1}, Q_{n-1}(\,;\lambda)\rangle_0}{\langle Q_{n-1}(\,;\lambda), Q_{n-1}(\,;\lambda)\rangle_S} \\ &= \frac{n}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}\frac{\|P_{n-1}\|_0^2}{\|Q_{n-1}(\,;\lambda)\|_S^2}.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\|Q_{n-1}(\,;\lambda)\|_S^2 &= \langle Q_{n-1}(\,;\lambda), P_{n-1}\rangle_S \\
&= \|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda\langle Q_{n-1}'(\,;\lambda), P_{n-1}'\rangle_1 \\
&= \|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda\langle Q_{n-1}'(\,;\lambda), (n-1)R_{n-2} - \frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2}P_{n-2}'\rangle_1 \\
&= \|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda(n-1)^2\|R_{n-2}\|_1^2 - \lambda\frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2}\langle Q_{n-1}'(\,;\lambda), P_{n-2}'\rangle_1 \\
&= \|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda(n-1)^2\|R_{n-2}\|_1^2 + \frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2}\langle Q_{n-1}(\,;\lambda), P_{n-2}\rangle_0 \\
&= \|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda(n-1)^2\|R_{n-2}\|_1^2 \\
&\quad + \frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2}\langle P_{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2}P_{n-2} - \beta_{n-1,n-2}(\lambda)Q_{n-2}(\,,\lambda), P_{n-2}\rangle_0 \\
&= \|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda(n-1)^2\|R_{n-2}\|_1^2 \\
&\quad + \frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2}\left[\frac{n-1}{n-2}\alpha_{n-2,n-2} - \beta_{n-1,n-2}(\lambda)\right]\|P_{n-2}\|_0^2
\end{aligned}$$

Por tanto, sustituyendo en (1.6), y utilizando la notación precedente tenemos

$$\beta_{n,n-1}(\lambda) = \frac{A_n}{B_n - \beta_{n-1,n-2}(\lambda)},$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_{n-1,n-1}\|P_{n-1}\|_0^2}{a_{n-2,n-2}\|P_{n-2}\|_0^2} \\ B_n &= a_{n-2,n-2} + \frac{\|P_{n-1}\|_0^2 + \lambda(n-1)^2\|R_{n-2}\|_1^2}{a_{n-2,n-2}\|P_{n-2}\|_0^2}, \end{aligned}$$

y B_n es un polinomio de grado 1 en λ. De esta forma, una vez determinados los pares coherentes se puede deducir una representación para los $\beta_{n,n-1}(\lambda)$, que son funciones racionales de λ y, finalmente, obtener de (1.5) una representación simple para los $Q_n(\,;\lambda)$.

A continuación vamos a considerar estos problemas en los casos particulares que las medidas μ_0, μ_1 estén soportadas en la recta real así como en el caso que estén soportadas en la circunferencia unidad.

1.1. Pares Coherentes en la Recta Real.

Sean μ_0, μ_1 medidas positivas de Borel soportadas en la recta real. En este caso los problemas formulados anteriormente ya han sido completamente resueltos. Nosotros aquí haremos una exposición de los resultados a los que se llega dando una demostración alternativa del comportamiento asintótico de los polinomios de Sobolev en este caso.

Queremos destacar, en primer lugar, que el concepto de medidas cuyos polinomios ortogonales asociados verifican la relación (1.4) fue introducido por A. Iserles et al. [30]. Estas medidas constituyen un par coherente, y en [30] los autores prueban que si expresamos

$$Q_n(z;\lambda) = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m^n(\lambda) P_m(z),\ n = 1, 2, \ldots$$

entonces podemos renormalizar estos polinomios de manera que las constantes γ_m^n sean independientes de n, salvo el coeficiente principal γ_n^n. Si reescribimos $\gamma_m(\lambda) = \gamma_m^n(\lambda)$ para $1 \leq m \leq n-1$, entonces $\gamma_n(\lambda)$ es un polinomio en λ de grado m y estos polinomios $\gamma_n(\lambda)$ satisfacen una relación de recurrencia a tres términos. Además si (μ_0, μ_1) es un par coherente, $Q_n(z;\lambda)$ verifica una relación de recurrencia a cuatro términos y para λ suficientemente grande y $n \geq 2$ podemos decir que $Q_n(z;\lambda)$ tiene n ceros diferentes que se entrelazan con los ceros de P_{n-1} y los de R_{n-1} (véase [14]).

A la vista de estos resultados, que se pueden deducir de forma genérica para los pares de medidas coherentes, se ha intentado describir de modo completo dichos pares coherentes. La respuesta ha sido dada por H. G. Meijer en [55], donde prueba que al menos una de las dos medidas que componen el par coherente tiene que ser clásica (Laguerre o Jacobi). Vamos a dar, a continuación, la clasificación de todas los pares de medidas coherentes (salvo una transformación afín), cuyo soporte es un compacto de la recta real.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean ω_0, ω_1 dos funciones peso no negativas en $[-1,1]$ tales que*

$$\frac{\omega_1(x)}{\omega_0(x)} = \frac{1-x^2}{|x-\xi|}$$

para $\xi \in \mathbb{R}\backslash(-1,1)$. Sean μ_0, μ_1 dos medidas cuyo soporte es $[-1,1]$. Estas medidas forman un par coherente si y sólo si se cumple uno de los tres casos siguientes

1 *Caso absolutamente continuo.*

$$d\mu_i = \omega_i(x)dx, \quad i = 0, 1\,,$$

donde

$$\omega_0(x) = \rho^{\alpha,\beta}(x) \text{ ó } \omega_1(x) = \rho^{\alpha,\beta}(x)$$
$$\rho^{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,.$$

2 *Punto de masa en la primera medida.*

$$d\mu_0 = \omega_0(x)dx + M\delta_\xi, \quad d\mu_2 = \omega_2(x)dx, \quad M > 0\,,$$

donde

$$\omega_1(x) = \rho^{0,\beta}(x),\ \xi = 1 \text{ ó } \omega_1(x) = \rho^{\alpha,0}(x),\ \xi = -1\,.$$

3 *Punto de masa en la segunda medida.*

$$d\mu_0 = \omega_0(x)dx\,, \quad d\mu_1 = \omega_1(x)dx + M\delta_\xi, \quad M > 0,\ |\xi| \geq 1\,,$$

donde

$$\omega_0(x) = \rho^{\alpha,\beta}(x)\,.$$

Las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *pueden tomar aquellos valores tales que* $\omega_0, \omega_1 \in L_1[-1,1]$.

OBSERVACIÓN. Para este tipo de medidas vamos a destacar los siguientes hechos

- En cada uno de los casos descritos en la Proposición anterior, la medida $d\mu_0$ pertenece a la clase de Szegő. Por tanto sabemos, usando (II.1.6)

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \rightrightarrows C(E)\Phi(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1] \tag{1.7}$$

$$\frac{P_n'(z)}{nP_n(z)} \rightrightarrows \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1] \tag{1.8}$$

  donde $\Phi(x) = x + \sqrt{x^2-1}$, con $\sqrt{x^2-1} > 0$ para $|x| > 1$ y $C(E) = 1/2$.
- Podemos garantizar, usando los resultados que aparecen en [49, 40], que existe una función holomorfa, no idénticamente nula, tal que

$$\frac{R_n(z)}{P_n(z)} \rightrightarrows F(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]\,, \tag{1.9}$$

  donde F va a tomar un valor distinto, dependiendo en qué caso de los indicados en la Proposición anterior nos encontremos.

A continuación y como respuesta al Problema 2 planteado en la sección anterior, vamos a enunciar el siguiente teorema que aparece en [50] sobre el comportamiento asintótico de la sucesión de polinomios de Sobolev $\{Q_n(\,;\lambda)\}_{n\geq 0}$.

TEOREMA 1.1. *Sean* μ_0, μ_1 *un par de medidas coherentes cuyo soporte es el intervalo* $[-1,1]$. *Sean* $\{Q_n(\,;\lambda)\}_{n\geq 0}$, $\{P_n\}_{n\geq 0}$, $\{R_n\}_{n\geq 0}$, *las sucesiones de polinomios ortogonales mónicos respecto a* $\langle\,,\,\rangle_S$, $\langle\,,\,\rangle_0$, $\langle\,,\,\rangle_1$, *respectivamente. Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(z;\lambda)}{R_n(z)} \rightrightarrows \frac{1}{C(E)\Phi'(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

donde $\Phi(x) = x + \sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{x^2-1} > 0$, $|x| > 1$ *y* $C(E) = 1/2$.

Antes de proceder a la demostración del teorema vamos a dar los siguientes resultados auxiliares que aparecen demostrados en [50].

LEMA 1.1. *La sucesión* $\{\beta_{n+1,n}(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definida en* (1.6) *verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n+1,n}(\lambda) = 0\,.$$

LEMA 1.2. *Se cumple que* $\left\{\frac{Q_n(\,;\lambda)}{P_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una familia normal en la región del plano complejo* $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$.

OBSERVACIÓN. Nos gustaría destacar que para la demostración de estos resultados, no ha sido preciso tratar de forma discriminada cada uno de los casos de medidas enunciadas en la Proposición 1.2

A continuación, usando estos Lemas, (1.7) y (1.9) vamos a dar una demostración unificada del teorema, frente a la que aparece en [50].

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Consideremos (1.4)

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_n'(z)}{n} + \alpha_{n-1,n-1}\frac{P_{n-1}'(z)}{n-1}\,.$$

Si dividimos esta ecuación por P_{n-1} obtenemos

$$\frac{R_{n-1}(z)}{P_{n-1}(z)} = \frac{P_n'(z)}{nP_{n-1}(z)} + \alpha_{n-1,n-1}\frac{P_{n-1}'(z)}{(n-1)P_{n-1}(z)}\,. \tag{1.10}$$

Si tenemos en cuenta, usando (1.9),

$$\frac{R_{n-1}(z)}{P_{n-1}(z)} \rightrightarrows F(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

y usamos el mismo tipo de razonamiento que el llevado a cabo en el Lema 1.1 del capítulo I, podemos garantizar que existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n-1,n-1} = \alpha.$$

Además, si tomamos límite cuando $n \to \infty$ en (1.10), llegamos a

$$\frac{F(z)\Phi(z)}{\Phi'(z)} = C(E)\Phi(z) + \alpha \tag{1.11}$$

Ahora, si tenemos en cuenta

$$P_n(z) + \frac{n}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}P_{n-1}(z) = Q_n(z;\lambda) + \beta_{n,n-1}(\lambda)Q_{n-1}(z;\lambda)$$

y dividimos por P_n, obtenemos

$$1 + \frac{n}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}\frac{P_{n-1}(z)}{P_n(z)} = \frac{Q_n(z;\lambda)}{P_n(z)} + \beta_{n,n-1}(\lambda)\frac{Q_{n-1}(z;\lambda)}{P_n(z)}. \tag{1.12}$$

Dado que la sucesión $\left\{\frac{Q_n(;\lambda)}{P_n}\right\}$ es normal en la región $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$, para demostrar que converge uniformemente a una cierta función sólo necesitamos probar que dado un conjunto infinito de índices $\Lambda \subset \mathbb{N}$, si se verifica que

$$\frac{Q_n(z;\lambda)}{P_n(z)} \rightrightarrows H_\Lambda(z), \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1] \tag{1.13}$$

entonces la función H_Λ es independiente en su definición de Λ.

Supongamos, pues, que $n \in \Lambda$, conjunto infinito de índices, y que se verifica (1.13). Tomamos límite, $n \in \Lambda$, $n \to \infty$ en (1.12), y obtenemos

$$\frac{Q_n(z;\lambda)}{P_n(z)} \rightrightarrows 1 + \frac{\alpha}{C(E)\Phi(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

de donde, usando (1.11) llegamos a

$$\frac{Q_n(z;\lambda)}{P_n(z)} \rightrightarrows \frac{F(z)}{\Phi'(z)C(E)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

y de esta última expresión obtenemos la unicidad del límite. Ahora, si multiplicamos y dividimos la expresión anterior por R_n obtenemos

$$\frac{Q_n(z;\lambda)}{R_n(z)}\frac{R_n(z)}{P_n(z)} \rightrightarrows \frac{F(z)}{\Phi'(z)C(E)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

lo que es equivalente, usando (1.9),

$$\frac{Q_n(z;\lambda)}{R_n(z)} \rightrightarrows \frac{1}{\Phi'(z)C(E)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

y con esto concluímos la demostración del teorema. ∎

1.2. Pares Coherentes en la Circunferencia Unidad.

Procederemos analizando algunos casos particulares siguiendo las pautas establecidas en el caso real.

Comenzamos suponiendo que la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ sea Clásica, esto es, $P_n(z) = z^n$. De (1.4) se sigue que

$$R_{n-1}(z) = z^{n-1} + \alpha_{n-1,n-1} z^{n-2} .$$

Si deseamos que $\{R_n\}_{n\geq 0}$ sea una sucesión de polinomios mónicos ortogonales en la circunferencia unidad, se sigue que ha de satisfacer una relación de recurrencia de Szegő

$$zR_{n-1}(z) + R_n(0)R_{n-1}^*(z) = R_n(z) , \tag{1.14}$$

$$z^n + \alpha_{n,n} z^{n-1} = z^n + \alpha_{n-1,n-1} z^{n-1} ,$$

esto es, $\alpha_{n,n} = \alpha_{n-1,n-1} = \cdots = \alpha_{2,2} = c$. Por tanto

$$R_n(z) = z^{n-1}(z + c) ,$$

esto es, se trata de una familia de la clase Bernstein-Szegő . En este caso, usando el mismo tipo de razonamiento que en la sección anterior, podemos concluir el siguiente comportamiento asintótico para la sucesión $Q_n(\,;\lambda)$

$$\frac{Q_n(z;\lambda)}{z^{n-1}(z+c)} \rightrightarrows 1 , \quad z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} ,$$

ya que cuando la curva es la circunferencia unidad tenemos que $\Phi(z) = z$ y $C(E) = 1$.

Vamos a suponer que la sucesión de polinomios mónicos ortogonales $\{P_n\}_{n\geq 0}$ viene definida por $P_n(z) = z^{n-k}P_k(z)$ para $n \geq k$, donde suponemos que P_k es un polinomio mónico de grado k y tal que $P_k(0) \neq 0$. Tenemos que

$$P_n'(z) = (n-k)z^{n-k-1}P_k(z) + z^{n-k}P_k'(z)$$

De (1.4) se sigue que

$$R_n(z) = \frac{(n-k+1)z^{n-k}P_k(z) + z^{n+1-k}P'_k(z)}{n+1} + \alpha_{n,n}\frac{(n-k)z^{n-k-1}P_k(z) + z^{n-k}P'_k(z)}{n}$$

$$R_n(z) = z^{n-k-1}P_k(z)\left[\frac{n-k+1}{n+1}z + \alpha_{n,n}\frac{n-k}{n}\right] + z^{n-k}P'_k(z)\left[\frac{z}{n+1} + \frac{\alpha_{n,n}}{n}\right]$$

Imponemos de nuevo (1.14), dado que $R_n(0) = 0$ para $n \geq k+2$, tenemos

$$R_n(z) = zR_{n-1}(z)\,, \quad n \geq k+2$$

esto es,

$$z^{n-k-1}P_k(z)\left[\frac{n-k+1}{n+1}z + \alpha_{n,n}\frac{n-k}{n}\right] + z^{n-k}P'_k(z)\left[\frac{z}{n+1} + \frac{\alpha_{n,n}}{n}\right]$$
$$= z^{n-k-1}P_k(z)\left[\frac{n-k}{n}z + \alpha_{n-1,n-1}\frac{n-k-1}{n-1}\right] + z^{n-k}P'_k(z)\left[\frac{z}{n} + \frac{\alpha_{n-1,n-1}}{n-1}\right],$$

$$z^{n-k-1}P_k(z)\left[\left(\frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k}{n}\right)z + \frac{n-k}{n}\alpha_{n,n} - \frac{n-k-1}{n-1}\right]$$
$$+z^{n-k}P'_k(z)\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)z + \frac{\alpha_{n,n}}{n} - \frac{\alpha_{n-1,n-1}}{n-1}\right] = 0,$$

$$P_k(z)\left[\left(\frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k}{n}\right)z + \frac{n-k}{n}\alpha_{n,n} - \frac{n-k-1}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}\right]$$
$$+ zP'_k(z)\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)z + \frac{\alpha_{n,n}}{n} - \frac{\alpha_{n-1,n-1}}{n-1}\right] = 0. \qquad (1.15)$$

Obsérvese que el término independiente,

$$P_k(0)\left[\frac{n-k}{n}\alpha_{n,n} - \frac{n-1-k}{n-1}\alpha_{n-1,n-1}\right] = 0\,, \quad n \geq k+2.$$

Si tenemos en cuenta que $P_k(0) \neq 0$, llegamos a la siguiente ecuación para $n \geq k+2$,

$$\frac{n-k}{n}\alpha_{n,n} - \frac{n-1-k}{n-1}\alpha_{n-1,n-1} = 0\,,$$

$$\frac{2}{k+2}\alpha_{k+2,k+2} - \frac{1}{k+1}\alpha_{k+1,k+1} = 0$$

$$\alpha_{k+2,k+2} - \frac{k+2}{k+1}\frac{1}{2}\alpha_{k+1,k+1} = 0$$

$$\alpha_{k+3,k+3} = \frac{k+3}{k+2}\frac{1}{3}\alpha_{k+2,k+2} = \frac{k+3}{k+1}\frac{1}{3!}\alpha_{k+1,k+1} = 0\,.$$

En general, para $n \geq k+2$ tenemos

$$\alpha_{n,n} = \frac{n}{k+1}\frac{1}{(n-k)!}\alpha_{k+1,k+1}\,.$$

Sustituyendo esta expresión en (1.15),

$$\begin{aligned} 0 = P_k(z) &\left[\left(\frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k}{n}\right) z\right] \\ &+ zP_k'(z)\left[-\frac{z}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{(k+1)}\frac{1}{(n-k)!} - \frac{1}{(k+1)}\frac{1}{(n-k-1)!}\right)\alpha_{k+1,k+1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = P_k(z) &\left[\left(\frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k}{n}\right) z\right] \\ &\qquad + zP_k'(z)\left[-\frac{z}{n(n+1)} + \frac{1}{(k+1)}\frac{1-n+k}{(n-k)!}\alpha_{k+1,k+1}\right], \end{aligned}$$

$$0 = \frac{k}{n(n+1)}P_k(z) - P_k'(z)\left[\frac{z}{n(n+1)} + \frac{1}{k+1}\frac{n-k-1}{(n-k)!}\alpha_{k+1,k+1}\right],$$

$$0 = kP_k(z) - zP_k'(z)\left[z + \frac{n(n+1)}{k+1}\frac{n-k-1}{(n-k)!}\alpha_{k+1,k+1}\right].$$

Si tenemos en cuenta que esta última ecuación se verifica $\forall n \geq k+2$, esto implica que

$$R_n = \frac{P_{n+1}'}{n+1}, \quad n \geq k+2.$$

Esto implica que la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es clásica, esto es, $P_n(z) = z^n$.

Por tanto, la única familia de Bernstein- Szegő que admite una compañera coherente es la asociada a la medida de Lebesgue.

CAPÍTULO V

Aproximación en Espacios de Sobolev

1. Polinomios de Laguerre-Sobolev

En el capítulo anterior hemos hablado de la noción de polinomio límite. Esta aparece en la literatura por primera vez en [16], donde se analiza el comportamiento de la mejor aproximación polinómica a la función $f(x)$ absolutamente continua y con derivada integrable respecto a la norma

$$\|f\|_1^2 = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx + \lambda \int_{-1}^{1} f'^2(x)dx$$

donde λ es cualquier número positivo. Las propiedades de la mejor aproximación son contrastadas con las de la mejor aproximación en la norma

$$\|f\|_2^2 = f^2(-1) + \int_{-1}^{1} f'^2(x)dx\,.$$

Nosotros vamos a hacer un estudio paralelo. Vamos a considerar el siguiente producto de Sobolev continuo

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_1 = &\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx + \int_0^\infty f'(x)g'(x)e^{-x}dx \\ &+\ldots+\int_0^\infty f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)e^{-x}dx + \lambda\int_0^\infty f^{(m+1)}(x)g^{(m+1)}(x)e^{-x}dx \end{aligned} \qquad (1.1)$$

donde λ es cualquier número positivo. Denotamos

$$\begin{aligned}&W_2^{m+1}\left[[0,\infty]);e^{-x}dx,\ldots,e^{-x}dx\right] \\ &:= \left\{f:[0,\infty)\to\mathbb{C} : \int_0^\infty |f^{(k)}(x)|^2e^{-x}dx < +\infty,\, 0\le k\le m+1\right\}. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Consideremos también el producto escalar

$$\langle f,g\rangle_2 = f(0)g(0) + \cdots + f^{(m)}(0)g^{(m)}(0) + \int_0^\infty f^{(m+1)}g^{(m+1)}e^{-x}dx\,. \qquad (1.3)$$

Vamos a enunciar el siguiente Teorema

TEOREMA 1.1. *Sea* $f \in W_2^{m+1}\left[[0,\infty]);e^{-x}dx,\ldots,e^{-x}dx\right]$. *Supongamos que* $n \ge 2m+1$. *Si* $q_{n,\lambda}$ *es la mejor aproximación polinómica de grado a lo más* n *a* f *en* (1.1) *entonces existe* $\lim_{\lambda\to\infty} q_{n,\lambda}$. *Si denotamos este polinomio límite por* q_n *entonces se cumple que* q_n *es la mejor aproximación polinómica a* f *respecto a* (1.3).

<u>Demostración</u>. La demostración de que existe $\lim_{\lambda\to\infty} q_{n,\lambda} = q_n$ la podemos hacer de forma análoga a como fue llevada a cabo en el capítulo anterior.

Vamos a probar la segunda afirmación del Teorema. Por definición de mejor aproximación se cumplen las siguientes condiciones de ortogonalidad para $f - q_{n,\lambda}$

$$\langle f - q_{n,\lambda}, x^k\rangle_1 = 0, \quad 0 \le k \le n. \tag{1.4}$$

Si dividimos por λ las ecuaciones anteriores en las que aparece λ y hacemos $\lambda \to \infty$ obtenemos para $f - q_n$ las condiciones de ortogonalidad siguientes, donde hemos impuesto en el enunciado del Teorema la condición $n \ge 2m+1$ para que el subíndice j pueda alcanzar el valor m.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)e^{-x}dx\,, \qquad (1.5)\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)xe^{-x}dx + \int_0^\infty (f - q_n)'e^{-x}dx\,,\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)x^2e^{-x}dx + 2\int_0^\infty (f - q_n)'xe^{-x}dx + 2\int_0^\infty (f - q_n)''e^{-x}dx\,,\\
&\vdots\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)x^ke^{-x}dx + k\int_0^\infty (f - q_n)'x^{k-1}e^{-x}dx + \cdots + k!\int_0^\infty (f - q_n)^{(k)}e^{-x}dx\,,\\
&\vdots\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)x^me^{-x}dx + m\int_0^\infty (f - q_n)'x^{m-1}e^{-x}dx + \cdots + m!\int_0^\infty (f - q_n)^{(m)}e^{-x}dx\,,\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)^{(m+1)}x^je^{-x}dx, \quad 0 \le j \le n-(m+1). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

También usaremos la notación siguiente

$$X = \Big((f - q_n)(0), (f - q_n)'(0), \ldots, (f - q_n)^{(m)}(0)\Big)^T$$

y vamos a demostrar que $X = (0, \ldots, 0)^T$. Este hecho, junto con (1.6) es suficiente para demostrar que q_n es la mejor aproximación polinómica, de grado menor o igual a n, a f respecto a (1.3). Vamos a probar que

$$X = (0, \ldots, 0)^T. \tag{1.7}$$

Tomamos (1.5) e integrando por partes obtenemos

$$\int_0^\infty (f-q_n)e^{-x}dx = (f-q_n)(0) + \int_0^\infty (f-q_n)'e^{-x}dx$$
$$= \cdots = (f-q_n)(0) + \ldots + (f-q_n)^{(m)}(0) + \int_0^\infty (f-q_n)^{(m+1)}e^{-x}dx\,.$$

Si usamos (1.6) para $j=0$ obtenemos

$$0 = (f-q_n)(0) + \ldots + (f-q_n)^{(m+1)}(0)\,.$$

Si expresamos esta última ecuación vectorialmente llegamos a

$$0 = (1,\ldots,1)X\,. \tag{1.8}$$

Consideremos

$$\int_0^\infty (f-q_n)xe^{-x}dx = \int_0^\infty (f-q_n)e^{-x}dx + \int_0^\infty (f-q_n)'xe^{-x}dx$$
$$= \cdots = \int_0^\infty (f-q_n)e^{-x}dx + \int_0^\infty (f-q_n)'e^{-x}dx$$
$$+ \ldots + \int_0^\infty (f-q_n)^{(m)}e^{-x}dx + \int_0^\infty (f-q_n)^{(m+1)}xe^{-x}dx\,.$$

Usando (1.6) para $j=1$ y la notación vectorial llegamos a

$$\int_0^\infty (f-q_n)xe^{-x}dx$$
$$= (1,\ldots,1)X + (0,1,\ldots,1)X + \cdots + (0,\ldots,0,1)X$$
$$= (1,2,3,\ldots,m+1)X\,.$$

En general para $1 \le j \le m$ se cumple

$$\int_0^\infty (f-q_n)x^je^{-x}dx = j\int_0^\infty (f-q_n)x^{j-1}e^{-x}dx + \int_0^\infty (f-q_n)'x^je^{-x}dx$$
$$= \cdots = j\left[\int_0^\infty (f-q_n)x^{j-1}e^{-x}dx + \cdots + \int_0^\infty (f-q_n)^{(m)}x^{(j-1)}e^{-x}dx\right]$$
$$+ \int_0^\infty (f-q_n)^{(m+1)}x^je^{-x}dx\,.$$

Si usamos (1.6), teniendo en cuenta que $m \le n-(m+1)$ llegamos a

$$\int_0^\infty (f-q_n)x^je^{-x}dx = j\int_0^\infty (f-q_n)x^{j-1}e^{-x}dx + \int_0^\infty (f-q_n)'x^je^{-x}dx$$
$$= \cdots = j\left[\int_0^\infty (f-q_n)x^{j-1}e^{-x}dx + \cdots + \int_0^\infty (f-q_n)^{(m)}x^{(j-1)}e^{-x}dx\right]\,.$$

De esta última ecuación y usando que

$$\int_0^\infty (f - q_n)e^{-x}dx = (1, \dots, 1)X$$

podemos concluir que existen $a_0^j, \dots, a_m^j \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{j!}\int_0^\infty (f - q_n)x^j e^{-x}dx = (a_0^j, \dots, a_m^j)X\,.$$

Además, vamos a destacar que

$$\begin{aligned}\frac{1}{j!}\int_0^\infty &(f - q_n)x^j e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{(j-1)!}\int_0^\infty x^{(j-1)}(f - q_n)e^{-x}dx + \frac{1}{j!}\int_0^\infty (f - q_n)' x^j e^{-x}dx\,.\end{aligned}$$

Expresando esta ecuación vectorialmente llegamos a la siguiente relación

$$(a_0^j, \dots, a_m^j) = (a_0^{j-1}, \dots, a_m^{j-1}) + (0, a_0^j, \dots, a_{m-1}^j),\ 1 \le j \le m \tag{1.9}$$

de donde de forma inmediata se desprende que $a_0^j = 1$, $1 \le j \le m$.

Vamos a reescribir de nuevo las condiciones de ortogonalidad, donde ahora la ecuación k-ésima la dividimos por $(k-1)!$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)e^{-x}dx\,,\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)xe^{-x}dx + \int_0^\infty (f - q_n)' e^{-x}dx\,,\\
0 &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (f - q_n)x^2 e^{-x}dx + \int_0^\infty (f - q_n)' xe^{-x}dx + \int_0^\infty (f - q_n)'' e^{-x}dx\,,\\
&\ \vdots\\
0 &= \frac{1}{k!}\int_0^\infty (f - q_n)x^k e^{-x}dx + \frac{1}{(k-1)!}\int_0^\infty (f - q_n)' x^{k-1} e^{-x}dx + \cdots + \int_0^\infty (f - q_n)^{(k)} e^{-x}dx\,,\\
0 &= \frac{1}{(k+1)!}\int_0^\infty (f - q_n)x^{k+1} e^{-x}dx + \frac{1}{k!}\int_0^\infty (f - q_n)' x^k e^{-x}dx + \cdots + \int_0^\infty (f - q_n)^{(k)} e^{-x}dx\,,\\
&\ \vdots\\
0 &= \frac{1}{m!}\int_0^\infty (f - q_n)x^m e^{-x}dx + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty (f - q_n)' x^{m-1} e^{-x}dx + \cdots + \int_0^\infty (f - q_n)^{(m)} e^{-x}dx\\
0 &= \int_0^\infty (f - q_n)^{(m+1)} x^j e^{-x}dx, \quad 0 \le j \le n - (m+1)\,.
\end{aligned}$$

Expresando este sistema de ecuaciones vectorialmente llegamos a

$$
\begin{aligned}
0 &= (1,1,1,\dots,1)X\,,\\
0 &= (1,2,3,\dots,m+1)X+(0,1,1,\dots,1)X\,,\\
0 &= (1,3,6,\dots,\frac{(m+1)(m+2)}{2})X+(0,1,2,\dots,m-1)X+(0,0,1,\dots,1)X\,,\\
&\vdots\\
0 &= (1,a_1^k,\dots,a_m^k)X+(0,1,a_1^{k-1},\dots,a_{m-1}^{k-1})X+\dots+(\underbrace{0,\dots,0}_{k},1,\dots,1)X\,,\\
0 &= (1,a_1^{k+1},1,\dots,a_m^{k+1})X+(0,1,a_1^{k},\dots,a_{m-1}^{k})X+\dots+(\underbrace{0,\dots,0}_{k+1},1,\dots,1)X\,,\\
&\vdots\\
0 &= (1,a_1^m,1,\dots,a_m^m)X+(0,1,a_1^{m-1},\dots,a_{m-1}^{m-1})X+\dots+(0,\dots,0,1)X\,.
\end{aligned}
$$

Este sistema puede ser descrito de la forma

$$
AX=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}
$$

donde $A=A_1+\dots+A_m$ y A_i es una matriz de tamaño $(m+1)\times(m+1)$.

Vamos a describir estas matrices

$$
A_1:=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \dots\\
1 & 2 & 3 & 4 & \dots\\
1 & 3 & 6 & 10 & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & a_1^k & a_2^k & a_3^k & \dots\\
1 & a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & a_3^{k+1} & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & a_1^m & a_2^m & a_3^m & \dots
\end{pmatrix},
A_2:=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 1 & 1 & 1 & \dots\\
0 & 1 & 2 & 3 & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 1 & a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \dots\\
0 & 1 & a_1^k & a_2^k & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 1 & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \dots
\end{pmatrix},
$$

$$
,\dots,A_{m+1}:=\begin{pmatrix}
0 & 0 & \vdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \vdots & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Debido a la estructura de estas matrices, si demostramos que la matriz A_1 es definida positiva, esto implicará que las matrices A_i para $i = 2, \ldots, m$ son semidefinidas positivas, de lo que podremos concluir que la matriz A_1 es definida positiva. De esto último y teniendo en cuenta que las matrices definidas positivas son invertibles concluimos que $X = (0, \ldots, 0)^T$.

Vamos a probar que A es una matriz simétrica. Sabemos que la primera fila es la transpuesta de la primera columna de esta matriz. Vamos a suponer por hipótesis de inducción que la fila k-ésima es la transpuesta de la columna k-ésima, esto es

$$(1, a_1^j, \ldots, a_m^j) = (1, a_j^1, \ldots, a_j^m)\,, 0 \leq j \leq k-1 \tag{1.10}$$

donde por definición $a_i^0 = 1$, para $i = 1, \ldots, m$. Vamos a probar que, en ese caso,

$$(1, a_1^k, \ldots, a_m^k) = (1, a_k^1, \ldots, a_k^m)\,.$$

Directamente de (1.10) se sigue que

$$(1, a_1^k, \ldots, a_k^k) = (1, a_k^1, \ldots, a_k^k)\,.$$

Además usando (1.9) se cumple, para $1 \leq j \leq m-k$,

$$\begin{aligned} a_{k+j}^k &= a_{k+j}^{k-1} + a_{k+j-1}^k\,, \\ a_k^{k+j} &= a_k^{k+j-1} + a_{k-1}^{k+j}\,. \end{aligned}$$

De (1.10) se cumple que $a_{k-1}^{k+j} = a_{k+j}^{k-1}$; por tanto

$$a_{k+j}^k - a_k^{k+j} = a_{k+j-1}^k - a_k^{k+j-1}\,.$$

Para $j = 1$ tenemos

$$a_{k+1}^k - a_k^{k+1} = a_k^k - a_k^k = 0\,.$$

De forma sucesiva vamos obteniendo que $a_{k+j}^k - a_k^{k+j} = 0$ para $j = 2, \ldots, m$.

Para ahora probar que A_1 es definida positiva, usamos de nuevo la relación (1.9). Hacemos operaciones elementales que consisten en restar sucesivamente a la fila k-ésima la fila $(k-1)$-ésima y a la columna k-ésima la columna $(k-1)$-ésima y, de esta forma, llegamos a la matriz identidad $I_{(m+1)\times(m+1)}$. Expresando esto matricialmente, existe P una matriz de tamaño $(m+1)\times(m+1)$ tal que

$$PA_1P^T = I_{(m+1)\times(m+1)}$$

lo que es suficiente para probar que A_1 es una matriz definida positiva. ∎

Si consideramos $f := x^{n+1}$, por el Teorema anterior sabemos que

$$P_{n+1}(x) := x^{n+1} - q_n(x)\,,\; n \geq 2m+1 \tag{1.11}$$

es el polinomio mónico ortogonal respecto al producto escalar

$$\langle f, g\rangle_2 = f(0)g(0) + \cdots + f^{(m)}(0)g^{(m)}(0) + \int_0^\infty f^{(m+1)}g^{(m+1)}e^{-x}dx\,.$$

Además, si usamos (1.6)

$$0 = \int_0^\infty P_{n+1}^{(m+1)}x^j e^{-x}dx,\; 0 \leq j \leq n-(m+1)$$

llegamos a que

$$P_{n+1}^{(m+1)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}L_{n-m}\,.$$

También se cumple que

$$\left(L_{n+1}^{-m-1}\right)^{(m+1)} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!}L_{n-m}\,.$$

Si ahora usamos

- $P_{n+1}^{(k)}(0) = 0$ para $0 \leq k \leq m$ (de las condiciones de ortogonalidad)
- $L_{n+1}^{-m-1} = \frac{(-1)^{m+1}(n-m)!}{(n+1)!}x^{m+1}L_{n-m-1}^{m+1}$.

obtenemos que

$$P_{n+1} = L_{n+1}^{-m-1}\,, n+1 \geq 2(m+1)\,.$$

Este resultado no contradice el obtenido en [36] donde se determina exactamente el producto escalar respecto del cual la sucesión de polinomios de Laguerre, $\{L_{n+1}^{-m-1}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal, ya que en este caso sólo tenemos la propiedad de ortogonalidad a partir de un momento. Sin embargo el resultado no es relevante porque tenemos perfectamente determinado para n suficientemente grande el polinomio límite. Vamos a enunciar el siguiente Teorema que aparece en [36].

TEOREMA 1.2. *Los polinomios mónicos de Laguerre* $\{L_n^{-(m+1)}\}_{n\geq 0}^{\infty}$ *forman una sucesión ortogonal respecto del producto escalar*

$$\langle f,g\rangle_{m+1} = \sum_{s=0}^{m}\sum_{j=0}^{s} B_{s,j}(m+1)\left[f^{(s)}(0)g^{(j)}(0) + f^{(j)}(0)g^{(s)}(0)\right] + \int_0^{\infty} f^{(m+1)}(x)g^{(m+1)}(x)e^{-x}dx$$

donde

$$B_{s,j}(m+1) := \begin{cases} \sum_{p=0}^{j}(-1)^{s+j}\binom{m-p}{s-p}\binom{m-p}{j-p} & \text{para } 0\leq j < s\leq m \\ \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{s}\binom{m-p}{s-p}^2 & \text{para } 0\leq j = s\leq m \end{cases}.$$

Para terminar vamos a incluir, en el caso que $m=0$, el siguiente Teorema

TEOREMA 1.3. *Sea* $f\in W_2^1\,[[0,\infty]);e^{-x}dx]$. *Supongamos que* $n\geq 1$. *Si denotamos por* $q_{n,\lambda}$ *la mejor aproximación polinómica de grado a lo más* n *a* f *en* (1.1) *y por* q_n *la mejor aproximación polinómica de grado a lo más* n *a* f *en* (1.3) *(estamos considerando* $m=0$*) entonces se cumple*

$$q_{n,\lambda}(x) - q_n(x) = \beta_n P_{n,\lambda}(x)$$

donde

$$\beta_n = \frac{\int_0^{\infty}(f-q_n)P_{n,\lambda}e^{-x}dx}{\langle P_{n,\lambda},P_{n,\lambda}\rangle_1}$$

y $\{P_{n,\lambda}\}_{n\geq 0}$ *es la sucesión de polinomios mónicos ortogonales respecto a* (1.1).

<u>DEMOSTRACIÓN</u>. Vamos a denotar

$$q_{n,\lambda} - q_n = r_n\,.$$

Teniendo en cuenta (1.4) y (1.5) se cumple

$$\int_0^{\infty} r_n(x)e^{-x}dx = 0\,.$$

Si tenemos en cuenta (1.6), integramos por partes, y usamos (1.7), para $0 \leq j \leq n-1$, se cumple

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty (f - q_n)' x^j e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty (f - q_n)(x^j - jx^{j-1}) e^{-x} dx . \end{aligned}$$

Si usamos

$$\int_0^\infty (f - q_n) e^{-x} dx = 0 ,$$

de forma recursiva obtenemos, para $0 \leq j \leq n-1$

$$\int_0^\infty (f - q_n) x^j e^{-x} dx = 0 .$$

Esto implica que para $1 \leq j \leq n-1$ se cumple

$$\langle f - q_n, x^j \rangle_1 = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1 .$$

Si además tenemos en cuenta (1.4), podemos concluir

$$\langle r_n, x^j \rangle_1 = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1 .$$

De esta última afirmación obtenemos que existe un $\beta_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$q_{n,\lambda} - q_n = \beta_n P_{n,\lambda} ,$$

donde

$$\beta_n = \frac{\langle r_n, P_{n,\lambda} \rangle_1}{\langle P_{n,\lambda}, P_{n,\lambda} \rangle_1}$$

y podemos calcular

$$\langle r_n, P_{n,\lambda} \rangle_1 = \langle f - q_n, P_{n,\lambda} \rangle_1 = \int_0^\infty (f - q_n) P_{n,\lambda} e^{-x} dx .$$

∎

Este resultado evidencia de forma explícita cómo difiere la mejor aproximación polinómica a f respecto a (1.1) de la mejor aproximación polinómica a f respecto a (1.3). Se sigue de lo anterior que cuando desarrollamos $q_{n,\lambda}$ y q_n en la base $\{P_{n,\lambda}\}_{n \geq 0}$, sólo van a diferir en el último coeficiente de Fourier.

En el caso particular que $f = x^{n+1}$, si usamos la notación (1.11) tenemos entonces que

$$P_{n+1} = P_{n+1,\lambda} + \beta_n P_{n,\lambda}$$

donde recordamos que $P_{n+1} = L_{n+1}^{-1}$, polinomio de Laguerre. Propiedades algebraicas, relación diferencial que verifican y estudio de ceros de los polinomios $\{P_{n,\lambda}\}_{n\geq 0}$, han sido estudiadas en [46, 66].

2. Condiciones de Sumabilidad en coeficientes de Fourier

En esta última sección queremos incluir un resultado sobre condiciones de sumabilidad de los coeficientes de Fourier de desarrollos de funciones en la base de los polinomios Clásicos. Este resultado, aunque parcial y aparentemente disconexo con el resto de los trabajos lo hemos incluido porque constituyó el punto de partida, a nivel personal, hacia los demás trabajos de investigación realizados. Este trabajo surgió como resultado del estudio del capítulo IX de [75] y del intento de trasponer los resultados sobre desarrollos de funciones en la base de los polinomios Clásicos al caso Sobolev.

2.1. Introducción. Es bien conocida la relación que existe entre los coeficientes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\, d\theta \tag{2.1}$$

y propiedades de derivabilidad e integrabilidad de funciones en varios espacios funcionales $\mathcal{F}$. Como ejemplo, y siguiendo la notación habitual,

$$\begin{array}{llcl}
\text{(i)} & f \in \mathcal{F} = \mathrm{L}_1[0,2\pi] & \Longleftarrow & \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty \\
\text{(ii)} & f \in \mathcal{F} = C^m[0,2\pi] & \Longrightarrow & |c_n| < \frac{1}{n^m} \\
\text{(iii)} & f \in \mathcal{F} = \mathrm{L}_2[0,2\pi] & \Longleftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \; .
\end{array}$$

Vamos a considerar las funciones f que pertenecen al espacio de Sobolev

$$W_2^m\,[[0,2\pi]; d\theta,\ldots,d\theta] = \left\{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C} : f \in C^{m-1}[0,2\pi],\ f^{(m)} \in \mathrm{L}_2[0,2\pi]\right\}$$

en el que definimos el producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,d\theta + \cdots + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m)}(\theta)\overline{g^{(m)}(\theta)}\,d\theta\,.$$

Este espacio de Sobolev ha sido estudiado en [17], donde el autor de este trabajo analiza el problema de encontrar una base del mismo. De hecho se demuestra que

TEOREMA 2.1. *En el espacio de Sobolev* W_2^m, $m \geq 1$, *la sucesión*

$$x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, 1, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots, \operatorname{sen} kx, \cos kx, \ldots$$

no es completa. Sin embargo podemos afirmar que la sucesión

$$x^{m}, x^{m-1}, \ldots, 1, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots, \operatorname{sen} kx, \cos kx, \ldots$$

sí es completa.

El siguiente Teorema que incluimos también lo podemos encontrar en [17], aunque enunciado usando la sucesión $1, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots, \operatorname{sen} kx, \cos kx, \ldots$. Nosotros lo vamos a interpretar como un resultado que caracteriza los elementos de tal espacio en términos de los coeficientes de Fourier (2.1)

TEOREMA 2.2. *Sea* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *una función* m *veces derivable tal que* $f(0) = f(2\pi), f'(0) = f'(2\pi), \ldots, f^{(m-1)}(0) = f^{(m-1)}(2\pi)$ *y* $f^{(m)} \in L_2[0, 2\pi]$.

$$f \in \mathcal{F} = W_2^m\,[[0, 2\pi]; d\theta, \ldots, d\theta] \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{2m}|c_n|^2 < \infty$$

donde c_n *vienen definidos por* (2.1).

DEMOSTRACIÓN. Para probar que la condición es necesaria vamos a considerar en primer lugar el caso $m = 1$ como muestra. Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una función tal que $f(0) = f(2\pi)$ y $f \in W_2^1\,[[0, 2\pi]; d\theta, d\theta]$. El conjunto $\{e^{-in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2[0, 2\pi]$. También podemos ver que $\left\{e^{-in\theta}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto ortonormal en el espacio $W_2^1\,[(0, 2\pi); d\theta, d\theta]$.

Vamos a considerar el desarrollo de f en ambas bases y a comparar los coeficientes de Fourier en cada una de ellas. Por definición

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{e^{in\theta}}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\overline{(e^{in\theta})'}\, d\theta$$

e integrando por partes obtenemos $d_n = \sqrt{1+n^2}c_n$. Si hacemos uso de la desigualdad de Bessel para $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2)\,|c_n|^2 < \infty$$

y concluímos esta parte de la demostración.

$\blacksquare$

Inspirados en este resultado, si consideramos funciones en determinados espacios de Sobolev, vamos a dar condiciones necesarias que verifican los coeficientes de Fourier del desarrollo de estas funciones con respecto a familias de polinomios clásicos. En general no hemos podido probar que estas condiciones sean suficientes ya que no se puede garantizar que los espacios funcionales que consideramos y en los que definimos un producto escalar sean espacios de Hilbert.

La idea principal que usamos va a ser la de comparar coeficientes de Fourier de una función dada, cuando desarrollamos esta función en espacios funcionales diferentes. Esta técnica puede ser aplicada a las familias de polinomios llamados Clásicos.

Consideremos la sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\geq 0}$, grado $p_n = n$, que son ortonormales con respecto a la función peso $w(x)$, esto es

$$\int_I p_n(x)p_m(x)w(x)\, dx = \delta_{n,m}$$

donde por I denotamos el soporte de $w(x)\, dx$. Esta sucesión de polinomios se denomina *Clásica* cuando $w(x)$ satisface una ecuación tipo Pearson, es decir, existen polinomios $\phi \not\equiv 0$, con grado $\phi \leq 2$, y ψ, con grado $\psi = 1$, tales que

$$(\phi w)' = \psi w\,. \tag{2.2}$$

p_n	ϕ	ψ	w	I	λ_n
H_n	1	$-2x$	e^{-x^2}	$\mathbb{R}$	$2n$
L_n^α	x	$\alpha+1-x$	$x^\alpha e^{-x}$	$[0,\infty)$	n
$P_n^{\alpha,\beta}$	$1-x^2$	$\beta-\alpha$ $-(\alpha+\beta+2)x$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$[-1,1]$	$n(n+\alpha+\beta+1)$

TABLA V.1

Esto es equivalente al hecho que $\{p_n\}_{n\geq 0}$ verifique una ecuación diferencial de Sturm-Liouville de segundo orden

$$\phi p_n'' + \psi p_n' + \lambda_n p_n = 0, \quad \lambda_n \neq 0, \quad n \geq 0 \tag{2.3}$$

Estas familias de polinomios han sido estudiadas en profundidad [42, 75]. Presentamos un esquema sumario para ellas (Tabla V.1), donde $H_n, L_n^\alpha, P_n^{\alpha,\beta}$ reciben el nombre de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi, respectivamente.

Estas sucesiones de polinomios, en cada caso, son base ortonormal del espacio de Hilbert $\mathrm{L}_{2,w}(I)$ asociado a la función peso $w(x)$ [33, 18].

Denotemos el espacio de Sobolev

$$\begin{aligned} &W_2^m\left[I; w(x)\,dx, \phi(x)w(x)\,dx, \dots, \phi^m w(x)\,dx\right] \\ &\qquad\qquad = \left\{f : I \to \mathbb{R}, f^{(j)} \in \mathrm{L}_{2,\phi^j w}(I), j = 0, \dots, m\right\} \end{aligned}$$

en el que definimos el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,dx + \cdots + \int_I f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)\phi^m(x)w(x)\,dx$$

Para esta familia de espacios de Sobolev se cumple el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3. *Sea $w(x)$ una función peso que verifica (2.2) y sea $\{p_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a esta función peso. Si*

$$f \in W_2^m\left[I; w(x)\,dx, \phi(x)w(x)\,dx, \dots, \phi^m w(x)\,dx\right]$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^m \tilde{c}_n^2 < \infty$$

donde λ_n *ha sido definido en* (2.3) *y*

$$\tilde{c}_n = \int_I f(x) p_n(x) w(x)\, dx. \tag{2.4}$$

De este resultado se sigue el siguiente Corolario

COROLARIO 2.1. *Teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de los* λ_n*, dados en la Tabla* V.1, *obtenemos las siguientes condiciones necesarias*

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^m \tilde{c}_n^2 < \infty$ *en el caso de los polinomios de Hermite;*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n^m \tilde{c}_n^2 < \infty$ *en el caso de los polinomios de Laguerre;*

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2m} \tilde{c}_n^2 < \infty$ *en el caso de los polinomios de Jacobi;*

2.2. Demostración de los Resultados. Si aplicamos la regla de Leibniz a la ecuación (2.3), se sigue

$$\phi \left(p_n^{(m)}\right)'' + (\phi' m + \psi) \left(p_n^{(m)}\right)' + \left(\lambda_n + m\psi' + \frac{m(m-1)}{2}\phi''\right) p_n^{(m)} = 0 \tag{2.5}$$

para la derivada m-ésima de (2.3) y usando (2.2) llegamos a

$$(\phi^{m+1} w)' = (\psi + \phi' m)\, \phi^m w\,. \tag{2.6}$$

Esto significa que la sucesión $\{p_n^{(m)}\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto a la función peso $\phi^m(x) w(x)$.

Multiplicando (2.5) por $\phi^m w$ y usando (2.6) obtenemos

$$\left(p_n^{(m+1)} \phi^{m+1} w\right)' = -\beta_{n,m+1} p_n^{(m)} \phi^m w \tag{2.7}$$

donde $\beta_{n,m+1} = \lambda_n + m\psi' + \frac{m(m-1)}{2}$.

Ahora, si consideramos

$$\langle p_k, p_j \rangle = \int_I p_k(x) p_j(x) w(x)\, dx + \cdots + \int_I p_k^{(m)}(x) p_j^{(m)}(x) \phi^m(x) w(x)\, dx$$

e integramos por partes, usando (2.7) obtenemos

$$\langle p_k, p_j \rangle = \delta_{k,j} \left(1 + \beta_{k,1} + \beta_{k,1}\beta_{k,2} + \cdots + \beta_{k,1}\beta_{k,2} \ldots \beta_{k,m}\right) .$$

Si denotamos por

$$\gamma_k = 1 + \beta_{k,1} + \beta_{k,1}\beta_{k,2} + \cdots + \beta_{k,1}\beta_{k,2} \ldots \beta_{k,m} ,$$

entonces la sucesión

$$\left\{ \frac{p_n^{(m)}}{\sqrt{\gamma_n}} \right\}_{n \geq 0} \tag{2.8}$$

es ortonormal en el espacio de Sobolev

$$W_2^m \left[I; w(x)\, dx, \phi(x)w(x)\, dx, \ldots, \phi^m(x)w(x)\, dx\right].$$

Si f es una función que pertenece a este espacio de Sobolev, podemos calcular los coeficientes de Fourier de f en el conjunto ortonormal (2.8)

$$\langle f, \frac{p_n}{\sqrt{\gamma_n}} \rangle = \int_I f(x) \frac{p_n(x)}{\sqrt{\gamma_n}} w(x)\, dx + \cdots + \int_I f^{(m)}(x) \frac{p_n^{(m)}(x)}{\sqrt{\gamma_n}} \phi^m(x) w(x)\, dx .$$

Si integramos por partes y usamos (2.7) obtenemos

$$\langle f, \frac{p_n}{\sqrt{\gamma_n}} \rangle = \sqrt{\gamma_n} \int_I f(x) p_n(x) w(x)\, dx .$$

La desigualdad de Bessel se cumple para estos coeficientes de Fourier y de este modo se sigue

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \frac{p_n}{\sqrt{\gamma_n}} \rangle^2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \tilde{c}_n^2 < \infty$$

donde $\tilde{c}_n$ vienen dados por (2.4).

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. Alfaro, G. López, and M. L. Rezola, *Some properties of zeros of Sobolev type orthogonal polynomials*, J. Comp. Appl. Math. **69** (1996), 171–179.

[2] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola, and A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 737–757.

[3] M. Alfaro, F. Marcellán, H. G. Meijer, and M. L. Rezola, *Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products*, J. Math. Anal. and Appl. **184** (1994), 360–381.

[4] M. Alfaro, F. Marcellán, A. Ronveaux, and M. L. Rezola, *Sobolev type orthogonal polynomials: the nondiagonal case*, J. Approx. Theory **83** (1995), 266–287.

[5] M. Alfaro, F. Marcellán, and M. L. Rezola, *Estimates for Jacobi–Sobolev type orthogonal polynomials.* (Remitido)

[6] A.I. Aptekarev, *Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices*, Mat. Sb. **125** (1984), no. 167, 231–258, English transl. in Math. USSR Sb. **53** (1986), 233-260.

[7] A.I. Aptekarev and E. M. Nikishin, *The scattering problem for a discrete Sturm–Liouville operator*, Math. USSR Sb. **49** (1984), 325–355.

[8] D. Barrios and G. López, *Ratio asymptotics for polynomials on arcs of the unit circle.* (Remitido)

[9] D. Barrios, G. López, and E. Torrano, *Location of zeros and asymptotics of polynomials satisfying three–term recurrence relations with complex coefficients*, Russian Acad. Sci. Sb. Math. **80** (1995), 309–333.

[10] H. Bavinck and H. G. Meijer, *Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives*, Appl. Anal. **33** (1989), 103–117.

[11] ———, *On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations*, Indag. Math. N.S. **1** (1990), 7–14.

[12] M. Bello Hernández and G. López Lagomasino, *Ratio and relative asymptotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle*, J. Approx. Theory. (En prensa)

[13] A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, and F. Marcellán, *Asymptotic Behavior of Sobolev Type Orthogonal Polynomials on a Rectifiable Jordan curve or arc.* (Remitido)

[14] K. J. Bruinsma, M. G. de Bruin, and H. G. Meijer, *Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs*, TWI Report 95-65, TU Delft, 1995.

[15] A. Cachafeiro and F. Marcellán, *Orthogonal polynomials of Sobolev type on the unit circle*, J. Approx. Theory **78** (1994), 127–146.

[16] E. A. Cohen, *Theoretical properties of best polynomial approximation in* $W^{1,2}[-1,1]$., SIAM J. Math. Anal. **2** (1971), 187-192.

[17] ———, *Trigonometric approximation in the Sobolev spaces* $W^{r,2}[-\pi,\pi]$ *with constant weights.*, SIAM J. Math. Anal. **2** (1971), 529–535.

[18] P. J. Davis, *Interpolation and Approximation theory*, Dover, New York, 1975.

[19] A. Durán and W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations*, Linear Algebra Appl. **219** (1995), 261–280.

[20] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn, *The density of Polynomials in a weighted Sobolev Space*, Rend. di Mat. (Roma), Serie VII, **10** (1990), 835–852.

[21] A. Foulquié Moreno, *A note on the Fourier Coefficients of Classic Orthogonal Polynomial expansion in Sobolev Spaces*, In Complex Methods in Approximation Theory, A. Martínez et al. Eds.(1997), 63–68.

[22] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán, *Strong Asymptotics on the support of the measure of orthogonality for Polynomials Orthogonal with respect to a Discrete Sobolev Inner Product*, Methods and Applications of Analysis. (En prensa)

[23] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán, and B. P. Osilenker, *Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer-Sobolev inner product.* (Remitido)

[24] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán, and K. Pan, *Asymptotic behavior of Sobolev type orthogonal polynomials on the unit circle.* (Remitido)

[25] A. Foulquié Moreno, F. Marcellán, F. Peherstorfer, and R. Steinbauer, *Strong Asymptotics on the support of the measure of orthogonality for Polynomials Orthogonal with respect to a Discrete Sobolev Inner Product on the unit circle*, Rendiconti Circolo Matematico Palermo. (En prensa)

[26] W. Gautschi and M. Zhang, *Computing orthogonal polynomials in Sobolev Spaces*, Numerische Math. **71** (1995), 159–184.

[27] Ya. L. Geronimus, *Orthogonal polynomials on a Circle and Interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.

[28] L. Golinski, P. Nevai, and W. Van Assche, *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, J. Approx. Theory **83** (1996), 392–422.

[29] A. A. Gončar, *On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions*, Math. USSR Sbornik **26** (1975), 555–575.

[30] A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett, and J. M. Sanz-Serna, *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. Approx. Theory **65** (1991), 151–175.

[31] V. A. Kaliaguine, *A note on the asymptotics of orthogonal polynomials on a complex arc: The case of a measure with a discrete part*, J. Approx. Theory **80** (1995), 138–145.

[32] V. A. Kaliaguine and R. Benzine, *Sur la formule asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur un contour plus une partie finie*, Bull. Soc. Math. Belg. **41** (1989), 29–46.

[33] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introduction to Real Analysis*, Dover, New York, 1970.

[34] P. Koosis, *Introduction to H_p Spaces*, London Math. Soc., Lecture Notes Series, vol. 40, Cambridge Univ. Press., 1980.

[35] P. Korovkine, *Sur des polynômes orthogonaux sur un contour*, Math. Sbornik **9** (1941), 469–484.

[36] K. H. Kwon and L. L. Littlejohn, *The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{-k}(x)\}$ for positive integers k*, Annals of Numerical Mathematics **2** (1995), 289–303.

[37] D. C. Lewis, *Polynomial least square approximations*, Amer. J. Math. **69** (1947), 273–278.

[38] X. Li and F. Marcellán, *On polynomials orthogonal with respect to a Sobolev inner product on the unit circle*, Pacific J. Math. **175** (1996), 127–146.

[39] G. López, *Asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying measures*, Constr. Approx. **5** (1989), 199–219.

[40] G. López, F. Marcellán, and W. Van Assche, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx. **11** (1995), 107–137.

[41] F. Marcellán, M. Alfaro, and M. L. Rezola, *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: Old and new directions*, J. Comp. App. Math. **48** (1993), 113–131.

[42] F. Marcellán, A. Branquinho, and J. Petronilho, *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), 283–303.

[43] F. Marcellán and P. Maroni, *Orthogonal polynomials on the unit circle and their derivatives*, Constr. Approx. **7** (1991), 341–348.

[44] F. Marcellán and L. Moral, *Sobolev type orthogonal polynomials on the unit circle.* (Remitido)

[45] F. Marcellán and B. P. Osilenker, *Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Legendre-Sobolev inner product*, Math. Notes. (En prensa).

[46] F. Marcellán, T. E. Pérez, M. A. Piñar, and A. Ronveaux, *General Sobolev orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. and Appl. **200** (1996), 614–634.

[47] F. Marcellán and J. Petronilho, *Orthogonal Polynomials and Coherent Pairs: the classical case*, Indag. Math. N. S., **6** (1995), 287–307.

[48] F. Marcellán and A. Ronveaux, *Orthogonal polynomials and Sobolev inner products. A bibliography*, Tech. report, Facultés Universitaires N. D. de la Paix, Namur. Belgium, 1996.

[49] F. Marcellán and W. Van Assche, *Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Theory **72** (1993), 193–209.

[50] A. Martínez Finkelshtein, T. E. Pérez, J. J. Moreno-Balcázar, and M. A. Piñar, *Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures*, J. Approx. Theory (En prensa).

[51] A. Máté and P. Nevai, *Remarks on E. A. Rakhmanov's paper "On the asymptotic of the ratio of orthogonal polynomials"*, J. Approx. Theory **36** (1982), 64–72.

[52] A. Máté, P. Nevai, and V. Totik, *Extensions of Szegő's theory of orthogonal polynomials II*, Constr. Approx. **3** (1987), 51–72.

[53] ______, *Extensions of Szegő's theory of orthogonal polynomials III*, Constr. Approx. **3** (1987), 73–96.

[54] H. G. Meijer, *A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space I. The non-discrete case*, Niew Archief voor Wiskunde **14** (1996), 93–113.

[55] ______, *Determination of all coherent pairs*, J. Approx. Theory. (En prensa)

[56] P. Nevai, *Orthogonal Polynomials*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 213, Providence, Rhode Island, 1979.

[57] E. M. Nikishin, *The discrete Sturm-Liouville operator and some problems of function theory*, J. Soviet Math. **35** (1987), 2679–2744.

[58] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[59] F. W. Olver, *Asymptotics and special functions*, Academic Press Inc., New York, 1974.

[60] F. Peherstorfer, *On Bernstein-Szegő orthogonal polynomials on several intervals*, SIAM J. Math. Anal. **21**, no. 2 (1990), 461–482.

[61] ———, *On Bernstein-Szegő orthogonal polynomials on several intervals II. Orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **64** (1991), 123–161.

[62] F. Peherstorfer and R. Steinbauer, *On polynomials orthogonal on several intervals*, Annals of Numerical Mathematics **2** (1995), 353–370.

[63] ———, *Orthogonal polynomials on several arcs of the unit circle I*, J. Approx. Theory **85** (1996), 140–184.

[64] ———, *Orthogonal polynomials on several arcs of the unit circle II. Orthogonal polynomials with periodic reflection coefficients*, J. Approx. Theory **87** (1996), 60–102.

[65] ———, *Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials on the unit circle with asymptotically periodic reflection coefficients*, J. Approx. Theory **88** (1997), 316–353.

[66] T. E. Pérez, *Polinomios ortogonales respecto a productos de Sobolev: el caso continuo*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1995.

[67] M. A. Piñar, *Polinomios ortogonales de tipo Sobolev. Aplicaciones*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1992.

[68] E. A. Rakhmanov, *On the Asymptotics of the ratio of Orthogonal Polynomials*, Math. USSR. Sbornik **32** (1977), 123–161.

[69] ———, *On the Asymptotics of the ratio of Orthogonal Polynomials II*, Math. USSR. Sbornik **46** (1983), 105–117.

[70] ———, *On Asymptotic Properties of Polynomials on the Real Axis*, Math. USSR. Sbornik **47** (1984), 155–193.

[71] ———, *On the Asymptotic Properties of Polynomials Orthogonal on the Circle with weights not satisfying Szegő's condition*, Math. USSR. Sbornik 58 (1987), 149–167.

[72] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Madrid, 1987, Third Ed.

[73] H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 43, Cambridge University Press, 1992.

[74] P. K. Suetin, *Fundamental properties of Polynomials orthogonal on a contour*, Russian Math. Surveys **21** (1966), 35–83.

[75] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Providence, Rhode Island, 1975, Fourth Ed.

[76] H. Widom, *Extremal Polynomials Associated with a System of Curves in the Complex Plane*, Advances in Mathematics **3** (1969), 123–161.